



UNIVERSITÀ DI PERUGIA
Dipartimento di Matematica e Informatica



SIMULAZIONE

Progetto McFit

Professore

Prof. Sergio Tasso

Studenti

Nicolò Posta

Tommaso Romani

Anno Accademico 2022-2023

Indice

1	Introduzione	3
2	Astrazione del Modello	3
3	Raccolta Dati	6
3.1	Convalida della Distribuzione Teorica	7
4	Analisi Matematica del Modello	8
4.1	Parametri Generali del Sistema	8
4.2	Calcolo dei Parametri Teorici del modello	9
4.2.1	Sala Pesi $m/m/30$	10
4.2.2	Sala Calisthenics $m/m/\infty$	10
4.2.3	Sala Cardio $m/m/15$	10
4.2.4	Spogliatoio $m/m/\infty$	11
5	Codifica in Arena	11
6	Simulazione	13
6.1	Analisi dei Risultati e Convalida	14
6.2	Grafici	15
7	Modello Reale	16
8	Conclusioni	17

1 Introduzione

Questo progetto consiste nell'analisi della palestra McFit di Perugia dal punto di vista della sua utilizzabilità a livello utente, in base ad eventuali code e attese che potrebbero verificarsi in un generico giorno operativo con relativi dati raccolti in loco, utilizzati per studiare e convalidare il nostro modello a livello prima teorico, e poi ad applicarli e convalidarli mediante un modello di simulazione, sviluppato in Arena Simulation.

L'ambiente verrà programmato per simulare le operazioni quotidiane della palestra e dei relativi iscritti. Perciò l'ambiente rispecchierà la conformazione dei locali e il processo attraverso il quale un iscritto entra nella palestra, sceglie il suo allenamento, si reca negli spogliatoi per cambiarsi e infine esce dalla palestra.

2 Astrazione del Modello

Per prima cosa è necessario definire un'astrazione del sistema da analizzare, in modo da poterla utilizzare per gli studi analitici a seguire. Questo passo è di cruciale importanza in quanto un livello di astrazione troppo specifico può rendere molto difficoltoso lo svolgimento dei successivi sviluppi e test del simulatore su arena, mentre un livello di astrazione insufficiente potrebbe portare ad ottenere dei risultati in contraddizione con i dati reali.

Il sistema analizzato può essere rappresentato tramite un modello ad eventi discreti di tipo aperto, con spazio degli stati discreto. Generalizzando le possibili attività in palestra risulta che una persona (iscritto) che si reca nella struttura può svolgere attività raggruppabili in 3 macro categorie:

- Allenamento di forza (sala pesi)
- Allenamento a corpo libero (calisthenics)
- Allenamento di resistenza (cardio)

Una volta finito l'allenamento un utente si reca agli spogliatoi per poi uscire dalla palestra.

Come primo modello abbiamo utilizzato i valori effettivi della palestra, che hanno

rivelato un adeguato numero di macchinari distribuiti nei vari ambienti affinché non venga generata alcuna fila, quindi abbiamo deciso di simularne una di dimensioni ridotte ma con la stessa affluenza che abbiamo testato cambiando le risorse delle varie sale. Questa nuova astrazione sarà il focus della prima parte del progetto, e in seguito torneremo ai valori effettivi della palestra McFit per confrontare i risultati.

Il sistema può quindi essere rappresentato con 4 nodi:

- **Sala Pesi:** Il numero di servienti per questa sala può essere schematizzato con 30 macchinari per l'allenamento che condividono una fila di attesa unica per semplificare l'astrazione del modello.
- **Sala Calisthenics:** Il numero di servienti per questa sala può essere schematizzato come ∞ in quanto per schematizzare il modello abbiamo pensato che l'allenamento a corpo libero non utilizzasse nessun tipo di macchinario esterno perciò gli utenti sarebbero sempre in grado di allenarsi all'interno di quella sala.
- **Sala Cardio:** Il numero di servienti per questa sala può essere schematizzato con 15 macchinari per attività aerobica che condividono una fila di attesa unica per migliorare semplificare del modello.
- **Spogliatoio:** Il numero di servienti negli spogliatoi può essere schematizzato come ∞ in quanto il numero degli armadietti è abbastanza per accogliere tutti gli arrivi nella palestra.

Risulta necessario conoscere i tempi di servizio, la distribuzione degli arrivi della palestra e il relativo utilizzo delle sale da parte degli utenti. Questi aspetti del modello sono trattati in maniera più approfondita nella sezione raccolta dati.

Per ottenere la probabilità di ricevere un Iscritto associata ad ogni sala e la probabilità del passaggio da una sala all'altra dopo aver terminato un determinato tipo di allenamento è stato necessario monitorare il funzionamento della struttura in un giorno lavorativo qualunque, qui di seguito riportiamo quanto ottenuto:

- *Probabilità* che un Iscritto, all'**ingresso** nella palestra, vada direttamente nella sala **Pesi** : **10%**
 - *Probabilità* che un Iscritto, dalla sala **Pesi**, vada nella sala **Calisthenics** : **5%**

- *Probabilità* che un Iscritto, dalla sala **Pesi**, vada nella sala **Cardio** : **15%**
- *Probabilità* che un Iscritto, dalla sala **Pesi**, vada nello **Spogliatoio** : **80%**
- *Probabilità* che un Iscritto, all'**ingresso** nella palestra, vada direttamente nella sala **Calisthenics** : **20%**
 - *Probabilità* che un Iscritto, dalla sala **Calisthenics**, vada nella sala **Pesi** : **15%**
 - *Probabilità* che un Iscritto, dalla sala **Calisthenics**, vada nella sala **Cardio** : **15%**
 - *Probabilità* che un Iscritto, dalla sala **Calisthenics**, vada nello **Spogliatoio** : **70%**
- *Probabilità* che un Iscritto, all'**ingresso** nella palestra, vada direttamente nella sala **Cardio** : **70%**
 - *Probabilità* che un Iscritto, dalla sala **Cardio**, vada nella sala **Pesi** : **80%**
 - *Probabilità* che un Iscritto, dalla sala **Cardio**, vada nella sala **Calisthenics** : **15%**
 - *Probabilità* che un Iscritto, dalla sala **Cardio**, vada nello **Spogliatoio** : **5%**

Il sistema può quindi essere rappresentato dal seguente diagramma:

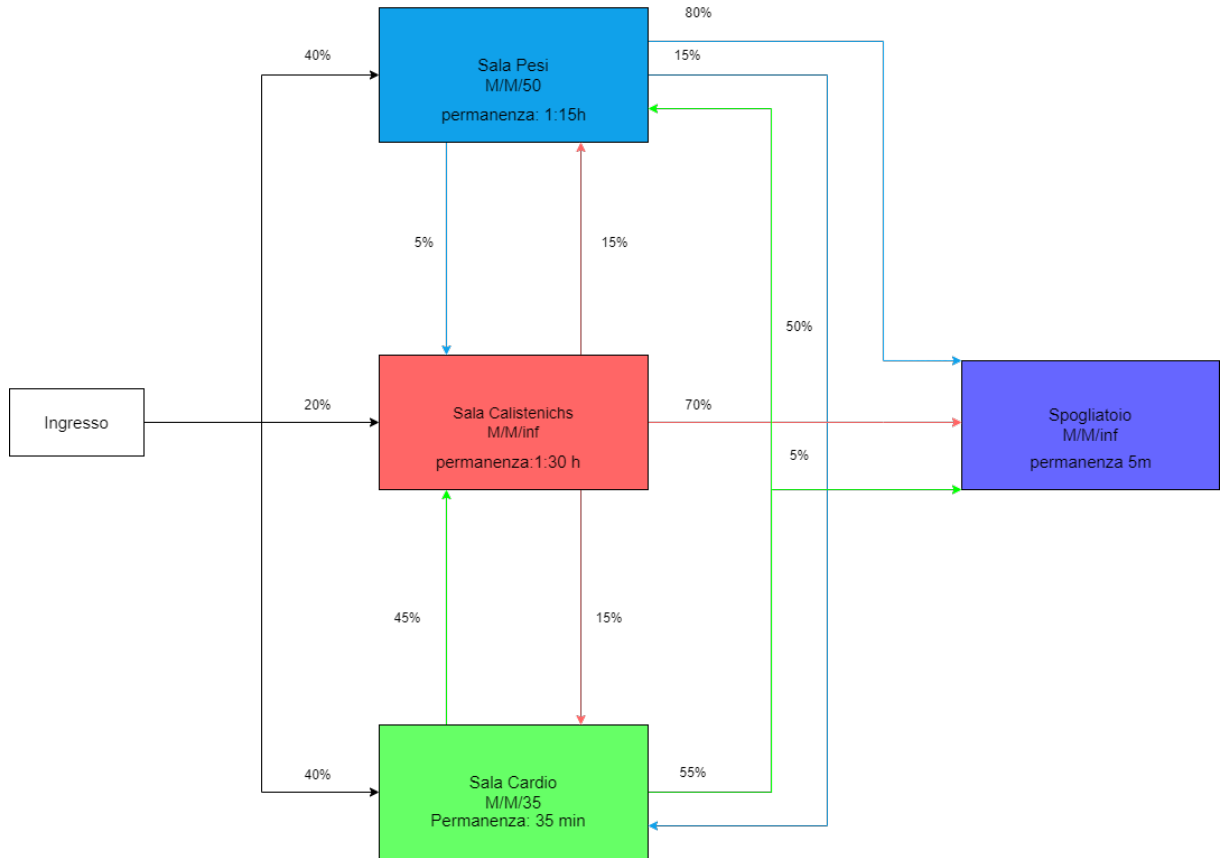


Figura 1: Diagramma astrazione McFit

3 Raccolta Dati

Per raccogliere i dati abbiamo deciso di monitorare inizialmente l'afflusso di iscritti della palestra durante una giornata di apertura. La palestra fa orario continuato a partire dalle **7:00** alle **23:00**, da una prima osservazione è risultato che il maggior numero di iscritti vi si reca nell'intervallo che va dalle **16:00** fino alle ore **20:00**. Perciò abbiamo deciso di raccogliere i dati relativi a questo arco temporale (4 ore) in quanto il sistema viene maggiormente utilizzato.

Le 4 ore sono state suddivise in intervalli da 15 minuti l'uno, e qui di seguito è riportato un breve riassunto relativo alle frequenze osservate:

- Numero totale degli iscritti entrati nella palestra: **88**
- Numero totale intervalli: **16**
- Numero minimo di frequenze osservate in un intervallo: **0**

- Numero massimo di frequenze osservate in un intervallo: **14**

3.1 Convalida della Distribuzione Teorica

A questo punto, è necessario determinare la Distribuzione Teorica corrispondente all'arrivo degli iscritti in palestra. Per fare ciò, è necessario trovare un'ipotetica distribuzione ed effettuarne la relativa convalida. Qui di seguito sono riportati gli arrivi per ogni intervallo registrato:

Lower Bound	Upper Bound	f_i
16:00	16:15	0
16:15	16:30	2
16:30	16:45	1
16:45	17:00	3
17:00	17:15	6
17:15	17:30	8
17:30	17:45	11
17:45	18:00	14
18:00	18:15	12
18:15	18:30	11
18:30	18:45	8
18:45	19:00	5
19:00	19:15	4
19:15	19:30	2
19:30	19:45	1
19:45	20:00	0

Dalla tabella possiamo evincere che:

- Dalle **16:00** alle **17:30** gli arrivi tendono a crescere
- Dalle **17:45** alle **18:00** abbiamo il picco massimo di arrivi
- Dalle **18:00** alle **20:00** gli arrivi tendono a diminuire

Successivamente a questa prima analisi si è scelto di passare alla scelta di un'ipotetica distribuzione e alla relativa convalida. Per riassumere brevemente i risultati ottenuti: si è scelto di utilizzare una *Distribuzione di Poisson* che è stata convalidata utilizzando la tecnica del **Goodness of Fit**. Questo è stato possibile in quanto nei calcoli

effettuati si è notato che la media e varianza dei dati coincidevano andando così a confermare la nostra ipotesi che si trattasse di una distribuzione di Poisson.

Nel grafico qui di seguito sono riportati i dati relativi alle frequenze di cui è stato tracciato il grafico insieme alla corrispettiva *Distribuzione Teorica*:

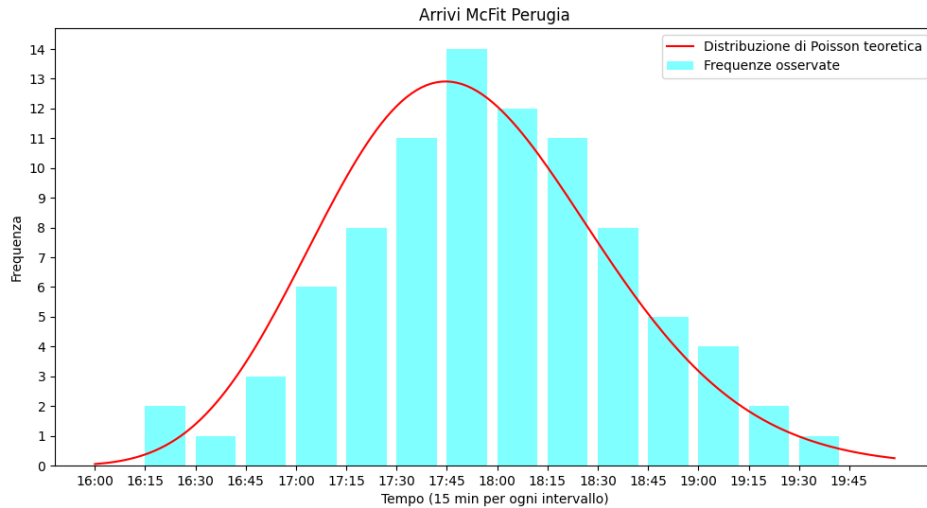


Figura 2: Grafico distribuzione arrivi

4 Analisi Matematica del Modello

4.1 Parametri Generali del Sistema

Dalla fase di raccolta dati è stato possibile calcolare i Parametri Generali del Sistema.

Il numero medio di persone al minuto che arrivano nel sistema è circa 0,36 (uno ogni 2,7 *min* \rightarrow uno ogni 163 *secondi*), infatti nelle 4 ore prese in esame, sono arrivati 88 iscritti.

I tempi di servizio variano a seconda dell'allenamento effettuato e sono riportati qui di seguito:

Sala	Tempo di Servizio Medio	Servienti	modello di coda
Pesi	75 minuti	30	$m/m/30$
Calisthenics	90 minuti	∞	$m/m/\infty$
Cardio	35 minuti	15	$m/m/15$
Spogliatoio	5 minuti	∞	$m/m/\infty$

4.2 Calcolo dei Parametri Teorici del modello

Dalla struttura del modello si può dedurre che si tratta di un sistema a **reti di Jackson**: la classe dei modelli a rete di code di **Jackson** è formata da reti aperte, con centri di **servizio esponenziali**, **arrivi Poissoniani** e **topologia probabilistica** arbitraria indipendente dallo stato della rete. Questo perché vi sono definite delle probabilità per cui un iscritto può passare ad un altro nodo dopo aver usufruito di un altro. Ad esempio gli iscritti hanno una probabilità del 15% di usufruire della **Sala Calisthenics** dopo aver usufruito della **Sala Pesi**.

Per calcolare i parametri dei vari nodi è necessario definire la *routing table* delle probabilità in quanto la formula da utilizzare per calcolare il parametro λ , di ogni nodo, è la seguente:

$$\lambda_i = \gamma_i \sum_{j=1}^M \lambda_j p_{ji}$$

dove p_{ij} è la *probabilità di andare dal nodo j al nodo i* e γ_i è il tasso di arrivo dall'esterno al nodo i .

La **Routing Table** (o *tabella delle probabilità*) del nostro modello è la seguente:

p_{ij}	Pesi	Calisthenics	Cardio	Spogliatoio
Ingresso	40%	20%	40%	-
Pesi	-	5%	15%	80%
Calisthenics	15%	-	15%	70%
Cardio	50%	45%	-	5%
Spogliatoio	-	-	-	-

Il parametro generale λ per gli arrivi nella palestra è di circa $0,368 \text{ min}^{-1}$.

Qui di seguito sono riportati i **Parametri Teorici**, calcolati dalle osservazioni, per ogni nodo del sistema.

4.2.1 Sala Pesi $m/m/30$

Metrica	Valore
Tempo medio di arrivo λ	$0,283 \text{ min}^{-1}$
Tempo medio di servizio T_s	75 min
Tempo medio di interarrivo μ	$0,013 \text{ min}^{-1}$
Intensità del traffico di sistema ρ	$0,709$
Numero medio di utenti nel sistema N	$21,4$
Numero medio di utenti in coda W	$0,12$
Tempo medio di risposta R	75 min
Tempo medio atteso in coda T_w	$0,435 \text{ min}$

4.2.2 Sala Calisthenics $m/m/\infty$

Metrica	Valore
Tempo medio di arrivo λ	$0,185 \text{ min}^{-1}$
Tempo medio di servizio T_s	90 min
Tempo medio di interarrivo μ	$0,011 \text{ min}^{-1}$
Intensità del traffico di sistema ρ	$16,699$
Numero medio di utenti nel sistema N	$16,699$
Tempo medio di risposta R	90 min

4.2.3 Sala Cardio $m/m/15$

Metrica	Valore
Tempo medio di arrivo λ	$0,217 \text{ min}^{-1}$
Tempo medio di servizio T_s	35 min
Tempo medio di interarrivo μ	$0,028 \text{ min}^{-1}$
Intensità del traffico di sistema ρ	$0,507$
Numero medio di utenti nel sistema N	$7,62$
Numero medio di utenti in coda W	$0,013$
Tempo medio di risposta R	$35,06 \text{ min}$
Tempo medio atteso in coda T_w	$0,06 \text{ min}$

4.2.4 Spogliatoio $m/m/\infty$

Metrica	Valore
Tempo medio di arrivo λ	$0,367 \text{ min}^{-1}$
Tempo medio di servizio T_s	5 min
Tempo medio di interarrivo μ	$0,2 \text{ min}^{-1}$
Intensità del traffico di sistema ρ	1,838
Numero medio di utenti nel sistema N	1,838
Tempo medio di risposta R	5 min

5 Codifica in Arena

Per la codifica del modello abbiamo optato per l'utilizzo del software Arena Simulation Software in quanto, seppur non essendo uno strumento open-source, offre una licenza gratuita per gli studenti e risulta essere uno strumento molto potente e intuitivo da usare, anche grazie alla sua interfaccia di tipo *drag and drop*.

Nel nostro caso abbiamo modellato la rete nel modo seguente;

- **Modulo Create (Ingresso):** Modulo che genera l'arrivo degli utenti seguendo la distribuzione specificata nei suoi parametri:
 - **Type:** Expression
 - **Expression:** POIS(2,72)
 - **Units:** minutes
 - **Entities per arrival:** 1
 - **Max arrivals:** Infinite
- **Modulo Decide:** Permette agli iscritti di dislocarsi tra le varie sale con le probabilità già elencate nella routing table:
 - **Type:** N-way by Chance
 - **Percentage:** 40, 20, else
- **Modulo Process (Pesi):** rappresenta la sala pesi della nostra rete, e i suoi parametri sono stati impostati come segue:
 - **Type:** Standard
 - **Action:** Seize Delay Release

- **Resources:** macchinari pesi (30)
- **Dealy Type:** Expression
- **Units:** Minutes
- **Allocation:** Value Added
- **Expression:** EXPO(75)
- **Modulo Decide:** Definisce il comportamento degli iscritti una volta usciti dalla sala pesi con le probabilità già elencate nella routing table:
 - **Type:** N-way by Chance
 - **Percentage:** 5, 45, else
- **Modulo Process (Calisthenics):** rappresenta la sala calisthenics della nostra rete, e i suoi parametri sono stati impostati come segue:
 - **Type:** Standard
 - **Action:** Delay
 - **Dealy Type:** Expression
 - **Units:** Minutes
 - **Allocation:** Value Added
 - **Expression:** EXPO(90)
- **Modulo Decide:** Definisce il comportamento degli iscritti una volta usciti dalla sala Calisthenics con le probabilità già elencate nella routing table:
 - **Type:** N-way by Chance
 - **Percentage:** 15, 15, else
- **Modulo Process (Cardio):** rappresenta la sala cardio della nostra rete, e i suoi parametri sono stati impostati come segue:
 - **Type:** Standard
 - **Action:** Seize Delay Release
 - **Resources:** macchinari cardio (15)
 - **Dealy Type:** Expression
 - **Units:** Minutes

- **Allocation:** Value Added
- **Expression:** EXPO(35)
- **Modulo Decide:** Definisce il comportamento degli iscritti una volta usciti dalla sala Cardio con le probabilità già elencate nella routing table:
 - **Type:** N-way by Chance
 - **Percentage:** 15, 5, else
- **Modulo Process (Spogliatoi):** rappresenta gli Spogliatoi della nostra rete, e i suoi parametri sono stati impostati come segue:
 - **Type:** Standard
 - **Action:** Delay
 - **Dealy Type:** Expression
 - **Units:** Minutes
 - **Allocation:** Value Added
 - **Expression:** EXPO(5)
- **Modulo Dispose (Uscita):** nodo finale per l'uscita dalla palestra

6 Simulazione

Una volta completata la codifica del modello, abbiamo selezionato i parametri di configurazione per seguire il modello di convalida basato sul *Metodo delle Prove Ripetute*:

- *Number of Replications:* **100**
- *Warmup Period:* **60** - *Time Units:* **Minutes** (necessario per stabilizzare il simulatore)
- *Replication Lenght:* **1** - *Time Units:* **Days**
- *Hours per Day:* **5**
- *Base Time Units:* **Minutes**

Con questa configurazione possiamo simulare le 4 ore pomeridiane di apertura della palestra che abbiamo monitorato nella fase iniziale, per diversi giorni di apertura.

6.1 Analisi dei Risultati e Convalida

Per quando riguarda la **Convalida**, il software Arena restituisce mediante il parametro *Half Width* un range per la convalida dei risultati con una confidenza del 95%. Questo significa che, dato un parametro di valore x , il range di confidenza per la convalida sarà dato dall'intervallo $[x - half_width, x + half_width]$. Nel caso in cui si voglia portare il livello di confidenza al 90% si può semplicemente applicare l'inversa della seguente formula, facendo riferimento ai valori dell'apposita tabella per la *Distribuzione Cumulativa Normale*:

$$\bar{x} \pm \mu_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

dove n è il numero di osservazioni e $\mu_{\frac{\alpha}{2}}$ è letto dalla tavola della distribuzione normale. Per trovare l'intervallo al 90% calcoliamo prima s che è uguale a

$$s = \frac{1}{1.96} \cdot \sqrt{100} \cdot half_width(95\%) = y$$

si può ora calcolare il nuovo *Half Width*:

$$half_width(90\%) = 1.645 \cdot \frac{y}{\sqrt{100}}$$

Nelle tabelle successive verranno riportati entrambi i valori di confidenza per avere un resoconto più completo.

- **System** indica il numero di utenti processati in media dal sistema.

Metrica	Media
Number Out	85
Waiting Time Tempo medio di attesa di un utente nel sistema T_s	0,269
Total Time Tempo medio speso da un utente nel sistema	78,778

- **Sala Pesi**

Metrica	<i>Simulato</i>	Half Width 95%	<i>Teorico</i>	Half Width 90%
T_w (Average Waiting Time)	0,743	0,32	0,435	0,268
W (Average N. of Clients Waiting)	0,308	0,14	0,123	0,117
ρ (Resource Utilization)	0,7101	0,02	0,709	0,0167

- Sala Cardio

Metrica	<i>Simulato</i>	Half Width 95%	<i>Teorico</i>	Half Width 90%
T_w (Average Waiting Time)	0,165	0,09	0,060	0,075
W (Average N. of Clients Waiting)	0,048	0,03	0,013	0,025
ρ (Resource Utilization)	0,597	0,02	0,507	0,0167

6.2 Grafici

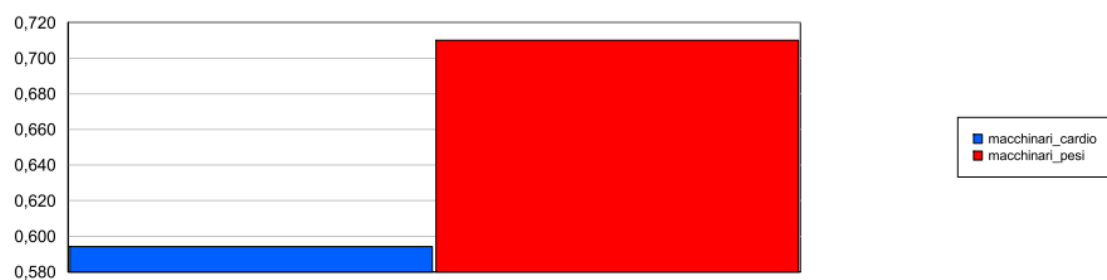


Figura 3: Grafico Utilizzo delle risorse

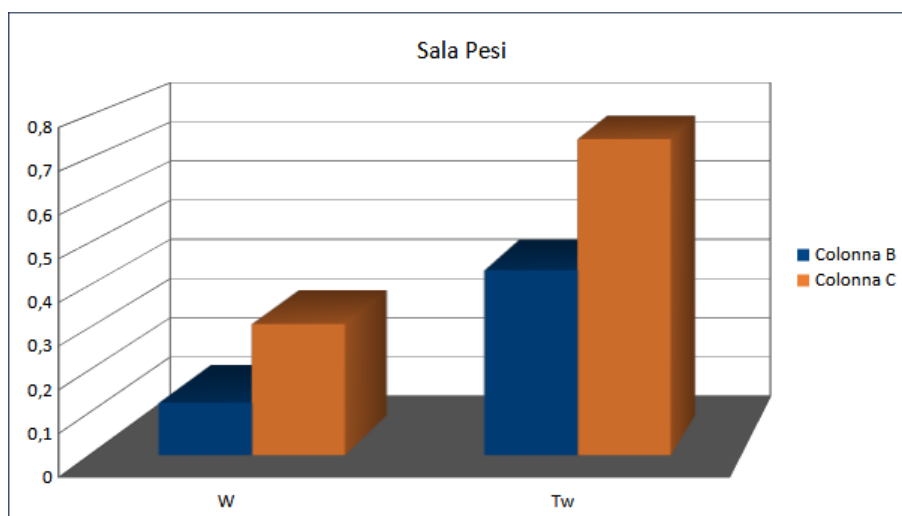


Figura 4: Grafico Sala Pesi Teorico Vs Simulato

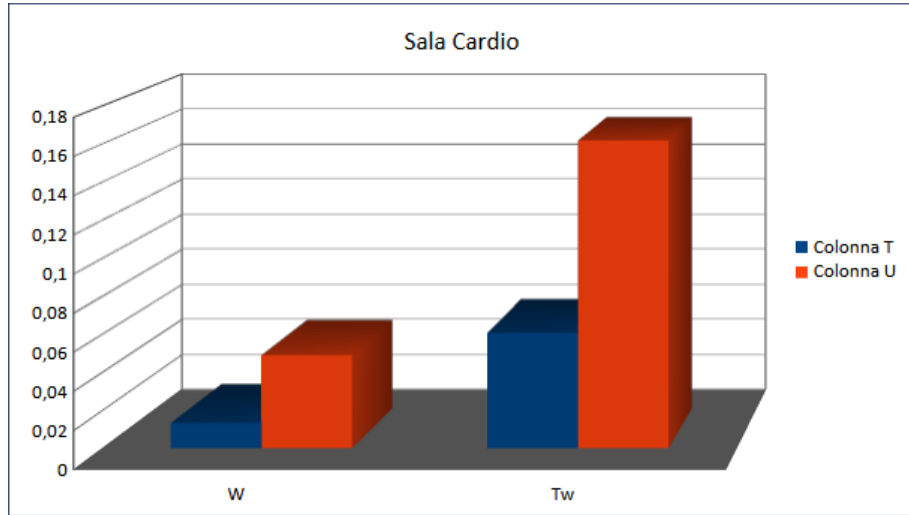


Figura 5: Grafico Sala Cardio Teorico Vs Simulato

7 Modello Reale

Come si vede dal modello appena analizzato se la palestra, a pari affluenza, dovesse presentare un numero di macchinari ridotto di 20 unità (caso analizzato fino ad ora) si andrebbero a formare delle code che potrebbero creare, nelle ore di punta, dei disservizi o comunque essere un fastidio per gli utenti.

Andando ad analizzare la palestra con le dimensioni effettive, quindi 50 servienti per la sala pesi e 35 per la sala cardio, risulta che anche nelle ore di traffico più intenso non si vanno a creare code in nessuna sala della palestra, rendendo la struttura più che adeguata, in particolare, avremo i seguenti parametri:

Sala Pesi $m/m/50$

Metrica	<i>Simulato</i>	Half Width 95%	<i>Teorico</i>	Half Width 90%
T_w (Average Waiting Time)	0	0	0.0001	0
W (Average N. of Clients Waiting)	0	0	0,00002	0
ρ (Resource Utilization)	0,428	0,01	0,	0,00839

Sala cardio $m/m/35$

Metrica	<i>Simulato</i>	Half Width 95%	<i>Teorico</i>	Half Width 90%
T_w (Average Waiting Time)	0	0	0.00008	0
W (Average N. of Clients Waiting)	0	0	0,0006	0
ρ (Resource Utilization)	0,2554	0,01	0,3258	0,00839

Dalla simulazione con arena si vede chiaramente che non si formano code, cosa che è in linea con i parametri teorici riportati qui sopra.

8 Conclusioni

Per concludere, è stato dimostrato come è possibile utilizzare la teoria della simulazione per analizzare un caso di studio reale che nel nostro caso presenta già una configurazione ottima. Tuttavia, abbiamo mostrato quelle che potrebbero essere le variazioni di performance se si avesse una palestra con una minor quantità di attrezzatura a disposizione, e che la quale comunque potrebbe funzionare correttamente dato che il tempo medio di attesa è inferiore al minuto.