Definition

Sistema inerziale
Equazione di Newton come equazione differenziale
Principio di determinismo laplaciano

Definition

Spazio degli stati e variabili dinamiche

Definition

Teorema dell'energia cinetica

Un sistema di riferimento si dice inerziale se rispetto ad esso un punto non soggetto a forze si muove di **moto rettilineo uniforme**

$$m\vec{a} = \vec{F} \to \ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$$

$\vec{x} = \vec{x}(t)$ sol dell'equazione di newton se l'equazione vale in un certo intervallo di t

---

Ogni soluzione dell'equazione di Newton a $\vec{F}$ fix è univocamente determinata dalle coordinate iniziali

$$\vec{x}(0) = \vec{x_0} \quad \vec{v}(0) = \vec{v_0}$$

Allora è un problema di Cauchy

Ogni soluzione è individuata da una coppia $(\vec{x_0}, \vec{v_0})$ allora consideriamo lo spazio prodotto cartesiano $I = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$
Fix $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$ il teorema di Esistenza e unicità garantisce l'esistenza di una soluzione unica dell'equazione di Newton che parte al tempo t_0 da $(\vec{x_0}, \vec{v_0}) \in I$ almeno in un intorno di t_0
Le quantità di interesse fisico dette variabili dinamiche sono funzioni:

$$f : I \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(\vec{x}, \vec{v}, t)$$

Le equazioni di Newton naturali in I diventano

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v} \qquad m\dot{\vec{v}} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$$

e per N punti materiali lo spazio delle fasi è $\mathbf{R}^{3N} \times \mathbf{R}^{3N}$ Il sistema delle N equazioni di secondo ordine diventa un sistema di un unica equazione di secondo grado in $X = (\vec{x_1}....\vec{x_N}) \in \mathbf{R}^{3N}$ detto spazio delle configurazioni

---

Dato un punto materiale soggetto a forza generica $\vec{F}$, definiamo l'energia cinetica $T = \frac{1}{2}mv^2$.
Allora lungo ogni soluzione $\vec{x} = \vec{x}(t)$ dell'equazione di Newton si ha

$$\dot{T} = \vec{F}\vec{v}$$

o equivalentemente

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\vec{v}dt$$

con $\vec{F}\vec{v}$ potenza della forza

e $\int \vec{F}\vec{v}dt$ lavoro della forza

Definition

Teorema energia cinetica:
Caso forza posizionale

Definition

Forza conservativa

Definition

Teorema di conservazione dell'energia

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ allora l'integrale dipende da $\vec{x} = \vec{x}(t)$ solo attraverso la traiettoria in $(t_0, t_1) \quad \gamma$ e non dalla legge oraria

Abbiamo quindi un integrale curvilineo della forma differenziale:

$\vec{F}(\vec{x})d\vec{x} = F_x(\vec{x})dx + F_y(\vec{y})dy + F_z(\vec{z})dz$

Allora

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_\gamma \vec{F}(\vec{x})d\vec{x}$$

Forza che ammette potenziale cioè esiste una funzione scalare

$$V = V(\vec{x}) \quad tc \quad \vec{F} = -gradV$$

cioè $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$
Analogamente si può dire che la forma differenziale è esatta cioè
$\vec{F}(\vec{x})d\vec{x} = -dV$ (lavoro infinitesimo)

In generale $F_x,\ F_y,\ F_z$ sarebbero funzioni indipendenti di $\vec{x}$ ma così richiediamo che siano derivate parziali della stessa funzione e quindi per Schwarz siccome $\vec{F}$ ammette potenziale valgono:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0$$

Cioè il campo $\vec{F}(\vec{x})$ deve essere irrotazionale cioè $rot(\vec{F}) = 0$.

Per un punto materiale soggetto a forze posizionali conservative $\vec{F}(\vec{x})$ tc
$\vec{F} = -gradV$, lungo ogni soluzione $\vec{x} = \vec{x}(t)$ dell'equazione di Newton si ha

$$\dot{E} = 0$$

Dove

$$E := T + V$$

Energia del sistema

Ha lo stesso valore per ogni punto in una stessa orbita nello spazio delle fasi corrispondente ad una soluzione dell'equazione di Newton

Definition

Proprietà di simmetria e leggi di conservazione

Definition

Problema a N corpi

Definition

Teorema equazioni cardinali della dinamica

Prop 1 Se V invariante per traslazione lungo un asse $\frac{\partial V}{\partial x_k} = 0$ allora $\vec{p}$ lungo quell'asse è costante del moto

Prop 2 Se V invariante per rotazioni attorno ad un asse alllora la componente di $\vec{L}$ lungo quell'asse è costante del moto

Prop 3 (CNS Conservazione energia) Se V simmetrico per traslazioni temporali allora E=T+V costante del moto

Sistema a N punti materiali, ognuno con soluzione $\vec{x_k}(t)$ che soddisfa
$m_k\vec{a_k} = \vec{F_k}$ equivalenti a un sistema di 2N equazioni

$$\dot{\vec{x_k}} = \vec{p_k}/m_k \quad \dot{\vec{p_k}} = \vec{F_k}$$

Definiamo $\vec{p} = \sum_k \vec{p_k} = \sum_k m_k\vec{v_k} \quad \vec{L} = \sum_k \vec{L_k} = \sum_k \vec{x_k} \times \vec{p_k}$
Allora dal sistema otteniamo

$$\dot{\vec{p}} = \vec{R} = \sum_k \vec{F_k} \quad \dot{\vec{L}} = \vec{M} = \sum_k \vec{M_k} = \sum_k \vec{x_k} \times \vec{F_k}$$

Definiamo forze di tipo classico: forze interne a 2 corpi che rispettanzo azione e reazione e sono centrali:

$$\vec{F_k} = \vec{F_k}^{int} + \vec{F_k}^{ext}, \qquad \vec{F_k}^{int} = \textstyle\sum_{k\neq j} \vec{F_{kj}} \text{ tc } \vec{F_{kj}} = -\vec{F_{jk}}$$
$$\vec{F_{kj}} = f_{kj}(r_{kj})\frac{\vec{x_k}-\vec{x_j}}{r_{kj}} \quad (f_{kj} = -f_{jk}, \quad r_{kj} = ||\vec{x_k} - \vec{x_j}||)$$

Lungo le soluzioni del sistema di equazioni di Newton per N punti con forze di tipo classico si hanno relazioni (I e II equazioni canoniche)

$$\dot{\vec{p}} = \vec{R}^{ext} = \sum_k \vec{F_k}^{ext}$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{ext}$$

Riscrivibili in termini del CM:

$$m\vec{a}_{CM} = \vec{R}^{ext} \qquad m = \sum_k m_k \qquad \vec{a}_{CM} = \ddot{\vec{x}}_{CM} \quad m\vec{x}_{CM} = \sum_k m_k\vec{x_k}$$

Corollario[CN Condizioni di Equilibrio]
Sistema in equilibrio ($\vec{a}_{CM} = 0, \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = 0$) $\Leftrightarrow \vec{R}^{ext} = 0 \quad \vec{M}^{ext} = 0$

Definition

Teorema potenziale forze interne

Definition

Problema a 2 corpi

Definition

Punto vincolato

Per forze interne di tipo classico il lavoro elementare è un differenziale esatto

$$\sum_k \vec{F_k}^{int} d\vec{x_k} = -dV^{int}$$

Dove

$$V^{int} = \frac{1}{2} \sum_{1\leq k,j\leq N}^{k\neq j} V_{kj}(r_{kj})$$

con V_{kj} tc $f_{kj} = -\frac{dV_{kj}}{dr_{kj}}$

No forze esterne, allora $\vec{R}^{ext} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$

$$m_1\ddot{\vec{x_1}} = \vec{F}_{12}(\vec{x_1}, \vec{x_2}), \quad m_2\ddot{\vec{x_2}} = \vec{F}_{21}(\vec{x_1}, \vec{x_2}), \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Vogliamo il moto dei 2 pti rispetto al sdr del CM e il moto relativo cioè
$(\vec{x_1}, \vec{x_2}) \to (\vec{r}, \vec{x}_{CM})$ con $r = \vec{x_1} - \vec{x_2} \quad m\vec{x}_{CM} = m_1\vec{x_1} + m_2\vec{x_2}$
Teor [Problema a 2 corpi]
Per sistema a 2 corpi soggetto solo a forze interne che soddisfano azione e reazione si ha

$$\ddot{\vec{x}}_{CM} = 0 \quad \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}(\vec{r})$$

con $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

Oss[Significato massa ridotta]
Sistema non inerziale allora forze apparenti, massa ridotta per avere forma inerziale

Punto vincolato a muoversi su linea o superficie liscia (No impedimenti per spostamenti lungo la superficie cioè $\vec{F}^v$ perpendicolare alla superficie)
Abbiamo fix solo la direzione di $\vec{F}^v$ ma non l'intensità allora il numero di incognite rimane 3.
Se z=f(x,y) abbiamo 1) Esistenza di $\vec{F}^v$ segue dall'aver postulato validità equazioni di Newton. 2) $\vec{F}^v$ non è noto a priori ma è determinato dal movimento cioè dai dati iniziali
Per moto vincolato postuliamo quindi $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}^v$.
Per det eq pura proiettiamo su sp tangente alla sup/linea e risolviamo $\vec{x}(t)$, ricaviamo $\vec{a}(t)$ e quindi $\vec{F}$ da cui $\vec{F}^v = m\vec{a} - \vec{F}$ (**Principio di D'Alembert**)
Basra scrivere la lagrangiana L in termini di coordinate libere e fare le derivate secondo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1...n$$

con n numero di GDL

Definition

Rappresentazione parametrica locale

Definition

Linee e vettori coordinati

Definition

Movimenti su carta locale

Una superficie in $\mathbf{R}^3$ viene definita attraverso un eq in forma implicita.

In generale del tipo $f(\vec{x}) = 0$, questa rappresentazione è globale cioè descrive tutta la superficie. Questo impone un vincolo sulle coordinate: in gen 2 libere su un aperto di $\mathbf{R}^2$ e l'altra determinata, allora nozione di rappresentazione parametrica locale o carta locale.

Si ha una carta locale quando è assegnata una funzione

$$F : U \to \mathbf{R}^3 \quad \vec{x} = F(q) \quad q = (q_1, q_2)$$

dove U aperto $U \subset \mathbf{R}^2$
Con abuso di notazione chiamiamo F con $\vec{x} = \vec{x}(q)$, la rappresentazione $\vec{x}$ è detta formula di immersione.
Per descrivere parametricamente una superficie si deve avere un insieme di carte locali (Atlante)

Def [Linee coordinate] $\forall q \in U$ Esiste unico $P \in M$ superficie
Allora $\forall$ linea $\subset U$ corrisponde linea $\subset M$
Linea corrisp a $q_1 = cost$ o $q_2 = cost$ è detta linea coordinata

---

Def [Vettori coordinati] Dato $P \in M$ di coord $q = (q_1, q_2)$ nella carta $\vec{x}(q)$ sono detti vettori coord i vettori $\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$ spiccati da P e tangenti alle linee coordinate .
Questi sottendono il piano Tg alla varietà M nel pto P $T_P M$

Per un adeguata definizione di carta locale richiediamo $\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$ LI (Allora matrice Jacobiana $\frac{\partial \vec{x}_l}{\partial q_j}$ ha rango max).
Facile dim che LI di vett coordinati comporta che, introdotta la matrice

$g_{ik} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k}$ si ha la $det(g_{ik}) \neq 0$

g_{ik} definisce la metrica naturale (prod scalare) sulla varietà M

Un movimento $\vec{x}(t)$ è per definizione una funzione che ad ogni $t \in I \subset \mathbf{R}$ aperto associa un pto $P \in \mathbf{R}^3$
Fix la carta locale mediante la funzione di immersione $\vec{x}(q)$ per assegnare il movimento basta assegnare q(t) e avremo $\vec{x}(t) = \vec{x}(q(t))$. Allora

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q} \dot{q} = \sum_i \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Se il pto mobile passa per $P \in M$ allora $\vec{v}$ giace in $T_P M$ perchè cl di $\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$

Inoltre se il moto è espresso nella carta da q(t) allora le componenti di $\vec{v}$ sulla base dei vettori coordinati sono le derivate $\dot{q}(t)$
Analogamente per l'accelerazione otteniamo $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i a^i \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$

Definition

Formula del Binomio Lagrangiano

Definition

Equazioni di Lagrange per un punto

Definition

Spazio ambiente e carta, invarianza delle coordinate di Lagrange
Spazio degli Stati

Vale

$$\vec{a}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial v^2/2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial v^2/2}{\partial q_i}$$

Equivalentemente in termini di T

$$\vec{a}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

Su una superficie rappresentata localmente dalla carta $\vec{x} = \vec{x}(q)$ si ammette che valga l'equazione di Newton-D'Alembert $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}^v$. Come ottenere l'equazione pura senza $\vec{F}^v$? Proiettiamo sui vettori coord $\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$ che sono Tg alla sup

$$\vec{F}^v \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i = 1...n \qquad m\vec{a}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} = \vec{F}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \quad \forall i = 1...n$$

Da $\vec{F} = -gradV \rightarrow \vec{F}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \Rightarrow \vec{F}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$ Allora le equazioni di Newton sulle linee coordinate diventano

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad \forall i = 1...n$$

Teorema
Consideriamo un punto libero o su una sup liscia la cui pos sia rappresentata da una carta locale $\vec{x}(q)$. Allora i movimenti q(t) sulla carta corrispondenti alle sol dell'equazione di Newton-D'Alembert $m\ddot{\vec{x}} = -gradV + \vec{F}^v$ sono le soluzioni delle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \forall i = 1...n$$

Con $L = L(q, \dot{q})$ Lagrangiana definita L=T-V

Le eq di Lagrange e l'eq di Newton vivono in sp diversi: le eq di Newton in $\mathbf{R}^3$ e quelle di Lagrange nella carta delle coordinate q
Quando risolte q=q(t) allora $\vec{x}(t) = \vec{x}(q(t))$ ed eventualmente $\vec{F}^v(t) = m\ddot{\vec{x}} - \vec{F}(\vec{x}(t))$
Se si sceglie una diversa carta con coordinate $q^{'} = (q_1^{'}...q_n^{'})$ le equazioni del moto avranno la stessa forma di lagrange con coord $q^{'}$ invece di q

---

Per un punto libero oltre allo sp delle configurazioni $\mathbf{R}^3$ consideriamo lo spazio degli stati $(\vec{x}, \vec{v}) \in \mathbf{R}^6$
Qui le variabili dinamiche sono $f : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}$
Se un punto è vincolato alla superficie 2D $M \subset \mathbf{R}^3$ allora M spazio delle configurazioni e lo spazio degli stati è TM o fibrato di M def da $(\vec{x}, \vec{v}) : \vec{x} \in M, \quad \vec{v} \in T_{\vec{x}}M$
$L : TM \rightarrow \mathbf{R}$
Fix una carta locale $\vec{x}(q)$ per M, avendo fix $\vec{x} \in M$ sul piano Tg $T_{\vec{x}}M$ viene assegnata automaticamente la base $\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$ allora ogni $\vec{v} \in T_{\vec{x}}M$ è individuato da una coppia $(q, \dot{q}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$
L quindi è intrinsecamente definito su TM e quando scegliamo una carta per M essa è rappresentata analiticamente da una funzione $L = L(q, \dot{q})$.
Le equazioni di Lagrange possono essere espresse più in gen usando $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$, introduciamo la forza generalizzata Q: $Q_i = \vec{F}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$
Allora le eq di Lagrange: $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$. Il significato fisico di Q si capisce considerando il lavoro elementare di F $\delta W = \vec{F}d\vec{x} = Qdq$

Definition

Equazioni di Lagrange per punto vincolato a superficie mobile o trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

Definition

Equazioni di Lagrange per N punti

Definition

Condizione di perfezione del vincolo per N punti

$\vec{x} = \vec{x}(q,t) \in \mathbf{R}^3 \quad q = (q_1 ... q_n)$

n=1 Per ogni t fix $\vec{x}(q,t)$ è la funz di immersione di una linea ben def, quindi $\forall t$ si ha una diversa linea
$\vec{x}(q,t)$ famiglia di linee parametrizzate in t

n=2 famiglia di superfici parametrizzate in t

n=3 $\vec{x}(q,t)$ descrive situa molto diversa: cambiamento di variabili dip dal tempo.
Per es una situa in cui un pto P è in coord q relative a un sdr il cui moto rispetto al sdr assoluto è assegnato (per es rotazione)

La condizione di vincolo liscio è $\vec{F}^v$ perpendicolare alla sup. Per $\vec{x}(q,t)$ abbiamo $\vec{v} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$
Oss che $\forall t \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \in T_{\vec{x}}M$. Infatti la $\vec{v}$ ha una pt tg e una trasversa legata al trascinamento della sup. Allora possiamo ancora esprimere la condizione del vincolo liscio come $\vec{F}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} = 0$.
Di conseguenza valgono ancora le formule del binomio lagrangiano perchè valgono ancora le eq di Lagrange. Unica differenza:
$T = \frac{1}{2}mv^2 = \sum_{ik} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k + \sum_i b_i\dot{q}_i + c$ con coeff $a_{ik} = \frac{m}{2}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \quad b_i = \frac{m}{2}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \quad c = \frac{m}{2}||\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}||^2$
Oss: $det(a_{ik}) \neq 0 \Rightarrow$ gli n vettori coord sono LI

N punti: $\vec{x_1} ... \vec{x_N} \in \mathbf{R}^3 \to X = (\vec{x_1}, ..., \vec{x_N}) \in \mathbf{R}^{3N}$
Se il sistema è vincolato allora X giace in una superficie $M \subset \mathbf{R}^{3N}$ con dimensione $n < 3N$ cioè deve essere possibile esprimere localmente $\vec{x_1} ... \vec{x_N}$ per ogni pto mediante le coordinate $q = (q_1, ..., q_n)$ attraverso X(q).
Se il sistema non è vincolato allora n=3N e X(q) esprime le posizioni di tutti i pti mediante coord arbitrarie.
NB: q non appartengono a nessuno degli N pti singolarmente ma appartengono al sistema.
Per descrivere il moto del sist è importante stabilire eq per gli n coord ricavate dalle eq valide per gli N pti del sist. Assegnata la varietà M e una carta X(q) sono def le linee coord e i vett coord $\frac{\partial X}{\partial q_i}$ e quindi $T_X M$. L'unione di tutti i $T_X M$ cioè l'insieme di (X, V) $X \in M \quad V \in T_X M$ è lo spazio degli stati.
Moto del sist: $m_1\vec{a_1} = \vec{F_1} + \vec{F_1}^v, ..., m_N\vec{a_N} = \vec{F_N} + \vec{F_N}^v$. def $F = (\vec{F_1}, ..., \vec{F_N}) \quad F^v = (\vec{F_1}^v, ..., \vec{F_N}^v) \quad P = (m_1\vec{v_1}, ..., m_N\vec{v_N})$
Ammetteremo che l'idealità del vincolo si esprima: $F^v\frac{\partial X}{\partial q_i} = 0$. Allora le eq di Newton in $\mathbf{R}^{3N}$: $\dot{P} = F + F^v$
Per la perfezione del vincolo otteniamo n eq pure: $\dot{P}\frac{\partial X}{\partial q_i} = F\frac{\partial X}{\partial q_i}$.
Vale ancora la formula del binomio lagrangiano: $\dot{\vec{p_1}}\frac{\partial \vec{x_1}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} ... \dot{\vec{p_N}}\frac{\partial \vec{x_N}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_N}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_N}{\partial q_i}$ e $\dot{P}\frac{\partial X}{\partial q_i} = \dot{\vec{p_1}}\frac{\partial \vec{x_1}}{\partial q_i} + ... + \dot{\vec{p_N}}\frac{\partial \vec{x_N}}{\partial q_i}$
Allora $\dot{P}\frac{\partial X}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}$. Infine se esiste $V(\vec{x_1}, ..., \vec{x_N})$ tc $F_j = -grad_j V = -\frac{\partial V}{\partial x_j}$ allora $F\frac{\partial X}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$ allora valgono le eq di lagrange.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad L = T - V$$

La F^v deve essere perpendicolare alla superficie delle configurazioni.
Se consideriamo il lavoro totale delle condizioni vincolari, gli spostamenti infinitesimi compatibili coi vincoli sono

$$dX = \frac{\partial X}{\partial q}dq (= \sum_i F^v \frac{\partial X}{\partial q_i}dq_i)$$

Allora il lavoro totale elementare dei vincoli è

$$\delta W = F^v \frac{\partial X}{\partial q}dq$$

Quindi la condizione di perfezione dei vincoli è equivalente al fatto che

$$\delta W = 0$$

Definition

Teorema dell'energia generalizzata o di Jacobi

Definition

Punti di Equilibrio

Da eq di Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \Rightarrow \dot{q}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}$ ma $q = q(t) \quad L = L(q(t), \dot{q}(t))$
Allora $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) = \frac{dL}{dt}$
Otteniamo conservazione $\dot{\varepsilon} = 0$ con $\varepsilon = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L$
Def $p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ momento coniugato alla q. Allora $\varepsilon = p\dot{q} - L$
Ulteriore gen se considero il caso $L = L(t)$ per $\vec{x} = \vec{x}(q,t)$ per esempio vincoli mobili o sdr non inerziali
Allora $\frac{d}{dt}L = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

Teorema di Jacobi
Per sist Lagrangiano con $L(q,\dot{q},t)$ in carta assegnata $\vec{x}(q,t) \quad \forall q(t)$ soddisfacente le eq di Lagrange: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ si ha:
$\dot{\varepsilon} = 0$ con $\varepsilon = p\dot{q} - L \quad (p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}})$. In particolare se la L dipende esplicitamente da t allora $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ allora ε cost del moto.

Oss Nella deduzione non usiamo L=T-V ma solo eq Lagrange. Nel caso L=T-V in gen $T = T_1 + T_2 + T_3$ con $T_2 = \sum_{ik} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \quad T_1 = \sum_i b_i\dot{q}_i \quad T_0 = c$ tc $det(a_{ik}) \neq 0$
$p\dot{q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\dot{q} = 2T_2 + T_1$ per teorema di Eulero. Allora per L=T-V abbiamo $\varepsilon = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - V)$. Quindi vale:
Prop: Nei sist naturali L=T-V dove $T = T_2 + T_1 + T_0$, $\varepsilon = p\dot{q} - L$ assume forma $\varepsilon = T_2 - V^*$ con $V^* = V - T_0$
In partic per funz di immersione indip da t $\vec{x_k} = \vec{x_k}(q)$ si ha $T = T_2$ allora l'energia generalizzata coincide con quella meccanica $\varepsilon = E := T - V$

Trattazione significativa per caso particolare di sist naturale indipendente da t:

$$L(q,\dot{q}) = \sum_{ik} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k - V(q)$$

Cerchiamo se esiste sol particolare di equilibrio $q(t) = q^*$ (quindi $\dot{q} = \ddot{q} = 0$)

Proposizione
Per un sist Lagrangiano naturale indip da t i pti q^* di equilibrio sono pti stazionari di V cioè

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}(q^*) = 0 \quad \forall i = 1...n$$