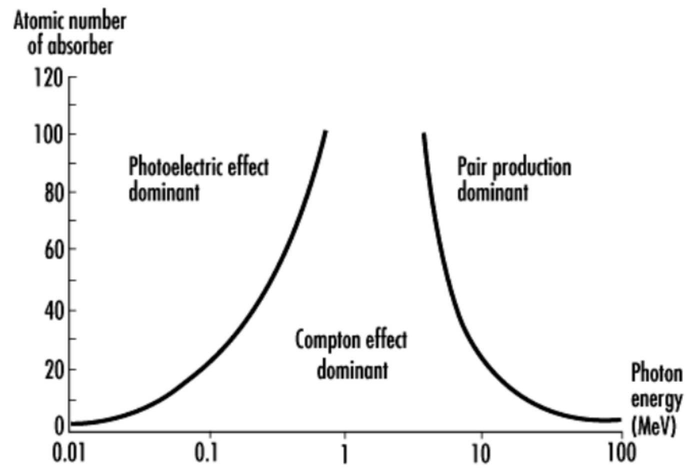
Esercizi Istituzioni di fisica nucleare e subnucleare

Tommaso Di Luciano 933841

January 2023

1 Esercizio 14.8

Indicare quale dei tre tipi principali di interazione fotoni-materia è dominante nelle seguenti situazioni:
a) Fotone di 1 MeV in alluminio
b) Fotone di 100 keV in idrogeno
c) Fotone di 100 keV in ferro
d) Fotone di 10 MeV in carbonio
e) Fotone di 10 MeV in piombo



a) Per fotone a energia di 1 MeV e Z=13 mi trovo nella zona in cui domina l'effetto compton.
b) Per fotone a energia di 100 keV e Z=1 mi trovo nella zona in cui domina l'effetto compton.
c) Per fotone a energia di 100 keV e Z=26 mi trovo a cavallo tra la zona in cui domina l'effetto compton e quella in cui domina l'effetto fotoelettrico.
d) Per fotone a energia di 10 MeV e Z=6 mi trovo nella zona in cui domina l'effetto compton.
e) Per fotone a energia di 10 MeV e Z=82 mi trovo nella zona in cui domina l'effetto di pair production.

2 Esercizio 3.2

L'abbondanza naturale di 235U è dello 0.7% di ^{238}U.
Assumendo che i processi di nucleosintesi producano approssimativamente le stesse quantità di ^{235}U e ^{238}U, quanto è "vecchio" l'uranio presente sulla terra?
Si ricordino i dati delle due catene della radioattività naturale:
– A=4n+2, $^{238}U, \tau_{1/2} = 4.5 \times 10^9 yr$
– A=4n+3, $^{235}U, \tau_{1/2} = 7.15 \times 10^8 yr$

Assumere che i processi di nucleosintesi producano approssimativamente le stesse quantità di ^{235}U e ^{238}U significa assumere $\frac{N_{235}(0)}{N_{238}(0)} \simeq 1$ mentre ad oggi abbiamo $\frac{N_{235}(0)}{N_{238}(0)} = 0.007$
Il decadimento di una sostanza segue la legge $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ con $\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{ln2}{\tau_{1/2}}$
Allora significa imporre $0.007 = \frac{N_{235}(0)}{N_{238}(0)} \frac{e^{\frac{-tln2}{\tau^{235}_{1/2}}}}{e^{\frac{-tln2}{\tau^{238}_{1/2}}}} = e^{-tln2(\frac{1}{\tau^{235}_{1/2}} - \frac{1}{\tau^{238}_{1/2}})} \Rightarrow t = (\frac{1}{\tau^{238}_{1/2}} - \frac{1}{\tau^{235}_{1/2}})^{-1} \frac{ln(0.007)}{ln2} \simeq 6.1 \times 10^9 yr$

3 Esercizio 5.3

1. Usando le sezioni d'urto in tabella, ed assumendo che, se si usa acqua come moderatore, un neutrone abbia una probabilità del 47 % di essere catturato in acqua, calcolare la frazione di ^{235}U richiesta per avere un reattore critico.
2. Oggi la frazione di ^{235}U è dello 0.7 %, ma in passato era maggiore: calcolare quando era sufficiente perché l'U naturale potesse essere critico.

$\sigma[b]$	^{235}U	^{238}U
σ_{tot}	703	12
σ_{fiss}	589	1.7×10^{-5}
$\sigma_{n\gamma}$	99	2.7

1) Perchè il reattore sia critico devo imporre $\nu q = 1$ con ν numero medio di neutroni prodotto da fissione, nel caso dell'uranio il valore medio è $\nu = 2.4\frac{neutroni}{fissione}$, e q probabilità che avvenga fissione.

$$q = (1 - P_{cattura})\frac{\bar{\sigma}_{fis}}{\bar{\sigma}_{fis} + \bar{\sigma}_{n\gamma}}$$

$(1 - P_{cattura}) = 0.53$
Chiamando f la frazione di ^{235}U:
$\bar{\sigma}_{fis} = 589f + (1-f)1.7 \times 10^{-5} \simeq 589f + 1.7 \times 10^{-5}$
$\bar{\sigma}_{n\gamma} = 99f + (1-f)2.7 = 96.3f + 2.7$
Allora $\frac{\bar{\sigma}_{fis}}{\bar{\sigma}_{fis}+\bar{\sigma}_{n\gamma}} = \frac{589f+1.7\times10^{-5}}{589f+1.7\times10^{-5}+96.3f+2.7} \simeq \frac{589f}{685.3f+2.7}$
Quindi $1 = \nu q = 2.4 \times 0.53 \times \frac{589f}{685.3f+2.7} \Rightarrow 0.79(685.3f + 2.7) = 589f \Rightarrow 47.613f = 2.133$
$\Rightarrow f = 0.0447 \simeq 0.045 = 4.5\%$

2) Usiamo l'inversione temporale.
$f(t) = 0.045 = f(0)\frac{exp[-\frac{log2}{\tau_{1/2,235}}t]}{exp[-\frac{log2}{\tau_{1/2,238}}t]}$ con f(0)=0.007
Allora $log\frac{f(t)}{f(0)} = -tlog2[\frac{1}{\tau_{1/2,235}} - \frac{1}{\tau_{1/2,238}}]$ $\quad \tau_{1/2,235} = 7 \times 10^8 yr \quad \tau_{1/2,238} = 4.5 \times 10^9 yr$
Allora $t = 2.25 \times 10^9 yr$

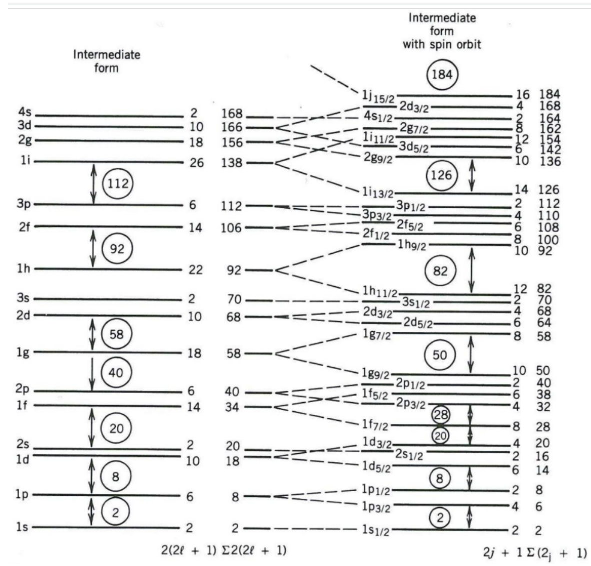
4 Esercizio 2.2

1) Si calcoli, usando la tabella delle masse atomiche:
– le energie di legame S_p ed S_n per l'aggiunta, rispettivamente di protone o un neutrone ad un nucleo di ^{16}O
– le energie di legame Sp ed Sn per l'aggiunta, rispettivamente di protone o un neutrone ad un nucleo di ^{14}N
2) Che conclusioni posso trarre sul valore a_3? Questi dati sono consistenti con la presenza del termine a_5?
$S_p = m(^A_ZX) + m_p - m(^{A+1}_{Z+1}X) \quad S_n = m(^A_ZX) + m_n - m(^{A+1}_{Z}X)$
1.1) $^{16}O \rightarrow ^{17}F \quad m(^{16}O) = 16u - 4.737MeV \quad m_p = 1u + 7.289MeV \quad m(^{17}F) = 17u - 1.952MeV$
$\Rightarrow S_p = 0.6MeV$
$^{16}O \rightarrow ^{17}O \quad m(^{16}O) = 16u - 4.737MeV \quad m_n = 1u + 8.071MeV \quad m(^{17}F) = 17u + 0.809MeV$
$\Rightarrow S_n = 4.143MeV$
1.2) $^{14}N \rightarrow ^{15}O \quad m(^{14}N) = 14u + 2.863MeV \quad m_p = 1u + 7.289MeV \quad m(^{15}O) = 15u + 2.855MeV$
$\Rightarrow S_p = 7.297MeV$
$^{14}N \rightarrow ^{15}N \quad m(^{14}N) = 14u + 2.863MeV \quad m_n = 1u + 8.071MeV \quad m(^{15}N) = 15u + 0.101MeV$
$\Rightarrow S_n = 10.83MeV$
2) $\Delta BE(^{17}O - ^{17}F) = a_3(\frac{8^2}{17^{1/3}} - \frac{9^2}{17^{1/3}}) = -S_n + S_p \rightarrow a_3 = 0.54$
Analogamente $-S_n + S_p = \Delta BE(^{15}N - ^{15}O) = a_3(\frac{7^2}{15^{1/3}} - \frac{8^2}{15^{1/3}}) \rightarrow a_3 = 0.58$
$S_p(^{14}N)$ molto maggiore di $S_p(^{16}O)$, I due casi corrispondono al passaggio del quinto termine rispettivamente $+ \rightarrow 0$, $- \rightarrow 0$ e quindi in prima approssimazione : $S_p(^{15}O) - S_p(^{17}F) \simeq 2a_5A^{-3/4} \Rightarrow a_5 \simeq 27MeV$

5 Esercizio 7.1

Dare i valori di spin e parità attesi secondo il modello a shell per gli stati fondamentali di ^{7}Li, ^{11}B, ^{15}C, ^{17}F, ^{31}P, ^{141}Pr

1) ^{7}Li ha $Z = 3$ e $N = 4$. Allora il nucleone di valenza sarà il terzo protone che si troverà in $^{1}P_{3/2}$
Quindi $P = (-1)^{l} = -1$ e $J^P = \frac{3}{2}^{-}$



2) ^{11}B ha $Z = 5$ e $N = 6$ quindi il nucleone di valenza è il 5° protone che si troverà in $^{1}P_{3/2}$ e quindi $J^P = \frac{3}{2}^{-}$

3) ^{15}C ha $Z = 6$ e $N = 9$ quindi il nucleone di valenza è il 9° neutrone che si troverà in $^{1}D_{5/2}$ e quindi $J^P = \frac{5}{2}^{+}$
Quello osservato è $\frac{1}{2}^{+}$ poichè gli stati $D_{5/2}$ e $S_{1/2}$ sono molto vicini

4) ^{17}F ha $Z = 9$ e $N = 8$ quindi il nucleone di valenza è il 9° protone che si troverà in $^{1}D_{5/2}$ e quindi $J^P = \frac{5}{2}^{+}$

5) ^{31}P ha $Z = 15$ e $N = 16$ quindi il nucleone di valenza è il 15° protone che si troverà in $^{2}S_{1/2}$ e quindi $J^P = \frac{1}{2}^{+}$

6) ^{141}Pr ha $Z = 59$ e $N = 82$ quindi il nucleone di valenza è il 59° protone che si troverà in $^{2}D_{5/2}$ e quindi $J^P = \frac{5}{2}^{+}$

6 Esercizio 7.2

I più bassi livelli energetici del ^{13}C sono lo stato fondamentale, con spin-parità $J^P = 1/2^{|}$, e stati eccitati con energia e spin-parità:
◦ 3.09 MeV $1/2^{+}$,
◦ 3.78 MeV $3/2^{-}$,
◦ 3.85 MeV $5/2^{+}$.
Gli stati successivi sono a 7 MeV e oltre. Interpretare questi stati nell'ambito del modello a shell.

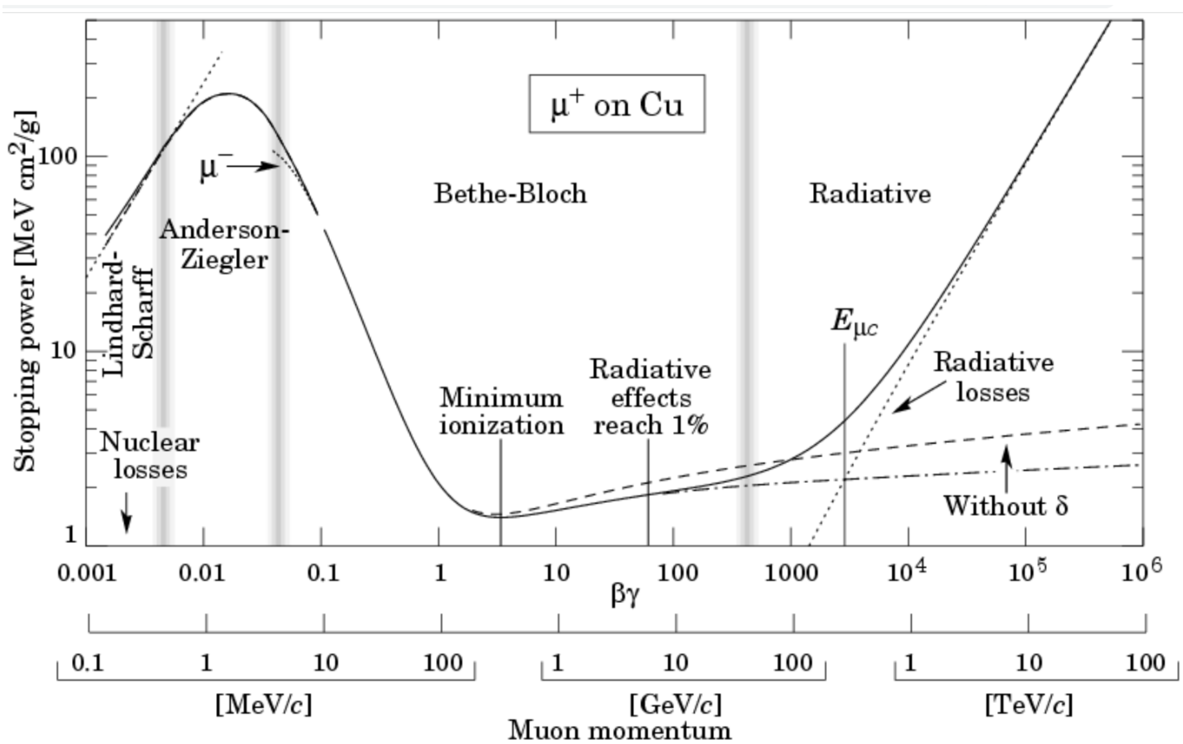
Il Ground State si trova con 6 Neutroni disposti 2 su $^{1}S_{1/2}$ e 4 su $^{1}P_{3/2}$ e 7 Protoni disposti 2 su $^{1}S_{1/2}$, 4 su $^{1}P_{3/2}$ e 1 su $^{1}P_{1/2}$.

Per raggiungere il **primo stato eccitato** la configurazione che mi fornisce i valori corretti si spin-parità si ottiene spostando un protone da $^{1}P_{1/2}$ a $^{2}S_{1/2}$.
Per raggiungere il **secondo stato eccitato** la configurazione che mi fornisce i valori corretti si spin-parità si ottiene spostando un protone da $^{1}P_{3/2}$ a $^{1}P_{1/2}$ in maniera tc il termine di spin orbita dato dalla coppia su $^{1}P_{1/2}$ sia nullo e il protone di valenza sia quello spaiato sul livello $^{1}P_{3/2}$.
Per raggiungere il **terzo stato eccitato** la configurazione che mi fornisce i valori corretti si spin-parità si ottiene spostando un protone da $^{1}S_{1/2}$ a $^{1}D_{5/2}$

7 Esercizio 14.1

Calcolare la perdita di energia (e conseguente cambiamento di momento) per elettroni, muoni e protoni con p=500 MeV in 1 cm di Pt.
Tenere conto che gli elettroni possono perdere energia per diversi processi.
Tale differenza ha permesso di identificare nei raggi cosmici i muoni come nuove particelle diverse dai protoni ed elettroni fino ad allora noti.
Confrontare la lunghezza di radiazione nel Pt calcolata con la formula semiempirica con quella delle tabelle consultabili su:
http://pdg.lbl.gov/2015/AtomicNuclearProperties/index.html

Abbiamo che dalla relatività: $\gamma = \frac{E}{m}$ $\quad \beta = \frac{p}{E}$ $\quad \beta\gamma = \frac{p}{m}$ $\quad m^2 = E^2 - p^2$
Il platino ha $\rho_{Pt} = 21.4 g/cm^3$ e $Z = 78$, per ottenere il valore di A sarebbe da fare la media pesata tra i 3 isotopi, considereremo A=195 per semplicità.
Abbiamo che l'energia di ionizzazione è $I \sim 10ZeV$ per grandi valori di Z, quindi per Pt $I \sim 780eV$.
e^-) $(\beta\gamma)_e \simeq 1000$ super-relativistici con $E_e \simeq p = 500MeV$
μ^-) $(\beta\gamma)_\mu \simeq 5$ con $E_\mu = 511MeV$
p) $(\beta\gamma)_p \simeq 1/2$ con $E_\mu = 1063MeV$
Possiamo utilizzare il grafico della formula di Bethe-Bloch fino alla parte radiativa perchè l'andamento non presenta sostanziali differenze.



1) μ^-: Il muone è molto vicino al punto di minimo della formula di Bethe-Bloch per cui possiamo approssimare $\frac{dE}{d(x\rho)} \simeq 1.5\frac{MeV}{g/cm^2} \Rightarrow \frac{dE}{dx} = 32.1\frac{MeV}{cm}$
Questo comporta una variazione in uscita di $\Delta E = -32.1MeV$ e quindi un valore finale di $E_\mu^{'} = 479MeV$ con $p_\mu^{'} = 467MeV$

2) p: è nella zona $\frac{1}{\beta^2}$ della Bethe-Bloch.
$\frac{dE}{d(x\rho)} = 4\pi r_e^2 m_e c^2 N_A \frac{Z}{A}\frac{z}{\beta^2}[\frac{1}{2}\ln\frac{2\gamma^2\beta^2 m_e c^2 T_{max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma\beta)}{2}]$ $\quad$ con $4\pi r_e^2 m_e c^2 N_A = 0.307MeVcm^2/mol$
Trascuriamo i termini dissipativi dati da δ.

$T_{max} = \frac{2\gamma^2\beta^2 m_e c^2}{1+2\gamma\frac{m_e}{M}+(\frac{m_e}{M})^2} \simeq 2\gamma^2\beta^2 m_e c^2$ se $M \gg m_e$, $\frac{Z}{A} \simeq 0.5\frac{mol}{g}$, $\beta = \frac{p}{E} \simeq 0.5$
Allora $\frac{dE}{d(x\rho)} = 3.33\frac{MeV}{g/cm^2} \Rightarrow \frac{dE}{dx} = 71.2\frac{MeV}{cm}$
Quindi c'è una perdita di energia di $\Delta E = -71.2MeV$ con energia finale $E_p^{'} = 992MeV$ e qdm $p_p^{'} = 323MeV$ cioè ha rallentato molto.

3) e^-: è ultrarelativistico allora la parte radiativa sarà molto importante. Ha energia 500 MeV.
Come si può capire se si può considerare in zona solamente radiativa o ha un contributo anche di ionizzazione?
Il valore tabulato di energia critica è 7.59MeV e se l'energia è molto più grande consideriamo solo la fase radiativa, Nel nostro caso 500 MeV $\gg$ 7.59 MeV.
Allora $\frac{dE}{dx} = -\frac{E}{X_0}$ conn $X_0 = \frac{716.4A}{Z(Z+1)ln(287/\sqrt{Z})}g/cm^2$
Allora $\frac{dE}{dx} = 1666MeV/cm$ ma allora avremmo una differenza di energia maggiore di quella iniziale!
Infatti si deve verificare che valga $\frac{dE}{dx}x << E$
Passando nel mezzo la perdita di energia varia in maniera tale che $\frac{dE}{E} = -\frac{dx}{X_0} \rightarrow E(x) = E_0 e^{-x/X_0}$
Quindi $E(1cm) = 25MeV \quad p^{'} \sim 25MeV$.
Essendo $E(1cm) > E_C$ abbiamo potuto trascurare le perdite finali per collisione.

8 Esercizio 14.4

Calcolare (dE/dx)min in Si, Fe, Pb, usando la formula di Bethe-Bloch

$$\frac{dE}{d(x\rho)} = 4\pi r_e^2 m_e c^2 N_A \frac{Z}{A}\frac{z}{\beta^2}[\frac{1}{2}\ln\frac{2\gamma^2\beta^2 m_e c^2 T_{max}}{\bar{I}^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma\beta)}{2}]$$

sapendo che I 10Z eV e $(\beta\gamma)_{min} = 3$. Confrontare con i valori tabulati
https://pdg.lbl.gov/2021/AtomicNuclearProperties/adndt.pdf

1) **Si** Z=14, A=28.09 g/mol $\Rightarrow \frac{Z}{A} = 0.498\frac{mol}{g}$, $\rho = 2.329g/cm^3$, $\bar{I} = 140eV = 1.4 \times 10^{-4}MeV$
Trascurando δ e considerando particella con carica unitaria e $M \gg m_e$ e quindi
$T_{max} = \frac{2\gamma^2\beta^2 m_e c^2}{1+2\gamma\frac{m_e}{M}+(\frac{m_e}{M})^2} \simeq 2\gamma^2\beta^2 m_e c^2$
$\frac{dE}{d\rho x} = 1.641MeV/c^2 \Rightarrow \frac{dE}{dx} = 3.822MeV/cm$
Il valore tabulato è $\frac{dE}{d\rho x} = 1.664MeV/c^2$

2) **Fe**: Z=26, A=55.85 g/mol $\rho = 7.874g/cm^3$. $\frac{Z}{A} = 0.4655\frac{mol}{g}$, $\bar{I} = 2.6 \times 10^{-4}MeV$
$\frac{dE}{d\rho x} = 1.442\frac{MeV}{g/cm^2} \Rightarrow \frac{dE}{dx} = 11.354\frac{MeV}{cm^2}$ con un valore tabulato $\frac{dE}{d\rho x} = 1.451\frac{MeV}{g/cm^2}$

3)**Pb**: Z=82, A=207.2 g/mol $\rho = 11.34g/cm^3$. $\frac{Z}{A} = 0.396\frac{mol}{g}$, $\bar{I} = 8.2 \times 10^{-4}MeV$
$\frac{dE}{d\rho x} = 1.078\frac{MeV}{g/cm^2} \Rightarrow \frac{dE}{dx} = 12.23\frac{MeV}{cm^2}$ con un valore tabulato $\frac{dE}{d\rho x} = 1.122\frac{MeV}{g/cm^2}$

9 Esercizio 4.1

1. Calcolare il Q-valore del decadimento $^{224}Ra \to^{220} Rn + \alpha$ e, sapendo che il tempo di dimezzamento è di 3.66 giorni, calcolare il fattore di Gamow.

2. Stimare il tempo di dimezzamento per i possibili decadimenti
$^{224}Ra \to^{212} Pb +^{12} C$ e $^{224}Ra \to^{210} Pb +^{14} C$

1) In un decadimento da un nucleo P in due framenti D_1 D_2 ho:
$M_P = M_{D_1} + T_1 + M_{D_2} + T_2 \quad Q = M_P - M_{D_1} - M_{D_2} = T_1 + T_2$

$m(^{224}Ra) = 224u + 18.825MeV$
$m(^{220}Rn) = 220u + 10.612MeV$
$m(\alpha) = 4u + 24.242MeV$

Allora $Q = m(^{224}Ra) - m(^{220}Rn) - m(\alpha) = 5.788MeV$

$a = r_0 A^{1/3}$ con $r_0 = 1.2fm$ e $A = 220$
Da Geiger-Nuttal $\log\tau = \log(\sqrt{\frac{m}{2(Q+V_0)}}\frac{a}{2}) + 2G$ allora $G = \frac{1}{2}\log(\frac{2\tau c}{a}\sqrt{\frac{2(Q+V_0)}{m}}) \simeq 32$

Se avessimo ricavato G dalla formula esplicita ottenuta attraverso il modello di Gamow:
$G = \alpha\sqrt{\frac{2mc^2}{Q}}[Z_\alpha(Z_{Ra} - Z_\alpha)]f(\frac{a}{b})$ con $V(r) = \alpha Z_\alpha(Z_{Ra} - Z_\alpha)\frac{\hbar c}{r}$ e $V(b) = Q$
$b = \alpha Z_\alpha(Z_{Ra} - Z_\alpha)\frac{\hbar c}{Q} \simeq 43.3fm \Rightarrow \frac{a}{b} = 0.17 \Rightarrow f(\frac{a}{b}) = arccos(\sqrt{\frac{a}{b}}) - \sqrt{\frac{a}{b} - (\frac{a}{b})^2} = 0.78$
Allora $G_{gam} \simeq 35$ ottenendo $\frac{\tau_{oss}}{\tau_{gam}} \sim e^{-2(G_{oss}-G_{gam})} = 2\times 10^{-3}$

2.1) $^{224}Ra \to^{212} Pb +^{12} C$
$m_\alpha = 4u \quad m_{^{12}C} = 12u + 0MeV \quad m_{Ra} = 224u + 18.825MeV \quad m_{Pb} = 212u - 7.549MeV$

Allora $Q = 26.4MeV$ e $\frac{\tau_C}{\tau_\alpha} = \frac{\sqrt{m_C/(Q+V_0)}}{\sqrt{m_\alpha/(Q_\alpha+V_0)}}e^{2(G_C-G_\alpha)} \simeq 1.4e^{2(G_C-G_\alpha)}$
Abbiamo $\frac{G_C}{G_\alpha} = \frac{\sqrt{m_C/Q}}{\sqrt{m_\alpha/Q_\alpha}}\frac{Z_C(Z_{Pb}-Z_C)}{Z_\alpha(Z_{Ra}-Z_\alpha)}\frac{f(a/b)_C}{f(a/b)_\alpha}$ con $a = 1.2fm(212)^{1/3} = 7.2fm \quad b = 27.2fm$
Allora $\frac{G_C}{G_\alpha} = 1.78 \Rightarrow \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} = 7.2\times 10^{21} \Rightarrow \tau_C = 7.2\tau_\alpha \times 10^{21} = 38.016\times 10^{21} days$

2.2) $^{224}Ra \to^{210} Pb +^{14} C$
$m_\alpha = 4u \quad m_{^{14}C} = 14u + 3.019MeV \quad m_{Ra} = 224u + 18.825MeV \quad m_{Pb} = 210u - -14.728MeV$

$Q = 30.534MeV$ e e $\frac{\tau_C}{\tau_\alpha} = \frac{\sqrt{m_C/(Q+V_0)}}{\sqrt{m_\alpha/(Q_\alpha+V_0)}}e^{2(G_C-G_\alpha)} \simeq 1.47e^{2(G_C-G_\alpha)}$
Abbiamo $\frac{G_C}{G_\alpha} = \frac{\sqrt{m_C/Q}}{\sqrt{m_\alpha/Q_\alpha}}\frac{Z_C(Z_{Pb}-Z_C)}{Z_\alpha(Z_{Ra}-Z_\alpha)}\frac{f(a/b)_C}{f(a/b)_\alpha}$ con $a = 1.2fm(210)^{1/3} = 7.1fm \quad b = 56.9fm$
Allora $\frac{G_C}{G_\alpha} = 2.28 \Rightarrow \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} = 5.55\times 10^{35} \Rightarrow \tau_C = 5.55\tau_\alpha \times 10^{35} = 29.3\times 10^{33} days$

10 Esercizio 18.3

Si considerino gli stati legati q+anti-q:
∘ i primi livelli energetici hanno numeri quantici: $J^{PC} = 0^{-+}, 1^{--}, 1^{+-}, 0^{++}, 1^{++}, 2^{++}$ dire a quali stati di momento angolare L e di spin totale S corrispondono
Lo studio di questi stati suggerisce che il potenziale di interazione sia della forma:

$$V(r) = \frac{g_S^2}{4\pi}\frac{1}{r} + kr, \quad k > 0$$

dove g_S può venire interpretata come costante delle interazioni forti.

∘ mostrare che si può interpretare l'interazione in questo potenziale come l'interazione con un potenziale 1/r in cui però la costante di accoppiamento vari con q^2 e $g_S^2(q^2) \to +\infty$ per $q^2 \to 0$

1) a momento angolare l ho parità per i fermioni $\eta_P = \eta_f \eta_{\bar{f}}(-1)^l = (-1)^{l+1}$
e coniugazione di carica $\eta_C = \eta_P(-1)^{S+1}$
Mi aspetto che lo stato fondamentale abbia l=0 e s=0,1 perchè per l≠0 il potenziale centrifugo aumenta l'energia.
l=0, s=0 → $J^{PC} = 0^{-+}$ GS
l=0, s=1 → $J^{PC} = 1^{--}$
Quindi per gli stati eccitati considero l=1.
l=1, s=0 → $J^{PC} = 1^{+-}$
Per l=1 e s=1 ho $|l - s| \leq j \geq l + s$. Allora possibili j: 0, 1, 2 → $J^{PC} = 0^{++}, \quad 1^{++}, \quad 2^{++}$

2) Il potenziale è dato dal potenziale di Yukawa con massa del vettore m=0 (gluone) più il termine lineare che domina a grandi distanze. Conviene scriverlo in termini di spazio dei momenti perchè è ciò che andiamo a considerare nella sezione d'urto.

$$V(\vec{q}) = \int d^3\vec{r}(\frac{g_S^2}{4\pi r} + kr)e^{i\vec{q}\vec{r}}$$

$V(\vec{q}) = \frac{g_S^2}{q^2} + k\int d^3\vec{r}e^{i\vec{q}\vec{r}}r = \frac{g_S^2}{q^2} + 2\pi k\int drr^3\int e^{iqrcos\theta}d(cos\theta) = \frac{g_S^2}{q^2} + 2\pi k\int_0^\infty drr^3\frac{1}{iqr}[e^{iqr} - e^{-iqr}]$
$= \frac{g_S^2}{q^2} + \frac{2\pi k}{iq}\int_0^\infty drr^2[e^{iqr} - e^{-iqr}]$
usando il fatto che $\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}$ e $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}dx = (\frac{d}{d\alpha})^n\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx = (\frac{d}{d\alpha})^n\frac{1}{\alpha}$

$$V(\vec{q}) = \frac{g_S^2}{q^2} - \frac{8\pi k}{q^4} = \frac{g_S^2}{q^2}(1 - \frac{8\pi k}{g_S^2}\frac{1}{q^2}) = \frac{g_S^2(q^2)}{q^2}$$

con $g_S^2(q^2) = g_S^2\sqrt{1 - \frac{8\pi k}{g_S^2}\frac{1}{q^2}}$