MOLTI CORPI

PROF. MOLINARI

SIST A MOLTE PARTIC → SIST ELETTRONICI $\sim 10^{23}$
FISICA NUCLEARE

- 1926 SCHROEDINGER → 1 PARTIC
- 1927 HARTREE-FOCK → + PARTIC

1° TECNICHE X STUDIARE SIST A MOLTE PARTIC
→ TRATTAM CONCETTO GS O DENSITÀ
GS DI SOLITO IGNOTO SALVO MODELLI 1D

APPENA HO INTERAZ A 2 CORPI SONO FOTTUTO

HF → METODO VARIAZIONALE
SI RESTRINGE A CLASSE + PICCOLA DI STATI [det SLATER]
X POI MINIMIZ VAL DI ASPETTAZ
→ FUNZIONA BENE X PROP MEDIE MA SI MONDA X ALTRE

ALTRO METODO FAMOSO: THOMAS-FERMI
→ TENTO DI SCRIVERE E_{GS} COME FUNZIONALE DELLA DENSITÀ (IGNOTA) E MINIMIZZO SU QUESTA
FUNZ CON CORREZIONI SU ATOMI A MOLTI é DI DIRAC
TECNICHE APPROX CHE DIVENTANO ESATTE IN DFT
→ TEORIA CHE PERMETTE DI CALCOLARE IN MODO ESATTO E_{GS} E DENSITÀ STUDIANDO SINGOLE PARTIC CON OPERATORE POTENZIALE SCONOSCIUTO MA DI CUI ∃ APPROX

X SIST A N PARTIC VOGLIAMO PROP MEDIE
⇒ CI SERVE ① II QUANTIZ
② FUNZ DI GREEN

II QUANTIZ
DESCRIZIONE IN BASE ≠ QUELLA DI
OP FOND $(x_i, p_i, S_i)_1^N$ → BASE SCOMODISSIMA

OP NEL TRATTAM CONSIDERATI DEL TIPO
- $O = \sum_{i=1}^{N} O(i)$ SINGOLE PARTIC
- $V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(i,j)$ INTERAZ 2 CORPI

VOGLIO RISCRIVERLI NELLA BASE DEGLI OP DI CREAZ/DISTRUZ

$|r\rangle$ STATI DI PARTIC SINGOLA (GEN SP SINGLE PARTIC)

$\Rightarrow c_r^+, c_r \quad r = 1 \ldots \infty$ CHE SEGUONO REGOLE OSCILLATORE

- BOSONI $[c_i, c_j^+] = \delta_{ij}$
- FERMIONI $\{c_i, c_j^+\} = \delta_{ij}$

$\longrightarrow$ c_r^+ AGGIUNGE PARTIC IN $|r\rangle$, c_r DISTRUGGE " " $\quad$ ⊕ IMPLEMENTA SIMM PARTIC

VEDREMO CHE

$$\hat{O} = \sum_{r r'} c_r^+ \langle r|O|r'\rangle c_{r'}$$

$$\hat{O} = \sum_{r r' r'' r'''} c_r^+ c_{r'}^+ \langle r r'|O|r'' r'''\rangle c_{r'''} c_{r''}$$

$\Rightarrow$ X AVERE FUNZ CORRELAZ BASTA AVERE FUNZ CORRELAZ DI OP BASE c E c^+

STUDIANDO EVOLUZ TEMP E GS VEDREMO

$\langle GS|O_1(t_1)\, O_2(t_2)|GS\rangle \longrightarrow$ È UNCASINO

$$e^{iHt_1} O_1 e^{-iHt_1} \longrightarrow \text{COME FACCIO ESP EXP?}$$

$\longrightarrow$ TEOR GELL-MANN & LOW

$|GS\rangle \xleftarrow[U_I(0,\pm\infty)]{} |GS_0\rangle$ RICOLLEGA IL GS ESATTO A QUELLO IMPERTURB

$H = H_0 + V$

$$\Rightarrow \langle GS|T\, O_{1H}(t_1) \ldots O_{kH}(t_k)|GS\rangle = \frac{\langle GS_0|T\, S\, O_{1H_0}(t_1) \ldots O_{kH_0}(t_k)|GS_0\rangle}{\langle GS_0|S|GS_0\rangle}$$

PRODOTTO DI OP EVOLUTI COME FOSSERO GAS LIBERO IN CUI L'INTERAZ È CONSID SOLO IN S

$\longrightarrow$ DIAGRAMMI DI FEYNMANN MODO PRATICO X CALCOLARLO

$\longrightarrow$ SVILUPPO PERTURB DELLA FORMULA DI INTERAZIONE

$\exists$ X ORD TEMPORALE TORDINAM

POI FAREMO COLLEGAM IMPORTANTE CON ESPERIM $\longrightarrow$ TEORIA RISP LIN

X STUDIARE PROP SIST SONDO CON PERTURBAZ E VEDO RISPOSTA

$\longrightarrow$ IL RISP È UN RISP A CAMPO EXT CON FUNZ DI GREEN DETTA RISP RITARDATA

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \longrightarrow \text{CORRENTE IN FUNZ DI CAMPO ELETTRICO}$$

$\hookrightarrow$ FUNZ RISPOSTA

COLLEGAM TRA CORRELATORI RITARDATI E TORDINATI

$\longrightarrow$ RAPPR DI LEHMANN

TESTI

- DISPENSE
- FETTER – WALECKA "QUANTUM TH MANY PARTIC SYS"
- MARTIN – ROTHEN "MB PROBL & QFT"
- W. THIRRING "QUANTUM MATH PHYSICS" → II PARTE MOLTO MATEMATICA IN CAP "ATOMS–MOLECULES AND LARGE SYS"

ONLINE

- PIERS COLEMAN
- MUDRY LECT NOTES ON FIELD TH IN CONDENSED MATTER PHYSICS
- DICKHOFF–NECK "MB TH EXPOSED!"

RICHIAMI SU SP DI N PARTIC

$\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$ A PRIORI $\mathcal{H}_i \neq \mathcal{H}_j$

$|a_1 \dots a_N\rangle$

DEF PROD INTERNO: $\langle b_1 \dots b_N | a_1 \dots a_N \rangle = \prod_j^N \langle b_j | a_j \rangle$

PROP

- $|a_1 \dots a_k + a_k' \dots a_N\rangle = |a_1 \dots a_k \dots a_N\rangle + |a_1 \dots a_k' \dots a_N\rangle$ MULTILIN

- OP $A_k \in L(\mathcal{H}_k)$ $\quad A_k |a_1 \dots a_k \dots a_N\rangle = |a_1 \dots A_k a_k \dots a_N\rangle$

  X STATI FATTORIZ $\qquad [A_k, A_j] = 0$ SE $k \neq j$

PARTICELLE IDENTICHE

$\mathcal{H}_N = \mathcal{H}^{\otimes N}$ GEN DA VETT FATTORIZ $|a_1 \dots a_N\rangle$

IDENTICHE ⇒ DEF OP PERMUTAZ $\quad \sigma : 1 \dots N \longrightarrow \sigma_1 \dots \sigma_N$

$$P_\sigma |a_1 \dots a_N\rangle = |a_{\sigma_1} \dots a_{\sigma_N}\rangle \quad \text{TC} \quad P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\sigma'}$$

$\| |a_1 \dots a_N\rangle \|^2 = \prod_k \| |a_k\rangle \|^2 \Rightarrow P_\sigma$ CONSERVA LA NORMA

ESTENDO PERMUTAZ A TUTTE LE CL

$\Rightarrow P_\sigma$ UNITARIO $\quad P_\sigma^{-1} = P_\sigma^\dagger = P_{\sigma^{-1}}$ [RAPPR UNITARIA DEL GRUPPO DELLE PERMUTAZ]

$\exists$ SOTTOCLASSE DEGLI SCAMBI $\quad P_{ij} |a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_N\rangle = |a_1 \dots a_j \dots a_i \dots a_N\rangle$

$$P_{ij}^2 = \mathbb{1} \Rightarrow P_{ij} = P_{ij}^\dagger \Rightarrow \text{AUTOVAL } \pm 1$$

PROP

Ogni permutaz è fattorizzab in un certo # di scambi (non univoc) con parità fix

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad i_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det \sigma = \pm 1$ — 1 in ciascuna riga/colonna

$\det = -1$

$$\det \sigma = \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{\# pari di scambi} \\ -1 \Rightarrow \text{\# dispari di scambi} \end{cases} \longrightarrow \text{permutaz causata dalla parità}$$

Def 2 op utili:

- op di simmetrizzazione $\hat{S}(N) = \frac{1}{N!}\sum_\sigma P_\sigma$
- op di antisimmetrizzazione $\hat{A}(N) = \frac{1}{N!}\sum_\sigma (-1)^\sigma P_\sigma$

$N! = $ # permutaz $\qquad \sigma = $ parità permutaz

$$S(3)|a_1 a_2 a_3\rangle = \frac{1}{6}\Big[|123\rangle + |132\rangle + |312\rangle + |321\rangle + |231\rangle + |213\rangle\Big]$$

Stato tot simm $\to$ ogni partic equiprob in uno degli stati qualsiasi

$$A(3)|a_1 a_2 a_3\rangle = \frac{1}{6}\Big[|123\rangle - |132\rangle + |312\rangle - |321\rangle + |231\rangle - |213\rangle\Big]$$

PROP

- $P_\sigma S(N) = S(N) = S(N) P_\sigma$

Dim

$$P_\sigma \frac{1}{N!}\sum_{\sigma'} P_{\sigma'} = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma'} P_\sigma P_{\sigma'} = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma''} P_{\sigma''} = S(N) \qquad \square$$

- $P_\sigma A(N) = A(N) P_\sigma = (-1)^\sigma A(N)$

Dim

$$P_\sigma \frac{1}{N!}\sum (-1)^{\sigma'} P_{\sigma'} = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma'} (-1)^{\sigma'} P_{\sigma\sigma'} = \frac{(-1)^\sigma}{N!}\sum (-1)^{\sigma+\sigma'} P_{\sigma+\sigma'} = (-1)^\sigma A(N)$$

parità prod = somma parità

- $S(N)$ e $A(N)$ proiettori DIM x es: invar x perm ⊕ autovalori

- $A(N)|u_1 \dots u_i \dots u_i \dots u_N\rangle = 0$ DIM $A(N)|u_1 \dots u_i \dots u_i \dots\rangle = A(N)P_{ij}|u_1 \dots u_i \dots u_i \dots\rangle$
$= (-1)A(N)|u_1 \dots u_i \dots u_i \dots u_N\rangle$ □

- $|u_1\rangle \dots |u_N\rangle \in \mathcal{H} \to$ posso costruire gli $|\varepsilon_k\rangle = \sum_{\ell=1}^{N} M_{k\ell}|u_\ell\rangle \in \mathcal{H}$ singola particella

$\Rightarrow A(N)|\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N\rangle = \det(M)A(N)|u_1 \dots u_N\rangle$ DIM x es (da def det)

Spazio di bosoni e fermioni

$\mathcal{H}_B(N) = S(N)\mathcal{H}(N) \to$ sp bosoni proiez simm $\to P_{ij}\psi_B = \psi_B$ op scambio autoval +1

$\mathcal{H}_F(N) = A(N)\mathcal{H}(N) \to$ sp fermioni proiez antisimm $\to P_{ij}\psi_F = -\psi_F$ autoval −1

$\Rightarrow \mathcal{H}_F$ e $\mathcal{H}_B$ ortogonali (autoval ≠)

in gen $\mathcal{H}(N) = \mathcal{H}_B(N) \oplus \mathcal{H}_F(N)$ + resto

Xké chiamarli fermionici / bosonici?

x partic identiche un op ha significato fisico solo se è invar ∀ permutaz

$$\Rightarrow [\hat{O}, P_\sigma] = 0 \quad \forall \sigma$$

Dato infatti

$$\langle\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N|\hat{O}(1 \dots N)|u_1 \dots u_N\rangle = \langle\varepsilon_{\sigma_1} \dots \varepsilon_{\sigma_N}|O(\sigma_1 \dots \sigma_N)|u_{\sigma_1} \dots u_{\sigma_N}\rangle$$
$$= \langle\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N|P_\sigma^+ O(1 \dots N)P_\sigma|u_1 \dots u_N\rangle$$
$$\Rightarrow O = P_\sigma^+ O P_\sigma \quad \square$$

L'azione di O lascia invar $\mathcal{H}_B$ e $\mathcal{H}_F$ cioè gli stati rimangono negli sp di simm originale

$\to$ unici sp invar ∀ osservabili

L'associaz sp simm $\to$ bosonico
antisimm $\to$ fermionico

È DOVUTA ALL'ASSOCIAZ SPIN-STATISTICA CHE SI DIM CON QFT RELATIVISTICA

RINOMINO $S(N) \longrightarrow S(N)_+$
$A(N) \longrightarrow S(N)_-$

det DI SLATER

$S(N)_\pm$ PROIETTORI

$$\langle \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_N | S(N)_\pm S(N)_\pm | \alpha_1 \ldots \alpha_N \rangle = \langle \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_N | S(N)_\pm | \alpha_1 \ldots \alpha_N \rangle$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_\sigma (\pm)^\sigma \langle \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_N | \alpha_{\sigma_1} \ldots \alpha_{\sigma_N} \rangle = \frac{1}{N!} \sum_\sigma (\pm)^\sigma \langle \varepsilon_1 | \alpha_{\sigma_1} \rangle \ldots \langle \varepsilon_N | \alpha_{\sigma_N} \rangle$$

$$= \frac{1}{N!} D_\pm \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_1 | \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \varepsilon_1 | \alpha_N \rangle \\ & \ldots & \\ \langle \varepsilon_N | \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \varepsilon_N | \alpha_N \rangle \end{bmatrix}$$

$D_- = \det$
$D_+ =$ PERMANENTE $= \det$ MA NO sgn

IN PARTIC SE HO $\langle \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_N | = \langle \underline{x}_1 m_1, \ldots, \underline{x}_N m_N |$ POSIZ E SPIN

$\Rightarrow$ GLI ELEM DI MATR SONO FUNZIONI $\langle \underline{x}\, m | \alpha \rangle = \alpha_m(\underline{x}) \in L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2S+1}$

E IL det È IL det DI SLATER $\rightarrow$ FUNZ TOT ANTISIMM
MENTRE IL PERMANENTE È TOT SIMM

SIA $|r\rangle$ SONC IN $\mathcal{H}$ $r = 1 \ldots \infty$ TC $|r_1 \ldots r_N\rangle$ SONC $\mathcal{H}(N)$

$\longrightarrow S(N)_\pm |r_1 \ldots r_N\rangle$ ABBIAMO BASE RIDONDANTE DI $\mathcal{H}(N)_\pm$

VALUTIAMO
$$\| S(N)_\pm |r_1 \ldots r_N\rangle \|^2 = \frac{1}{N!} \sum_\sigma (\pm)^\sigma \langle r_1 | r_{\sigma_1} \rangle \ldots$$

- FERMIONI

VALE PRINCIPIO DI ESCLUSIONE DI PAULI PERCHÉ $\langle r | r' \rangle = \delta_{rr'} \Rightarrow$ CONTRIB SOLO PERMUTAZ $P_\sigma = \mathbb{1}$

$$\Rightarrow \| S(N)_- |r_1 \ldots r_N\rangle \|^2 = \frac{1}{N!}$$

- **BOSONI**

POSSO AVERE RIPETIZIONI

$$\Rightarrow \| S(N)_+ |r_1 \dots r_N\rangle \|^2 = \frac{1}{N!}(n_1! \dots n_\infty!) \Big|_{\sum_r n_r = N}$$

n_r = # COMPARE DI STATO $|r\rangle$ IN $|r_1 \dots r_N\rangle$
= # OCCUPAZ

RIMANE DA VERIF CHE $S(N)_\pm |r_1 \dots r_N\rangle$ SIANO ORTOG
$\rightarrow |r_1 \dots r_N\rangle \neq |r_1' \dots r_N'\rangle$ CASO NON IMMEDIATO

$$\langle r_1' \dots r_N' | S(N)_\pm S(N)_\pm | r_1 \dots r_N\rangle = \frac{1}{N!} \sum_\sigma (\pm)^\sigma \langle r_1' | r_{\sigma_1}\rangle \dots = 0$$ SE COMPARE ANCHE UN SOLO $r_i' \notin \{r_k\}$

$\Rightarrow$ POSSIAMO COSTRUIRE BASE NEL SSP

- **BOSONICO** $\mathcal{H}_B(N)$

$$|r_1 \dots r_N\rangle_B = \sqrt{\frac{N!}{n_1! \dots n_\infty!}}\, S(N)_+ |r_1 \dots r_N\rangle \qquad r_1 \le \dots \le r_N$$

- **FERMIONICO** $\mathcal{H}_F(N)$

$$|r_1 \dots r_N\rangle_F = \sqrt{N!}\, S(N)_- |r_1 \dots r_N\rangle \qquad r_1 \le \dots \le r_N$$

INFO CONTENUTA IN $|r_1 \dots r_N\rangle_{F/B}$ È LA PRESENZA DI UNA PARTICELLA IN STATO r
$\Rightarrow$ VETT DI STATO DEL # DI OCCUPAZ

$$|r_1 \dots r_N\rangle_B = |n_1 \dots n_\infty\rangle_B \qquad \sum_k n_k = N,\quad n_k \in \mathbb{N}$$

$$|r_1 \dots r_N\rangle_F = |n_1 \dots n_\infty\rangle_F \qquad \sum_k n_k = N,\quad n_k \in \{0,1\}$$

DEF [SP DI FOCK]

$\mathcal{F}_\pm = |0\rangle \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_\pm(2) \oplus \dots$ GENERATO DA $|n_1, n_2 \dots\rangle_\pm$ CON $\sum_k n_k$ NON FIX

- OGNI SSP $\mathcal{H}_\pm(N)$ È ORTOG ALL'ALTRO
- $\mathcal{F}$ È SEPARAB PERCHÉ SOMMA INFINITA DI SSP SEPARAB = AMMESSE SSP NUMERABILE DENSO

DEF [OP CREAZ]

$c^+(|\alpha\rangle)$ = OP CREAZ DI 1 PARTIC IN $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$

$$c^+_{|\alpha\rangle} S(N)_\pm |\alpha_1 \dots \alpha_N\rangle = \sqrt{N+1}\, S(N+1)_\pm |\alpha \alpha_1 \dots \alpha_N\rangle$$

$$c^+_{|\alpha\rangle} : \mathcal{H}(N)_\pm \rightarrow \mathcal{H}(N+1)_\pm$$

PROP

① $C^+_{\alpha|a\rangle+\beta|\sigma\rangle} S(N)_\pm |a_1 \ldots a_N\rangle = \sqrt{N+1}\, S(N+1)_\pm \left[\alpha|a a_1 \ldots\rangle + \beta|\sigma a_1 \ldots\rangle\right]$

$\Rightarrow C^+_{\alpha|a\rangle+\beta|\sigma\rangle} = \alpha C^+_{|a\rangle} + \beta C^+_{|\sigma\rangle}$

② $C^+_{|a\rangle} C^+_{|\sigma\rangle} S(N)_\pm |a_1 \ldots a_N\rangle = \sqrt{(N+1)(N+2)}\, S(N+2)_\pm |a \sigma a_1 \ldots\rangle$

$C^+_{|\sigma\rangle} C^+_{|a\rangle} S(N)_\pm |a_1 \ldots a_N\rangle = \sqrt{(N+1)(N+2)}\, S(N+2)_\pm |\sigma a a_1 \ldots\rangle$

$\rightarrow$ DIFF $\times$ 1 SCAMBIO

- BOSE

$$C^+_{|a\rangle} C^+_{|\sigma\rangle} = C^+_{|\sigma\rangle} C^+_{|a\rangle} \Rightarrow [C^+_{|a\rangle}, C^+_{|\sigma\rangle}] = 0$$

- FERMI $C^+_{|a\rangle} C^+_{|\sigma\rangle} + C^+_{|\sigma\rangle} C^+_{|a\rangle} = 0 \Rightarrow \{C^+_{|a\rangle}, C^+_{|\sigma\rangle}\} = 0 \Rightarrow (C^+_{|a\rangle})^2 = 0$

DEF [OP DISTRUZ]

$$C_{\langle a|} = (C^+_{|a\rangle})^+$$

AZIONE: $\langle \sigma_1 \ldots \sigma_{N-1}| S_\pm(N-1)\, C_{\langle a|}\, S_\pm(N)|a_1 \ldots a_N\rangle = \sqrt{N} \langle a \sigma_1 \ldots \sigma_{N-1}| S(N)^2_\pm |a_1 \ldots a_N\rangle$

$$= \frac{\sqrt{N}}{N!} \sum_\sigma (\pm)^\sigma \langle a \sigma_1 \ldots \sigma_{N-1}| a_{\sigma_1} \ldots a_{\sigma_N}\rangle = \frac{\sqrt{N}}{N!} \sum (\pm)^\sigma \langle a|a_{\sigma_1}\rangle \langle \sigma_1|a_{\sigma_2}\rangle \ldots \langle \sigma_{N-1}|a_{\sigma_N}\rangle$$

$$= \frac{\sqrt{N}}{N!} D_\pm \begin{bmatrix} \langle a|a_1\rangle & \ldots & \langle a|a_N\rangle \\ \langle \sigma_1|a_1\rangle & \ldots & \langle \sigma_1|a_N\rangle \\ \ldots & & \ldots \\ \langle \sigma_{N-1}|a_1\rangle & \ldots & \langle \sigma_{N-1}|a_N\rangle \end{bmatrix} \overset{\text{SOTTOMATR}}{=} \frac{\sqrt{N}}{N!} \sum_{j=1}^N (\pm)^{j+1} \langle a|a_j\rangle D_\pm \left[\langle \sigma_i|a_k\rangle\right]^{i=1\ldots N-1}_{k\neq j}$$

$$= \frac{\sqrt{N}}{N!} (N-1)! \sum_j (\pm)^{j+1} \langle a|a_j\rangle \langle \sigma_1 \ldots \sigma_{N-1}| S(N-1)_\pm |a_1 \ldots a_{j-1} a_{j+1} \ldots a_N\rangle$$

$$\Rightarrow C_{\langle a|} |a_1 \ldots a_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N (\pm)^{j+1} \langle a|a_j\rangle\, |a_1 \ldots a_{j-1} a_{j+1} \ldots\rangle$$

REGOLE DI COMMUTAZ (AGGIUNTO C^+)

- BOSE $[C_{\langle a|}, C_{\langle v|}] = 0$

- FERMI $\{C_{\langle a|}, C_{\langle \sigma|}\} = 0 \Rightarrow (C_{\langle a|})^2 = 0$

PROP $C_{\langle \alpha a + \beta v|} = \alpha^* C_{\langle a|} + \beta^* C_{\langle v|}$

AZIONE CONGIUNTA

- $C_{\langle a|} C^+_{|v\rangle} S(N)_\pm |a_1 \ldots a_N\rangle = \sqrt{N+1}\, C_{\langle a|} S(N+1)_\pm |v a_1 \ldots\rangle$

$$= \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{N+1}} \langle a|v\rangle S(N)_\pm |a_1 \ldots a_N\rangle + \sum_{j=1}^N (\pm)^j \langle a|a_j\rangle S(N)_\pm |v a_1 \ldots a_{j-1} a_{j+1} \ldots a_N\rangle$$

$\circ \; C^+_{|v\rangle} C_{\langle a|} S(N)_\pm |a_1 \dots a_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} (\pm)^j \langle a|a_j\rangle \, C^+_v S(N-1)_\pm |a\, a_1 \dots \cancel{a_j} \dots a_N\rangle$

$$= \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} (\pm)^{j+1} \langle a|a_j\rangle S(N)_\pm |v\, a_1 \dots \cancel{a_j} \dots a_N\rangle$$

BOSE $C_{\langle a|} C^+_{|v\rangle} - C^+_{|v\rangle} C_{\langle a|} = \langle a|v\rangle$

$\rightarrow [C_{\langle a|}, C^+_{|v\rangle}] = \langle a|v\rangle$

FERMI $C_{\langle a|} C^+_{|v\rangle} + C^+_{|v\rangle} C_{\langle a|} = \langle a|v\rangle$

$\rightarrow \{C_{\langle a|}, C^+_{|v\rangle}\} = \langle a|v\rangle$

OP SINGLE PARTICLE

$|\varphi\rangle = \sqrt{N!}\, A(N) |a_1 \dots a_N\rangle$ STATO ANTISIM N PARTIC

$\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$

$$\hat{O} = \sum_{i=1}^{N} \sigma(i)$$

$$\Rightarrow \langle\varphi|\hat{O}|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle a_i|\sigma|a_i\rangle$$

$\circ$ **DENSITÀ**

$$\hat{n}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} \delta_3(\underline{x} - \hat{\underline{x}}_i)$$

$\hat{\underline{x}} |\underline{x}\, m_s\rangle = \underline{x} |\underline{x}\, m_s\rangle$

$\hat{S}_z |\underline{x}\, m_s\rangle = m_s |\underline{x}\, m_s\rangle$ $\rightarrow$ STATI ORTOG IN SENSO IMPROPRIO $\langle \underline{x}' m_s' | \underline{x}\, m_s\rangle = \delta_3(\underline{x} - \underline{x}')\, \delta_{m m'}$

$$\langle\varphi|\hat{n}(\underline{x})|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle a_i|\delta_3(\underline{x} - \hat{\underline{x}})|a_i\rangle \overset{\mathbb{1}}{=} \sum_{i=1}^{N} \sum_{m_s} \int d_3 \underline{x}' \langle a_i|\delta_3(\underline{x} - \hat{\underline{x}})|\underline{x}' m_s\rangle\langle \underline{x}' m_s|a_i\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{m_s=-s}^{+s} \int d_3 \underline{x}' \, \delta_3(\underline{x} - \underline{x}') \, |\langle \underline{x}' m_s|a_i\rangle|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{m_s} |\langle \underline{x}\, m_s|a_i\rangle|^2$$

$\hookrightarrow$ PROB DI TROVARE PARTIC IN VOLUME $d_3 x$ CENTRATO IN x CON SPIN QUALSIASI

CIOÈ $\int_\Omega d_3 x \langle\varphi|\hat{n}(\underline{x})|\varphi\rangle = \sum^{N} P_i(\underline{x} \in \Omega)$

$= \#$ PARTIC IN Ω

$\circ$ **EN CINETICA**

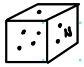
$T = \sum^{N} \frac{p_i^2}{2m} \longrightarrow \sum \langle a_i|\frac{p_i^2}{2m}|a_i\rangle$ INSERIAMO ORA COMPLETEZZA x VETT D'ONDA $\vec{k}$

MA A NOI INTERESSA CHE GLI STATI DESCRIVANO LA SF DI FERMI

$|F\rangle =$ SF FERMI DI RAGGIO $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$ $\quad n = \frac{N}{V}$

$\hookrightarrow$ GS GAS N.E. NON INTERAG

SCATOLA ℓ^3



MANDIAMO POI $\ell \to \infty$ (lim TD)

$\vec{p}$ DEVONO ESSERE AUTOAGG NELLA SCATOLA $\Rightarrow$ BC $\to$ FUNZ MEGLIO LE PERIODICHE (NON CAGO S_z XKÉ FATTORIZZATO)

$\vec{p}|\underline{k}\rangle = \hbar\underline{k}|\underline{k}\rangle$, $\quad \langle \underline{x}|\underline{k}\rangle = \frac{e^{i\underline{k}\underline{x}}}{\sqrt{V}}$

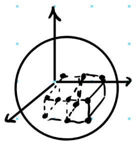
$\to$ IMPONGO BC PERIODICHE $\Rightarrow$ $\underline{k} = \underbrace{\frac{2\pi}{L}}_{\text{PASSO RETICOLARE}}\underline{n} \qquad \underline{n} \in \mathbb{Z}^3$

EN CINETICA X PARTIC SINGOLA

$t = \frac{p^2}{2m}$

X COSTRUIRE GS N É DEVO OCCUPARE I LIV DAL BASSO

$\Rightarrow$ I $\underline{k}$ SI DISPONGONO SU UN RETICOLO E SE NE METTO N HO RIEMPITO LA SFERA



$N = 2\sum_{\underline{k}} \theta(\underline{k} - \underline{k}_F) \longrightarrow$ DISTRIB DI FERMI (GRADINO)

NEL L TD $\sum_{\underline{k}} f(\underline{k}) \underset{\ell\to\infty}{=} \int \frac{d_3k}{(2\pi)^3} f(\underline{k})$

$\Rightarrow N = 2V\int \frac{d_3k}{(2\pi)^3}\theta(k_F - k) = \frac{2V}{(2\pi)^3}\frac{4}{3}\pi k_F^3 \Rightarrow k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \qquad n \equiv \frac{N}{V}$

$\Rightarrow T = 2V\int \frac{d_3k}{(2\pi)^3}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\theta(k_F - k) = \frac{3}{5}N E_F$

X GAS INTERAG $\to$ TRATTAZ PERTURBATIVA

OP A 2 PARTIC

$V = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N} v(ij) \qquad v(ij) = v(ji)$

$\langle\varphi|V|\varphi\rangle = N!\langle a_1 \ldots a_N|A(N)VA(N)|a_1\ldots a_N\rangle \leftarrow [V, A(N)] = 0$ XKÉ OP PARTIC IDENTICHE $\oplus$ IDEMPOT

$= \frac{N!}{N!}\sum_\sigma (-1)^\sigma \langle a_{\sigma_1}\ldots a_{\sigma_N}|\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} v(ij)|a_1\ldots a_N\rangle$

$= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\sum_\sigma (-1)^\sigma \langle a_{\sigma_1}|a_1\rangle \ldots \langle a_{\sigma_i} a_{\sigma_j}|v|a_i a_j\rangle \ldots \langle a_{\sigma_N}|a_N\rangle$

N-2 INDEX FIX $\to$ 2 BORDELLO $\to$ 2 CASI

$\sigma_i\sigma_j = ij$

$\sigma_i\sigma_j = ji$

$= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\langle a_i a_j|v|a_i a_j\rangle - \langle a_i a_j|v|a_j a_i\rangle$

$\to$ FATTO QUANTUM DOVUTO ALL'IDENTITÀ DELLE PARTIC

II QFT 2

$\{|r\rangle\}$ SONC SINGLE PARTIC $\Rightarrow \forall |r\rangle \to c_{\langle r|}, c^+_{|r\rangle}$

$\langle r|r'\rangle = \delta_{rr'}$

$\sum |r\rangle\langle r| = \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ REGOLE DI SEMPLIF

- **BOSE** $[c_r, c_{r'}] = [c^+_r, c^+_{r'}] = 0$

  $[c_r, c^+_{r'}] = \delta_{rr'}$ $\to$ CANONICAL COMMUTATION RELATION (CCR)

- **FERMI** $\{c_r, c_{r'}\} = \{c^+_r, c^+_{r'}\} = 0$

  $\{c_r, c^+_{r'}\} = \delta_{rr'}$ $\to$ CANONICAL ANTICOMMUTATION RELATION (CAR)

- POSSIBILE MAPP DI CCR [MAPP OLOMORFA]

  $\to$ A CHE FARE CON FUNZ ANALITICHE

$$[c, c^+] = 1 \longrightarrow (\hat{c} f)(z) = \frac{df}{dz}$$

$$(\hat{c}^+ f)(z) = z f(z)$$

$\to f$ DEVE VIVERE SU SP DI BARGMANN

$\equiv$ SET FUNZ INTERE ANALITICHE TC SU $\mathbb{C}$

$$\int \frac{d_2 z}{\pi} e^{-|z|^2} |f(z)|^2 = \|f\|^2 < \infty$$

$\hookrightarrow$ NORMA SU SP DI BARGMANN

È CMQ SP DI HILBERT:

$$\langle f|g\rangle = \int \frac{d_2 z}{\pi} e^{-|z|^2} \overline{f(z)}\, g(z)$$

SONC + NAT $\times$ FUNZ INTERE SONO LE z^n

$\to$ X ES: DIM CHE $\left\{\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\right\}$ SONC

$$(c^+ a_n)(z) = \frac{z^{n+1}}{\sqrt{n!}} = \sqrt{n+1}\, a_{n+1}(z)$$

$$(c\, a_n)(z) = n \frac{z^{n-1}}{\sqrt{n!}} = \sqrt{n}\, a_{n-1}(z)$$

$\Rightarrow$ ANALOGO OSCILLATORE ARMONICO $\to c c^+ = z \frac{d}{dz}$

STATI COERENTI: AUTOST DI $\hat{c}$ $\Rightarrow e^{\lambda z}$

$\times$ MAPP CCR DEVO PRENDERE FUNZ OLOMORFE DI + VAR $(z_1, z_2, \_\_)$

UNA VOLTA CHE HO $\hat{C}$ E $\hat{C}^+$ POSSO COSTRUIRE GLI ALTRI OP COME CL

→ TRASF CANONICA = MAPPA CHE MANDA OP CREAZ/DISTRUZ CHE SODDISFANO CCR / CAR IN ALTRI OP CREAZ/DISTRUZ CHE LE SODDISFANO ANCORA

+ FAMOSA: ROTAZ

$$d_r = \sum_{r'} O_{rr'} C_{r'} \qquad d_r^+ = \sum_{r'} (O_{rr'})^* C_{r'}^+$$

I FERMIONI GODONO DI SIMM SPECIALE: POSSO SCAMBIARE $C_r \leftrightarrow C_r^+$
→ SIMM PARTIC-BUCA

NUMERI DI OCCUPAZIONE

- BOSE

$$C_r^+ |n_1 \_ n_\infty\rangle_+ = \sqrt{\frac{N!}{n_1! \_ n_\infty!}} C_r^+ S(N) |r_1 \_ r_N\rangle = \sqrt{\frac{N!}{n_1! \_ n_\infty!}} \sqrt{N+1}\, S(N+1) |r\, r_1 \_\rangle$$

CON $r_1 \leq r_2 \leq \_$ ($\Rightarrow r$ È IL + ORDINATO)

MA SOTTO S POSSO PERMUTARE COME VOGLIO

$$= \sqrt{\frac{(N+1)!}{n_1! \_ (n_r+1)! \_}} \sqrt{n_r+1}\; S(N+1) |r_1 \_ r \_ r_N\rangle$$

$$= \sqrt{n_r+1}\, |n_1 \_ (n_r+1) \_ n_\infty\rangle$$

x DISTRUTTORE CONTO + SEMPLICE

$$C_r |n_1 \_ n_r \_ n_\infty\rangle = \sqrt{n_r}\, |n_1 \_ (n_r-1) \_ n_\infty\rangle$$

DEF [OP NUMERO]

$\hat{n}_r = \hat{C}_r^+ \hat{C}_r$ (AUTOAGG) → $[\hat{n}_{r'}, \hat{n}_{r''}] = 0$ COME CONSEGUENZA ALGEBRA

→ STATI NUMERO = AUTOST COMUNI A TUTTI GLI OP NUMERO $\hat{n}_r |n_1 \dots n_\infty\rangle = n_r |n_1 \dots n_\infty\rangle$

• FERMI (CAR) $\quad r_1 \le \dots \le r_N$

$$c_r^+ |n_1 \dots\rangle = \sqrt{N!}\, c_r^+ A(N) |r_1 \dots r_N\rangle = \sqrt{N!}\,\sqrt{N+1}\, A(N+1) |r\, r_1 \dots r_N\rangle$$

$$= \sqrt{(N+1)!} \begin{cases} 0 & \text{SE } n_r = 1 \\ (-1)^{n_1+\dots+n_{r-1}} A(N+1)|r_1 \dots r \dots r_N\rangle & \text{SE } n_r = 0 \end{cases}$$

r DEVE ANDARE AL POSTO GIUSTO FACENDO TANTI SCAMBI QUANTI SONO GLI STATI < r

$\Rightarrow |n_1 \dots (n_r+1) \dots n_\infty\rangle$

ANCHE X I FERMIONI $[\hat n_r, \hat n_{r'}] = 0$ XKÉ PROD DI 2 OP FERMIONICI É BOSONICO

⇒ BASE COMUNE ANCORA STATI NUMERO CON AUTOVAL 0 E 1 (DIM KESS)

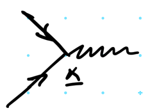
FINORA ABBIAMO CONSID UNA BASE PROPRIA $|r\rangle$ DI $\mathcal{H}$ MA ∃ ANCHE BASI IMPROPRIE

→ POSSO DEF $\hat c^+_{|\underline{x} m\rangle} = \hat\psi^+_m(\underline{x})$
$\hat c_{\langle \underline{x} m|} = \hat\psi_m(\underline{x})$ → OP DI CAMPO → CREANO / DISTRUGGONO STATI IMPROPRI (NON FISICI)

• BOSE $[\psi_m(\underline{x}), \psi^+_{m'}(\underline{x}')] = \langle \underline{x} m | \underline{x}' m'\rangle = \delta_{mm'}\,\delta_3(\underline{x}-\underline{x}')$

• FERMI $\{\psi_m(\underline{x}), \psi^+_{m'}(\underline{x}')\} = \delta_{mm'}\,\delta_3(\underline{x}-\underline{x}')$

DIAG FEYNMAN



PARTICELLA CREATA IN $\underline{x}$

QUESTI OP SONO COLLEGATI

$|r\rangle = \sum_m \int d_3\underline{x}\, |\underline{x} m\rangle\langle \underline{x} m | r\rangle$ → CL CONTINUA DI STATI $(\underline{x}\, m)$

GLI STATI IMPROPRI ∄ SU $\mathcal{H}$ MA ∃ E HANNO SENSO COME SOMME CONTINUE

VALEVA $c^+_{\alpha u+\beta v} = \alpha c^+_u + \beta c^+_v \Rightarrow \hat c^+_r = \sum_m \int d_3\underline{x}\, \langle \underline{x} m|r\rangle\, \hat\psi^+_m(\underline{x})$

CIOÉ CREO UN PACCHETTO PESATO DA STATO FISICO DI CREAZ DI PARTIC SINGOLE CHE GENERA UN OP

ANALOG $\hat{C}_r = \sum_m \int d_3\underline{x} \, \langle r | \underline{x} m \rangle \, \hat{\psi}_m(\underline{x})$

IL CAMBIO DI BASE CHE FACEVO SU UNA PARTIC SI TRADUCE IN UNA REGOLA DI CAMBIO DI BASE DI OP CREAZ/DISTRUZ SU SP IMPULSIVO $|\underline{x}\, m\rangle$

ANALOGAM CI SONO QUELLI DEL MOMENTO CON 2 VARIANTI

- FINCHÉ STÀ NELLA SCATOLA $\underline{k}$ È DISCRETO $\Rightarrow$ PROPRI XKÉ $\exists\, H$
- QUANDO VADO NEL CONTINUO DIVENTANO OP DI CAMPO

II QTZ DI OP A 1 PARTIC

$O = \sum O(i)$

$|r\rangle$ SONC $\Rightarrow$ c_r^+, c_r CON CCR O CAR

$\hat{O}\, S(N)_\pm |u_1 \_ u_N\rangle$ $\quad$ u_k GEN VETT

↳ O SOMMA DI OP $\Rightarrow$ POSSO SCAMBIARE

$= S(N)_\pm \sum_i |u_1 \_ O u_i \_ u_N\rangle = \sum_i^N \sum_r^\infty \langle r | O u_i \rangle S(N)_\pm |u_1 \_ \overset{i}{r} \_ u_N\rangle$

$O|u_i\rangle = \sum_r |r\rangle\langle r|O|u_i\rangle$

$= \sum_{rr'}^\infty \langle r|O|r'\rangle \sum_{i=1}^\infty \langle r'|u_i\rangle S(N)_\pm |u_1 \_ r \_ u_N\rangle$ PONGO r AL I° POSTO $\Rightarrow$ CAMBIO SGN x FERMIONI $\rightarrow$ $i-1$ SALTI

$(\pm 1)^{i-1} S(N)_\pm |r\, u_1 \_ u_N\rangle = \frac{(\pm)^{i-1}}{\sqrt{N}} c_r^+ S(N-1)_\pm |u_1 \_ \cancel{u_i} \_ u_N\rangle$

$= \sum_{rr'} \hat{C}_r^+ \langle r|O|r'\rangle \hat{C}_{r'} S(N)_\pm |u_1 \_ u_N\rangle$

$\Rightarrow$ IN II QTZ $\boxed{\hat{O} = \sum_{rr'} \hat{C}_r^+ \langle r|O|r'\rangle \hat{C}_{r'}}$

PROP

1. VAL DI ASPETTAZ SUL VUOTO $\langle 0|\hat{O}|0\rangle = 0$
2. ORDINAMENTO NORMALE (PRIMA CREATORI CHE DISTRUTTORI)
3. CONSERVO N (O NON CAMBIA # PARTIC)
4. INDIP DA N
5. ESPRESSIONE UNIVERSALE
6. ANALOGIA CON $O = \sum_{rr'} |r\rangle\langle r|O|r'\rangle\langle r'|$

> CONSIGLI X GLI ACQUISTI:
>
> SUTHERLAND
> "BEAUTIFUL MODEL"
> X VEDERE MODELLI ESATTAM RISOLUBILI

SE SCELGO $|r\rangle$ T.C. $O|r\rangle = \kappa_r |r\rangle$ EIGEN $\langle r|r'\rangle = \delta_{rr'}$

$\Rightarrow \hat{O} = \sum_r \hat{c}_r^+ \hat{c}_r \alpha_r = \sum \alpha_r \hat{n}_r$

K ES NELLA SCATOLA CON BC PERIODICHE $\vec{p}$ HA EIGEN $|\underline{k} m\rangle$ $\underline{k} = \frac{2\pi}{L}\underline{n}$, $\underline{n} \in \mathbb{Z}^3$

$$T = \sum \frac{p_i^2}{2m} = \sum_{\underline{k} m} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{n}_{\underline{k} m}$$

SE VOGLIO GAS LIBERO $\Rightarrow$ ASPETTAZ SU SF DI FERMI

$$\langle F|\hat{T}|F\rangle = \sum_{km} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \langle F|\hat{n}_{km}|F\rangle = 2\sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\theta(k_F - k) = 2V\int \frac{d_3 k}{(2\pi)^3}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$\hookrightarrow$ PRESENTE FERMI

$= \frac{3}{5} N \varepsilon_F \longrightarrow$ EN A N e^- IN GAS NON INTERAGENTI

PRENDIAMO OP DENSITÀ

$$\hat{n}(\underline{x}) = \sum_i^N \delta_3(\underline{x} - \hat{\underline{x}}_i) \overset{|\underline{x} m\rangle}{=} \sum_{m'm''} \int d_3\underline{x}' d_3\underline{x}'' \hat{\varphi}^+_{m'}(\underline{x}') \hat{\varphi}_{m''}(\underline{x}'') \underbrace{\langle \underline{x}' m'|\delta_3(\underline{x} - \hat{\underline{x}})|\underline{x}'' m''\rangle}_{= \delta_3(x - x'')\delta_3(x' - x'')\delta_{m'm''}}$$

$= \sum_m \hat{\varphi}^+_m(\underline{x})\hat{\varphi}_m(\underline{x}) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\varphi}^+_m(\underline{x})\hat{\varphi}_m(\underline{x})$ OP DENSITÀ IN $\underline{x}$ CON SPIN IN z $m\hbar$

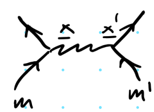
$$\Rightarrow \sum_m \int d_3\underline{x}\, \hat{\varphi}^+_m(\underline{x})\hat{\varphi}_m(\underline{x}) = \hat{N}$$

II QTZ DI OP A 2 PARTIC

NON ANCORA DIAG DI FEYNMAN XKÉ MANCA t

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \mathcal{V}(i,j) \longrightarrow \hat{V} = \frac{1}{2}\sum_{r_1 r_2 r_3 r_4} \hat{c}^+_{r_1}\hat{c}^+_{r_2}\langle r_1 r_2|\mathcal{V}|r_3 r_4\rangle \hat{c}_{r_4}\hat{c}_{r_3}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m m'} \int d_3\underline{x}\, d_3\underline{x}'\, \hat{\varphi}^+_m(\underline{x})\hat{\varphi}^+_{m'}(\underline{x}')\mathcal{V}(\underline{x}\,\underline{x}')\hat{\varphi}_{m'}(\underline{x}')\hat{\varphi}_m(\underline{x})$$



MOSTRIAMO 2 FORMULE CON

- $\underbrace{c_a^+}_{\sqrt{N}} c_b S(N)_\pm |a_1 \_ a_N\rangle = c_a^+ \sum_{i=1}^N (\pm)^{i+1}\langle b|a_i\rangle S(N-1)_\pm |a_1 \_ \cancel{a_i} \_ a_N\rangle$

$= \sum (\pm)^{i+1}\langle b|a_i\rangle S(N)_\pm |a\, a_1 \_ \cancel{a_i} \_\rangle$ X FAR SPARIRE sgn a VA IN $i \Rightarrow i+1$ SALTI

$= \sum \langle b|a_i\rangle S(N)_\pm |a_1 \_ a \_ a_N\rangle$

- $C_a^+ C_b C_c^+ C_d = C_a^+ C_b \sum_i \langle d|u_i\rangle S(N)_\pm |u_1 \_ c \_ u_N\rangle$ $\mp$ TERMINE IN CUI a FINISCE AL POSTO i DI c

$$= \sum_i^N \langle d|u_i\rangle \langle b|c\rangle S(N)_\pm |u_1 \_ \overset{i}{a} \_ u_N\rangle + \sum_{i \neq j} \langle d|u_i\rangle\langle b|u_j\rangle S(N)_\pm |u_1 \_ \overset{i}{c} \_ \overset{j}{a} \_ u_N\rangle$$

DA QUESTA, USANDO $[C_a, C_b^+]_\pm = \langle a|b\rangle$ RICAVIAMO $C_a^+ C_c^+ C_b C_d$

$\rightarrow$ SAPPIAMO CHE $C_c^+ C_b = \mp \langle b|c\rangle \pm C_b C_c^+$

$\Rightarrow C_a^+ C_c^+ C_b C_d |\quad\rangle = C_a^+ (\mp \langle b|c\rangle \pm C_b C_c^+) C_d |\quad\rangle \rightarrow$ VEDI SVOLGIM SU APPUNTI

$\Rightarrow$ FORMA OP A 2 PART. C

PROP 25

$$[25, P_{12}] = 0 \Rightarrow P_{12}\, 25\, P_{12} = 25 \Rightarrow \langle r_1 r_2|25|r_3 r_4\rangle = \langle r_2 r_1|25|r_4 r_3\rangle$$

THOMAS-FERMI

VOGLIAMO SCRIVERE E_{GS} COME FUNZIONALE DENSITÀ ELETTRONICA

$\rightarrow$ ABBIAMO VISTO $T = \frac{3}{5} N E_F = \frac{3}{5} n V \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} = \boxed{\frac{3}{5} V \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} n^{5/3}}$

EN DI GS x n UNIFORME

IDEA $T[n] = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} \int_V d_3\underline{x}\; n^{5/3}(\underline{x})$

$\rightarrow$ SE n COST $\Rightarrow$ EXM x GAS IDEALE

x ATOMO CON Z e^-

$$E_{GS}[n] = T_{T.F}[n] - Ze^2 \int d_3\underline{x}\, \frac{n(\underline{x})}{|\underline{x}|} + \frac{e^2}{2} \int d_3\underline{x}\, d_3\underline{y}\, \frac{n(\underline{x})\, n(\underline{y})}{|\underline{x}-\underline{y}|} + \underbrace{\mu}_{\text{MOLTIP DI LAGRANGE}} \underbrace{\left[Z - \int d_3\underline{x}\, n(\underline{x})\right]}_{\text{CONSTRAINT } Z\, e^-}$$

INTERAZ e^--NUCLEO; INTERAZ DENSITÀ-DENSITÀ

$\rightarrow$ CERCO $\frac{\delta E_{GS}[n]}{\delta n(\underline{x})} = 0$

$\rightarrow E_{GS}[n + \delta n] - E_{GS}[n] = \int \delta n(\underline{x}) \frac{\delta E}{\delta n} d_3\underline{x} + \_\_$

ABBIAMO $\frac{\delta n(\underline{x})}{\delta n(\underline{y})} = \delta(\underline{x} - \underline{y})$

$$0 = \frac{3}{5}\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2)^{2/3}\frac{5}{3}n(\underline{x})^{2/3} - \frac{Ze^2}{|\underline{x}|} + e^2\int d_3y\, \frac{n(\underline{y})}{|\underline{x}-\underline{y}|} - \mu$$

SE CALCOLO XKÉ ATOMO MOLTO GROSSO E n DECADE $\propto x^{-3}$

$\Rightarrow$ SERVONO CORREZIONI DOVUTE GRADIENTE

IL PASSAGGIO $n \to n(x)$ É DETTO LOCAL DENSITY APPROXIMATION

LIBRO
GALINDO-PASCHAL

GAS ELETTRONICO OMOGENEO

N é IN PRESENZA DI DENSITÀ DI CARICA POS $\rho(\underline{x})$ ASSEGNATA

(POI VEDREMO QUELLA DINAMICA X NUCLEI OSCILLARE $\Rightarrow$ FONONI)

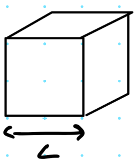
$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \underbrace{\frac{e^2}{2}\sum_{i\neq j}\frac{1}{|x_i - x_j|}}_{U_{ee}} \underbrace{- e\sum_{i=1}^{N}\int d_3x\, \frac{\rho(\underline{x})}{|\underline{x}-\underline{x}_i|}}_{U_{eB}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\int d_3x\, d_3y\, \frac{\rho(\underline{x})\rho(\underline{y})}{|\underline{x}-\underline{y}|}}_{U_{BB}}$$

$\to$ U QUE?

$\rho(\underline{x})$ OMOG $\Rightarrow$ VOGLIO SIST È OMOG XKÉ HO INVAR X TRASLAZ

$\Rightarrow$ USO BASE $\vec{p}$ XKÉ GENERATORE TRASLAZIONI $|\underline{k}\, m\rangle$



PROBL COULOMB $\to$ LONGO RANGE

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-y|} \longrightarrow \frac{e^{-\mu|\underline{x}-\underline{y}|}}{|\underline{x}-\underline{y}|}$$

PER YUKAWA

QUANDO $L \to \infty$ $\mu \to 0$ O LO USO X SCHERMARE

DECADE COME $1/\mu$

VOGLIO CHE SEMBRI MOLTO DENTRO LA SCATOLA $\Rightarrow \frac{1}{\mu} \ll L$

VICINO AI BORDI HO ~~EFF~~ SCATOLA MA VOGLIO EFFETTO $\Rightarrow$ GUARDO DENTRO

- $\boxed{T} = \sum_{\underline{k}m} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^+_{\underline{k}m} a_{\underline{k}m}$

- $\boxed{U_{el}} = \frac{e^2}{2} \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ k_3 k_4}} \sum_{\substack{m_1 m_2 \\ m_3 m_4}} a^+_{k_1 m_1} a^+_{k_2 m_2} a_{k_4 m_4} a_{k_3 m_3} \langle k_1 m_1\, k_2 m_2 | \frac{e^{-\mu|x_1 - x_2|}}{|x_1 - x_2|} | k_3 m_3\, k_4 m_4 \rangle$

INDIP DA S_z

$$= \delta_{m_1 m_3} \delta_{m_2 m_4} \int d_3x\, d_3y \langle k_1 k_2 | \frac{e^{-\mu|x_1-x_2|}}{|x_1-x_2|} | xy \rangle \langle xy | k_3 k_4 \rangle$$

$$= \sum_k \int d_3x\, d_3y \frac{e^{-\mu|\underline{x}-\underline{y}|}}{|\underline{x}-\underline{y}|} \langle \underline{k}_1 | \underline{x} \rangle \langle k_2 | \underline{y} \rangle \overbrace{\langle \underline{x} | \underline{k}_3 \rangle}^{e^{ik_3 x}/\sqrt{V}} \langle \underline{y} | \underline{k}_4 \rangle$$

$$= \sum_k \int d_3x\, d_3y \frac{e^{-\mu|\underline{x}-\underline{y}|}}{|\underline{x}-\underline{y}|} \frac{e^{i(k_3-k_1)(\underline{x}-\underline{y})}}{V^2} e^{i(\underline{k}_4 - \underline{k}_2 + \underline{k}_3 - \underline{k}_1)\underline{y}}$$

TRASLO $x - y \equiv x'$

SPARISCE TERMINE DI BORDO

$$\int d_3y\, e^{iky} = V \langle k | 0 \rangle = V \delta_{k0}$$

PROD INTERNO CON $\underline{1}$

$$= \sum_k \int d_3x' \frac{e^{-\mu|\underline{x}'|}}{|\underline{x}'|} \frac{e^{i(\underline{k}_3 - \underline{k}_1)\underline{x}'}}{V^{\cancel{2}}} \cancel{V} \delta_{k_4+k_3,\, k_1+k_2}$$

$\rightarrow$ ENTRANO PARTIC CON k_3 E k_4 $\rightarrow$ ESCONO PARTIC CON k_1 E k_2

$\rightarrow$ CONSERVAZ MOMENTO

INTEG DIP DA $\underline{k}_3 - \underline{k}_1$

$\hookrightarrow$ INDIP DA ROTAZ $\Rightarrow$ ASSE $z \parallel \underline{x}'$ + COORD SF

$$= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{e^{-\mu r}}{r} \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, e^{i|k_3 - k_1| r \cos\theta}$$

$\rightarrow \cos\theta = \xi$

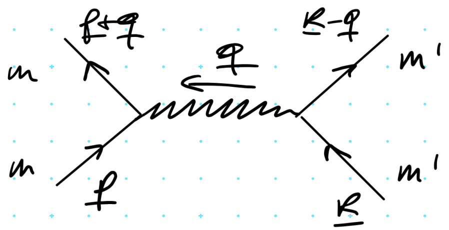
$$= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{e^{-\mu r}}{r} \int_{-1}^{+1} d\xi\, e^{i|k_3-k_1| r \xi} = 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{e^{i|k_3-k_1|r} - e^{-i|k_3-k_1|r}}{i|k_3-k_1|r}$$

$$= \frac{2\pi}{i|k_3-k_1|}\left[\frac{1}{\mu - i|k_3-k_1|} - \frac{1}{\mu+i|k_3-k_1|}\right]$$

$$= \frac{2\pi}{\cancel{i|k_3-k_1|}} \; \frac{2\cancel{i|k_3-k_1|}}{\mu^2+|k_3-k_1|^2}$$

$$\Rightarrow V_{ee} = \frac{e^2}{2V}\sum_{\substack{k_1k_2\\k_3k_4}}\sum_{\substack{m_1m_2\\m_3m_4}}\delta_{m_1m_3}\,\delta_{m_2m_4}\,\delta_{k_1+k_2,k_3+k_4}\,\frac{4\pi}{\mu^2+|k_3-k_1|^2}\,a^\dagger_1 a^\dagger_2 a_4 a_3$$

$$V_{ee} = \frac{e^2}{2V}\sum_{mm'}\sum_{\underline{k}\underline{p}\underline{q}} \frac{4\pi}{\mu^2+q^2}\, a^\dagger_{\underline{p}+\underline{q}\,m}\, a^\dagger_{\underline{k}-\underline{q}\,m'}\, a_{\underline{k}m'}\, a_{\underline{p}m}$$



MOMENTO ENTRANTE E USCENTE UGUALI

IDEM x SPIN

SE $\mu \to 0$ $\Rightarrow$ PROBL x $\underline{q}=\underline{0}$ $\Rightarrow$ NON POSSO ANCORA BUTTARE μ

$\boxed{\underline{\text{BOH}}}$

$$(\nabla^2-\mu^2)\varphi = \delta(\underline{x},\underline{y}) \xrightarrow[\text{SP}\,\underline{k}]{} (-k^2-\mu)\tilde{\varphi} = 1$$

MANCA POT YUKAWA DA TRASF FOURIER

$$\boxed{V_{eb}} = \sum_i \int d_3\underline{y}\; \frac{(-e\,\rho(\underline{y}))}{|\underline{y}-\hat{\underline{x}}_i|}$$

$$= \sum_{\substack{\underline{k}\,\underline{k}' \\ m\,m'}} Q^+_{\underline{k}m} Q_{\underline{k}'m'} \langle \underline{k}m | \int d_3y\, (-e\rho(y)) \frac{e^{-\mu|\underline{y}-\hat{\underline{x}}|}}{|\underline{y}-\hat{\underline{x}}|} | \underline{k}'m' \rangle$$

$$= \sum Q^+_{\underline{k}m} Q_{\underline{k}'m'} \delta_{mm'} \int d_3y\, (-e)\, \rho(\underline{y}) \int d_3\underline{x} \langle \underline{k}|\underline{x}\rangle\langle \underline{x}|\underline{k}'\rangle \frac{e^{-\mu|\underline{y}-\underline{x}|}}{|\underline{y}-\underline{x}|}$$

$$= \sum Q^+_{\underline{k}m} Q_{\underline{k}'m'} \int d_3y\, (-e)\rho(\underline{y}) \int \frac{d_3\underline{x}}{V} e^{i(\underline{k}'-\underline{k})(\underline{x}+\underline{y})} \frac{e^{-\mu|\underline{y}-\underline{x}|}}{|\underline{y}-\underline{x}|}$$

$\rightarrow \underline{x}' \equiv \underline{x} - \underline{y}$

$$= \sum Q^+_{\underline{k}m} Q_{\underline{k}'m'} \int d_3y\, (-e)\rho(\underline{y}) \frac{e^{i(\underline{k}'-\underline{k})\underline{y}}}{V} \int d_3x' \frac{e^{-\mu|\underline{x}'|}}{|\underline{x}'|} e^{-i(\underline{k}'-\underline{k})\underline{x}'}$$

$\rightarrow$ VOL V FINITO

$$\rho(\underline{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\underline{k}} \rho_{\underline{k}} e^{i\underline{k}\underline{x}} \longrightarrow \rho_{\underline{k}} = \int d_3\underline{x}\, \rho(\underline{x}) e^{-i\underline{k}\underline{x}}$$

<u>NB</u> $\rho_{\underline{0}} = Q$

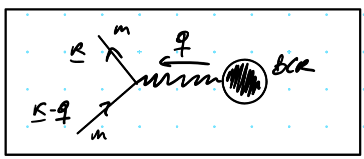
<u>IN $\mathbb{R}^3$</u>

$$\rho(\underline{x}) = \int \frac{d_3\underline{k}}{(2\pi)^3} \rho(\underline{k}) e^{i\underline{k}\underline{x}}$$

$$= \sum_{\underline{k}'\underline{k}m} Q^+_{\underline{k}m} Q_{\underline{k}'m} \int d_3y\, (-e)\, \rho(\underline{y}) \frac{e^{i(\underline{k}'-\underline{k})\underline{y}}}{V} \frac{4\pi}{|\underline{k}'-\underline{k}|^2+\mu^2}$$

$$= \sum_{\underline{k}'\underline{k}m} Q^+_{\underline{k}m} Q_{\underline{k}'m} \frac{-e}{V} \rho(\underline{k}-\underline{k}') \frac{4\pi}{|\underline{k}-\underline{k}'|+\mu^2} \qquad q \equiv \underline{k} - \underline{k}'$$

$$= -\frac{e}{V} \sum_{\underline{k}qm} Q^+_{\underline{k}m} Q_{\underline{k}-qm}\, \rho(q) \frac{4\pi}{q^2+\mu^2}$$



$$\bullet\ \boxed{U_{bb}} = \frac{1}{2} \int d_3\underline{x}\, d_3\underline{y}\, \frac{\rho(\underline{x})\rho(\underline{y})}{|\underline{x}-\underline{y}|} e^{-\mu|\underline{x}-\underline{y}|} = \frac{1}{2V} \sum_{\underline{k}\underline{k}'} \rho_{\underline{k}} \rho_{\underline{k}'} \int d_3\underline{x}\, d_3\underline{y}\, \frac{e^{-\mu|\underline{x}-\underline{y}|}}{|\underline{x}-\underline{y}|} e^{i\underline{k}(\underline{x}\pm\underline{y}) + i\underline{k}'\underline{y}}$$

$$\overset{x' = x-y}{=} \frac{1}{2V} \sum_{\underline{k}\underline{k}'} \rho_{\underline{k}} \rho_{\underline{k}'} \frac{4\pi}{k^2+\mu^2} \underbrace{\int d_3y\, e^{i(\underline{k}+\underline{k}')\underline{y}}}_{V\delta_{\underline{k}+\underline{k}',\underline{0}}} = \frac{1}{2V} \sum_{\underline{k}} \rho_{\underline{k}} \rho_{-\underline{k}} \frac{4\pi}{k^2+\mu^2} \qquad (\underline{k} \longrightarrow q)$$

ANCORA NON POSSIAMO MANDARE $\mu \to 0$ XKÉ PRIMA DOBBIAMO ISOLARE Q IN $\hat{H}$

IN $\boxed{q=0}$

COMMUTIAMO

$$\circ\ U_{ee}\Big|_{q=0} = \frac{e^2}{2V}\sum_{mm'}\sum_{\underline{k}\underline{l}} \frac{4\pi}{\mu^2} a^+_{\underline{l}m}\, a^+_{\underline{k}m'}\, a_{\underline{k}m'}\, a_{\underline{l}m}$$

$$a^+_{\underline{l}m}a_{\underline{l}m}a^+_{\underline{k}m'}a_{\underline{k}m} = a^+_{\underline{l}m}a_{\underline{l}m}\left(a_{\underline{k}m'}a^+_{\underline{k}m'} - \delta_{\underline{k}\underline{k}}\right)$$

$$\circ\ U_{eb}\Big|_{q=0} = -\frac{e}{V}\sum_{\underline{k}m}\frac{4\pi}{\mu^2}a^+_{\underline{k}m}a_{\underline{k}m}\underbrace{\rho_{\underline{0}}}_{Q} = -\frac{e}{V}\frac{4\pi}{\mu^2}\hat{N}Q$$

$$\circ\ U_{bb}\Big|_{q=0} = \frac{1}{2V}\rho_{\underline{0}}^2\frac{4\pi}{\mu^2} = \frac{Q^2}{2V}\frac{4\pi}{\mu^2}$$

$$\Rightarrow H\Big|_{\underline{q}=\underline{0}} = \overbrace{\frac{e^2}{2V}\frac{4\pi}{\mu^2}\underbrace{(\hat{N}^2-\hat{N})}_{\text{DA COMMUTAZ}}}^{U_{ee}}\ \overbrace{-\frac{e}{V}\hat{N}Q\frac{4\pi}{\mu^2}}^{U_{eb}}\ \overbrace{+\frac{Q^2}{2V}\frac{4\pi}{\mu^2}}^{U_{bb}}$$

$$= \frac{4\pi}{\mu^2}\left[e^2\hat{N}^2 - 2e\hat{N}Q + Q^2\right]\frac{1}{2V} - \frac{e^2}{2V}\frac{4\pi}{\mu^2}\hat{N} = \frac{4\pi}{\mu^2}\frac{1}{2V}(eN-Q)^2 - \underbrace{\frac{e^2}{2V}\frac{4\pi}{\mu^2}\hat{N}}$$

EN ESTENSIVA

$\langle H\rangle \propto N$

$$\Rightarrow \frac{\langle H\rangle}{N} \propto \frac{1}{V\mu^2}\ \xrightarrow[\mu\to0]{L\to\infty}\ 0$$

SISTEMA NEL CASO FINITO

$\mu L \gg 1 \Rightarrow \mu^2 L^3 \to \infty$ AL DENOMINATORE $\Rightarrow$ MI TENGO μ

X SIST ∞ $\quad \frac{N}{V} \to n \quad$ CHIEDO LA NEUTRALITÀ $Q = eN$

$\Rightarrow$ POSSO PORRE $\mu = 0$

$$\to H = \sum_{\underline{k}m}\frac{\hbar^2k^2}{2m}a^+_{\underline{k}m}a_{\underline{k}m} + \frac{e^2}{2V}\sum_{mm'}\sum_{\underline{k}\underline{l}\underline{q}}\frac{4\pi}{q^2}a^+_{\underline{l}+\underline{q}m}a^+_{\underline{k}-\underline{q}m'}a_{\underline{k}m'}a_{\underline{l}m}$$

$$-\frac{e}{V}\sum_{\underline{k}\underline{q}m}\frac{4\pi}{q^2}\rho(\underline{q})a^+_{\underline{k}m}a_{\underline{k}-\underline{q}m} + \frac{1}{2V}\sum_{\underline{q}}\rho_{\underline{q}}\rho_{-\underline{q}}\frac{4\pi}{q^2}$$

CONSIDERO ORA HOMOGENEOUS ELECTRON GAS (HEG) IMMERSO IN JELLIUM DI CARICA POS

$\to \boxed{\rho(\underline{x})\ \text{UNIF}} \Rightarrow \boxed{eN = V\rho}$

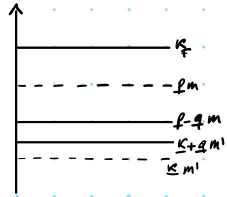
$\hookrightarrow \rho_{\underline{k}} = 0$ SOLO IN $\underline{k} = 0$ MA ABBIAMO VISTO CHE È ESATTAM QUELLO CHE SI ANNULLA

$$H = \sum_{\underline{k}m}\frac{\hbar^2k^2}{2m}a^+_{\underline{k}m}a_{\underline{k}m} + \frac{1}{2V}\sum_{\substack{\underline{k}\underline{l}\\ mm'}}\sum_{\underline{q}\neq0}\frac{4\pi e^2}{q^2}a^+_{\underline{l}+\underline{q}m}a^+_{\underline{k}-\underline{q}m'}a_{\underline{k}m'}a_{\underline{l}m}$$

CONSIDERIAMO SF FERMI $|F\rangle \to$ GS $\hat H_0$ CINETICA

$\Rightarrow$ GS $\hat H$ IN MODO PERTURBATIVO

$\langle F|\hat H|F\rangle \geq E_{GS}$ $\quad |F\rangle = |11\_100\_0\rangle$



SONO $\bar e \Rightarrow \exists!$ MODO × SCAMBIARE GLI STATI

$pm = k+qm'$

$km' = p-qm$

$$\langle F|\hat H|F\rangle = \overbrace{\frac35 N\epsilon_F}^{T} + \frac{1}{2V}\sum_{\substack{k p q \neq 0\\ m m'}} \frac{4\pi e^2}{q^2}\langle F| a^+_{pm}\, a^+_{km'}\, a_{k+qm'}\, a_{p-qm}|F\rangle$$

$$= \frac35 N\epsilon_F + \frac{1}{2V}\sum_{kpm}\frac{4\pi e^2}{|p-k|}\langle F|\underbrace{a^+_{pm}\,a^+_{km}\,a_{pm}\,a_{km}}_{\hat N_{pm}\ \hat N_{km}}|F\rangle$$

$$= \frac35 N\epsilon_F + \frac{1}{2V}\sum_{kpm}\frac{4\pi e^2}{|p-k|}\left(-\theta(k_F-k)\theta(k_F-p)\right)$$

NOTA: CONTRIBUTO COULOMB NEGATIVO E COSTRUITO SOLO DA $\bar e$ CON SPIN $\uparrow\uparrow$

QUINDI $\langle F|U|F\rangle = \frac{-1}{2V}\sum_{\substack{kq\\m}}\frac{4\pi e^2}{|k-p|}\theta(k_F-k)\theta(k_F-p) \xrightarrow{\lim TD} -\frac{1}{2V}V^2\int\frac{d_3p\,d_3k}{(2\pi)^6}\frac{4\pi e^2}{|k-p|}\theta(k_F-k)\theta(k_F-p)$

$\sin^2\theta\, d\theta = d\xi$ $\quad$ INTEGRO SU SF DI FERMI (?)

$$= -\frac V2 \frac{8\pi^2}{(2\pi)^6}\int_0^{k_F}p^2dp\int_0^{k_F}k^2dk\int_{-1}^{+1}d\xi\, \frac{4\pi e^2}{k^2+p^2-2kp\xi} = -\frac V2\frac{1}{8\pi^4}\int_0^{k_F}p^2dp\int_0^{k_F}k^2dk\,(-)\frac{4\pi e^2}{2kp}\ln(k^2+p^2-2kp\xi)\Big|_{-1}^{+1}$$

$$= -\frac V4 \frac{4\pi e^2}{8\pi^4}\int_0^{k_F}k\,dk\int_0^{k_F}dp\,p\,\ln\left[\left(\frac{k+p}{k-p}\right)^2\right]$$

INTEG SIMM × SCAMBIO $k\leftrightarrow p$

$\to \int_a^b dx_1\int_a^b dx_2 \ldots \int_a^b dx_n\, f(x_1\ldots x_n)$ TOT SIMM

$= N!\int_a^b dx_1\int_a^{x_1}dx_2\ldots\int_a^{x_{n-1}}dx_n\, f$

$$\Rightarrow \langle F|\hat H|F\rangle = \frac35 N\epsilon_F - V\frac{e^2}{4\pi^3}k_F^4$$

$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0{,}5$ Å RAGGIO BOHR $\quad$ E_I = IONIZZAZ ATOMO IDROGENO 13,6eV

$$\frac{\langle \hat H\rangle}{N} = \frac35\frac{\hbar^2}{2m}k_F^2 - \frac1n\frac{e^2}{4\pi^3}k_F^4 = \frac35\frac{\hbar^2}{2m}k_F^2 - \frac{3}{4\pi}e^2k_F = \frac{3}{10}\frac{e^2a_0^2}{a_0}k_F - \frac{3}{4\pi}\frac{e^2}{a_0}k_Fa_0 = \frac{e^2}{2a_0}\left[\frac35(a_0k_F)^2 - \frac{3}{2\pi}(a_0k_F)\right]$$

$k_F^3 = 3\pi^2 n \to \frac1n = \frac{3\pi^2}{k_F^3}$

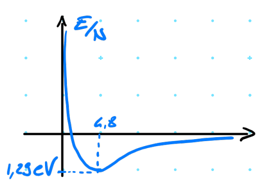
DETTA $n = \frac NV$ DENSITÀ ELETTRONICA

$\Rightarrow$ ESPANSE MEDIA $\bar e$ DATA DA $\left(\frac VN\right)^{1/3} = \left[\frac43\pi(r_sa_0)^3\right]^{1/3}$ $\quad$ MA $\frac1n = \frac{3\pi^2}{k_F^3} = \frac VN = \frac43\pi(r_sa_0)^3$

r_s PARAM DI SEITZ

$\Rightarrow (k_Fa_0)^2 = 3\pi^2\frac{3}{4\pi}r_s^{-3} \to a_0k_F = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3}\frac{1}{r_s}$

$$\Rightarrow \langle F|H|F\rangle = \frac{e^2}{2a_0}\left[\frac35\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3}\frac{1}{r_s^2} \underbrace{-}_{\text{TERMINE DI SCAMBIO}} \frac{3}{2\pi}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3}\frac{1}{r_s}\right]$$



NEI METALLI

$\boxed{Al}$ $r_s \simeq 2{,}07$

$\boxed{Na}$ $r_s \simeq 3{,}93$

$\boxed{K}$ $r_s \simeq 4{,}86$

$\boxed{Rb}$ $r_s \simeq 5{,}20$

- SI PUÒ VEDERE CHE IN $r_s = 6$ → TRANSIZ DI FASE ⇒ IL SIST SI POLARIZZA (ES 1,6 PAG 32 FETTER)
- PER r_s MAGGIORE → CRISTALLO DI WIGNER
- ∃ ANCHE ARGOM × DET STIME ESATTE DEL lim DEL VAL ESATTO

$$\text{LIEB} \to \frac{e^2}{2a_0}\left(\frac{2{,}10}{r_s^2} - \frac{1{,}8}{r_s}\right)$$

→ TERMINE DI SCAMBIO

$$E_x = -\frac{e^2}{2a_0} N \frac{3}{2\pi} k_F a_0 = -\frac{e^2}{2\cancel{a_0}} nV \frac{3\cancel{a_0}}{2\pi}(3\pi^2 n)^{1/3}$$ → ISPIRA UN FUNZIONALE DI n

$$E_x[n] = -\frac{e^2}{2}\frac{3}{2\pi}(3\pi^2)^{1/3}\int d_3x\, n^{4/3}(x)$$ Dyson

DATA L'EN ⇒ TD DEL SIST

$$dE = -p\,dV + \mu\,dN$$

ES SIST OMOGENEO, INVAR × TRASLAZ

EN × PARTIC $\varepsilon = \frac{E}{N} = \varepsilon[n]$ FUNZIONALE DENSITÀ

→ $\mu = \frac{\partial E}{\partial N}\Big|_V = \frac{\partial}{\partial n} n\varepsilon$

→ HEIGENHOLTZ E VANHOVE

→ $p = -\frac{\partial E}{\partial V}\Big|_N = n(\mu - \varepsilon)$ (DA DIM)

HARTREE-FOCK

→ TH CAMPO MEDIO NATA 2 ANNI DOPO EQ SCHROD

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + U_H(x) \rightsquigarrow U_H(x) = \int d_3y\, v(x,y)\, n(y)}$$

$$\left(\frac{p^2}{2m} + U_H\right)u_i = \varepsilon_i u_i \rightsquigarrow n(x) = \sum_{i=1}^{N} |u_i(x)|^2$$

HA IL DIFETTO DI CONTENERE L'INTERAZ DI UNA PARTICELLA CON SÉ STESSA

⇒ PASSO IN +: EQ. COMPLETA DI HF

$$H = \sum^N h(i) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} v(ij)$$ ⇝ CERCHIAMO IL MIN TRA I DET DI SLATER $|\psi\rangle = \sqrt{N!}\,A(N)|u_1 \dots u_N\rangle$

$\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij}$

UNICO MOD
NON NULLO

ABBIAMO VISTO

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \sum_i \langle u_i|h|u_i\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\langle u_i u_j|v|u_i u_j - u_j u_i\rangle$$ E CHE u_i OTTENUTI TRAMITE TRASF UNITARIA PORTANO ALLO STESSO DET DI SLATER

$$u_i = \sum_j O_{ij} u_j \to |\psi'\rangle = |\psi\rangle \text{ E } E' = E$$

⇒ HF DIVENTA

$$E_{HF} = \min_{\{u_k\}} \langle \varphi | H | \varphi \rangle - \sum_{ij} \varepsilon_{ij} \left[\langle u_i | u_j \rangle - \delta_{ij} \right]$$

$\varepsilon \to$ HERMITIANA XKÉ E_{HF} SIA $\in \mathbb{R}$

$$\to E[u_1 \dots u_N] = \sum \langle u_i | h | u_i \rangle - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \langle u_i u_j | v | u_i u_j - u_j u_i \rangle$$

$\to$ OTTENGO IMPONENDO $\dfrac{\delta E}{\delta u_i} = 0 \quad \forall i = 1 \dots N$

$$E[u_1 \dots u_k + \eta_k \dots u_N] = \sum_{i \neq k} \langle u_i | h | u_i \rangle + \langle u_k + \eta_k | h | u_k + \eta_k \rangle$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \neq j \\ \neq k}} \langle u_i u_j | v(ij) | u_i u_j - u_j u_i \rangle - \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \langle u_i\, u_k + \eta_k | v(ik) | u_i\, u_k + \eta_k - u_k + \eta_k\, u_i \rangle$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \langle u_k + \eta_k\, u_j | v(kj) | u_k + \eta_k\, u_j - u_j\, u_k + \eta_k \rangle$$

$$\delta E_k = \langle u_k + \eta_k | h | u_k + \eta_k \rangle - \langle u_k | h | u_k \rangle$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \langle u_i\, u_k + \eta_k | v | u_i\, u_k + \eta_k - u_k + \eta_k\, u_i \rangle$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \langle u_k + \eta_k\, u_j | v | u_k + \eta_k\, u_j - u_j\, u_k + \eta_k \rangle$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \langle u_i u_k | v | u_i u_k - u_k u_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \langle u_k u_j | v | u_k u_j - u_j u_k \rangle$$
$$= \langle u_k | h | \eta_k \rangle + \langle \eta_k | h | u_k \rangle + \langle \eta_k | h | \eta_k \rangle$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \langle ik || ik \rangle + \langle ik || i\eta \rangle + \langle i\eta || ik \rangle + \langle i\eta || i\eta \rangle$$
$$- \langle ik || ki \rangle - \langle i\eta || ki \rangle - \langle ik || i\eta \rangle - \langle i\eta || i\eta \rangle$$

PROGRESSIVAMENTE MANDO OGNI u_i IN $u_i + \eta_i \longrightarrow$ VARIAZ NELLO SP DI HILBERT

$$\Rightarrow E[u_1 \dots u_i + \eta_i \dots u_N] - E[u_1 \dots u_N] = \alpha \eta_i + c(\eta_i^2)$$

$\to$ SI IMPONE A 0

POICHÉ $v(ij) = v(ji) \to \langle u_i u_j | v | u_i u_j \rangle = \langle u_i u_j | v | u_j u_i \rangle$

FACENDO IL CONTO IN MODO ORDINATO

$$\delta E_i = \langle \eta_i | h | u_i \rangle + \sum_j \langle \eta_i u_j | v | u_i u_j - u_j u_i \rangle - \varepsilon_{ij} \langle \eta_i | u_j \rangle + cc$$

E SI IMPONE A 0 $\forall \eta_i$

$$\Rightarrow h | u_i \rangle + \sum_j \langle u_j | v | u_i u_j - u_j u_i \rangle = \varepsilon_i | u_i \rangle$$

$\to$ SE TROVO SOL $\Rightarrow$ SOL TUTTE QUELLE OTTENUTE APPLICANDO UNA VARIAZ UNITARIA DELLE u_i COME SOPRA

$\Rightarrow$ POSSO PENSARE DI RISOLVERE INSIEME ANCHE IL PROBL DI DIAGONALIZZ $\varepsilon_{ij} \to$ DIVENTA ε_i

$$\langle u_i | h | u_i \rangle + \sum_j \langle u_i u_j | v | u_i u_j - u_j u_i \rangle = \varepsilon_i$$

$$\Rightarrow E_{HF} = \sum_i \langle u_i | h | u_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \langle u_i u_j | v | u_i u_j \rangle = \frac{1}{2} \sum_i \left[\varepsilon_i + \langle u_i | h | u_i \rangle \right] \quad \text{CON} \quad n(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} |\langle \underline{x} m | u_i \rangle|^2$$

L'AUTOVAL + GRANDE ε_N VIENE CONSID COME POT CHIMICO APPROX μ DAL LEMMA DI KOOPMANS

PROIETTIAMO EQ HF SU $\langle \underline{x} m |$

$$\langle \underline{x} m | h | u_i \rangle + \sum_j \langle \underline{x} m\, u_j | v | u_i u_j - u_j u_i \rangle = \varepsilon_i \langle \underline{x} m | u_i \rangle = \varepsilon_i u_i(\underline{x} m)$$

$$\sum_{m' m''} \int d_3x' d_3x'' = \mathbb{1}$$

$$(h u_i)(\underline{x} m) + \sum_j \sum_{m' m''} \int d_3x' d_3x''\, v(\underline{x}' \underline{x}'') \langle \underline{x} m, u_j | \underline{x}' m', \underline{x}'' m'' \rangle \langle \underline{x}' m', \underline{x}'' m'' | u_i u_j - u_j u_i \rangle = \varepsilon_i u_i(\underline{x} m)$$

$$(h u_i)(\underline{x} m) + \sum_j \sum_{m' m''} \int d_3\underline{x}' d_3\underline{x}''\, v(\underline{x}' \underline{x}'')\, \delta_{m m'}\, \delta_3(\underline{x} - \underline{x}')\, u_j(\underline{x}'' m'') \left[u_i(\underline{x}' m') u_j(\underline{x}'' m'') - u_j(\underline{x}' m') u_i(\underline{x}'' m'') \right] = \varepsilon_i u_i(\underline{x} m)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\underline{x}}^2 + U(\underline{x}_i) \right] u_i(\underline{x} m) + \int d_3\underline{x}''\, v(\underline{x}\, \underline{x}'') \underbrace{\sum_{j m''} |u_j(\underline{x}'' m'')|^2}_{n(\underline{x}'')} u_i(\underline{x} m) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\underline{x}}^2 + U(\underline{x}_i) \right] u_i(\underline{x} m) + U_H(\underline{x}) u_i(\underline{x} m)$$

CONSIDERANDO UN SIST INVAR X TRASLAZ $[H, \underline{P}] = 0 \Rightarrow V = V(\underline{x} - \underline{y})$

$\Rightarrow$ QUALUNQUE N-UPLA $|\underline{k}_i\, m_i\rangle$ $i = 1 \ldots N$ SODDISFA EQ HF

$$\rightarrow \frac{P^2}{2m}|\underline{k}_i\, m_i\rangle + \sum_j \langle \underline{k}_j m_j | 2\mathcal{V} \big(|\underline{k}_i m_i\, \underline{k}_j m_j\rangle - |\underline{k}_j m_j\, \underline{k}_i m_i\rangle \big) = \varepsilon_i |\underline{k}_i\, m_i\rangle$$

$[H, \underline{P}] = 0 \Rightarrow V$ CONSERVA IL MOMENTO DELLE PARTIC $\Rightarrow \underline{k} + \underline{k}_j = \underline{k}_i + \underline{k}_j \Rightarrow \underline{k} = \underline{k}_i\,,\ m = m_i$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} k_i^2 |\underline{k}_i\, m_i\rangle + \sum_j \langle k_i m_i, k_j m_j | \mathcal{V} | k_i m_i\, k_j m_j\rangle\, |k_i m_i\rangle - \sum_j \langle k_i m_i\, k_j m_j | \mathcal{V} | k_j m_j\, k_i m_i\rangle\, |k_i m_i\rangle = \varepsilon_i |k_i m_i\rangle$$

ABBIAMO $\langle k_i m_i\, k_j m_j | 2\mathcal{V} | k_i m_i\, k_j m_j\rangle = \langle k_i k_j | \mathcal{V} | k_i k_j\rangle = \int d_3\underline{x}\, d_3\underline{y}\ V(\underline{x} - \underline{y}) \langle k_i k_j | x y\rangle\langle x y | k_i k_j\rangle$

$$= \frac{1}{V^2}\int d_3x\, d_3y\ V(\underline{x} - \underline{y}) \underset{x' = x - y}{=} \frac{1}{V}\int d_3x\, V(\underline{x}) = \frac{\tilde{V}_0}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m}|k_i m_i\rangle + \sum_j \frac{\tilde{\mathcal{V}}_0}{V}|k_i m_i\rangle - E_{xc} = \varepsilon_i |k_i m_i\rangle$$

$$\rightarrow E_{xc} = \langle k_i m_i\, k_j m_j | \mathcal{V} | k_j m_j\, k_i m_i\rangle = \delta_{m_i m_j}\langle k_i k_j | \mathcal{V} | k_j k_i\rangle = \delta_{m_i m_j}\int d_3\underline{x}\, d_3\underline{y}\ V(\underline{x} - \underline{y}) \langle k_i k_j | x y\rangle\langle x y | k_i k_j\rangle$$

$$= \delta_{m_i m_j}\int d_3x\, d_3y\ V(\underline{x} - \underline{y}) \frac{1}{V^2} e^{i(k_j - k_i)(x - y)} = \frac{\delta_{m_i m_j}}{V}\int d_3\underline{x}'\ V(\underline{x}') e^{-i(\underline{k}_i - \underline{k}_j)\underline{x}'} = \frac{\delta_{m_i m_j}}{V}\tilde{\mathcal{V}}(\underline{k}_i - \underline{k}_j)$$

$$\rightarrow \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m}|k_i m_i\rangle + \sum_j \frac{\tilde{\mathcal{V}}_0}{V}|k_i m_i\rangle - \sum_j \delta_{m_i m_j}\tilde{\mathcal{V}}_{k_i - k_j}|k_i m_i\rangle = \varepsilon_i |k_i m_i\rangle$$

$\Rightarrow |k_i m_i\rangle$ AUTOST H CON AUTOVAL ε_i

$$\varepsilon_i = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + n\tilde{\mathcal{V}}_0 - \frac{1}{V}\sum_j \delta_{m_i m_j}\tilde{\mathcal{V}}_{\underline{k}_i - \underline{k}_j}$$

$n\tilde{\mathcal{V}}_0$: NULLO IN HEG → RITROVO SCHR CLASC

$\sum_j \delta_{m_i m_j}$: SOLO SPIN //

SE CONSIDERO HEG DENSO CON $|\varphi\rangle = |F\rangle$

$$\varepsilon(\underline{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{1}{V}\sum_{|k_i| < k_F} \frac{4\pi e^2}{|\underline{k} - \underline{k}_i|^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \int \frac{d_3\underline{k}'}{(2\pi)^3}\,\theta(k_F - k')\,\frac{4\pi e^2}{|\underline{k} - \underline{k}'|^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{2 e^2 k_F}{\pi} f\left(\frac{k}{k_F}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1 - x^2}{4x}\ln\frac{1 + x}{|1 - x|}$$

→ CI DICE CHE HF DÀ UNA PESSIMA APPR DEI VAL DI SINGLE PARTIC

CONSIDERANDO DENSITÀ DI STATI x UNITÀ DI VOL E SPIN $\rho(\varepsilon) = \frac{1}{V}\sum_{\underline{k}} \delta(\varepsilon(\underline{k}) - \varepsilon) = \int \frac{d_3k}{(2\pi)^3}\, \underbrace{\delta(\varepsilon(\underline{k}) - \varepsilon)}_{= \frac{\delta(k - \bar{k})}{\varepsilon'(k)|_{\bar{k}}}}$

DOVE $\varepsilon(\bar{k}) = \varepsilon$

$$\Rightarrow \rho(\varepsilon) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\,\frac{\bar{k}^2(\varepsilon)}{\varepsilon'(k)|_{\bar{k}(\varepsilon)}} \longrightarrow \text{PROBL IN } k_F$$

$f'\left(\frac{k}{k_F}\right)\Big|_{k_F} = f'(1)$ ⟶ DERIVATA DIVERGENTE

$\Rightarrow \rho(\varepsilon_F) = 0$ PROBLEMATICO

EVOLUZIONE TEMPORALE

$$H^0=\sum_a \hbar\omega_a c_a^+ c_a \longrightarrow \boxed{c_a(t)=e^{iH^0t/\hbar}c_a e^{-iH^0t/\hbar}}=\boxed{e^{-i\omega_a t}c_a}$$

$$\boxed{c_a^+(t)=e^{i\omega_a t}c_a^+}$$

→ EVOLUZ TEMP CONSERVA AZIONE OPERATORE A MENO DI UNA FASE

SE HO H COMPLICATO FINISCO SEMPRE IN DISCORSI DI INTERAZ $H=H_0+V_t$ → SE HO DIP TEMP

⇒ EVOLUZ GOVERNATA DA FAMIGLIA DI OP A 2 PARAMETRI

$$\boxed{U(t,t')U(t',t'')=U(t,t'')} \rightarrow \text{PROPAGATORI}$$

$$\boxed{U(t,t)=\mathbb{1}},\quad \boxed{U^+(t\,t')=U(t'\,t)}$$

LIBRO REED-SIMON → 4 VOL SU COMPENDIO DI ANALISI FUNZIONALE UTILI x QM

$$\partial_t U(t,t')U(t'\,t'')=\partial_t U(t,t'') \longrightarrow \text{MOLTIP A DX } U^+(t\,t'') \Rightarrow \underbrace{\partial_t U(t\,t')U(t'\,t)}_{}=\partial_t U(t\,t'')U(t''\,t)$$

INDIP DA t' XKÉ HO t'' A DX → DIP SOLO DA t

$$\Rightarrow \partial_t U(t,t')U(t',t)=\frac{H(t)}{i\hbar}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_t U(t,t')\,i\hbar=H(t)\,U(t,t')} \rightarrow \text{QUESTA EVOLUZ IMPLICA EVOLUZ SCHROEDINGER}$$

→ SICCOME NON COMMUTANO ⇒ NON SO RISOLVERE L'EQ.

CASI PARTICOLARI

- PERIODICO

$$U(t+T,t'+T)=U(t,t')\Rightarrow U(T,0)=\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{\varepsilon}T\right\}=\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{qe}T\right\}$$

$\hat{H}_{qe}$ = OP DI QUASI EN → COSA ACCADE x TEMPI LUNGHI

$F=U(0,T)$ OP DI FLOQUET

- INVAR x TRASLAZ TEMP

$$U(t+t'',t'+t'')=U(t,t')\quad \forall t''\in\mathbb{R}\Rightarrow U(t,t')=U(t-t')=\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}H(t-t')\right\}$$

→ H INDIP DA t

$H_t=H_0+V_t$ SOLITAM TEMPO DI RIFERIM $t=0$ → 1 PARAM/2 FIX

$$U(0,t)=e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}\,U_I(t,0)$$

$$U_I(t,t')=U_I(t,0)\,U_I^+(t',0)=e^{iH_0t/\hbar}\underbrace{U(t,0)U^+(t',0)}_{U(t,t')}e^{-iH_0t'/\hbar}$$

ss $i\hbar\partial_t U(t,t') = H(t)U(t,t')$ (SODDISFA SCHRODINGER)

$\Rightarrow$ x PROPAGATORE D'INTERAZ?

$$i\hbar\partial_t U_I(t,t') = i\hbar\partial_t\left[e^{iH_0t/\hbar}U(t,t')e^{-iH_0t'/\hbar}\right]$$

PROBL t t'

???

$$= -\cancel{H_0 U_I(t,t')} + e^{i\frac{H_0t}{\hbar}}H_t U(tt')e^{-i\frac{H_0t'}{\hbar}}$$

$$\hookrightarrow \cancel{H_0} + V_t$$

$$= e^{i\frac{H_0t}{\hbar}}V_t e^{-iH_0t}U_I(t,t')$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} i\hbar\partial_t U_I(t,t') = V_{H_0}(t)U_I(tt') \\ U_I(t',t') = \mathbb{1}\end{cases}}$$ $\rightarrow$ EQ MOTO DI INTERAZ

$\rightarrow$ PROBL DI CAUCHY

$$U_I(tt') = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t'}^{t}dt''\, V_{H_0}(t'')U_I(t''t')$$ EQ DI VOLTERRA

SUPP CHE V SIA PICCOLO E ITERIAMO

$$= \mathbb{1} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{(i\hbar)^\ell}\int_{t'}^{t}dt_1\int_{t'}^{t_1}dt_2 \dots \int_{t'}^{t_{\ell-1}}dt_\ell\, V_{H_0}(t_1)\dots V_{H_0}(t_\ell)$$

$$\Rightarrow \boxed{U_I(t,t') = T\exp\frac{1}{i\hbar}\int_{t'}^{t}dt''\,V_{H_0}(t'')}$$

FUNZIONI DI GREEN [T-ORDINATA, A 2 PT]

$$iG_{ab}(t,t') = \langle gs|Tc_a(t)\,c_b^+(t')|gs\rangle$$ a,b = STATI SINGOLA PARTICELLA

$\hookrightarrow$ EVOLVONO SECONDO H

H HAMILTONIANA MB INDIP DA t T.C. $H|gs\rangle = E_{gs}|gs\rangle$

PER $t > t' \Rightarrow T = \mathbb{1}$

$$\Rightarrow \langle gs|Tc_a(t)\,c_b^+(t')|gs\rangle = \langle gs|c_a(t)\,c_b^+(t')|gs\rangle$$

$$\langle gs| c_a(t)\, c_b^\dagger(t') |gs\rangle = \langle gs| e^{iHt/\hbar} c_a e^{-iHt/\hbar} e^{iHt'/\hbar} c_b^\dagger e^{-iHt'/\hbar} |gs\rangle$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}(t'-t)E_{gs}} \underbrace{\langle gs| c_a}_{+1\ \text{PARTIC}} e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t')} \underbrace{c_b^\dagger |gs\rangle}_{+1\ \text{PARTIC}}$$

A MENO DI COST DI NORMALIZ È AMPIEZZA DI TRANSIZ TRA UNO STATO CHE HA 1 PARTIC IN b E UNO CHE LA CONTIENE IN a IN TEMPO $t'-t$

DESCRIVE LA PROPAGAZ DI 1 PARTIC

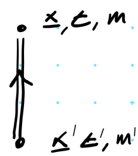
DOPPIA LINEA = FUNZ GREEN ESATTA

→ SE H HA INTERAZ MOLTO GEN ⇒ USO CORREZIONI E IN QUEL CASO × EVOLUZ LIBERA SOLO DA H_0 USO 1 LINEA ↑

SCAMBIANDO t E t' HO DISTRUZ ⇒ BUCO

SE PENSO DEF SUBITO

$$G_{mm'}(\underline{x}t, \underline{x}'t') = \langle gs| \psi^s_m(\underline{x}t)\, \psi^\dagger_{m'}(\underline{x}'t') |gs\rangle$$



USO A × INDICARE GENERICO c O $c^\dagger$

→ DEF [T-PRODOTTO] × EVOLUZ GEN DA H A TEMPI ≠

$$T A_1(t_1)\dots A_N(t_N) \equiv (\pm)^\sigma A_{\sigma_1}(t_{\sigma_1})\dots A_N(t_{\sigma_N}) \qquad \text{con } t_{\sigma_1} > t_{\sigma_2} > \dots > t_{\sigma_N}$$

+ × BOSE
− × FERMI

PROP UTILE

$$TA_1(t_1)\dots TA_N(t_N) = (\pm)^\pi A_{\pi_1}(t_{\pi_1})\dots A_{\pi_N}(t_{\pi_N})$$

SOTTO T TUTTI GLI OP COMMUTANO/ANTICOMM ESATTAM A MENO DEL sgn

SICCOME V HA 2 OP CREATORI E 2 DISTRUTTORI ⇒ LI SPOSTO IN BLOCCO

PROP FUNZ GREEN A 1 PARTIC (O 2PT)

OP SINGLE PARTIC $\hat{O} = \sum c_p^\dagger \langle p|\hat{O}|p'\rangle c_{p'}$

DATA H → $\langle gs|\hat{O}|gs\rangle = ?$

ma sono $\langle gs|c_r^+ c_{r'}|gs\rangle = \langle gs|c_r^+(t)\, c_{r'}(t)|gs\rangle = \lim_{t'\to t^+} \langle gs|c_r^+(t')\, c_{r'}(t)|gs\rangle$

se non ho ancora fatto lim posso passare T ordinam come $\mathbb{1}$ xké $t'>t$

$$= \lim_{t'\to t^+}\langle gs|T\, c_r^+(t')\, c_{r'}(t)|gs\rangle = (\pm)\lim_{t'\to t^+}\langle gs|T\, c_{r'}(t)\, c_r^+(t')|gs\rangle$$

$$= \pm i\, G_{r'r}(t,t^+)$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle gs|\hat O|gs\rangle = \pm i\sum_{rr'}\langle r|o|r'\rangle\, G_{r'r}(t,t^+)}$$

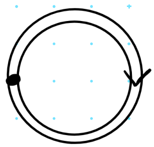
→ proviamo a ricostruirla x calcolare densità a spin fix (no $\sum_m$)

$$\langle gs|\hat n_m(\underline x)|gs\rangle = \langle gs|\psi_m^+(\underline x)\,\psi_m(\underline x)|gs\rangle = \lim (\pm)\langle gs|T\,\psi_m(\underline x t)\,\psi_m^+(\underline x t^+)|gs\rangle$$

t; $t^+ = t+\eta$, $\eta\searrow 0^+$

$$= \pm i\, G_{mm}(\underline x t, \underline x t^+)$$

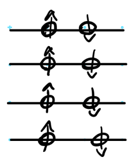
$\underline x, t$



funz Green in pt di sp-tempo ≃ uguali è la densità

ES [calcoliamo funz Green]

$H_0 = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha c_\alpha^+ c_\alpha$ N fermioni $\Rightarrow |gs\rangle =$



riempio i liv dal basso

$\omega_1 < \omega_2 \le \omega_3 \le$ ___

↳ ≠ xké normalm non degeneri

→ E_F corrisp a gs

$$i\, G^0_{mm'}(\underline x t, \underline x' t') = \langle gs|T\,\psi_m(\underline x t)\,\psi^+_{m'}(\underline x' t')|gs\rangle$$

$$\hat\psi_m(\underline x) = \sum_\alpha \hat c_\alpha\langle \underline x m|\alpha\rangle \to \hat\psi_m(\underline x t) = \sum_\alpha e^{-i\omega_\alpha t}\langle \underline x m|\alpha\rangle\, \hat c_\alpha$$

$$\Rightarrow i\, G^0_{mm'}(\underline x t,\underline x' t') = e^{-i\omega_\alpha t + i\omega_{\alpha'} t'}\langle \underline x m|\alpha\rangle\langle\alpha'|\underline x' m'\rangle\langle gs|T\, c_\alpha c^+_{\alpha'}|gs\rangle$$

↳ anche se tempo già fuori

$$= [\theta(t-t')\langle gs|c_\alpha c^+_{\alpha'}|gs\rangle - \theta(t'-t)\langle gs|c^+_{\alpha'}c_\alpha|gs\rangle$$

$$\langle T A_t B_{t'}\rangle = \theta(t-t')\langle A_t B_{t'}\rangle \pm \theta(t'-t)\langle B_{t'} A_t\rangle$$

$$= [\theta(t-t')\langle gs|\delta_{\alpha\alpha'}\, c_\alpha^+ c_\alpha|gs\rangle + \theta(t'-t)\langle gs|$$

$$= \sum_\alpha e^{-i\omega_\alpha(t-t')}\langle\underline x m|\alpha\rangle\langle\alpha|\underline x' m'\rangle[\theta(t-t')\,\theta(\omega_\alpha-\omega_F) - \theta(t'-t)\,\theta(\omega_F-\omega_\alpha)] = i\, G^0_{mm'}(\underline x t\, \underline x' t')$$

x sist invar x evoluz temp ($H \ne H(t)$)

$$= i\int_{\pm\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega(t-t')}\, G^0_{mm'}(\underline x\, \underline x',\omega)$$ ⇝ come scrivo G in sp ω?

$\theta(t-t') = i\int_{\pm\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega+i\eta}$ → dove chiudo cammino di integraz?

↳ η infinitesimo positivo

per $\boxed{t-t'>0}$

 → contrib 0

 → polo $-i\eta$ ⇒ $\frac{i(-2\pi i)}{2\pi} e^{-\eta(t-t')} = 1$

per $\boxed{t-t'<0}$

 → no poli ⇒ contrib 0

$$\Rightarrow G^0_{mm'}(\underline{x}t,\underline{x}'t') = \sum_a \text{---} \left[i\int_{\pm\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega+i\eta}\theta(\omega_a-\omega_F) - i\int_{\pm\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega+i\eta}\theta(\omega_F-\omega_a)\right.$$

→ inserisco $\exp(-i\omega_a(t-t'))$

$$= i\sum_a \langle \underline{x}m|a\rangle\langle a|\underline{x}'m'\rangle \left[\theta(\omega_a-\omega_F)\int_{\pm\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{-i(\omega+\omega_a)(t-t')}}{\omega+i\eta} - \theta(\omega_F-\omega_a)\int_{\pm\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{-i(\omega+\omega_a)(t-t')}}{\omega+i\eta}\right]$$

$$= i\sum_a \langle \underline{x}m|a\rangle\langle a|\underline{x}'m'\rangle \left[\theta(\omega_a-\omega_F)\int_{\pm\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega-\omega_a+i\eta} - \underbrace{\theta(\omega_F-\omega_a)\int_{\pm\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{-i(\omega+\omega_a)(t-t')}}{-\omega+i\eta}}_{\text{cambia sgn denom e diventa } +}\right]$$

$$\Rightarrow G^0_{mm'}(\underline{x}\underline{x}'\omega) = \sum_a \underbrace{\langle \underline{x}m|a\rangle}_{u_a(\underline{x}m)}\langle a|\underline{x}'m'\rangle \left[\frac{\theta(\omega_a-\omega_F)}{\omega-\omega_a+i\eta}+\frac{\theta(\omega_F-\omega_a)}{\omega-\omega_a-i\eta}\right]$$

Funz di Green x partic non interagenti

$h u_a = \hbar\omega_a u_a$

$H_0 = \sum \hbar\omega_a c_a^\dagger c_a$

$$\Rightarrow G^0_{mm'}(\underline{x}\underline{x}'\omega) = \sum_a u_a(\underline{x}m)\, u_a^*(\underline{x}'m')\left[\frac{\theta(\omega_a-\omega_F)}{\omega-\omega_a+i\eta}+\frac{\theta(\omega_F-\omega_a)}{\omega-\omega_a-i\eta}\right]$$

Vediamo come utilizzo

$$\langle gs|\hat{n}_m(\underline{x})|gs\rangle = -iG^0_{mm}(\underline{x}t,\underline{x}t^+) = -i\int_{\pm\infty}\frac{d\omega}{2\pi}G_{mm}(\underline{x}\underline{x}\omega)e^{i\omega\eta}$$

↳ non omettibile

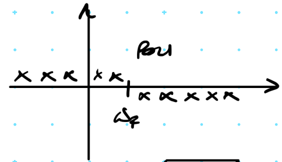
$$=\sum_a |u_a(\underline{x}m)|^2 \int_{\pm\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega\eta}\left[\frac{\theta(\omega_a-\omega_F)}{\omega-\omega_a+i\eta}+\frac{\theta(\omega_F-\omega_a)}{\omega-\omega_a-i\eta}\right]$$ → integro con residui 

polo $-i\eta$ polo $+i\eta$

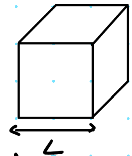
$$= \sum |u_e(\underline{x}m)|^2 (-i)\frac{2\pi i}{2\pi}\,\theta(\omega_F-\omega_e)\,\underbrace{e^{i\omega_e\eta}}_{\eta\to 0\ \to 1} = \sum \underbrace{|u_e(\underline{x}m)|^2}_{\text{DENSITÀ SINGOLO STATO}}\theta(\omega_F-\omega_e)$$

$\Rightarrow$ DENSITÀ GS $=\sum$ DENSITÀ SINGOLI STATI $< E_F$

ANCHE X SIST INTERAGENTI VEDREMO CHE VAL DISCRIMINANTE È ω_F



GAS IDEALE DI FERMI



$h=\frac{p^2}{2m}$ $\quad |\alpha\rangle = |\underline{k}\,m\rangle \;\to$ NELLA SCATOLA $\underline{k}=\frac{2\pi}{L}\underline{n}$, $\underline{n}\in\mathbb{Z}^3$

$$G^0_{mm'}(\underline{x}\,\underline{x}'\omega)=\sum_{\underline{k}m''}\langle \underline{x}m|\underline{k}m''\rangle\langle\underline{k}m''|\underline{x}'m'\rangle\left[\frac{\theta(\varepsilon_k-\varepsilon_F)}{\omega-\omega_k+i\eta}+\frac{\theta(\varepsilon_F-\varepsilon_k)}{\omega-\omega_k-i\eta}\right]$$

CON $\omega_k=\varepsilon_k/\hbar$

$$=\sum_{\underline{k}m''}\delta_{mm''}\delta_{m''m'}\frac{e^{i\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}')}}{V}[-] = \delta_{mm'}\frac{1}{V}\sum_{\underline{k}}\underbrace{e^{i\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}')}[-]}_{\to\text{TRASF FOURIER DISCRETA}}$$

$$=\delta_{mm'}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}')}G^0(\underline{k}\omega)$$

DOVE $G^0(\underline{k}\omega)=\dfrac{\theta(\varepsilon_k-\varepsilon_F)}{\omega-\frac{\varepsilon_k}{\hbar}+i\eta}+\dfrac{\theta(\varepsilon_F-\varepsilon_k)}{\omega-\frac{\varepsilon_k}{\hbar}-i\eta}=\dfrac{1}{\omega-\frac{\varepsilon_k}{\hbar}+i\eta\,\mathrm{sgn}(\omega_k-\omega_F)}$

SONO PASSATO ALLO SP $\underline{k}$ XKÈ HO INVAR X TRASLAZ
$\to$ VALE $\forall\, H$ TC $[H,\vec{p}]=0$

INFATTI: $\vec{p}=\sum_{\underline{k}m}\hbar\underline{k}\,c^+_{\underline{k}m}c_{\underline{k}m} \to \vec{Q}\cdot\vec{p}=\sum_{\underline{k}m}\hbar\,\underline{k}\underline{Q}\,c^+_{\underline{k}m}c_{\underline{k}m}$ GENERA TRASLAZ LUNGO VETT $\vec{Q}$

$\to$ AZIONE $e^{i\vec{Q}\vec{p}/\hbar}c_{\underline{k}m}e^{-i\vec{Q}\vec{p}/\hbar}=e^{-i\vec{Q}\vec{k}}c_{\underline{k}m}$

E INVECE $e^{\frac{i}{\hbar}\vec{Q}\vec{p}}\psi_m(\underline{x})e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{Q}\vec{p}}=\sum_{\underline{k}}\langle\underline{x}|\underline{k}\rangle c_{\underline{k}m}e^{-i\underline{Q}\underline{k}}=\sum_{\underline{k}}\langle\underline{x}-\underline{Q}|\underline{k}\rangle c_{\underline{k}m}=\psi_m(\underline{x}-\underline{Q})$

$\to$ GRUPPO TRASLAZ AGISCE COME CAMPO SCALARE

ES: MOSTRARE CHE SE $[H,\vec{P}]=0 \Rightarrow G_{mm'}(\underline{x}t,\underline{x}'t')$ DIP DA $\underline{x}-\underline{x}'$ (INVAR. TRASLAZ.)
(IDEM $t-t'$)

$$\Rightarrow G_{mm'}(\underline{x}t\,\underline{x}'t') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, G_{mm'}(\underline{k}\omega)\, e^{i\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}') - i\omega(t-t')}$$

EQUAZIONI DEL MOTO IN FUNZIONI DI GREEN

EQ. MOTO $= \partial_t\, G(tt')$

FORMA + GEN FG: $iG_{ab}(t,t') = \langle gs|T c_a(t)\, c_b^+(t')|gs\rangle$ FIX BASE GEN $\{|a\rangle, |b\rangle, \_\_\}$

$$\Rightarrow H = \sum_{ab} h_{ab}\, c_a^+ c_b + \frac{1}{2}\sum_{\substack{ab\\cd}} v_{abcd}\, c_a^+ c_b^+ c_d c_c$$

$\hookleftarrow \langle ab|v|cd\rangle = \langle ba|v|dc\rangle$

ABBIAMO CHE $[c_r, c_a^+ c_b] = \delta_{ar}\, c_b$

$$[c_r, c_a^+ c_b^+ c_d c_c] = (\delta_{ra} c_b^+ \pm \delta_{rb} c_a^+)\, c_d c_c$$

$$\Rightarrow [c_r, H] = \sum_{ab} h_{ab}[c_r, c_a^+ c_b] + \frac{1}{2}\sum v_{abcd}\,[c_r, c_a^+ c_b^+ c_d c_c]$$

$$= \sum_b h_{rb}\, c_b + \frac{1}{2}\sum_{bcd} v_{rbcd}\, c_b^+ c_d c_c \pm \sum_{acd} v_{arcd}\, c_a^+ c_d c_c$$

$\hookrightarrow a \leftrightarrow b$

$$= \sum_b h_{rb}\, c_b + \sum_{bcd} v_{rbcd}\, c_b^+ c_d c_c$$

$v_{brcd} = v_{rbdc} \rightarrow c \leftrightarrow d$ (MOLT)

$$= [c_r, H]$$

UTILIZZI

- $H = H_1 + H_2$ CON H_2 A 2 PARTIC

$$\Rightarrow \sum c_r^+ [c_r, H] = H_1 + 2H_2$$

- $$i\hbar\,\partial_t\, c_r(t) = i\hbar\,\partial_t\, e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\, c_r\, e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = -[H, c_r(t)] = [c_r(t), H]$$

$$= \sum_b h_{rb}\, c_b(t) + \sum_{bcd} v_{rbcd}\, (c_b^+ c_d c_c)(t)$$

UTILE X SCRIVERE EQ MOTO DI FG

DATA G^0 LIBERA A 1 PARTIC SI POTEVANO CALCOLARE I VAL MEDI DI $\hat{O}$ SU gs

→ POSSIAMO ANCHE AVERE GS DI H : E_{GS}

$$E_{GS} = \langle gs|H|gs\rangle = \langle gs|H_1|gs\rangle + \langle gs|H_2|gs\rangle$$

→ FORMULA MIGDAL-GALITSKI PER E_{GS} : $\sum_r c_r^+(t)[c_r(t), H] = H_1(t) + 2H_2(t)$

$$\sum_r \langle gs|c_r^+(t)\, i\hbar\partial_t c_r(t)|gs\rangle = \langle gs|H_1|gs\rangle + 2\langle gs|H_2|gs\rangle$$

$$= \lim_{t'\to t} \langle gs|\sum_r c_r^+(t')\, i\hbar\partial_t c_r(t)|gs\rangle = \lim_{t'\to t} i\hbar\partial_t \sum_r \langle gs|c_r^+(t')c_r(t)|gs\rangle$$

SE $t'\to t^+ \Rightarrow T \equiv \mathbb{1}$

$$= \lim_{t'\to t^+} i\hbar\partial_t \sum_r \langle gs|T c_r^+(t')c_r(t)|gs\rangle = \lim_{t'\to t^+} i\hbar\partial_t (\pm)\, i G_{rr}(tt')$$

$$= \langle gs|H_1|gs\rangle + 2\langle gs|H_2|gs\rangle \quad i\hbar\partial_t c_r(t) = [c_r(t), H]$$

$$\Rightarrow E_{GS} = \frac{1}{2}\langle gs|H_1|gs\rangle \pm \frac{1}{2}\lim_{t'\to t^+} i\hbar\partial_t G_{rr}(t,t') \quad \left[= \frac{1}{2}\langle H_1 + [c_r, H]\rangle = \langle H_1 + H_2\rangle \right]$$

$$= \sum_{rr'} (\pm)\frac{i}{2}\langle r|h|r'\rangle G_{r'r}(t,t') \pm \sum_r i \lim_{t'\to t^+} (i\hbar\partial_t)\, G_{rr}(t,t')$$

UFUNZ DI GREEN G PUÒ DARE E_{GS}

SCRIVIAMO EQ MOTO

$$iG_{ab}(t,t') = \langle gs|T c_a(t) c_b^+(t')|gs\rangle$$

$$= \theta(t-t')\langle gs|c_a(t)c_b^+(t')|gs\rangle \pm \theta(t'-t)\langle gs|c_b^+(t')c_a(t)|gs\rangle$$

DERIVIAMO

$$i\partial_t G_{ab}(tt') = \delta(t-t')\langle c_a(t)c_b^+(t') \mp c_b^+(t')c_a(t)\rangle + \theta(t'-t)\langle \partial_t c_a(t)c_b^+(t')\rangle \pm$$

$$\pm\, \theta(t'-t)\langle c_b^+(t')\partial_t c_a(t)\rangle$$ PER $t = t' \Rightarrow$ EVOLUZ DI SCAMBIO ENERG E SCOMPARE

$$= \delta(t-t')\langle [c_a, c_b^+]_\mp\rangle + \langle T\partial_t c_a(t)\, c_b^+(t')\rangle$$

$$= \delta_{ab}\,\delta(t-t') + \langle T\partial_t c_a(t)\, c_b^+(t')\rangle$$

$$-\hbar\,\partial_t G_{ab}(tt') = i\hbar\,\delta_{ab}\,\delta(t-t') + \sum_c h_{ac}\underbrace{\langle T c_c(t) c_b^+(t')\rangle}_{G_{cb}(tt')}$$

$$+\sum_{b'c'd'} v_{ab'c'd'}\langle T(c_{b'}^+ c_{d'} c_{c'})(t)\, c_b^+(t)\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&\Big[-\hbar\,\partial_t G_{ab}(tt') - i\sum_c h_{ac}G_{cb}(tt')\Big]\\ &-\sum_{b'c'd'} v_{ab'c'd'}\langle T(c_{b'}^+ c_{d'} c_{c'})(t)\, c_b^+(t')\rangle = i\hbar\,\delta_{ab}\,\delta(t-t') \quad (*)\end{aligned}}$$

EQ MOTO FG CHE IN PRESENZA DI OP A 2 CORPI CONTIENE EQ MOTO DI FG A ORDINE SUP

→ FG A 2 PARTIC / 4 PT

FORMA NON CHIUSA: DERIVANDO ANCORA CRESCE L'ORDINE

⇝ GERARCHIA MARTIN E SCHWINGER

⇒ TRONCAMENTI

→ + FACILE: SPEZZO ⟨ ⟩ DI FUNZ 4PT COME MEDIE ⟨ ⟩ A 2PT → HF

$$i^2 G_{abcd}(t_1t_2t_3t_4) = \langle GS|T\, c_a(t_1)\, c_b(t_2)\, c_d^+(t_4)\, c_c^+(t_3)|GS\rangle$$ ⇝ CON θ DA SCRIVERE È UN BORDELLO

$$= (\pm)\langle GS|T\, c_b(t_2)\, c_a(t_1)\, c_d^+(t_4)\, c_c^+(t_3)|GS\rangle = \pm\, i^2 G_{bacd}(t_2t_1t_3t_4)$$

- MOLTIP × $-i$ E AGGIUNGO δ_{ac} IN (*)
- X RICONDURRE T PROD

$$T(c_{b'}^+ c_{d'} c_{c'})(t)\, c_b^+(t') \equiv T\, c_{b'}^+(t^{++})\, c_{d'}(t^+)\, c_{c'}(t)\, c_b^+(t')$$ E POI FACCIO 2 SALTI

$$\to \sum_c\left(-i\hbar\,\delta_{ac}\,\partial_t - h_{ac}\right) G_{cb}(tt') + i\sum_{b'c'd'} v_{ab'c'd'}\, i^2 G_{d'c'bb'}(t^+ t t' t^{++}) = \hbar\,\delta_{ab}\,\delta(t-t')$$

MOLTO UTILE CONSID IL CASO NON INTERAGENTE

$$\sum_c\left(i\hbar\,\delta_{ac}\,\partial_t - h_{ac}\right) G^0_{cb}(tt') = \hbar\,\delta_{ab}\,\delta(t-t')$$ → IN SP ω IN G HO $e^{-i\omega(t-t')}$

⇒ DERIVANDO

$$\sum_c (\hbar\omega\delta_{ac} - h_{ac})\, G^0_{cb}(\omega) = \hbar\,\delta_{ab} \longrightarrow \text{ELEM MATR DI } (\hbar\omega \mathbb{1} - \hat{h})\, G^0(\omega) = \hbar \mathbb{1}$$

$$\longrightarrow G^0(\omega) = \left(\omega - \frac{\hat{h}}{\hbar}\right)^{-1} \text{ RISOLVENTE}$$

PRESI $\{|j\rangle\}$ AUTOST DI h $\Rightarrow G^0(\omega) = \sum_j \frac{|j\rangle\langle j|}{\omega - \varepsilon_j/\hbar}$ BRUTTA XKÉ HO SINGOLARITÀ SU Re $\Rightarrow$ SI SPOSTANO I POLI NEL PIANO $\mathbb{C}$

$\exists \neq$ MODI x FARLO $\Rightarrow$ DSF $\neq$ FG

IN BASE $\{|\underline{x}\, m\rangle\}$ L'OP $\hat{h}$ È LOCALE $\hat{h} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\underline{x})$

$$\Rightarrow \left[\hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_x^2 - U(\underline{x})\right] G^0_{mm'}(\underline{x}\, \underline{x}'\, \omega) = \hbar\, \delta_3(\underline{x} - \underline{x}')\, \delta_{mm'}$$

SE PONGO $G^0_{mm'} = G^0 \delta_{mm'}$ (NEL INDIP DA SPIN)

$$\Rightarrow \left[\hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_x^2 - U(\underline{x})\right] f(\underline{x}) = g(\underline{x})$$

g = SORGENTE ASSEGNATA
f SCONOSCIUTO $\longrightarrow$ EQ DIFF LIN NON OMOG $\Rightarrow$ SOL = SOL OMOG + PARTICOLARE

$$f(\underline{x}) = f_0(\underline{x}) + \frac{1}{\hbar}\int d_3\underline{x}'\, G^0(\underline{x}\, \underline{x}'\, \omega)\, g(\underline{x}')$$

$\Rightarrow$ POSSIAMO SCRIVERE BRUTTE EQ DIFF COME EQ INTEG CON G^0

SE NON SAPPIAMO RISOLVERE U LA ACCORPIAMO ALLA SORGENTE, RISOLVIAMO COME LIBERA E TRATTIAMO PERTURBATIVAM

TEOR [GELLMANN & LOW]

x COLLEGARE GS DI H CON INTERAZ CON GS DI H_0 DI CUI SAPPIAMO TUTTO
→ ACCENSIONE ADIABATICA DI INTERAZ

$$H_0 \Rightarrow |E_0\rangle \longrightarrow H = H_0 + gV$$

SE V A 2 CORPI ⇒ PROBL QUASI INATTACCABILE SENZA TP PERTURBATIVA

INTRO $H_t = H_0 + g\,e^{-\varepsilon|t|}\,V$ ⇒ ACCENSIONE/SPEGNIM ADIAB INTERAZ

↳ INTERPOLA H_0 E H

$$H_t = \begin{cases} H_0 & |t| \to \infty \\ H & |t| = 0 \end{cases} \quad \forall \varepsilon \geq 0$$

IN GEN $[H_t, H_{t'}] \neq 0$

→ EVOLUZ TEMP $U_\varepsilon(t,t') \to \underset{\text{PRESENZA DI INTERAZ}}{U_\varepsilon(t,0)} = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}\, U_{I\varepsilon}(t,0)$

$$U_{\varepsilon I}(t,t') = U_{\varepsilon I}(t,0)\,U^+_{\varepsilon I}(t',0)$$

IL TEOR DICE:

$|E_0\rangle$ EIGEN H_0, $\exists \lim_{\varepsilon \to 0^+}$ DEI VETTORI $|\psi_{\varepsilon\pm}\rangle = \dfrac{U_{\varepsilon I}(0,\pm\infty)\,|E_0\rangle}{\langle E_0|U_{\varepsilon I}(0,\pm\infty)|E_0\rangle}$

⇒ $\lim |\psi_\pm\rangle$ SONO AUTOSTATI DI H (COINCIDONO A MENO DI UNA POSSIB FASE)

SE E_0 NON È DEGENERE

IL TEOR NON GARANTISCE $GS^0 \longrightarrow GS$ ⇒ POSSIB LEVEL CROSSING

MA NON SUCCEDE SE NON CAMBIO LE SIMM DI H_0

⇒ $GS^0 \to GS$ CON PROB 1

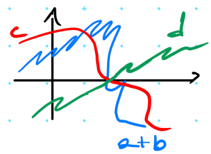
GLI AUTOVALORI DI H SI POSSONO MUOVERE NEL TEMPO

$$H = \begin{pmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{pmatrix} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ DIP DA } t$$

$$\begin{cases} \lambda_+ + \lambda_- = a+b \\ \lambda_+ \lambda_- = ab - |c+id|^2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab - 4|c+id|^2}\right)$$

$$|\lambda_+ - \lambda_-| = \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2 + 4d^2} \longrightarrow \text{DOVE SI ANNULLA!} \iff \begin{cases} a=b \\ c=d=0 \end{cases}$$

⇒ ESTREMAMENTE IMPROBABILE CHE AVVENGA NELLO STESSO ATTO



L'ANNULLAM È + DIFFICILE NEL CASO HERMITIANO CHE IN QUELLO SIMMETRICO

X MATR $n \times n$ REALE SIMM O COMPLESSA HERMITIANA O QUATERNIONICA SIMPLETTICA SI PUÒ STUDIARE LA DISTRIBUZ DELLA SPAZIATURA DEI LIVELLI

(SPAZIAT AUTOVALORI ADIACENTI)

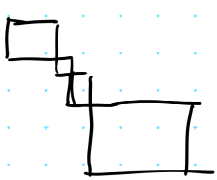
$p(s)$ CON $s = \dfrac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\Delta}$ → NORMALIZ

X MATR RANDOM $\quad p(s) = s^\beta \quad$ X PICCOLI s: $\boxed{\beta=1}$ X SIMM, $\boxed{\beta=2}$ X HERMITIANE, $\boxed{\beta=4}$ X QUATERNIONICHE

⇒ PROB CHE LA SPAZIATURA SIA 0 (CIOÈ GLI AUTOVAL COLLIDANO) È 0

→ SE FACCIO UN PLOT DEGLI AUTOVAL MAGARI A UNA CERTA SI AVVICINANO MA POI SEGUONO VIA SENZA TOCCARSI

ABBIAMO DETTO CHE PUÒ SUCCEDERE LEVEL CROSSING

$H_0 =$  ⟶ $H =$ 

SE ACCENDO INTERAZ ⟹ 2 POSSIB: ① MESCOLAMENTO ⟹ NUOVI BLOCCHI

② CONSERVO SIMM ⟹ MANTENGO STRUTT A BLOCCHI

IN ENTRAMBI IL LEVEL CROSSING È IMPROBABILE

A $T>0$ $\nexists$ IL PROBL PERCHÉ GS = $\rho = \frac{e^{-\beta(H-\mu N)}}{Z}$

DIM [PESKIN (BRUTALE)]

$H|\varphi_{\varepsilon\pm}\rangle$ È PROVO A TROVARE AUTOVAL

DIM [IMOUNAM]

POSSO USARE DINAMICA SCHRÖDINGER

$H_\varepsilon = H_0 + g e^{+\varepsilon t} V \Rightarrow U_g(t,s) \quad s<t<0$

PONGO $g \equiv e^{\varepsilon\theta} \Rightarrow H_t = H_0 + e^{\varepsilon(t+\theta)} V \to$ PROPAGATORE CON $g=1$ E TEMPO TRASLATO DI θ

$\Rightarrow H_0 + e^{t\varepsilon} V$ HA PROPAG $U_1(t+\theta, s+\theta) = U_g(t,s)$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial g} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial}{\partial g} U_g(t,s) = \frac{\partial\theta}{\partial g} \frac{\partial U_1}{\partial \theta}(t+\theta, s+\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial g}\left[\frac{\partial U_1}{\partial t}(t+\theta, s+\theta) + \frac{\partial U_1}{\partial s}(t+\theta, s+\theta)\right]$$

$$= \frac{\partial\theta}{\partial g}\left[\frac{\partial U_g}{\partial t}(t,s) + \frac{\partial U_g}{\partial s}(t,s)\right]$$

$g = e^{\varepsilon\theta} \Rightarrow 1 = \frac{\partial\theta}{\partial g} g\varepsilon$

$$\Rightarrow \varepsilon g \frac{\partial}{\partial g} U_g(t,s) = \frac{H_t}{i\hbar} U_g(t,s) - U_g(t,s) \frac{H_s}{i\hbar}$$

PONENDO ORA $t=0$ (εg SONO INDIPENDENTI)

$$i\hbar\,\varepsilon g \frac{\partial}{\partial g} U(Q,s) = H\, U(Q,s) - U(Q,s)\left[H_0 + g\, e^{\varepsilon s} V\right]$$

$$U(t,Q) = e^{-i/\hbar\, t H}\, U_I(t,Q) = U^{+}(Q,t)$$

$$\Rightarrow i\hbar\,\varepsilon g \frac{\partial}{\partial g} U_I(Q,s)\, e^{i/\hbar H_0 s} = H\, U_I(Q,s)\, e^{i/\hbar H_0 s} - U_I(Q,s)\, e^{i/\hbar H_0 s}\left[\,\text{—}\,\right]$$

MOLTIP A DX $e^{-i H_0 t}$

$$i\hbar\,\varepsilon g \frac{\partial}{\partial g} U_I(Q,s) = H\, U_I(Qs) - U_I(Qs) H_0 - g\, U_I(Qs)\, e^{\varepsilon s} V_{H_0}(s)$$

A DX $|\mathcal{E}_0\rangle$

$$i\hbar\,\varepsilon g \frac{\partial U_I}{\partial g}(Qs)|\mathcal{E}_0\rangle = (H-\mathcal{E}_0)U_I(Qs)|\mathcal{E}_0\rangle - g\, e^{\varepsilon s} U_I(Qs) V_{H_0}(s)|\mathcal{E}_0\rangle$$

PER $\varepsilon < \infty$ CONSID $s \to -\infty$

$$i\hbar g \varepsilon \frac{\partial}{\partial g} U_I(Q,-\infty)|\mathcal{E}_0\rangle = (H-\mathcal{E}_0) U_I(Q,-\infty)|\mathcal{E}_0\rangle$$

NON POSSO ELIMINARE ε
SE MANDASSI $\varepsilon \to 0$
$\Rightarrow H$ HA AUTOVAL $\mathcal{E}_0$

$$\varepsilon i\hbar g \frac{\partial}{\partial g}\langle \mathcal{E}_0|U_I(Q-\infty)|\mathcal{E}_0\rangle = \langle \mathcal{E}_0|(H-\mathcal{E}_0)U_I(Q-\infty)|\mathcal{E}_0\rangle$$

$$\varepsilon i\hbar g \frac{\partial}{\partial g} \frac{U_I(Q-\infty)\quad|\mathcal{E}_0\rangle}{\langle \mathcal{E}_0|U_I(Q-\infty)|\mathcal{E}_0\rangle} = \frac{(H-\mathcal{E}_0)U_I(Q-\infty)}{\langle \mathcal{E}_0|U_I(Q-\infty)|\mathcal{E}_0\rangle}|\mathcal{E}_0\rangle - \frac{U_I(Q-\infty)}{\langle \mathcal{E}_0|U_I(Q-\infty)|\mathcal{E}_0\rangle}|\mathcal{E}_0\rangle \cdot$$

$$\cdot \frac{\langle \mathcal{E}_0|(H-\mathcal{E}_0)U_I(Q-\infty)|\mathcal{E}_0\rangle}{\langle \mathcal{E}_0|U_I(Q-\infty)|\mathcal{E}_0\rangle}$$

x Hp $\exists$ FINITO lim $\Rightarrow$ SX $\to 0$

$$0 = (H-\mathcal{E}_0)\frac{U_I(Q-\infty)|\mathcal{E}_0\rangle}{\langle \mathcal{E}_0|U_I(Q-\infty)|\mathcal{E}_0\rangle} - \frac{U_I(Q-\infty)|\mathcal{E}_0\rangle}{\langle \mathcal{E}_0|U_I(Q-\infty)|\mathcal{E}_0\rangle}\frac{\langle \mathcal{E}_0|(H-\mathcal{E}_0)U_I(Q-\infty)|\mathcal{E}_0\rangle}{\langle \mathcal{E}_0|U_I(Q-\infty)|\mathcal{E}_0\rangle}$$

$$\Rightarrow 0 = (H-\mathcal{E}_0)|\varphi_-\rangle - |\varphi_-\rangle\langle \mathcal{E}_0|(H-\mathcal{E}_0)|\varphi_-\rangle$$

x eliminare U_I uso T exp di Dyson

inoltre $|\varphi_\pm\rangle$ non normalizz., idem x $+\infty$ $\square$

Formula di inversione

→ conseguenza Gell-Mann Low

$H = H_0 + V$, $\quad H|gs\rangle = E_{gs}|gs\rangle$

$H_0|E_0\rangle = E_0|E_0\rangle$ ⇒ per $\hat{O}$ qualunque vale

$$\langle gs|T\, O_{1H}(t_1)\ldots O_{NH}(t_N)|gs\rangle = \frac{\langle E_0|T\, S\, O_{1H_0}(t_1)\ldots O_{NH_0}(t_N)|E_0\rangle}{\langle E_0|S|E_0\rangle}$$

dove $S = U_I(\infty,-\infty)$ op di scattering

⇒ trasf probl che non so affrontare in prob conosciuto

$$S = T\exp \frac{1}{i\hbar}\int_{\pm\infty} dt\, V_{H_0}(t)$$ ⇒ so calcolarlo almeno perturbativamente

Dim

Formula vale solo x prod T-ord ⇒ per facile fa

$t_1 > t_2 > \ldots t_N$ ⇒ $\langle gs|O_{1H}(t_1)\ldots O_{NH}(t_N)|gs\rangle$

$$O_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\, O\, e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \qquad U(t,0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}\, U_I(t,0)$$

$$= U_I^\dagger(t,0)\, e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}\, O\, e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}\, U_I(t,0) = U_I^\dagger(t,0)\, O_{H_0}(t)\, U_I(t,0)$$

$$\Rightarrow \langle gs|O_{1H}(t_1)\ldots O_{NH}(t_N)|gs\rangle = \frac{\langle\varphi_+|U_I^\dagger(t_1,0)\, O_{1H_0}(t_1)\, U_I(t_1,0)\, U_I^\dagger(t_2,0)\, O_{2H_0}(t_2)\ldots|\varphi_-\rangle}{\langle\varphi_+|\varphi_-\rangle}$$

$$= \frac{\dfrac{\langle E_0|U_I^\dagger(0,+\infty)}{\cancel{\langle E_0|U_I(0+\infty)|E_0\rangle^*}}\, U_I(0,t_1)\, O_1(t_1)\, \underbrace{U_I(t_1,t_2)}_{\text{sono in rapp. } H_0}\, O_2(t_2)\ldots \dfrac{U_I(0,-\infty)|E_0\rangle}{\cancel{\langle E_0|U_I(0-\infty)|E_0\rangle}}}{\langle E_0|U_I^\dagger(0+\infty)\, U_I(0-\infty)|E_0\rangle / (\cancel{\langle H\rangle^*}\, \cancel{\langle H\rangle})}$$

$$= \frac{\langle \Psi_0 | U_I(\infty\, t_1)\, O_1(t_1)\, U_I(t_1 t_2) \ldots O_N(t_N)\, U_I(t_N -\infty) | \Psi_0\rangle}{\langle \Psi_0 | U_I(\infty -\infty) | \Psi_0\rangle}$$

→ CRONOLOGICAM ORDINATO ⇒ $T = \mathbb{1}$

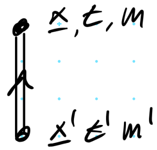
$$U_I(t_1 t_2) = T \exp \frac{1}{i\hbar}\int_{t_2}^{t_1} V_{H_0}(t')\,dt'$$

SE V È A 2 CORPI ⇒ ANCHE EXP HA # PARI DI c E c^+

$$= \frac{\langle\Psi_0| T S\, O_1 \ldots O_N |\Psi_0\rangle}{\langle\Psi_0|S|\Psi_0\rangle} \qquad \square$$

X COMPLETEZZA ABBIAMO CHE

$$iG_{mm'}(\underline{x}t\ \underline{x}'t') = \langle GS| T\, \psi^S_m(\underline{x}t)\, \psi^{S\dagger}_{m'}(\underline{x}'t') |GS\rangle$$



$$= \frac{\langle\Psi_0| T S\, \psi_{m\,H_0}(\underline{x}t)\, \psi^\dagger_{m'\,H_0}(\underline{x}'t') |\Psi_0\rangle}{\langle\Psi_0|S|\Psi_0\rangle}$$

SE AL POSTO DI S METTO LA MIA ESPANSIONE DI V
HO PROD DI OP A 2 CORPI ⇒ UN BOTTO DI CONTI

⇒ TEOR DI WICK → TRATTARE ⟨ ⟩ CON UN BOTTO DI c E c^+

PROPAGATORE LIBERO

$$\left[i\hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - U(\underline{x})\right] G^0(\underline{x}\,\underline{x}'\omega) = \hbar\, \delta_3(\underline{x}-\underline{x}')$$

↳ $G_{mm'} = \delta_{mm'}\, G$

→ SE SAPPIAMO ASS X PROBL SINGOLA PARTIC ⇒ G^0

ALTRIM METODO PERTURBATIVO

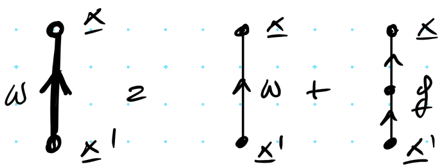
$$\boxed{\left[\hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right] G^0(\underline{x}\,\underline{x}'\,\omega) = \hbar\,\delta_3(\underline{x}-\underline{x}')} + U(\underline{x})\,G^0(\underline{x}\,\underline{x}'\omega)$$

↳ CONOSCERE LA FG X GAS IDEALE PERMETTE DI RISOLVERE EQ DIFF COME δ IN FORMA INTEGRALE

CAMBIO NOTAZ $\quad G^{00}\to G^0 \quad G^0\to G$

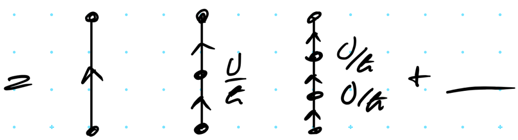
$$\Rightarrow G(\underline{x}\,\underline{x}'\omega) = G^0(\underline{x}\,\underline{x}'\omega) + \frac{1}{\hbar}\int d_3y\, G^0(\underline{x}\,y\,\omega)\,U(y)\,G(y\,\underline{x}'\omega)$$

FACENDO AGIRE $H_0 = \hbar\omega + \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}$ TORNO ALL'ORIGINALE



SU CUI INTEGRO IN $\frac{1}{\hbar}U(y)$

⇒ SE NON SO RISOLVERE? × ITERAZ



SERIE DI BORN

CIOÈ SVILUPPO PERTURBATIVO DI FG USANDO ITERAZ U

TEOR [WICK]

$|GS\rangle$, BASE DI OP ASSOCIATI ALLO STATO CANONICI $\alpha_k^{\pm}$ => NON AGGIUNTI

$$[\alpha_k^+, \alpha_j^+]_{\mp} = 0 \qquad [\alpha_k^-, \alpha_j^-]_{\mp} = 0$$

$$[\alpha_k^-, \alpha_j^+]_{\mp} = \delta_{kj}$$

TC $\quad \alpha_k^- |GS\rangle = 0$ $\quad$ (≠> CHE SIANO L'AGGIUNTO)

$\langle GS| \alpha_k^+ = 0$

ES SE SP FERMI: $|F\rangle$ $\quad \alpha_k^- |F\rangle = 0 \to \begin{cases} \text{OP CREAZ } \; a^+_{\underline{k}m} |F\rangle = 0 & |\underline{k}| \le k_F \\ \text{DISTRUZ } \; a_{\underline{k}m} |F\rangle = 0 & |\underline{k}| > k_F \end{cases}$

$$\langle F| \alpha_k^+ = 0 \to \begin{cases} \langle F| a_{\underline{k}m} = 0 & |\underline{k}| \le k_F \\ \langle F| a^+_{\underline{k}m} = 0 & |\underline{k}| > k_F \end{cases}$$

SICCOME SONO UNA BASE OGNI OP SI PUÒ SVILUPPARE

$$\varphi_m(\underline{x}) = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}m} \langle \underline{x} | \underline{k} \rangle = \sum_{|\underline{k}| \le k_F} a_{\underline{k}m} \langle \underline{x} | \underline{k} \rangle + \sum_{|\underline{k}| > k_F} a_{\underline{k}m} \langle \underline{x} | \underline{k} \rangle$$

$$= \varphi_m^{(+)}(\underline{x}) + \varphi_m^{(-)}(\underline{x}) \qquad \langle F| \varphi_m^{(+)} = 0$$

$$\varphi_m^{(-)} |F\rangle = 0$$

USIAMO A x INDICARE CON $C_{\langle u|} \; C^+_{|u\rangle}$

$$A = A^{(+)} + A^{(-)} \longrightarrow [A_i^{(+)}, A_j^{(+)}]_{\mp} = 0 = [A_i^{(-)}, A_j^{(-)}]$$

$A^{(-)} \to |GS\rangle = 0$

$A^{(+)} \to \langle GS| = 0$

$$[A_\ell^{(-)}, A_k^{(+)}] \ne 0 \quad \text{c-NUMERO} = c\,\mathbb{1}$$

∃ ALTRI SS × SS

$$|BCS\rangle = \prod_{\underline{k}} (u_{\underline{k}} + v_{\underline{k}}\, a^+_{\underline{k}\uparrow}\, a_{\underline{k}\downarrow})|0\rangle$$ BARDEEN - COOPER - SCHRIEFFER

$v_{\underline{k}}$ e $u_{\underline{k}}$ MINIMIZ HAMILTONIANA ⇒ STATO BCS

$$\min_{v_k u_k} \langle BCS|H|BCS\rangle \text{ TC } |u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$$

COPPIE DI COOPER = $2e^-$ CON SPIN ANTI//

CASO PARTIC $u_{\underline{k}} = 0$ $v_{\underline{k}} = 1$ SE $|\underline{k}| \le k_F$

$u_{\underline{k}} = 1$ $v_{\underline{k}} = 0$ SE $|\underline{k}| > k_F$ ⇒ $|BCS\rangle = |F\rangle$

∃ $\alpha^+_{\underline{k}\downarrow}$, $\alpha_{\underline{k}\uparrow}$ TC AGENDO SU BCS LO ANNICHILANO → α^+
(TRASF BOGOLIUBOV)

PRODOTTO DI OP $A_k^{(+)} A_\ell^{(-)}$ DETTO NORMALMENTE ORDINATO SE $A^{(+)}$ A SX DEI $A^{(-)}$ → $A_1^+ A_2^+ A_3^-$ ECC…

DEF [OP DI ORDINAMENTO NORMALE]

$$N[A_1^{(\pm)} \dots A_n^{(\pm)}] = (\pm)^\sigma A^{o\,(+)}_{i_1} \dots A^{o\,(-)}_{i_N}$$ NORMALM ORDINATO

∃ + POSSIBILI ORDINAM NORMALI

$$N[A_1^+ A_2^+ A_3^- A_4^+] = \begin{cases} \pm\, 1^+ 2^+ 4^+ 3^- \\ \pm\, 4^+ 1^+ 2^+ 3^- \\ \text{———} \end{cases}$$

STESSO OP XKÉ I + COMM/ ANTICOMM ESATTAM → CAMBIA SOLO SGN CONTEGGIATO DA PERMUTAZ

IL TEOR DI WICK È X MUOVERE ROBACCIA IN SOMMA NORMAL ORD

$$A_1A_2 = (A_1^+ + A_1^-)(A_2^+ + A_2^-) = A_1^+A_2^+ + A_1^+A_2^- + A_1^-A_2^+ + A_1^-A_2^-$$

$$A_1^-A_2^+ = [A_1^-, A_2^+]_\mp \pm A_2^+A_1^-$$

$$= N[A_1, A_2] + [A_1^-, A_2^+]$$

↳ C NUMERO

DEF [CONTRAZIONE]

$$A_1A_2 = N[A_1, A_2] + \overbrace{A_1A_2} \quad \text{↳ CONTRAZ} \qquad \left(\overbrace{A_1A_2} = [A_1^-, A_2^+] \right)$$

MODO INTERESSANTE X VEDERE CONTRAZ

$$\langle GS|A_1A_2|GS\rangle = 0 + \overbrace{A_1A_2} \longrightarrow \text{VAL MEDIO SU STATO DI MINIMUM}$$

↳ ORD NORM HA $\langle\ \rangle = 0$

STA ROBA X $A_1 \_ A_N$ = TEOR WICK

PROP N [ANALOGA A T PROD]

$$N[A_1 \_ A_N] = (\pm)^\sigma N[A_{\sigma_1} \_ A_{\sigma_N}]$$

DEF [CONTRAZ CON N OP IN MEZZO AL CAZZO]

$$\overbrace{A\,(A_1 \_ A_n)\,A'} = (A_1 \_ A_n)\,\overbrace{AA'}\,(\pm)^n$$

TEOR WICK E DIM x [illegible]

① $A_0^- A_1^+ \ldots A_n^+ = [A_0^-, A_1^+]_\mp A_2^+ \ldots A_n^+ + A_1^+ A_0^- A_2^+ \ldots A_n^+$

$$= \overline{A_0 A_1} A_2^+ \ldots A_n^+ \pm A_1^+ \underbrace{[A_0^-, A_2^+]}_{\overline{A_0 A_2}} A_3^+ \ldots A_n^+ + A_1^+ A_2^+ A_0^- \ldots A_n^+$$

$$= \overline{A_0 A_1} A_2^+ \ldots A_n^+ + \overline{A_0 A_1^+ A_2} A_3^+ \ldots A_n^+ + \ldots + \overline{A_0 A_1^+ \ldots A_{n-1}^+ A_n} + \underbrace{(\pm) A_1^+ \ldots A_n^+ A_0^-}_{N[A_0^- A_1^+ \ldots A_n^+]}$$

$$= N[A_0^- A_1^+ \ldots A_n^+] + \sum_{k=1}^{n} \overline{A_0 A_1^+ \ldots A_k} \ldots A_n^+$$

② DIM x INDUZ SU SLIDE

Z → RES: $A_0^- N[A_1 \ldots A_n] = N[A_0^- A_1 \ldots A_n] + \sum_{k=1}^{n} N[\overline{A_0 \ldots A_k} \ldots A_n]$

③ BANALE

$$A_0 N[A_1 \ldots A_n] = N[A_0 \ldots A_n] + \sum^{n} N[\overline{A_0 \ldots A_k} \ldots A_n]$$

[illegible] 2 OP

ITERANDO ⇒ TEOR WICK

TEOR DI WICK STATICO (NO TEMPO)

CONTRAZ SU OGNI COPPIA

$$A_1 \ldots A_n = \underbrace{N[A_1 \ldots A_n]}_{N_{n0}} + \underbrace{\sum_{\sqcap} N[\overline{A_1 \ldots} A_n]}_{N_{n1}} + \overbrace{\sum_{\sqcap\sqcap} N[A_1 \ldots A_n]}^{N_{n2}}$$

$$+ \ldots + \sum_{\substack{\text{CONTRAZ}\\ \text{TOT}}} N[A_1 \ldots A_n]$$

↳ SE n PARI ≠ è UN NUMERO
n DISP ≠ A SPARATO

$$\Rightarrow \langle GS | A_1 \ldots A_n | GS \rangle = \begin{cases} 0 & n \text{ DISP} \\ \sum_{\substack{\text{CONTRAZ}\\ \text{TOT}}} N[A_1 \ldots A_n] & \text{SE } n \text{ PARI} \end{cases}$$

DIM (x INDUZIONE)

$$A_1A_2 = N[A_1A_2] + \overline{A_1A_2}$$

$$Hp: A_1 \_\_ A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} N_{nk} \rightarrow$$ somma delle N di op con k contraz dentro $N[\_]$

→ voglio dim caso vero x $n+1$

$$A_0A_1 \_\_ A_n = A_0(N_{n0} + N_{n1} + N_{n2} + \_\_)$$

$$A_0 N[A_1 \_ A_n] = N[A_0 \_ A_n] + \sum_k N[\overline{A_0 \_ A_k} \_ A_n]$$

$$= N_{n+1\,0} + N[\overline{A_0 N_{n0}}]$$

$$= N_{n+1\,0} + N[\overline{A_0 N_{n0}}] + N[A_0 N_{n1}] + N[\overline{A_0 N_{n1}}] + \_\_$$

$$= N_{n+1\,0} + N_{n+1\,1} + \_\_$$

$$N[\overline{A_0 N_{nk}}] + N[A_0 N_{nk}] = N_{n+1,\,k+1} \qquad \square$$

ESEMPIO

$$\langle F| \hat{n}_\uparrow(\underline{x})\, \hat{n}_\uparrow(\underline{x}')|F\rangle = \langle F|\psi^\dagger_\uparrow(\underline{x})\psi_\uparrow(\underline{x})\,\psi^\dagger_\uparrow(\underline{x}')\psi_\uparrow(\underline{x}')|F\rangle$$

$$\langle F|c^\dagger c^\dagger|F\rangle = 0 = \overline{c^\dagger c^\dagger}$$

$$= \langle F|\psi^\dagger_\uparrow(\underline{x})\psi_\uparrow(\underline{x})|F\rangle\langle F|\psi^\dagger_\uparrow(\underline{x}')\psi_\uparrow(\underline{x}')|F\rangle +$$
$$+ \langle F|\psi^\dagger_\uparrow(\underline{x})\psi_\uparrow(\underline{x}')|F\rangle\langle F|\psi_\uparrow(\underline{x})\psi^\dagger_\uparrow(\underline{x}')|F\rangle$$

$$\Rightarrow \langle F|\hat{n}_\uparrow(\underline{x})\hat{n}_\uparrow(\underline{x}')|F\rangle - \langle F|\hat{n}_\uparrow(\underline{x})|F\rangle\langle F|\hat{n}_\uparrow(\underline{x}')|F\rangle =$$
$$= \langle F|\psi^\dagger_\uparrow(\underline{x}')\psi_\uparrow(\underline{x})|F\rangle\langle F|\psi(\underline{x})\psi^\dagger(\underline{x}')|F\rangle$$

ES NON BANALE

SE $\underline{x} \to \underline{x}'$ $\Rightarrow$ ESCLUSIONE PAULI $\Rightarrow$ COSA SUCCEDE

X CASA

OSS $\langle GS | A_1 \_ A_n | GS \rangle = 0$ SE n DISP $\forall |GS\rangle$

n PARI $\Rightarrow$ Σ CONTRAZ TOT MA CONTRAZ = FUNZ A 2 PT

$\Rightarrow$ FUNZ n PARTIC = PROD DI FUNZ A 2 PT

$\longrightarrow$ CARATTERIZZAZIONE FUNZIONI CORRELAZ

INTERAZ A 2 CORPI

$$V = \frac{e^2}{2V} \sum_{\underline{k}\underline{p}\underline{q} \neq 0} \sum_{mm'} a^+_{\underline{q}m}\, a^+_{\underline{k}m'}\, a_{\underline{k}+\underline{q}m'}\, a_{\underline{p}-\underline{q}m}$$

$\langle F | V | F \rangle \longrightarrow$ CHE CONTRAZ HO? 13 E 24 OPPURE 14 e 23

$$\langle F | a^+_{\underline{q}m} a_{\underline{p}-\underline{q}m} | F \rangle \langle F | a^+_{\underline{k}m'} a_{\underline{k}+\underline{q}m'} | F \rangle - \langle F | a^+_{\underline{q}m} a_{\underline{k}+\underline{q}m'} | F \rangle \langle F | a^+_{\underline{k}m'} a_{\underline{p}-\underline{q}m} | F \rangle$$

$\neq 0 \iff q = 0 \iff \neq 0$

SE HO EVOLUZ TEMP COMPLICAZ IN +

$\to$ EVOLUZ TEMP NON DEVE MUTARE IL CARATTERE DI DISTRUZ DI $\alpha^{\pm}$

$$H_0 = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha c^+_\alpha c_\alpha \longrightarrow c_\alpha(t) = e^{-i\omega_\alpha t} c_\alpha$$

$$c^+_\alpha(t) = e^{+i\omega_\alpha t} c^+_\alpha$$ $\Rightarrow$ ESSO ANCORA ORDINAM NORMALE

TEOR WICK T-ORDINATO

$|GS\rangle\,,\ \alpha_k^{\pm}\,,\ H$ $\longrightarrow$ x TEOR WICK È NEC CHE L'EVOLUZ TEMP DELLA BASE $\alpha_k^{\pm}$ SIA DEL TIPO

$$\alpha_k^-(t) = f_k(t)\,\alpha_k^-$$

$$\Rightarrow \alpha_k^-(t)\,|GS\rangle = 0 \qquad \langle GS|\,\alpha_k^+(t) = 0 \qquad \forall t$$

$$[\alpha_j^-(t), \alpha_k^-(t)]_{\mp} = 0 \qquad [\alpha_j^+(t), \alpha_k^+(t')]_{\mp} = 0$$

$$[\alpha_j^-(t), \alpha_k^+(t')]_{\mp} = \delta_{kj}\, g(t,t')\,\mathbb{1}$$

$\Rightarrow$ STATEMENT TEOR DI WICK

$$T A_1(t_1) \ldots A_n(t_n) = N[A_1(t_1) \ldots A_n(t_n)] +$$

$$+ \sum_{\sim} N[A_1 \overset{\sim}{\ldots} A_n] + \sum_{\sim\sim} N[A_1 \overset{\sim\sim}{\ldots} A_n] + \ldots$$

Σ CONTRAZ DIP DA t

STEP 1

$$T A_1(t_1) A_2(t_2) = \theta(t_1 - t_2) A_1(t_1) A_2(t_2)$$

$$\pm \theta(t_2 - t_1) A_2(t_2) A_1(t_1)$$

$$= \theta(t_1 - t_2)\left(N[A_1(t_1) A_2(t_2)] + \overline{A_1(t_1) A_2(t_2)}\right) \pm$$

$$\pm \theta(t_2 - t_1)\left(N[A_2(t_2) A_1(t_1)] + \overline{A_2(t_2) A_1(t_1)}\right)$$

$$= [\theta(t_1 - t_2) + \theta(t_2 - t_1)]\, N[A_1(t_1) A_2(t_2)]$$

$$+ \theta(t_1 - t_2)\, \overline{A_1 A_2} + \theta(t_2 - t_1)\, \overline{A_2 A_1}$$

$$= N[A_1(t_1) A_2(t_2)] + \widetilde{A_1(t_1) A_2(t_2)}$$ $\longrightarrow$ COMB CNUM = CNUM

$$\langle GS| T A_1(t_1) A_2(t_2) |GS\rangle = \overbrace{A_1(t_1) A_2(t_2)}$$

OSS I PROP VALIDA SOLO x T ORDINAMENTO

SCAMBIANDO GLI OP $\overbrace{A_1(t_1) A_2(t_2)} = \pm \overbrace{A_2(t_2) A_1(t_1)}$

$$\langle GS| T \psi_{m_1}(1) \psi^+_{m_2}(2) |GS\rangle = \overbrace{\psi_{m_1}(\underline{x}_1 t_1) \psi^+_{m_2}(\underline{x}_2 t_2)} = i G^0_{m_1 m_2}(1\,2)$$

$1 \to \underline{x}_1 t_1$, $2 \to \underline{x}_2 t_2$

RICORDARSI LA i

$\overbrace{\psi\psi} = 0$ SE $|GS\rangle$ EIGEN $\hat{N}$

$\neq 0$ SE ROTTO SE TUTTO LO SP DI FOCK

$$= \langle GS| T \psi_{m_1} \psi_{m_2} |GS\rangle = i F(1\,2)$$ CORRELATORI ANOMALI

NOTAZIONE $N[AB] = :AB:$

STEP 2

x Hp INDUZ SU N

$$T A_1(t_1) \_\_\_ A_N(t_N) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} N_{Nk} \quad \text{CON } N_{Nk} = \sum_{k \text{ CONTRAZ TOT}} N[\overbrace{A_1 \_\_ A_N}]$$

SE HO N+1 OP

$$T A_0(t_0) A_1(t_1) \_\_\_ A_N(t_N) = (\pm 1)^\ell A_\ell \, T A_0 A_1 \_\_ \cancel{A_\ell} \_\_ A_N$$

PORTO FUORI A_ℓ CORRISP A TEMPO MAX

$$= (\pm)^\ell A_\ell \left(N[A_0 \_\_ \cancel{A_\ell} \_\_ A_N] + \sum N[\overbrace{A_0 \_\_ A_\ell} \_\_ A_N] + \_\_ \right)$$

ORA OSSO

CONTRAZ INDIP DA t

$$A_0 N[A_1 \_\_ A_N] = N[A_0 A_1 \_\_ A_N] + \sum_k N[\overbrace{A_0 \_\_ A_k} \_\_ A_N]$$

$$\Rightarrow (\pm)^l A_l \, N[A_l A_0 \dots \cancel{A_l} \dots A_N] + (\pm)^l \sum_k N[A_l A_0 \dots A_k \dots \cancel{A_l} \dots A_N]$$

$$+ (\pm)^l \sum_m N[A_l A_0 \overset{m}{\dots} \cancel{A_l} \dots A_N] + (\pm)^l \sum_{k \neq l}^{N} N[A_l A_0 \dots A_k \dots A_N]$$

NEL 1° TERM DELL'ORDINAM NORM RIMETTO A_l AL SUO POSTO $N[A_0 \dots A_N]$

AL II TERM $A_l A_k = \langle T A_l A_k \rangle$ MA A_l HA TEMPO MAX $\Rightarrow T = 1$

$\rightarrow$ SPOSTANDO $\pm$ DAVANTI $\Rightarrow$ NO SEGN

$\Rightarrow N[A_0 \dots A_N]$ PERCHÉ T ORDINATO

INOLTRE $A(A_1 \dots A_N)A' = AA'(A_1 \dots A_N)(\pm)^N$

$$\Rightarrow N[A_0 \dots A_N] + N[A_0 \overset{m}{\dots} A_N] + \_\_\_\_$$

APPLICAZ

$$i^2 G^0(1234) = \langle GS | T \, \varphi(1) \varphi(2) \varphi^\dagger(4) \varphi^\dagger(3) | GS \rangle$$

1 2

$$= iG^0(13) \, iG^0(24) \pm iG^0(14) \, iG^0(13)$$

1 2

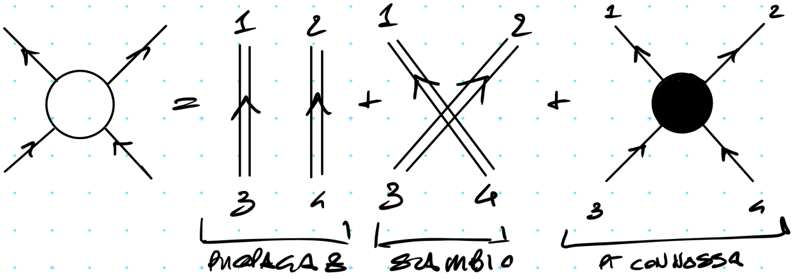
$$= i^2 \det_{perm} \begin{bmatrix} G^0(13) & G^0(14) \\ G^0(23) & G^0(24) \end{bmatrix}$$

IN TEORIA DI PARTIC NON INTERAGENTI SE POSSO SCRIVERE BENE $\hat{H}$

$\Rightarrow$ FUNZ DI GREEN CHE FATTORIZZANO

+ IN GEN

$$G(1234) = \underbrace{G(13)G(24) \pm G(14)G(23)}_{\text{PT NON INTERAGENTE}} + \underbrace{G(1234)}_{\text{PT CONNESSA}}$$



↳ INTERAZ TRA LE PARTIC

SE $H = H_0 + V$ TC PER H_0 VALE WICK T ORDINATO

→ USO X CALCOLARE IL PROPAGATORE

GS ESATTO

$$G_{mm'}(x\, x') = \frac{1}{i}\langle E | T\, \psi_m(x)\, \psi^+_{m'}(x') | E\rangle$$

$$= \frac{1}{i}\, \frac{\langle E_0 | T S\, \psi_m(x)\, \psi_{m'}(x') | E_0\rangle}{\langle E_0 | S | E_0\rangle}$$

FORMULA DI MDUZ ESATTA

PRENDENDO TEXP E LO BUTTIAMO DENTRO

$$S = T\exp \frac{1}{i\hbar}\int_{\pm\infty} dt_1\, V_{H_0}(t_1)$$

$$= T\exp \frac{1}{2i\hbar}\int_{\pm\infty} dt_1 \int d_3x_1\, d_3x_1' \sum_{\mu\mu'\nu\nu'} v_{\mu\mu'\nu\nu'}(\underline{x}_1, \underline{x}_1')\, \psi^+_{\mu}(\underline{x}_1, t_1^{+++})\, \psi^+_{\nu}(\underline{x}_1', t_1^{++})\, \psi_{\nu'}(\underline{x}_1', t_1^{+})\, \psi_{\mu'}(\underline{x}_1, t_1)$$

V INTERAZ

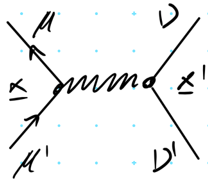
HO 2 PT PARZIALM ≠ MA EVOLUZ UGUALI NEL HO STESSO TEMPO t_1

SICCOME HO T ORD ⇒ t^+, t^{++}, t^{+++}

TUTTI ALLO STESSO TEMPO PERCHÉ INTERAZ STATICA ⇒ ISTANTANEA INTRODUCO $t_1' = t_1$
E $\delta_{t_1' t_1}$

$$T\exp \frac{1}{2i\hbar}\int d_4x_1\, d_4x_1' \sum_{\substack{\mu\mu' \\ \nu\nu'}} U^0_{\mu\mu'\nu\nu'}(x_1\, x_1')\, \psi^+_\mu(x_1^{+++})\, \psi^+_\nu(x_1'^{++})\, \psi_{\nu'}(x_1'^{+})\, \psi_{\mu'}(x_1')$$

CON $U^0_{\mu\mu'\nu\nu'} \equiv \mathcal{V}_{\mu\mu'\nu\nu'}(x\, x')\,\delta(t-t')$ INTERAZ TRA PTI SP-TEMP.
$\delta \Rightarrow$ INTERAZ ISTANTANEA



INTERAZ COULOMBIANA INDIP DA SPIN
$\Rightarrow \delta_{\mu\mu'}\,\delta_{\nu\nu'}$

$$= T\exp\frac{1}{2i\hbar}\int d1\, d2 \sum_{\substack{\mu\mu' \\ \nu\nu'}} U_{\mu\mu'\nu\nu'}(12)\,\psi^+_\mu(1)\,\psi^+_\nu(2)\,\psi_{\nu'}(2)\,\psi_{\mu'}(1)$$

PUCCIAMO ORA S IN EQ DI G

NUMERATORE A ORDINE 0 È $S = \mathbb{1} \Rightarrow G^0_{mm'}(x\, x')$

+ CORREZ PERTURB DAGLI ALTRI TERMINI DI S

1° CORREZ (NUM AL 1° ORDINE)

$$\frac{1}{2i\hbar}\int d1\, d2 \sum_{SPIN} U^0_{\mu\mu'\nu\nu'}(12)\,\langle E_0|T\,\psi^+_\mu(1)\,\psi^+_\nu(2)\,\psi_{\nu'}(2)\,\psi_{\mu'}(1)\,\psi_m(x)\,\psi^+_{m'}(x')|E_0\rangle$$

6 OPERATORI → SBATTI ⇒ TEOR WICK TOND

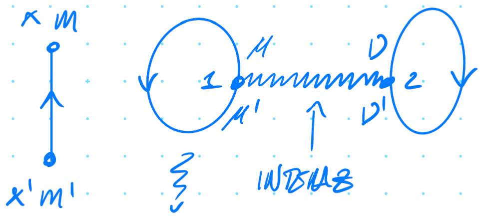
$\langle\ \ \rangle$ = CONTRAZ TOT PERCHÉ # PARI

x → PTO ENTRATA
x' → USCITA

1,2 → PTI INTERMEDI

$$\psi^+_\mu(1)\,\psi^+_\nu(2)\,\psi_{\nu'}(2)\,\psi_{\mu'}(1)\,\psi_m(x)\,\psi^+_{m'}(x')$$

PRIMO DIAG DI FEYNMANN



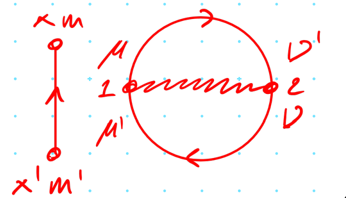
INTERAZ

PARTIC NASCE IN 1
E MUORE IN 1

SI FATTORIZZA NELLA G^0 PER UN # FATTO DA 2 INTEG

→ IL # È DETTO DIAGRAMMA DI VUOTO

$$\psi^+_\mu(1)\,\psi^+_\nu(2)\,\psi_{\nu'}(2)\,\psi_{\mu'}(1)\,\psi_m(x)\,\psi^+_{m'}(x')$$

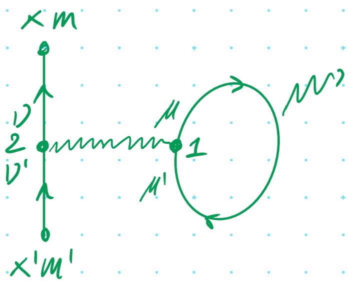


FATTORIZZO ANCORA G^0

VEDIAMO ORA DIAGRAMMA NON DI VUOTO

$$\psi^+_\mu(1)\,\psi^+_\nu(2)\,\psi_{\nu'}(2)\,\psi_{\mu'}(1)\,\psi_m(x)\,\psi^+_{m'}(x')$$

$x' \to 2 \to x$



$\langle T\psi\psi^+\rangle$ = DENSITÀ

→ POT DI HARTREE → PARTIC PROPAGANDO INTERAGISCE CON CAMPO MEDIO

SE DA $x' \to 1 \to x$ STESSO DIAGRAMMA, DIFFERISCONO X SCAMBIO
MA VALGONO UGUALE XKÉ VAR MUTE

→ FG VEDO SOLO SPIN ENTRANTE/USCENTE

$$\varphi^+_\mu(1)\,\varphi^+_\nu(2)\,\varphi_{\nu'}(2)\,\varphi_{\mu'}(1)\,\varphi_m(x)\,\varphi^+_{m'}(x')$$

IN MANIERA ANALOGA STESSO DIAG

PER SCAMBIO $1 \longleftrightarrow 2$

RICORDANDO CHE $U^0_{\mu\mu'\nu\nu'}(12) = U^0_{\nu\nu'\mu\mu'}(21)$

IN TOT HO 6 DIAG $\longrightarrow 3! = \#$ CONTRAZ TOT POSSIBILI

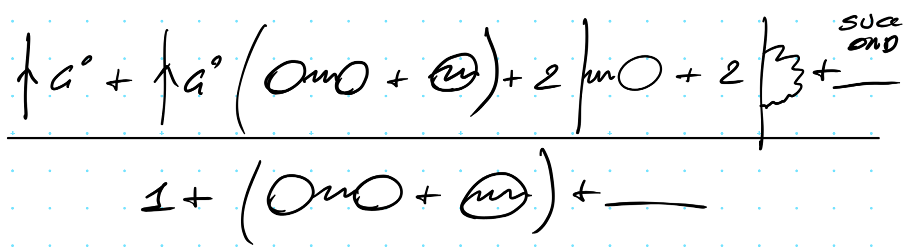
ALL'ORDINE N DELLO SVILUPPO HO $2N+1$ CREATORI E $2N+1$ DISTRUTT

$\Rightarrow (2N+1)!$ CONTRAZ POSSIBILI $\Rightarrow (2N+1)!$ DIAG FEYNMAN

RISULTATO IMPORTANTE (RICAVATO IN MANIERA INGENUA)

$$\langle E_0|S|E_0\rangle = 1 + \langle E_0|T\,\varphi^+_\mu(1)\,\varphi^+_\nu(2)\,\varphi_{\nu'}(2)\,\varphi_{\mu'}(1)|E_0\rangle$$

(AL 1° ORDINE)

$\Rightarrow G =$ 

NELLO SPIRITO DI TEO PERTURBATIVA SVILUPPO IL DENOMIN COME SERIE GEOM E PORTO AL NUM COME $1-(\mathrm{O}\!\sim\!\mathrm{O} + \ominus)$

$$= \uparrow G^0 + \uparrow G^0 \left(\mathrm{O}\!\sim\!\mathrm{O} + \ominus\right) - \uparrow G_0 \left(\mathrm{O}\!\sim\!\mathrm{O} + \ominus\right) + \ldots$$

→ IL DENOM CANCELLA ESATTAM TUTTI I TERMINI DEL NUM CHE HANNO FATTORI DI VUOTO

⇒ INUTILE CALCOLARE DIAG CON FATTORI DI VUOTO

FATTORE 2 DEGLI ALTRI SI CANCELLA CON $\frac{1}{2}$ AL NUM

⇒ CALCOLO SOLO 2 DIAG

DIAG DI VUOTO VENGONO DA CONTRAZ INTERNE = INTERAZ FRA [illegible]

$$G_{mm'}(xx') = \frac{1}{i}\frac{\langle E_0|T S \psi_m(x)\psi^+_{m'}(x')|E_0\rangle}{\langle E_0|S|E_0\rangle}$$

$$= \frac{1}{i\langle E_0|S|E_0\rangle}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(i\hbar)^k}\frac{1}{k!}\int d1 \ldots dk\, \langle E_0|T V_{H_0}(t_1)\ldots V_{H_0}(t_k)\, \psi_m(x)\psi^+_{m'}(x')|E_0\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} G^{(k)}_{mm'}(xx')$$ → VOGLIAMO CAPIRE COME CALCOLARE $G^{(k)}$ IN SERIE PERTURBATIVA

→ SOMMA DI DIAG DI ORDINE K CON

- K LINEE IN O°
- 2K+1 ↑ G° (CONTRAZ TOT DI 4K+2 OP)
- 2K PT SPTEMPO

IL DENOM CANCELLA TUTTI I DIAG CON FATTORI DI VUOTO

IN GEN

$$\frac{\langle \varepsilon_0 | T S\, O_1(t_1) \dots O_N(t_N) | \varepsilon_0\rangle}{\langle \varepsilon_0 | S | \varepsilon_0\rangle} = \langle \varepsilon_0 | T S\, O_1(t_1)\, O_N(t_N) | \varepsilon_0\rangle_*$$

* = OMESSO DIAG CON FATTORI DI VUOTO

FATTORI DI VUOTO APPAIONO QUANDO UNISCO LE V TRA DI LORO

NUMERATORE:

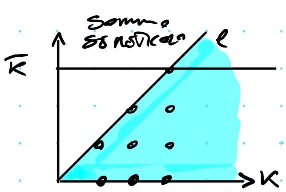
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^k}\frac{1}{k!}\int dt_1\dots dt_k \,\langle \varepsilon_0|T V_1\dots V_k\, O_1(t_1)\dots O_N(t_N)|\varepsilon_0\rangle$$

- SWITCHO DA O A A OP CREAZ/DISTRUZ
- CLASSIFICO CONTRAZ TOT IN * E NON (1 o + V CONTRATTI CON SE STESSI → COMMUTANO)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^k}\frac{1}{k!}\int dt_1'\dots dt_k' \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \langle \varepsilon_0| T\, \underbrace{V_1\dots V_l}_{\text{CONTRATTI TOT}} \underbrace{\dots V_k \dots A_1\dots A_N}_{\text{CONTRATTI TOT SENZA VERTICI DI VUOTO}} |\varepsilon_0\rangle$$

MODI IN CUI POSSO SCEGLIERE l OP DA CONTRARRE CON SE STESSI

$$= \langle \varepsilon_0|T V_1\dots V_l|\varepsilon_0\rangle\langle\varepsilon_0|T V_{l+1}\dots V_k A_1\dots A_N|\varepsilon_0\rangle_*$$



ORA SCAMBIO LE SOMME: SE FIX $\ell \Rightarrow k: 0 \to \infty$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!(k-\ell)!} \frac{1}{(i\hbar)^{\ell+(k-\ell)}} \int dt_1 \dots dt_\ell \langle E_0 | T V_1 \dots V_\ell | E_0 \rangle$$

$$\int dt_{\ell+1} \dots dt_k \langle E_0 | T V_{\ell+1} \dots V_k (A_1 \dots A_N) | E_0 \rangle_*$$

$k - \ell = k'$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \frac{1}{(i\hbar)^\ell} \int dt_1 \dots dt_\ell \langle E_0 | V_1 \dots V_\ell | E_0 \rangle \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{1}{k'!} \frac{1}{(i\hbar)^{k'}}$$

$$\int dt_1 \dots dt_{k'} \langle E_0 | T V_1 \dots V_{k'} A \dots A | E_0 \rangle_*$$

NON FATTORIZZATO $\longrightarrow$ 1° FATTORE δ $\langle E_0 | S | E_0 \rangle$

2° FATTORE SVILUPPO PERTURB SENZA FATTORI DI VUOTO $\square$

DIAGRAMMI DI FEYNMAN [REGOLE]

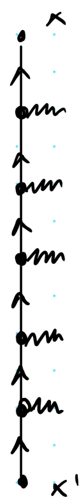
- PREFATTORE $\forall$ DIAGRAMMA $G^{(k)}$

$$\frac{1}{(i\hbar)^k} \frac{1}{i} \, i^{2k+1} = \left(\frac{1}{\hbar}\right)^k$$

- PREFATTORE $(\mp 1)^{\# LOOP}$

  $\Rightarrow$ TIENE CONTO DEL FATTO CHE CONTRAIAMO ANCHE A DISTANZA $V V_1 \dots V_N V'$

  $\pm \times$ FERMIONI NO SIGN

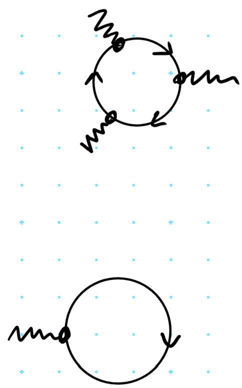


LINEA CONTINUA $x' \to x$ CON IN MEZZO INDICI

$\to$ CATENA DI CONTRAZ

+ ALTRE CONTRAZ COLLEGATE AGLI INDICI

$\to$ LOOP CHE SI COLLEGANO ALLA CATENA



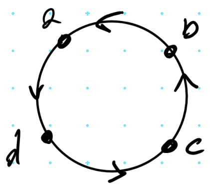
SCRIVO + ESPLICIT I V

$$T\,\underbrace{\varphi^+\varphi^+\varphi\varphi}_{V_1}\ \text{——}\ \underbrace{\varphi\varphi^+\varphi^+\varphi\varphi}_{V_k}\ \varphi_x\,\varphi^+_{x'}$$

LA CATENA È FATTA DA $\left[\varphi_x\,(\varphi^+_k\varphi_k)\text{——}(\varphi^+_1\varphi_1)\,\varphi^+_{x'}\right]$ ALLORA

NELLO STESSO PTO x_k $\longrightarrow$ PARTICELLA ENTRA ED ESCE

x TUTTE FERMI STE COPPIE NON HO FATTO CAMBIO SEGN
$\longrightarrow$ UNA COPPIA CHE NE SCAVALCA UN'ALTRA È SEMPRE UN BOSONE



$$\varphi^+_a\varphi_a\varphi^+_b\varphi_b\varphi^+_c\varphi_c\varphi^+_d\varphi_d$$

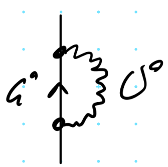
$$G^0_{ba}\quad G^0_{bc}\quad G^0_{cd}$$

ULTIMA CONTRAZ È $\langle T\,\varphi^+_a\varphi_d\rangle = \pm\langle T\,\varphi_d\varphi_a\rangle$

UNO $\forall$ LOOP

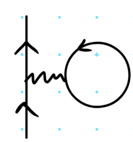
- $G^0(\xi t\,\xi' t) \equiv G^0(\xi t, \xi' t^+)$ x TEMPI UGUALI IL Ψ È SEMPRE t' XKÉ IL Ψ ANN SI RIFÀ AL CREATORE

ES



2 PTI $\neq$ MA TEMPORALM COINCIDE XKÉ HA INTERAZ ISTANTANEA

IDEM x

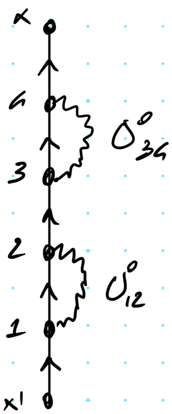


OSS OMETTIAMO I FATTORI $\frac{1}{k!}$ $\frac{1}{2^k}$ ← INVARIANZA X SCAMBIO DEL SINGOLO PROPAGATORE

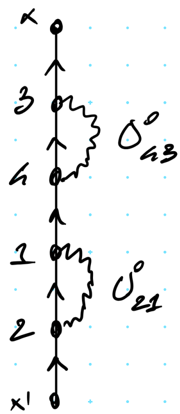
↑ INVAR X PERMUTAZ TRA I VARI V

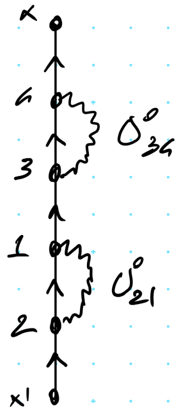
ESEMPIO

$$T\left[\underbrace{\phi_3^+ \phi_4^+ \phi_4 \phi_3}_{V_{34}}\ \underbrace{\phi_1^+ \phi_2^+ \phi_2 \phi_1}_{V_{12}}\ \phi_x \phi_{x'}^+\right]$$



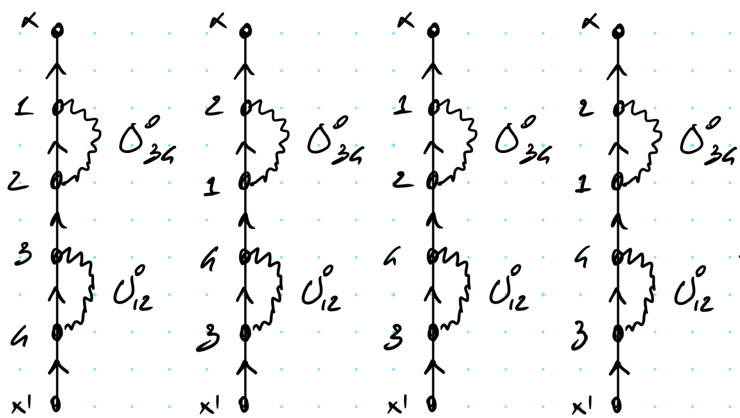
ALTRE CONTRAZ:





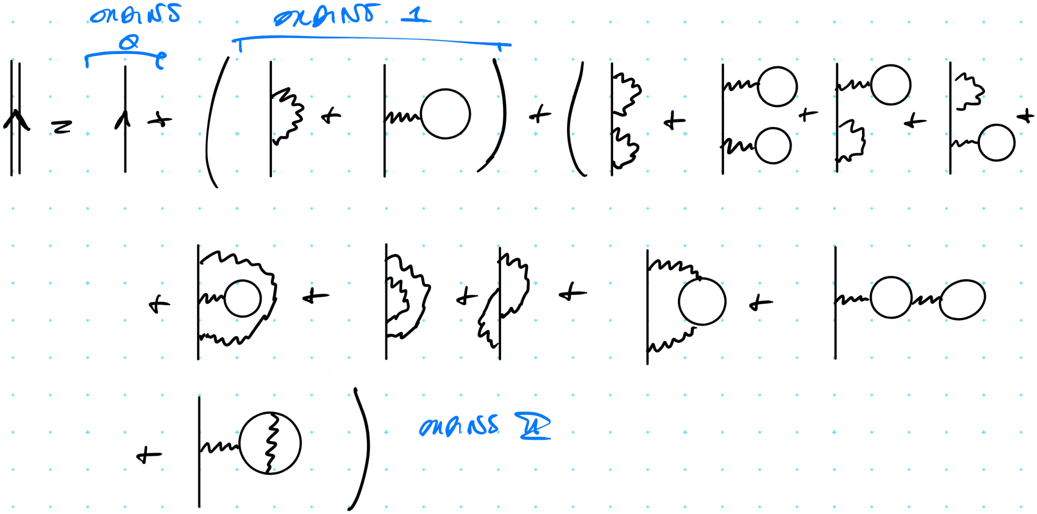
→ TENER CONTO DI UNO SOLO = OMETTERE $\frac{1}{2^k}$

PER ALTRI



POSSO INVERTIRE I V

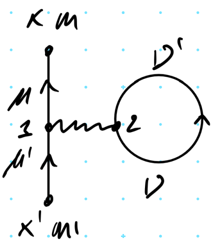
→ SONO $k!$



$$= \frac{i}{\hbar} \sum_{\substack{\mu\mu' \\ \nu\nu'}} \int d1\, d2\; G^0_{m\mu}(x1)\, G^0_{\mu'\nu}(1\overset{t^+}{2^+})\, G^0_{\nu' m'}(2x')\, U^0_{\mu\mu'\nu\nu'}(12)$$

SE TRATTIAMO GAS ELETTRONICO CON INTERAZ COULOMB

$$G^0_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} G^0 \qquad U_{\mu\mu'\nu\nu'}(12) = \frac{4\pi e^2}{|x_1 - x_2|}\, \delta(t_1 - t_2)\, \delta_{\mu\mu'}\, \delta_{\nu\nu'}$$



<u>TADPOLE</u>

$$= \frac{i}{\hbar}(-1) \sum_{SPIN} \int d1\, d2\; \delta_{m\mu}\, G^0(x1)\, \delta_{\mu' m'}\, G^0(1x')$$

$$\delta_{\mu\mu'}\, \delta_{\nu\nu'}\, \frac{4\pi e^2}{|x_1 - x_2|}\, \delta(t_1 - t_2)\; \delta_{\nu\nu'}\, G^0(22^+)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \sum_{\mu\nu} \int d1\, d2\; \delta_{m\mu}\, \delta_{\mu m'}\, G^0(\underline{x}t, \underline{x}_1 t_1)\, G^0(\underline{x}_1 t_1, \underline{x}' t')$$

$$\frac{4\pi e^2}{|\underline{x}_1-\underline{x}_2|}\;\frac{1}{i}\underbrace{\langle T\psi_\nu(\underline{x}_2 t_1)\,\psi^+_\nu(\underline{x}_2 t_1^+)\rangle}_{-i\,n_\nu(\underline{x}_2)}$$

$$= \frac{1}{\hbar}\,\delta_{mm'}\int d_3\underline{x}_1\,dt_1\;G^0(\underline{x}t,\underline{x}_1 t_1)\,G^0(\underline{x}_1 t_1,\underline{x}'t')\,U_H(\underline{x}_1)$$

INTEGRALE SPAZIALE INTERAZ COULOMB PER $\hat{n}$
DENSITÀ EE (ES) (IMPERTURB)
→ POT HARTREE

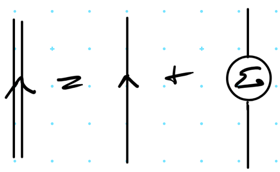
$$U_H(\underline{x}) = \int d\underline{y}\;\hat{n}(\underline{y})\,2V(\underline{x},\underline{y})$$

→ ESPRESSIONE ANALITICA ARBITRARIAM BASTARDA MA MOLTO SEMPLICE × INVAR TRASLAZ

SP $\underline{K}$ ⇒ RIMEZZO GLI INTEGRALI

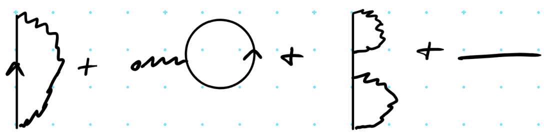
SELF-ENERGIA

GUARDANDO IL PRO DI INGRESSO LO G^0 E IDEM IN SERIE



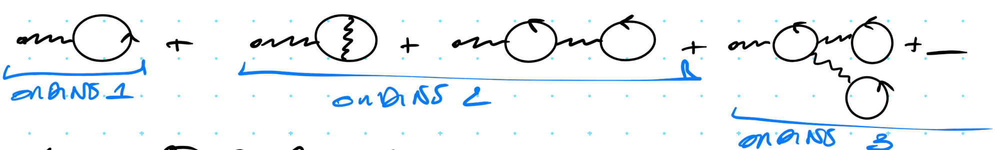
⇝ SELF ENERGIA = SOMMA DI TUTTE LE INSERZIONI PERTURBATIVE AL NOSTRO PROPAGATORE

→ FUNZ A 2 PTI $\Sigma_{mm'}(x,y) =$



DISTINGUIAMO TRA I DIAG CHE CONTRIB A Σ → LOCALI / → BILOCALI

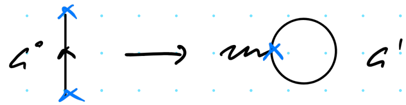
$\Sigma_{LOC} =$



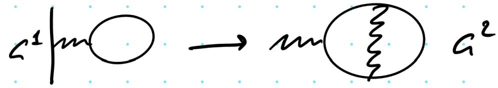
LOCALE ≡ 1 SOLO PTO DI SP TEMPO

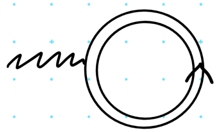
BLOCCHI ≡ 2 PTI SP-TEMPO DISTANTI

NOTIAMO CHE x ORDINE 1 DI Σ_{loc} HO AMPUTATO UNA G°



x ORDINE 2 AMPUTO G^1



$\Rightarrow \Sigma_{loc} =$ 

G ESATTA CHIUSA SU SE STESSA

SE PRENDIAMO INVECE

POSSO FARE 2 DIAG DI SELF-EN

MA NON POSSO FARLO PER

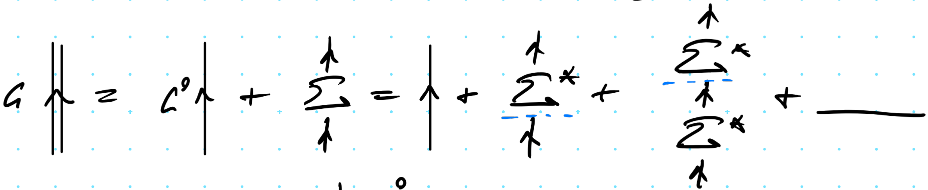
$\Rightarrow$ DEF SELF ENERGIA PROPRIA IL SOTTOINSIEME DI DIAG DI Σ CHE NON POSSO SEPARARE IN DIAGRAMMI DISTINTI RIMUOVENDO UNA SOLA LINEA G°

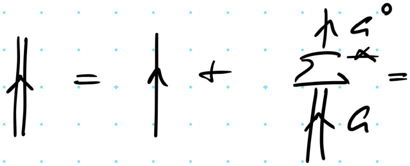
$\rightarrow$ CON QUESTI RICOSTRUISCO TUTTI GLI ALTRI

$$\Sigma = \Sigma^* + \Sigma^* G^{\circ} \Sigma^* + \Sigma^* G^{\circ} \Sigma^* G^{\circ} \Sigma^* + \ldots$$

$$= \Sigma^* + \Sigma^* G^{\circ} \Sigma \quad \text{INDUTTIVA}$$

MOLTO + INTERESSANTE PARLO SULLA G





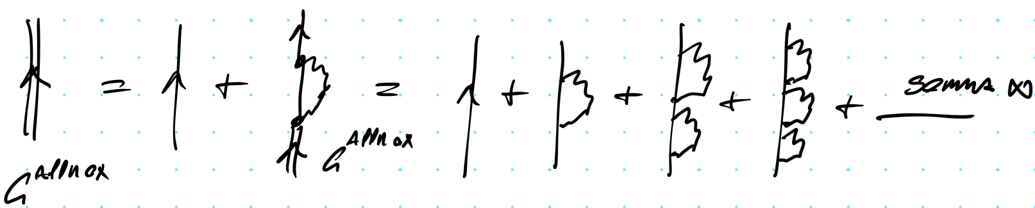
$= G(12) = G^0(12) + \int d3\,d4\; G^0(13)\,\Sigma^*(34)\,G(42)$

EQ DYSON

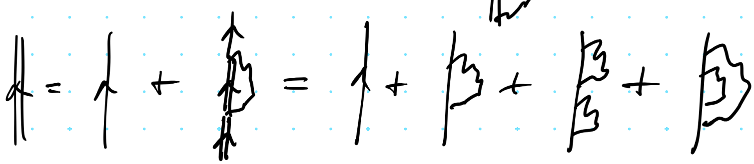
SE CALCOLO SOLO Σ^* TROVO G

USIAMO EQ DYSON x CALCOLARE ORA G USANDO SOLO 

(NON G VERA XKE' SOMMERESTI TUTTO Σ^*)

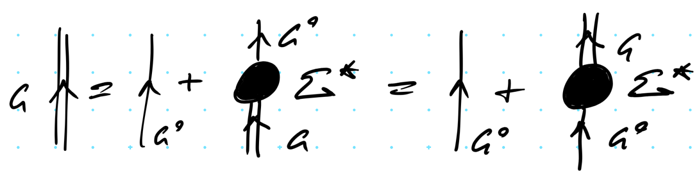


SE ORA LO FACCIO x G^{approx} 



BORDELLO

IL RAGIONAM x EQ DYSON SI PUÒ FARE ANCHE DAL BASSO



G ≡ SOMM DI TUTTI PROPAGATORI

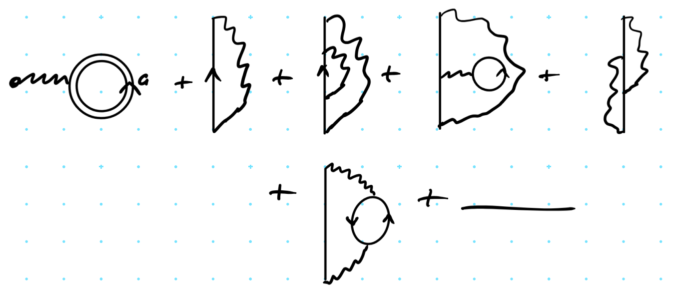
Σ^* ≡ INSERZIONI CHE NON POSSO SCINDERE

EXPLICIT

$$G_{\mu\nu}(x x') = G^0_{\mu\nu}(x x') + \sum_{\rho\sigma}\int d_4x_1\, d_4x_2\, G^0_{\mu\rho}(x x_1)\, \Sigma^*_{\rho\sigma}(x_1 x_2)\, G^0_{\sigma\nu}(x_2 x')$$

Σ^* FUNZ A 2PT

$$\Sigma^* = \Sigma_{LOC} + \Sigma^*_{XC} =$$



$x_1 = x_2$

CORRELAZ E SCAMBIO

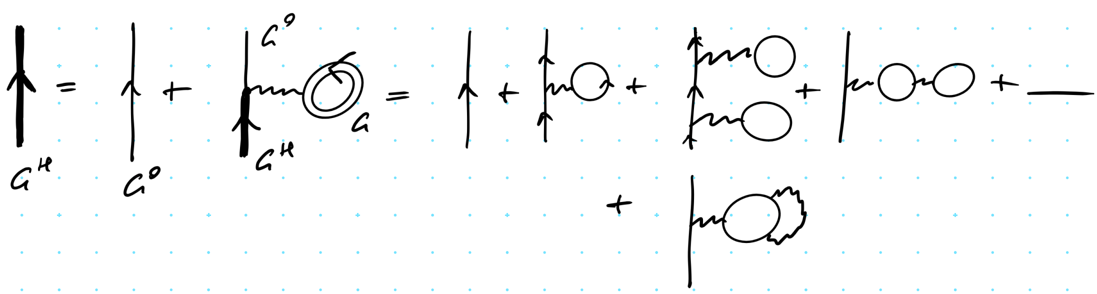
IL # DI DIAGR DI SELF EN CRESCE IN MODO FATTORIALE CON L'ORDINE

⇒ POSSO FARE RISOLUZ PARZIALE X ES ELIMINANDO I CONTRIB LOCALI

⟶ DEF G^H DI HARTREE X QUANDO SO LA DENSITÀ

(X ALTRA VIA X ES DFT) ⇒ HO Σ^{LOC} CHE ABBIAMO VISTO È IL

POT DI HARTREE $\int d_3y\, v(\underline{x}\, y)\, n(y)$



SE SO CALCOLARE G^H (NON DA QUESTA SOMMA OVVIAM)

⇒ DYSON ⟶ EQ DIFF

HO CHE G^0 RISOLVE

$$\left(i\hbar\partial_t - h(\underline{x})\right) G^0_{\mu\nu}(\underline{x}t,\underline{x}'t') = \hbar \underbrace{\delta_{\mu\nu}\,\delta_3(\underline{x}-\underline{x}')}_{[\varphi_\mu(\underline{x}),\,\varphi^+_\nu(\underline{x}')]_\mp}\,\delta(t-t')$$

G^0 FG IN SENSO STRETTO (DERIVATA LAPLACIANO ECC —)

$\Rightarrow$ EQ DIFF $\Rightarrow$ LA APPLICO IN UN INTEGRALE

$$[i\hbar\partial_t - h(\underline{x})]\, G^H_{\mu\nu}(xx') = \hbar\,\delta_{\mu\nu}\,\delta_3(\underline{x}-\underline{x}')\,\delta(t-t') + \frac{\hbar}{\hbar} U_H(\underline{x})\, G^H_{\mu\nu}(xx')$$

METTENDOSI NEL CASO SEMPLICE

 $= \frac{1}{\hbar} U_H(\underline{x})$

$$\Rightarrow [i\hbar\partial_t - h(\underline{x}) - U_H(\underline{x})]\, G^H_{\mu\nu}(xx') = \hbar\,\delta_{\mu\nu}\,\delta(t-t')\,\delta_3(\underline{x}-\underline{x}') \rightarrow \text{RISOLVIBILE}$$

COME RISOLVO? SP ω $\longrightarrow$ $\delta(t,t') = 1$

$$[\hbar\omega - h(\underline{x}) - U_H(\underline{x})]\, G(\underline{x}\,\underline{x}'\omega) = \hbar\,\delta_3(\underline{x}-\underline{x}')$$

$\rightarrow$ RISOLVO

$$[h(\underline{x}) + U_H(\underline{x})]\, u_j(\underline{x}) = \varepsilon_j\, u_j(\underline{x}) \quad \text{EQ AUTOVALORI}$$

$\Rightarrow$ HO ENERGIA CORRETTA CAMPO MEDIO

MA SO CHE EQ HARTREE NON TIENE CONTO DELLO SCAMBIO

$\Rightarrow$ x MB NON È FINITA

$$G^H(\underline{x}\,\underline{x}'\omega) = \sum_j \frac{u_j(\underline{x})\,\overline{u_j(\underline{x}')}}{\omega - \frac{\varepsilon_j}{\hbar} + \eta\,\theta(\varepsilon_j - \varepsilon_F)}$$

⇒ SI USA EQUAZIONE DYSON

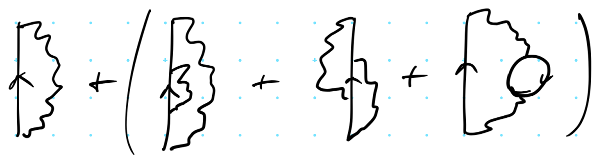
MA NO PEZZO DEI TADPOLE

→ DIAG DOVE È SOSTITUITO

$G^0 \longleftrightarrow G^H$

CONSIDERO Σ^* SOLO NON LOCALE E ANCHE GLI IBRIDI CON TADPOLE SCOMPAIONO

$\Sigma^*_{xc} =$



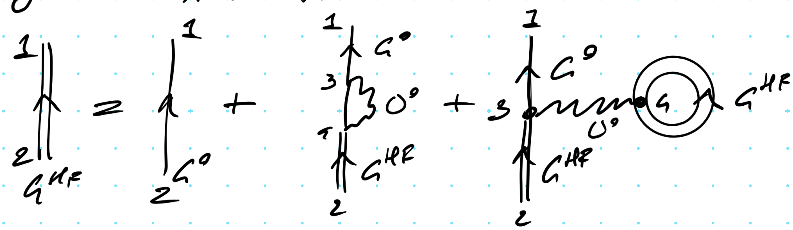
1 × ORDINE 0   3 × ORDINE 1

ORDINE	# DIAG
3	20
4	189
5	2232
6	31130

→ SBATTI ⇒ TEORIA PERTURBATIVA

I° APPROCCIO × AVERE G DA HF CON APPROCCIO VARIAZIONALE

EQ DYSON IN APPROX HF:



EQ QUADRATICA IN G^{HF}

MI METTO IN SITUA $U^0_{\mu\mu'\nu\nu'} = \delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'} U^0$

$$G^{HF}_{\mu\nu}(12) = G^{0}_{\mu\nu}(12) + \frac{i}{\hbar}\sum_{\rho\sigma}\int d3\, d4\, G^{0}_{\mu\rho}(13)\left[G^{HF}(34^+)\,U^{0}(34)\right]G^{HF}_{\sigma\nu}(42)$$

$$+ \frac{i}{\hbar}(-1)\int d3\, G^{0}_{\mu\rho}(13)\,G^{HF}_{\rho\nu}(32)\int d4\, U^{0}(34)\, G^{HF}(44^+)$$

INTEG NON MI PIACE, VOGLIO EQ DIFF $\Rightarrow \left(i\hbar\partial_t - h\right)$

$$\left[i\hbar\partial_t - h(\underline{x}_1)\right]G^{HF}_{\mu\nu}(12) = \hbar\,\delta(12)\,\delta_{\mu\nu} + i\int d4\; G^{HF}_{\mu\sigma}(\underline{x}_1 t_1\, \underline{x}_4 t_4)\,\cdot$$

$$\underbrace{\cdot\, 2\mathcal{V}(\underline{x}_1\, \underline{x}_4)\,\delta(t_1 - t_4)}_{U^0}\; G^{HF}(\underline{x}_4 t_4\, \underline{x}_2 t_2) -$$

$$- i\int d4\; \underbrace{G^{HF}_{\sigma\sigma}(44^+)}_{n^{HF}(\underline{x}_4)}\; 2\mathcal{V}(\underline{x}\, \underline{x}_4)\,\delta(t_1 - t_4)\, G^{HF}_{\mu\nu}(\underline{x}_1 t_1\, \underline{x}_2 t_2)$$

$n^{HF}(\underline{x}_4) \longrightarrow$ FUNZIONE A PT COINCIDENTI = DENSITÀ

$$\left[i\hbar\partial_t - h(\underline{x}_1) - U_H(\underline{x}_1)\right]G^{HF}_{\mu\nu}(\underline{x}_1 t_1\, \underline{x}_2 t_2) = \hbar\,\delta_{\mu\nu}\,\delta(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)\,\delta(t_1 - t_2)$$

$$+ i\int d_3\underline{x}_4\; G^{HF}_{\mu\sigma}(\underline{x}_1 t_1, \underline{x}_4\, t_1^+)\; G^{HF}_{\sigma\nu}(\underline{x}_4 t_1\, \underline{x}_2 t_2)\, 2\mathcal{V}(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)$$

$\rightarrow$ COME SI RISOLVE? SU ω

$$\left[\hbar\omega - h(\underline{x}_1) - U_H(\underline{x})\right]G^{HF}_{\mu\nu}(\underline{x}\, \underline{y}\, \omega) = \hbar\,\delta_{\mu\nu}\,\delta_3(\underline{x} - \underline{y})$$

$$+ i\int d_3\underline{x}'\int\frac{d\omega'}{2\pi}\, G^{HF}_{\mu\sigma}(\underline{x}\, \underline{x}'\omega')\, e^{i\omega'\eta}\, G^{HF}_{\sigma\nu}(\underline{x}'\underline{y}\,\omega)\, 2\mathcal{V}(\underline{x} - \underline{x}')$$

2 TRASF FOURIER $\longrightarrow$ 1 COMPLESSIVA E UNA NO

$\rightarrow$ SOL (x ES)

$$G^{HF}_{\mu\nu}(x\, y\, \omega) = \sum_j \frac{\langle x\mu | a_j \rangle \langle a_j | x'\nu\rangle}{\omega - \varepsilon_j/\hbar + i\eta\,\Theta(\varepsilon_j - \varepsilon_F)}$$

SUPP ∃ UNA RISOLUZIONE SPETTRALE IN CUI ε_j, u_j SCONOSCIUTI
MA IMPONGO ORTONORM $\langle u_j | u_k \rangle = \delta_{jk}$

$\Rightarrow$ PRENDO ANSATZ G^{HF} E TROVO CONDIZ $u_j \Rightarrow \{u_j\}$ SOL HF

$\longrightarrow$ N EQ di HF x N PARTIC

EQ MOTO PROPAGATORE $\left[i\hbar\partial_t - h(\underline{x})\right] G_{mm'}(\underline{x}t, \underline{x}'t') =$

$$= \hbar\, \delta_{mm'}\, \delta_3(\underline{x}-\underline{x}')\, \delta(t-t') + i\sum_{m''}\int d_3y\, v(\underline{x}y)\, G_{mm''m''m'}(\underline{x}t\, y t^+\, y t^{++}\, \underline{x}'t')$$

$\rightarrow$ DA $\partial_t \xrightarrow{\theta} \delta$

$\hookrightarrow_C$ FUNZ 4 PT

$$i^2 G(1234) = \langle E_0 | T\, \psi(1)\psi(2)\psi^\dagger(4)\psi^\dagger(3) | E_0 \rangle_*$$

FORMULA RIDUZIONE

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^k}\frac{1}{k!}\int dt_1 \ldots dt_k \langle E_0 | T V(t_1)\ldots V(t_k)\, \psi(1)\psi(2)\psi^\dagger(4)\psi^\dagger(3) | E_0 \rangle$$

(SOTTINTESO $*$)

ORA CONSIDERO CONTRAZ SENZA PT DI VUOTO $\rightarrow$ 3 TIPI

① CONTRAZ TOT FATTORIZZATE $\psi_1 \psi_3^\dagger$ CON $L\,V$

$\psi_2 \psi_4^\dagger$ CON $(K-L)\,V$ $\quad L = 0 \ldots K$

$\rightarrow$ CONTRIB

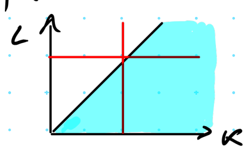
PRENDO I PRIMI L PER DEF
$\binom{K}{L}$ COMBINAZ UGUALI

\# SCAMBI PARI

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^K}\frac{1}{K!}\sum_{L=0}^{K}\binom{K}{L}\int dt_1 \ldots dt_L \langle E_0 | V(t_1)\ldots V(t_L)\, \psi_1 \psi_3^\dagger | E_0 \rangle$$

$$\int ds_1 \ldots ds_{K-L} \langle E_0 | T V(s_1)\ldots V(s_{K-L})\, \psi_2 \psi_4^\dagger | E_0 \rangle$$

SCAMBIO LE SOMME E SEMPLIFICO I $K!$



$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(i\hbar)^l}\frac{1}{l!}\sum_{k=l}^{\infty}\frac{1}{(i\hbar)^{k-l}}\frac{1}{(k-l)!}\left[\,-\,\right] \qquad k'=k-l$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(i\hbar)^l}\frac{1}{l!}\int dt_1\dots dt_l\,\langle E_0|T\,V(t_1)\dots V(t_l)\,\psi_1\psi_3^{+}|E_0\rangle$$

$$\cdot\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{1}{(i\hbar)^{k'}}\frac{1}{k'!}\int ds_1\dots ds_{k'}\,\langle E_0|T\,V(s_1)\dots V(s_{k'})\,\psi_2\psi_4^{+}|E_0\rangle$$

RIASSORBO TEXP

$$=\langle E_0|TS\psi_1\psi_3^{+}|E_0\rangle\langle E_0|TS\psi_2\psi_4^{+}|E_0\rangle = iG(13)\,iG(24)$$

$\longrightarrow$ I PEZZO

$$\Rightarrow i^2G(1234)=i^2G(13)G(24)\pm i\,G(14)G(23)+iG^{CONN}(1234)$$

X IL II PEZZO PRENDO 14 E 23 E FACCIO IL SALTO $\Rightarrow \pm$

III PEZZO CONTRAGGO TUTTO CON TUTTO E HO G CONNESSA

$\rightarrow$ PARTIC ENTRANO ESCONO E INTERAGISCONO

I PRIMI 2 SONO PROPAGATORI DI PARTIC IN ASSENZA DI TUTTE LE ALTRE SENZA CORRELAZ TRA LE PROPAGAZ

$\Rightarrow$ DIAG FEYNMAN FATTORIZZATI

HF $\longrightarrow G^{CONN}=0$

NEL METODO VARIAZ HO MIN SU STATO SLATER

$$G^{CON}=0\Rightarrow G_4=G_2G_2\pm G_2G_2$$

HO TRONCATO GERARCHIA $\Rightarrow$ QUADRATICA SOLO IN G

MOTO IN EQ MOTO USANDO G LIBERA

$$\left[i\hbar\partial_t - h(\underline{x})\right] G_{mm'}(\underline{x}t\,\underline{x}'t') = \hbar\,\delta_{mm'}\,\delta_3(\underline{x}-\underline{x}')\,\delta(t-t')$$

$$+\, i\sum_{m''}\int dy\, v(\underline{x}y)\, \underbrace{G_{mm''m''m'}(\underline{x}t\, y t^+\, y t^{++}\, \underline{x}'t')}$$

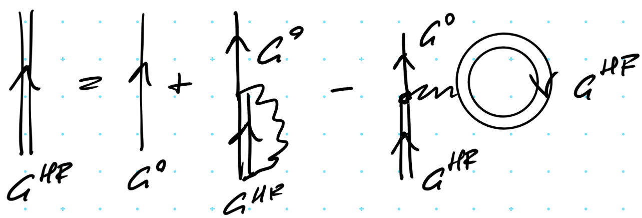
$$G_{mm''}(\underline{x}t\, yt^+)\, G_{m''m'}(yt\ \underline{x}t') \pm G_{mm'}(\underline{x}t\, \underline{x}'t')\, G_{m''m''}(yt,\, yt^+)$$

INTEGRO

$$\Rightarrow G_{mm'}(\underline{x}t\,x't') = G^0_{mm'}(\underline{x}t\,\underline{x}'t') + \frac{1}{\hbar}\sum_{m''}\int d_3\underline{x}''\,dt''\, G^0_{mm''}(\underline{x}t\,\underline{x}''t'')$$

$$\cdot\, i\sum_{m''}\int d_3 y\, v(\underline{x}''y)\left[GG - GG\right]$$

SE APPLICO L'OP MI APPAIONO δ E TORNO ALL'EQ DI PRIMA
$\rightarrow$ L'ULTIMA È PROPRIO DYSON



IL DISCORSO $G_4 = G_2 G_2 \pm G_2 G_2 + G_4^{CONN}$ È LA <u>CLUSTER EXPANSION</u>

SI PUÒ FARE $\forall$ FG IDEM $\times$ ORDINI SUPERIORI

SE INVAR $\times$ TRASLAZ $[H,\vec{P}]=0 \Rightarrow G_{\mu\nu}(x,x') = G_{\mu\nu}(x-x')$ (SPAZIOTEMPO)

POSSIAMO FACILM DIM CHE Σ DIP DA $x-x'$ USANDO

$G = G^0 + G\Sigma G^0 \Rightarrow$ ANCHE Σ^* INVAR $\times$ TRASLAZ $\Rightarrow$ POSSO FARE FOURIER DI TUTTO

$$G_{\mu\nu}(\underline{x}t\,\underline{x}'t') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega(t-t')+i\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}')}\, G_{\mu\nu}(\underline{k}\omega)$$

$$\Sigma^*_{\rho\sigma} = \_\_\_ \qquad G^0_{\mu\nu} = \_\_\_$$

SE PASSO ALLO SVILUPPO IN DYSON $\Rightarrow$ TERM CONVOLUTE
$\rightarrow$ DERIVATA EXP
$\Rightarrow$ CON BORDO A 0

$$G_{\mu\nu}(\underline{k}\omega) = G^0_{\mu\nu}(\underline{k}\omega) + \sum_{\rho\sigma} G^0_{\mu\rho}(\underline{k}\omega)\Sigma^*_{\rho\sigma}(\underline{k}\omega)G_{\sigma\nu}(\underline{k}\omega)$$

$\rightarrow$ EQ ALGEBRICA - MATRICIALE

SE SOLO MATRICI DIAG $G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}G$

$\Rightarrow G(\underline{k}) = G^0(\underline{k}) + G^0(\underline{k})\Sigma^*(\underline{k})G(\underline{k})$ EQ I° gr IN QUADRIMOMENTO

$$\Rightarrow \text{SOL} \quad G(\underline{k}) = \frac{G^0(\underline{k})}{1 - G^0(\underline{k})\Sigma^*(\underline{k})} = \frac{1}{G^0(\underline{k})^{-1} - \Sigma^*(\underline{k})}$$

SE G^0 È GAS LIBERO

$$\Rightarrow G(\underline{k}\omega) = \frac{1}{\omega - \frac{\varepsilon^0_k}{\hbar} - \Sigma^*(\underline{k}\omega)}$$

$\rightsquigarrow$ ASTRAZ DI PARTICELLA SINGOLA

$\Rightarrow$ SE HO INVAR TRASLAZ NO INTEGRALI SBATTI

CONFRONTO CON G LIBERA

$$G^0(\underline{k}\omega) = \frac{1}{\omega - \frac{\varepsilon^0_k}{\hbar} - i\eta\,\mathrm{sgn}(k - k_F)}$$

$G^0 \to$ POLO SEMPLICE IN $\hbar\omega = \varepsilon^0_k \pm$ PROSSIMA

$\to$ CURVA DI DISPERSIONE (LEGA ENERG-MOMENTO)

CHE POLI HA G? DI SOLITO SI TROVA IL POLO DI 1° ORDINE

$\Rightarrow$ SVILUPPO DI LAURENT

$$G = \frac{Z_k}{\omega - \omega_{polo}(k)} + \text{PT ANALITICA}$$

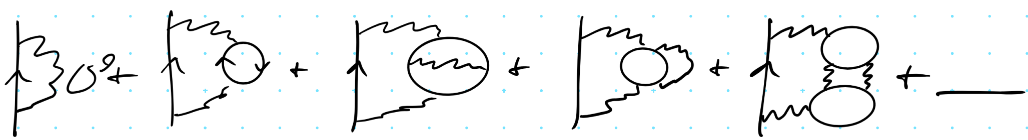
$\hookrightarrow$ CONTRIBUTO DI QUASI PARTICELLA

SE C'È POLO CON RESIDUO $\simeq 1 \to$ PT Im MOLTO VICINA A ASSE Re

$\Rightarrow$ DESCRIVE QUALCOSA DI MOLTO SIMILE A UNA PARTIC MA NON LO È (IN PT LO È + PASTICCI VARI)

INTERAZ EFFETTIVA E POLARIZZAZIONE

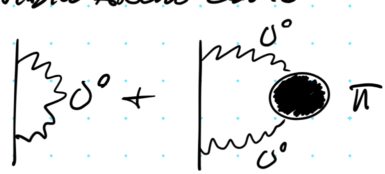
CONSIDERANDO IL DIAG  DEL I ORDINE + SUCCESSIVI



=

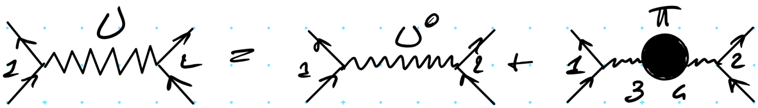
INTERAZ EFFICACE

SCRIVIBILE ANCHE COME



= POLARIZZAZIONE

$$U_{\mu\mu'\nu\nu'}(12) = U^0_{\mu\mu'\nu\nu'}(12) + \sum_{\substack{\sigma\sigma'\\ \rho\rho'}} \int d3\, d4\, U^0_{\mu\mu'\rho\rho'}(13)\, \Pi_{\rho\rho'\sigma\sigma'}(34)\, U^0_{\sigma\sigma'\nu\nu'}(42)$$



BOLLA DI POLARIZZAZ QUESTO ERA COMPLESSO MA SPESSO MOLTO INFO

ANCHE SOLO DAL 1° TERMINE

SE $U^0_{\mu\mu'\nu\nu'} = U^0 \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} \longrightarrow U_{\mu\mu'\nu\nu'} = U \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}$ ANCHE SE Π NE DIPENDE

$$U(12) = U^0(12) + \sum_{\rho\sigma} \int d3\, d4\, U^0(13)\, \Pi_{\rho\rho\sigma\sigma}(34)\, U^0(42)$$

$$= U^0(12) + \int d3\, d4\, U^0(13) \underbrace{\sum_{\rho\sigma} \Pi_{\rho\rho\sigma\sigma}(34)}_{=\Pi(34)} U^0(42)$$

SAPPIAMO CHE U^0 INVAR X SCAMBIO

MOSTRIAMO CHE $\Pi_{\rho\rho'\sigma\sigma'}(12) = \Pi_{\sigma\sigma'\rho\rho'}(21) \Rightarrow U$ INVAR X SCAMBIO

VEDIAMO COM'È Π CONSIDERANDO TUTTE LE CONTRAZ CHE MI DANNO 3 G^0

$$\frac{1}{i} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^k} \int_{\pm\infty} \langle E_0 | T V_1 \ldots V_k\, \psi_x \psi^\dagger_y | E_0 \rangle_* \, d\tau_1 \ldots d\tau_k$$

HO 2 U^0

NO $k!$ XKÉ STO ESCLUDENDO V PARTICOLARI E NON CONSIDERO È $k!$ DA SCAMBIO

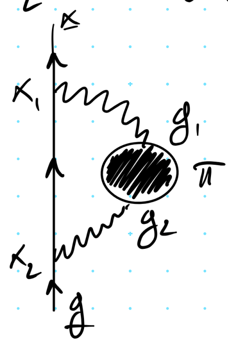
$$\underset{\uparrow \atop V_1}{=} \int dx_1\, dy_1\, U^0(x,y_1) \langle \Phi_0 | T\, \psi^\dagger_{x_1} \psi^\dagger_{y_1} \psi_{y_1} \psi_{x_1} V_2 \ldots V_k\, \psi_x\, \psi^\dagger_y | \Phi_0 \rangle_*$$

NO SGN XKÈ SALTO QUATTRO

$$= \int dx_1\, dy_1\, U^0(x,y_1)\, iG^0(x\, x_1) \langle \Phi_0 | T\, \psi^\dagger_{y_1} \psi_{y_1} \psi_{x_1} V_2 \ldots V_k\, \psi^\dagger_y | \Phi_0 \rangle_*$$

$$\underset{\uparrow \atop V_2}{=} \int dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2\, U^0(x_1,y_1)\, U^0(x_2 y_2)\, iG^0(x\, x_1)\, \cdot$$

$$\cdot \langle \Phi_0 | T\, \psi^\dagger_{y_1} \psi_{y_1} \psi_{x_1} \psi^\dagger_{x_2} \psi^\dagger_{y_2} \psi_{y_2} \psi_{x_2} \overbrace{V_3 \ldots V_k}^{k-2}\, \psi^\dagger_y | \Phi_0 \rangle_*$$



$$= \int dx_1\, dy_2\, dx_2\, dy_2\, U^0(x_1 y_1)\, U^0(x_2 y_2)\, iG^0(x\, x_1)\, iG^0(x_2\, y)$$

$$iG^0(x_1\, x_2) \langle \Phi_0 | T \underbrace{V \ldots V}_{k-2}\, \psi^\dagger_{y_1} \psi_{y_1} \psi^\dagger_{y_2} \psi_{y_2} | \Phi_0 \rangle_*$$

INSERENDO NELLA SOMMA

$$\frac{1}{i}\, \frac{i^3}{(i\hbar)^2} \int dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2\, G^0(x\, x_1)\, G^0(x_1, x_2)\, G^0(x_2\, y)\, U^0(x_1, y_1)\, U^0(x_2 y_2)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^k} \int dt_1 \ldots dt_k \langle \Phi_0 | T\, V(t_1) \ldots V(t_k)\, \psi^\dagger_{y_1} \psi_{y_1} \psi^\dagger_{y_2} \psi_{y_2} | \Phi_0 \rangle_*$$

TRASLATO

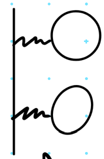
RICORDANDO CHE

$$\beta_3 = \frac{i}{\hbar} \int dx_1\, dx_2\, G^0(x\, x_1)\, G^0(x_1, x_2)\, G^0(x_2\, y)\, U^0(x_1, x_2)$$

$$\Pi_{\rho\rho'\sigma\sigma'}^{(12)} = \frac{1}{i\hbar}\langle E|T\,\delta\left(\psi^+_\rho(y_1)\,\psi_{\rho'}(y_1)\right)\delta\left(\psi^+_\sigma(y_2)\,\psi_{\sigma'}(y_2)\right)|E\rangle$$

con $\delta\hat{O} = \hat{O} - \langle E|\hat{O}|E\rangle\,\mathbb{1}$

→ rispetto escludo contraz del tipo



$$\Rightarrow \langle E|T\,\delta A\,\delta B|E\rangle = \langle E|T(A-\langle A\rangle)(B-\langle B\rangle)|E\rangle$$

$$= \langle E|TAB|E\rangle - \langle A\rangle\cancel{\langle E|TB|E\rangle} - \langle B\rangle\langle E|TA|E\rangle + \cancel{\langle A\rangle\langle B\rangle}$$

$$= \langle E|TAB|E\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle \longrightarrow \text{correlazione}$$

scrittura che mostra in evidenza che Π è invar x scambio analogo al T-prod di $\psi^+\psi\psi^+\psi$ che non cambia sgn x scambio di coppia

$$\Pi(y_1 y_2) = \sum_{\rho\sigma}\Pi_{\rho\rho\sigma\sigma}(y_1 y_2) = \frac{1}{i\hbar}\langle E|T\,\delta(\hat{n}(y_1))\,\delta(\hat{n}(y_2))|E\rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left[\langle E|T\,\hat{n}(y_1)\,\hat{n}(y_2)|E\rangle - \langle\hat{n}(y_1)\rangle\langle\hat{n}(y_2)\rangle\right]$$

x gas di Fermi con $|E\rangle = |F\rangle$

$$\Pi(xy) = \frac{1}{i\hbar}\left[\langle F|T\,\hat{n}(x)\,\hat{n}(y)|F\rangle - \langle F|\hat{n}(x)|F\rangle\langle F|\hat{n}(y)|F\rangle\right]$$

↳ Uso Wick

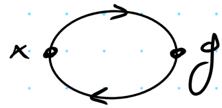
$$\sum_{\mu\nu}\psi^+_\mu(x)\,\psi_\mu(x^+)\,\psi^+_\nu(y^+)\,\psi_\nu(y) \longrightarrow \text{cancellano il II termine}$$

$$\psi^+_\mu(x)\psi_\mu(x) = \langle F|T\,\psi^+_\mu(x)\psi_\mu(x)|F\rangle = \langle F|\psi^+_\mu(\underline{x}t)\,\psi_\mu(\underline{x}t)|F\rangle$$

$$\underset{\text{evolve } H_0}{=} \langle F|\psi^+_\mu(\underline{x})\,\psi_\mu(\underline{x})|F\rangle \longrightarrow \sum_\mu = \hat{n}(\underline{x})$$

$$\Rightarrow \Pi(xy) = \frac{1}{i\hbar} \sum_{\mu\nu} \langle F | T \varphi^+_\mu(x) \varphi_\nu(y) | F \rangle \langle F | T \varphi_\mu(x) \varphi_\nu(y) | F \rangle$$

$$= -\frac{1}{i\hbar}\, i^2 \sum_{\mu\nu} G^0_{\nu\mu}(yx)\, G^0_{\mu\nu}(xy) \qquad x \; \text{—} \; y$$



$$= -\frac{i}{\hbar} \sum_{\mu\nu} G^0_{\nu\mu}(yx)\, G^0_{\mu\nu}(xy)$$

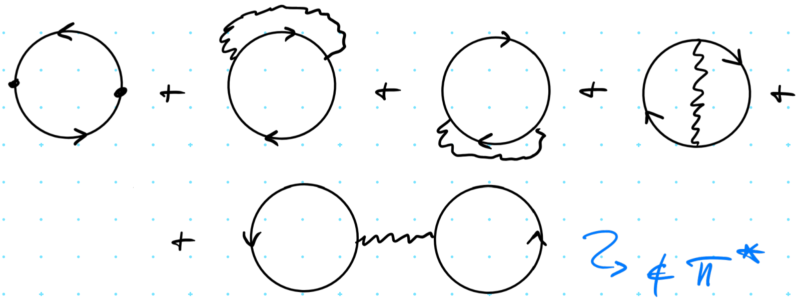
LOOP

$$= -\frac{i}{\hbar}\, 2\, G^0(yx)\, G^0(xy)$$

DEG SPIN $\sum_{\mu\nu} \delta_{\nu\mu} \delta_{\mu\nu}$

LA Π VIENE CHIAMATA FUNZ DI LINHART

$\Pi(12) =$



$\neq \Pi^*$

DENTRO Π ABBIAMO POLARIZ PROPRIA Π^*

→ DIAG DI Π NON DISGIUNGIBILI IN DIAG DI Π RIMUOVENDO LINEA U^0

⇒ COME X SELF EN

$$\boxed{\Pi =} \; \Pi^* + \Pi^* U^0 \left(\Pi^* + \Pi^* U^0 \Pi^* + \_\_ \right)$$

$$= \Pi^* + \Pi^* U^0 \Pi = \boxed{\Pi^* + \Pi^* U^0 \Pi} \rightarrow \text{EQ DYSON}$$

EXPLICIT

$$\Pi_{\rho\rho'\sigma\sigma'}(12) = \Pi_{\rho\rho'\sigma\sigma'}(12) + \int d3\, d4 \sum_{\mu\mu'\nu\nu'} \Pi^*_{\rho\rho'\mu\mu'}(13)\, U^0_{\mu\mu'\nu\nu'}(34)\, \Pi_{\nu\nu'\sigma\sigma'}(42)$$

SE $V^0_{\mu\mu' \nu\nu'} = V^0 \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}$

$$\Rightarrow \Pi(12) = \Pi^*(12) + \int d3\,d4\, \Pi^*(13)\, V^0(34)\, \Pi(42)$$

AVEVAMO SCRITTO $V = V^0 + V^0 \Pi V^0 = V^0 + V^0 \Pi^* (V^0 + V^0 \Pi^* (V^0 \Pi^* V^0 + \dots))$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V = V^0 + V^0 \Pi^* V} \longrightarrow \text{EQ DYSON}$$

EQ INTEG TRA V SOLO CON Π^*

SE H INVAR x TRASLAZ $\Rightarrow$ ANCHE Π E Π^* (PARLO Π x ES)

$\Rightarrow$ ANCHE V

SPOSTO IN SP k

$$V(xy) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} V(\underline{k}\omega)\, e^{i\underline{k}(\underline{x}-\underline{y}) - i\omega(t_x - t_y)}$$

IDEM PER Π^* E V^0

$$V(k) = V^0(k) + V^0(k)\, \Pi^*(k)\, V(k)$$

$$\Rightarrow V(\underline{k}\omega) = \frac{V^0(\underline{k}\omega)}{[1 - V^0(\underline{k}\omega)\Pi^*(\underline{k}\omega)]} \rightarrow \text{x POT STATICO } V^0(\underline{k}\omega) = V(\underline{k})$$

ES [COULOMB]

$$V^0(\underline{k}\omega) = \frac{4\pi e^2}{k^2} \rightarrow V(\underline{k}\omega) = \frac{\frac{4\pi e^2}{k^2}}{\left[1 - \frac{4\pi e^2}{k^2}\Pi^*(\underline{k}\omega)\right]} \longrightarrow \text{FUNZ DIELETTRICA } \varepsilon(\underline{k}\omega)$$

$\Rightarrow$ DEF $[1 - V^0(\underline{k}\omega)\Pi^*(\underline{k}\omega)]$ FUNZ DIELETTRICA GENERALIZZATA

$$U(\underline{k}\,\omega) = \frac{4\pi e^2}{k^2 - 4\pi e^2 \Pi^*(\underline{k}\,\omega)}$$

REGOLE DI FEYNMANN IN SP K

TEORIA PERTURB $\longrightarrow$ $G = \sum_j G^{(j)}$

NON SCRIVO SPIN XRÉ CONTROLLATO DA TRASFORMATA

$$G_g(x\,x') = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^k (-1)^L \sum_{\text{SPIN}} \int d_4 z_1 \dots d_4 z_{2k}\, \overbrace{U^0(z_i\, z_j) \dots U^0(z_i\, z_j)}^{k}$$

$\hookrightarrow$ GRAFO DI ORDINE K

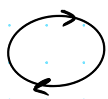
$$\cdot \underbrace{G^0(x, z) \dots G^0(z\, z') \dots G^0(z\, x')}_{2k+1}$$

ARRIVO PARTENZA

$$V = \frac{1}{2}\int dx\, dy\, U^0 \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi$$

LE G° FORMANO 2 TIPI DI STRUTTURE

① INGR $\longrightarrow$ USC (LINEA CONTINUA)

②  LOOP

METTIAMOCI IN CASO INVAR X TRASLAZ SIA PER G° CHE X INTERAZ

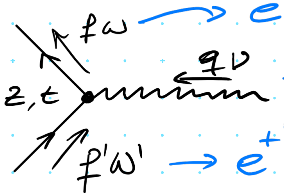
$$z_2 \uparrow_{(\underline{k}\,\omega)} z_1 \quad G^0(z_1, z_2) = \int \frac{d_3 \underline{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\underline{k}(\underline{z}_1 - \underline{z}_2) - i\omega(t_1 - t_2)}\, G^0(\underline{k}\,\omega)$$

$$z_1 \uparrow (q\,\omega) \, z_2 = U^0(z_1, z_2) = \int \frac{d_3 q}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{iq(z_1 - z_2) - i\omega(t_1 - t_2)}\, U^0(q\,\omega)$$

IN SP REALE G HA CHIARAM PTO INGRESSO E DI ARRIVO

IN SP $\underline{K}$ U° NON HA ORDINE NATURALE E DECIDO IO IL VERSO

INTEGR DI exp $\Rightarrow \delta$



$p\omega \rightarrow e^{-ipz+i\omega t} \rightarrow$ PTO DI USCITA

$q\nu \rightarrow e^{iqz-i\nu t}$

$p'\omega' \rightarrow e^{+ip'z-i\omega' t} \rightarrow$ PTO INGRESSO

IN QUESTO VERTICE INTEGRO SUI FATTORI $\int d_3 z \, dt$

$$\int d_3 z \, e^{iz(p'+q-p)} \int dt \, e^{it(\omega-\nu-\omega')} = (2\pi)^3 \delta_3(p'+q-p) \, 2\pi \, \delta(\omega-\nu-\omega')$$

$\rightarrow \Sigma$ MOMENTI ENTRANTI $= \Sigma$ MOMENTI USCENTI

$\Rightarrow$ CONSERVA MOMENTO NEL VERTICE $\Rightarrow$ INVAR $\times$ TRASLAZ ANCHE NEL VERTICE

IDEM $\times$ FREQ $\Rightarrow$ INVAR TEMPORALE

HO $2K$ δ CON CUI FACCIO $2K$ INTEGRALI

$\rightarrow$ RIMANGONO K INTEG DOVE U E 1 TERMINE G

$\forall$ INTEG $\rightarrow$ FATTORE $(2\pi)^4$ + δ CONSERVAZ MOMENTO E FREQ

A DX RIMANGONO K INTEG DI FOURIER PER U^0 E $2K+1$ INTEG FOUR $\times$ LE G^0

LE $2K$ δ CANCELLANO $2K$ INTEG USANDO I MOM CONSERVATI IN TUTTI I VERTICI

REGOLE DI FEYNMAN: QUELLE DI PRIMA + FATTORE:

$$\cancel{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(2\pi)^4} \right]^{\underset{\#U_0}{K} + \cancel{2K} + \cancel{1}} \left[\cancel{(2\pi)^4} \right]^{2K} = \left[\frac{1}{(2\pi)^4} \right]^K$$

$\#G^0$

HO K QUADRIMOM DA INTEGRARE $\int \frac{d_4 p}{(2\pi)^4}$

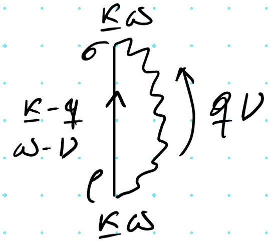
QUANDO AVREMMO TEMPI UGUALI $G(\underline{x}t, \underline{y}t^+)$

$\rightarrow$ FOURIER $G(\underline{k}\omega)$ $\Rightarrow$ FATTORE $e^{-i\omega(t-t^+)}$

$\Rightarrow$ DIVENTA $G(\underline{k}\omega)\, e^{i\omega\eta}$ $\quad \eta = t^+ - t$

ESEMPIO

$\Sigma^*_{\beta\rho\sigma}(\underline{k}\omega)$



FIX $q\nu$ IL RESTO VIENE DA CONSERVARE

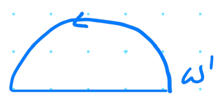
$$= \left(\frac{i}{\hbar}\right) \sum_{\rho\sigma} \int \frac{d_3q\, d\nu}{(2\pi)^4}\, G^0_{\sigma\rho}(\underline{k}-q, \omega-\nu)\, \delta_{\nu\sigma}\, \delta_{\rho\mu}\, U^0(q\nu)\, e^{i(\omega-\nu)\eta}$$

$\hookrightarrow$ INTERAZ ISTANTANEA

$\times$ INTERAZ COULOMB $\quad U^0(q\nu) = \frac{4\pi e^2}{q^2}$

$$= \delta_{\mu\nu}\, \frac{i}{\hbar} \int \frac{d_3q}{(2\pi)^3}\, \frac{4\pi e^2}{q^2} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left[\frac{\theta(|k-q|-k_F)}{\omega' - \frac{\varepsilon_{k-q}}{\hbar} + i\eta} + \frac{\theta(k_F - |k-q|)}{\omega' - \frac{\varepsilon_{k-q}}{\hbar} - i\eta} \right]$$

$\cdot\, e^{i\omega'\eta} \longrightarrow$ DA CUI CAPISCO COME CHIUDERE IL CAMMINO



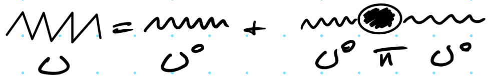
$\bullet$ II

$\bullet$ I

PRIMO PEZZO SOTTO II SOPRA

$$= \delta_{\mu\nu}\, \frac{i}{\hbar} \int \frac{d_3q}{(2\pi)^3}\, \frac{4\pi e^2}{q^2}\, \frac{\cancel{2\pi} i}{\cancel{2\pi}}\, \theta(k_F - |\underbrace{\underline{k} - q}_{q'}|)$$

$$= \delta_{\mu\nu} \left(\frac{-1}{\hbar}\right) \int_{q'<k_F} \frac{d_3q'}{(2\pi)^3}\, \frac{4\pi e^2}{|\underline{k} - q'|}$$

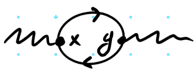
TRATTIAMO INTERAZ EFFETTIVA 

$$\Pi(xy) = \frac{1}{i\hbar}\langle E | T\,\delta n(x)\,\delta n(y) | E \rangle \quad \text{(SCALARE)}$$

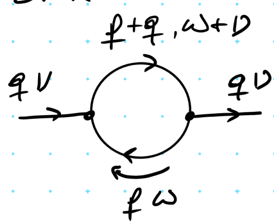
→ COME ASSEGNO DATO DIAG ESPRESSIONE ANALITICA?

PREFATTORE $\frac{i}{\hbar}$ ∀ DIAG DENTRO

loop 2S+1 somma spin

 $= \Pi^0(xy) = \frac{i}{\hbar}(-1)\; 2\; G^0(xy)\,G^0(yx)$ IN SP COOR

IN SP K



$$= \frac{i}{\hbar}(-1)2\int \frac{d_3p}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}\left[\frac{\theta(p-k_F)}{\omega-\frac{\varepsilon_p}{\hbar}+i\eta}+\frac{\theta(k_F-p)}{\omega-\frac{\varepsilon_p}{\hbar}-i\eta}\right]$$

$$\cdot\left[\frac{\theta(|p+q|-k_F)}{\omega+\nu-\frac{\varepsilon_{p+q}}{\hbar}+i\eta}+\frac{\theta(k_F-|p+q|)}{\omega+\nu-\frac{\varepsilon_{p+q}}{\hbar}-i\eta}\right]$$

$$= \Pi^0(q\nu)$$

SE INTEGRO $\omega \longrightarrow \frac{1}{\omega^2}$ CONV POLI SOTTO E SOPRA

GLI INTEG CONV ⇒ CHIUDO DOVE MI PARE
→ SE HO 2 POLI DALLO STESSO LATO INTEGRO
DAL LATO OPPOSTO ⇒ 0

⇒ CONTRIB SOLO INTEG CON POLI OPPOSTI 2 SE G

$$\Pi^0(q\nu) = -\frac{2i}{\hbar}\int\frac{d_3p}{(2\pi)^3}\,\frac{2\pi i}{2\pi}\left[\frac{\theta(k_F-p)\,\theta(|p+q|-k_F)}{\nu-\frac{\varepsilon_{p+q}-\varepsilon_p}{\hbar}+i\eta}+\frac{\theta(p-k_F)\,\theta(k_F-|p+q|)}{-\nu+\frac{\varepsilon_{p+q}-\varepsilon_p}{\hbar}+i\eta}\right]$$

OGNI TERMINE HA UNA PARTIC DENTRO E 1 FUORI DALLA SF DI FERMI

→ SEPARIAMO RE E IM

$$\frac{1}{x-y\pm i\eta}=\frac{P}{x-y}\mp i\pi\delta(x-y)$$

INTEG IN PT PRINCIPALE

$$\mathrm{Re}\,\Pi^{0}(q\nu)=\frac{2}{\hbar}\,⨍\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\theta(k_F-p)\theta(|p+q|-k_F)-\theta(p-k_F)\theta(k_F-|p+q|)}{\nu-\frac{\varepsilon_{p+q}-\varepsilon_p}{\hbar}}$$

$$\mathrm{Im}\,\Pi^{0}(q\nu)=-\frac{2}{\hbar}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\theta(k_F-p)\theta(|p+q|-k_F)\,\delta\left(\nu-\frac{\varepsilon_{p+q}-\varepsilon_p}{\hbar}\right)$$

$$+\theta(p-k_F)\theta(k_F-|p+q|)\,\delta\left(\nu-\frac{\varepsilon_{p+q}-\varepsilon_p}{\hbar}\right)$$

ACC SOLO SE
1 PARTIC FUORI E UNA DENTRO k_F
E CON LA DIFFERENZA DI EN E' $\hbar\nu$

INTEG Re

$$\theta(k_F-p)\left[1-\theta(k_F-|p+q|)\right]\left[1-\theta(k_F-p)\right]\theta(k_F-|p+q|)$$

$$=\theta(k_F-p)-\theta(k_F-|p+q|)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\,\Pi^{0}(q\nu)=\frac{2}{\hbar}⨍\frac{dp}{(2\pi)^3}\frac{\theta(k_F-p)-\theta(k_F-|p+q|)}{\nu-\frac{\varepsilon_{p+q}-\varepsilon_p}{\hbar}}$$

CAMBIO $p+q=-p'$ × AVERE COORD SF

$$\mathrm{Re}\,\Pi^0(q\nu) = \frac{2}{\hbar}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\theta(k_F-p)\left[\frac{1}{\nu - \frac{\varepsilon_{p+q}-\varepsilon_p}{\hbar}} - \frac{1}{\nu + \frac{\varepsilon_{p+q}-\varepsilon_p}{\hbar}}\right]$$

[CONTO DA FINIRE × $\nu = 0$ (CASO STATICO)]

$$\frac{1}{\hbar}\left[\frac{\hbar^2}{2m}\right]\left(q^2+2qp\right)$$

EN QUADRATICA $\varepsilon_{p'} = \varepsilon_{-p'}$

PER Im $\longrightarrow$ I° T

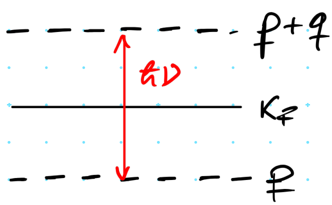
$p+q$ SOPRA k_F
p SOTTO k_F $\Rightarrow \varepsilon_{p+q}-\varepsilon_p \geq 0 \Rightarrow \nu > 0$

II T

p SOPRA k_F
$p+q$ SOTTO k_F $\Rightarrow \varepsilon_{p+q}-\varepsilon_p < 0 \Rightarrow \nu < 0$

DOVE Im $\Pi^0 = 0$? DOVE NON SONO RISPETTATI I VINCOLI

$\boxed{\nu > 0}$



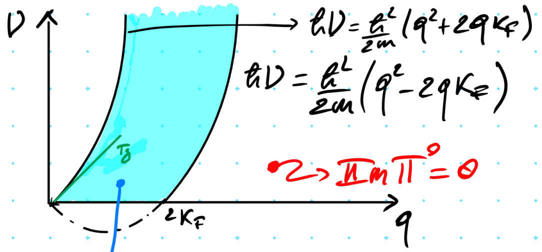
DA δ: $\hbar\nu = \frac{\hbar^2}{2m}\left(q^2+2\vec{q}\cdot\vec{p}\right)$

$qp = |q||p|\cos\theta$

$$\Rightarrow \hbar\nu \leq \frac{\hbar^2}{2m}\left(q^2+2|q||p|\right) \underset{\theta(k_F-p)}{\leq} \frac{\hbar^2}{2m}\left(q^2+2qk_F\right)$$

$$\hbar\nu \geq \frac{\hbar^2}{2m}\left(q^2-2qp\right) \geq \frac{\hbar^2}{2m}\left(q^2-2qk_F\right)$$

AFFINCHÉ LA δ SIA SODDISF ν COMPRESA TRA LE 2 PARABOLE



$\Rightarrow \mathrm{Im}\,\Pi^0 = 0$

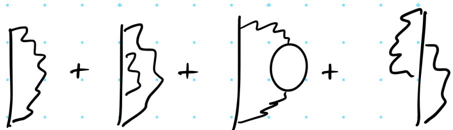
SODDISFO COND E

$\Downarrow$

PROPAGAZ e^--BUCA

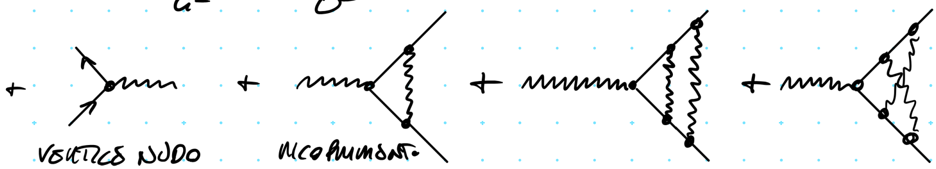
INTERESSANTE LA ν_g

$$\nu = \frac{\hbar^2}{2m} k_F q = \varepsilon_F q$$

$\Sigma^*_{xc} =$  $+$

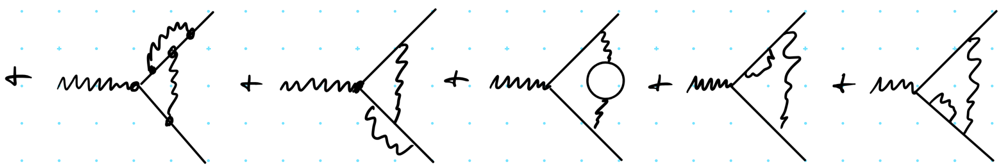
AGGIUNTO G^1 AGGIUNTO ν^1

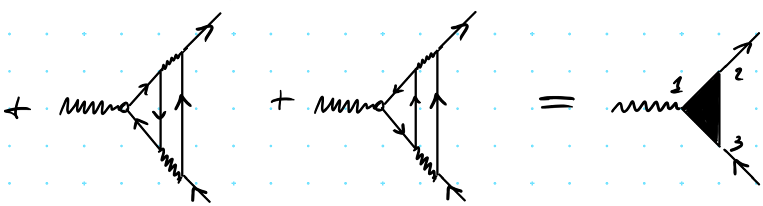
AD ORDINE SUCC AGGIUNGO RICOPRIMENTI DI QUESTI + CORREZ DI VERTICE



VERTICE NUDO $\rightarrow$ 1 PTO

RICOPRIMENTO VERTICE $\rightarrow$ 3 PTI



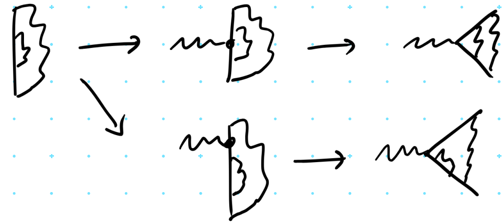


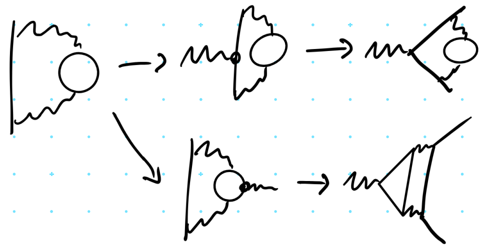
$\Gamma(1\,2\,3)$ FUNZ DI VERTICE

$\Gamma^0 =$  $\rightarrow$ POSSO RICAVARE TERMINI SUCC

TERM I PRENDENDO  E SOSTIT G^0 CON  $\Rightarrow$ 

TERM II



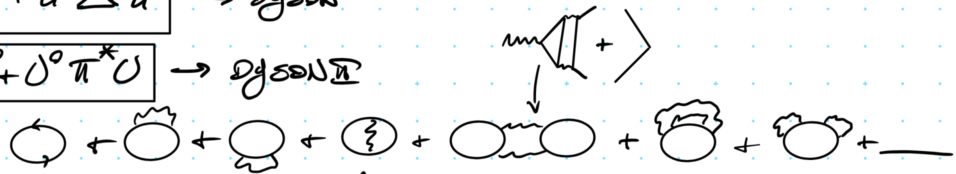


ECCEZIONE

$\Rightarrow$ DA DIAG SELF EN. RICAVO I DIAG. DI VERTICE

EQ DI HEDIN [PER $G, \pi^*, \Sigma^*, U, \Gamma \rightarrow$ INCOGNITE MB]

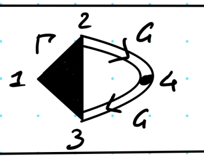
- $\boxed{G = G^0 + G^0 \Sigma^* G} \rightarrow$ DYSON
- $\boxed{U = U^0 + U^0 \pi^* U} \rightarrow$ DYSON II
- $\pi^* =$



FUNZ DI VERTICE + 2 G^0

CONTINUO A RIVESTIRE O LE G O I VERTICI O ENTRAMBI

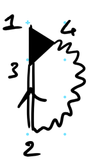
$\Rightarrow \pi^* =$



IGNORANDO SPIN

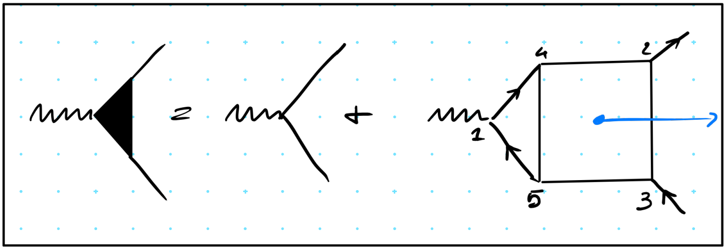
$$\pi^*(14) = \frac{i}{\hbar}(-1)\,2 \int d2\,d3\,\Gamma(123)\,G(42)\,G(34)$$

- $\Sigma^* = \frac{i}{\hbar}$



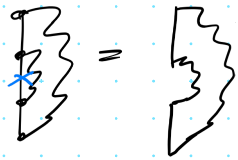
$$\Sigma^*(12) = \frac{i}{\hbar} \int d3\,d4\,\Gamma(413)\,G(32)\,U(42)$$

- $\Gamma(123) = \Gamma^0(123) + \int d4\, d5\, G^0(41)\, G^0(15)\, \frac{\delta \Sigma^*(23)}{\delta G^0(45)}$

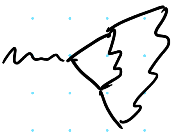


KERNEL DI BETHE-SALPETER

KERNEL CREATO LEVANDO G^0



E SOSTITUENDOLO CON 2



→ MANCO IL PAPA SA RISOLVERE STE SCHIFEZZE PERCHÉ MANCO SAPPIAMO LA EQ. SE ESATTA

⇒ NE USIAMO SOLO ALCUNI

E APPR GW DRASTICA → $\Gamma = \Gamma^0$

⇒ EQ HEDIN DIVENTANO EQ INTEGRABILI

$\Pi^* =$ 

$\Sigma^* =$ 

$$\Sigma^* = F(G^0(2\,\cdot)\,G^0(\cdot\,3)\,G^0 \_\_ G^0)$$

$$G^0 \to G^0 + \delta G^0 \Rightarrow \Sigma \to \Sigma + \delta\Sigma$$

$$\frac{\delta G(ab)}{\delta G(cd)} = \delta_{ac}\delta_{bd}$$ → DIRAC SP-TEMPO

POI PRENDO IL FUNZIONALE E VARIO 1x1 LE G^0 → $\delta\Sigma$ LIN IN δG

$$\delta\Sigma(23) = \int d4\, d5\, \frac{\delta\Sigma(23)}{\delta G(45)}\, \delta G(45)$$

IN APPROX GW MENTRE IL ... DIAG DIVERGEVA PATOLOGICAMENTE ORA LA SERIE HA RAGGIO DI CONV FINITO

RAPPRESENTAZIONE DI LEHMANN DEL PROPAGATORE

$H(t) \to$ PASSO A SP $\omega \Rightarrow$ RAPPR DI LEHMAN

$$i G_{\mu\mu'}(xx') = \langle E_0^N | T\, \psi_\mu(x)\, \psi^+_{\mu'}(x') | E_0^N \rangle$$

$$H|E_n^N\rangle = E_n^N |E_n^N\rangle \quad \text{(CONSERVA N PARTIC)}$$

EXPLICIT T-ORD

$$= \theta(t-t')\langle E_0^N|\psi_\mu(x)\psi^+_{\mu'}(x')|E_0^N\rangle - \theta(t'-t)\langle E_0^N|\psi^+_{\mu'}(x')\psi_\mu(x)|E_0^N\rangle$$

PARTICOLARITÀ PROPAGATORE: ψ^+ CREA PARTIC $\Rightarrow$ INSERISCO COMPLETEZZA N+1 PARTIC

$$= \sum_n \Big[\theta(t-t')\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n^{N+1}-E_0^N)(t-t')} \langle E_0^N|\psi_\mu(\underline{x})|E_n^{N+1}\rangle\langle E_n^{N+1}|\psi^+_{\mu'}(\underline{x}')|E_0^N\rangle$$
$$- \theta(t'-t)\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_n^{N+1}-E_0^N)(t'-t)} \langle E_0^N|\psi^+_{\mu'}(\underline{x}')|E_n^{N-1}\rangle\langle E_n^{N-1}|\psi_\mu(\underline{x})|E_0^N\rangle\Big]$$

$\to$ ORA TEMPO EXPLICIT $\Rightarrow$ SP ω

$$= i\sum_n \Big[\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-t') - \frac{i}{\hbar}(E_n^{N+1}-E_0^N)(t-t')}}{\omega + i\eta} \langle \psi_\mu\rangle\langle\psi^+_{\mu'}\rangle$$
$$- \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-t') + \frac{i}{\hbar}(E_n^{N-1}-E_0^N)(t-t')}}{-\omega + i\eta} \langle \psi^+_{\mu'}\rangle\langle\psi_\mu\rangle$$

$\to$ CAMBIO IN ω IL CONTRIB DA ΔE $\ominus$ CAMBIO i A DX E SX

$$\Rightarrow G_{\mu\mu'}(xx') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \sum_n \left[\frac{\langle \mathcal{E}_0^N | \psi_\mu(x) | \mathcal{E}_n^{N+1} \rangle \langle \mathcal{E}_n^{N+1} | \psi^+_{\mu'}(x') | \mathcal{E}_0^N \rangle}{\omega - \frac{\mathcal{E}_n^{N+1} - \mathcal{E}_0^N}{\hbar} + i\eta} + \frac{\langle \mathcal{E}_0^N | \psi^+_{\mu'}(x') | \mathcal{E}_n^{N-1} \rangle \langle \mathcal{E}_n^{N-1} | \psi_\mu(x) | \mathcal{E}_0^N \rangle}{\omega + \frac{\mathcal{E}_n^{N-1} - \mathcal{E}_0^N}{\hbar} - i\eta} \right]$$

$$\Rightarrow G_{\mu\mu'}(xx') = \sum_n \left[\quad \text{———} \quad \right]$$

posso assorbire $\mathcal{E}^N$ su sp e xké le somme sono divise e sto shiftando tutti i numeri

ora $\mathcal{E}_n^{N+1} - \mathcal{E}_0^N = \mathcal{E}_n^{N+1} \pm \mathcal{E}_0^{N+1} - \mathcal{E}_0^N$ e def $E_n^{N+1} = \mathcal{E}_n^{N+1} - \mathcal{E}_0^{N+1}$ E di eccitaz

≥ 0 x def

$\mu = \mathcal{E}_0^{N+1} - \mathcal{E}_0^N$ pot chimico

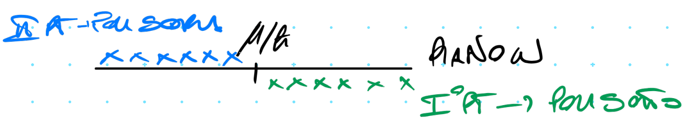
$\rightarrow$ per $N \to \infty$ non dip da N ma da densità

idem x $N-1$ $\quad \mathcal{E}_n^{N-1} - \mathcal{E}_0^N = \underbrace{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_0^{N-1}}_{E_n^{N-1}} - \underbrace{(\mathcal{E}_0^{N-1} - \mathcal{E}_0^N)}_{\mu}$

$$G_{\mu\mu'}(\underline{x}\,\underline{x}'\omega) = \sum_n \frac{\langle \mathcal{E}_0^N | \psi_\mu(\underline{x}) | \mathcal{E}_n^{N+1} \rangle \langle \mathcal{E}_n^{N+1} | \psi^+_{\mu'}(\underline{x}') | \mathcal{E}_0^N \rangle}{\omega - \frac{E_n^{N+1}}{\hbar} - \frac{\mu}{\hbar} + i\eta} +$$

$$+ \sum_n \frac{\langle \mathcal{E}_0^N | \psi^+_{\mu'}(\underline{x}') | \mathcal{E}_n^{N-1} \rangle \langle \mathcal{E}_n^{N-1} | \psi_\mu(\underline{x}) | \mathcal{E}_0^N \rangle}{\omega + \frac{E_n^{N-1}}{\hbar} - \frac{\mu}{\hbar} - i\eta}$$

somma tra stati discreti $\Rightarrow$ poli possibili in I e II



FACENDO IL LIMITE I POLI SI CONDENSANO ACQUISENDO PARTE IMMAGINARIA FINITA MA MANTENGONO IL sign

INVARIANZA x TRASLAZ

$$[H, \underline{P}] = 0 \implies |\mathcal{E}_n(\underline{x}), \underline{k}\rangle \Rightarrow \sum_n \longrightarrow \sum_{n\underline{k}}$$

AZIONE TRASLAZ $\quad e^{\frac{i}{\hbar}\underline{Q}\underline{P}}\, \psi_\mu(\underline{x})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{Q}\underline{P}} = \psi_\mu(\underline{x}-\underline{Q})$ CAMPO SCALARE

USO x AGGIUNTO

PRENDO $\underline{x}=0 \longrightarrow \psi_\mu(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{x}\underline{P}}\, \psi_\mu(\underline{0})\, e^{\frac{i}{\hbar}\underline{x}\underline{P}} \Rightarrow$ POSSO SEMPLIFICARE SUGLI AUTOSTATI LA TRASLAZ

INOLTRE SUPP CHE GS ABBIA $\underline{k}=0$ (FERMO NEL BARICENTRO)

$$G_{\mu\mu'}(\underline{x}\,\underline{x}'\,\omega) = \sum_{n\underline{k}} \frac{\langle \mathcal{E}_0^N \underline{0}| e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{x}\underline{P}}\, \psi_\mu(\underline{0})\, e^{\frac{i}{\hbar}\underline{x}\underline{P}} |\mathcal{E}_n^{N+1}(\underline{k})\,\underline{k}\rangle\langle \mathcal{E}_n^{N+1}(\underline{k})\underline{k}| e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{x}'\underline{P}}\, \psi^+_{\mu'}\, e^{\frac{i}{\hbar}\underline{x}'\underline{P}} | \mathcal{E}_0^N \underline{0}\rangle}{\omega - \frac{\mathcal{E}_n^{N+1}}{\hbar} - \frac{\mu}{\hbar} + i\eta}$$

$$+ \sum_{n\underline{k}} \frac{\langle \mathcal{E}_0^N \underline{0}| e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{x}'\underline{P}}\, \psi^+_{\mu'}(\underline{0})\, e^{\frac{i}{\hbar}\underline{x}'\underline{P}} |\mathcal{E}_n^{N-1}(-\underline{k}), -\underline{k}\rangle\langle \mathcal{E}_n^{N-1}(-\underline{k}), -\underline{k}| e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{x}\underline{P}}\, \psi_\mu(\underline{x})\, e^{\frac{i}{\hbar}\underline{x}\underline{P}} | \mathcal{E}_0^N, \underline{0}\rangle}{\omega + \frac{\mathcal{E}^{N-1}}{\hbar} - \frac{\mu}{\hbar} - i\eta}$$

$$\uparrow$$

$$\sum_{\underline{k}} = \sum_{-\underline{k}}$$

$$= \sum_{n\underline{k}} e^{i\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}')} \Bigg[\frac{\langle \mathcal{E}_0^N \underline{0}| \psi_\mu(\underline{0}) | \mathcal{E}_n^{N+1}(\underline{k})\underline{k}\rangle\langle \mathcal{E}_n^{N+1}(\underline{k})\underline{k}| \psi^+_{\mu'}(\underline{0}) | \mathcal{E}_0^N \underline{0}\rangle}{\omega - \frac{\mathcal{E}_n^{N+1}(\underline{k})}{\hbar} - \frac{\mu}{\hbar} + i\eta}$$

$$+ \frac{\langle \mathcal{E}_0^N \underline{0}| \psi^+_{\mu'}(\underline{0}) | \mathcal{E}_n^{N-1}(-\underline{k}) -\underline{k}\rangle\langle \mathcal{E}_n^{N-1}(-\underline{k}) -\underline{k}| \psi_\mu(\underline{0}) | \mathcal{E}_0^N \underline{0}\rangle}{\omega + \frac{\mathcal{E}_n^{N-1}(\underline{k})}{\hbar} - \frac{\mu}{\hbar} - i\eta} \Bigg]$$

SOMMA SU $-\underline{k}$ $\Rightarrow$ STESSO FATTORE

PONIAMO $\mu' = \mu$

$$G_{\mu\mu}(\underline{k}\omega) = V\sum_n \left[\frac{|\langle \mathcal{E}_0^N \underline{0} | \psi_\mu(0) | \mathcal{E}_n^{N+1}(\underline{k})\, \underline{k}\rangle|^2}{\omega + \frac{\mathcal{E}_n^{N+1}(k)}{\hbar} - \frac{\mu}{\hbar} + i\eta} + \frac{|\langle \mathcal{E}_0^N \underline{0} | \psi_\mu^+(0) | \mathcal{E}_n^{N-1}(-\underline{k})\, -\underline{k}\rangle|^2}{\omega - \frac{\mathcal{E}_n^{N-1}(-k)}{\hbar} - \frac{\mu}{\hbar} - i\eta} \right]$$

VOLUME

$$\Rightarrow \sum_\mu G_{\mu\mu}(\underline{k}\omega) = \int d\omega' \frac{A(\underline{k}\omega')}{\omega - \omega' + i\eta\, \mathrm{sgn}(\omega' - \frac{\mu}{\hbar})}$$

$*$

FUNZ SPETTRALE

POSITIVA CC DI TERMINI POS

$$A(\underline{k}\omega) = V\sum_{n\mu} |\langle n \rangle|^2 \delta\left(\omega' - \frac{\mathcal{E}_n^{N+1}(\underline{k})}{\hbar} - \frac{\mu}{\hbar}\right) + |\langle n \rangle|^2 \delta\left(\omega' + \frac{\mathcal{E}_n^{N-1}(-\underline{k})}{\hbar} - \frac{\mu}{\hbar}\right)$$

$\boxed{\omega' > \mu/\hbar}$ $\boxed{\omega' < \mu/\hbar}$

$\Rightarrow$ CONTA IL TERMINE IN BASE AL sgn ($\int \delta = 0$ ALTRIMENTI)

DIMOSTREREMO CHE $G(\underline{k}\omega) \xrightarrow[|\omega| \to \infty]{} \frac{1}{\omega} \Rightarrow \int d\omega' A(\underline{k}\omega') = 1$

OSS $\frac{1}{*}$ RICORDA IL PROPAGATORE LIBERO

$\to$ PARTE SPETTRALE DELLA FUNZ DI GREEN

TEORIA DELLA RISPOSTA LINEARE

x avere prop del sist ⇒ ci interagiamo debolmente x non stravolgere le prop

→ teoria perturbativa: variaz action al = val aspettaz perturbaz su stato imperturbato
⇒ info su stato imperturbato

idea x th risposta lin

ho H bastanda a piacere

→ disturbo sist con $V(t)$ accesa a $t=0$

$$H_t = H + V(t) \qquad V(t)=0 \text{ per } t<0$$

supp di essere nel GS $|\psi(0)\rangle = |GS\rangle$ di H

$t \geq 0$

$$|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi(0)\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{V piccolo} \\ \Rightarrow \text{ descrive} \\ \text{di interazione}}}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} U_I(t,0)|GS\rangle$$

a sto pto usiamo una qualche oss O_t → può avere una sua evolu inDip

$$\langle\psi(t)|O_t|\psi(t)\rangle = \langle GS| U_I^+(t,0)\, e^{\frac{i}{\hbar}Ht} O_t\, e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} U_I(t,0)|GS\rangle$$

$$= \langle GS| U_I(t,0)\, O_{tH}(t)\, U_I(t,0)|GS\rangle$$

↳ evoluz Heisenberg di O_t secondo H

SUPP A PERTUR SVILUP IL Texp DI U_I AL I° ORDINE

$$U_I(t,0) = T\exp \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt'\, V_H(t')$$

$$= \langle GS| \left(\mathbb{1} - \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt'\, V_H(t') + \underline{\quad} \right) O_H(t) \left(\mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar}\int dt'\, V_H(t') + \underline{\quad} \right) |GS\rangle$$

OLTRE I° ORDINE

$$= \langle\varphi(t)| O_t |\varphi(t)\rangle - \langle GS| O_H(t) |GS\rangle = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt' \langle GS| \left[O_H(t), V_H(t') \right] |GS\rangle + \underline{\quad}$$

(x ES PROVARE II ORDINE)

$\langle GS|O_H(t)|GS\rangle$ HA 2 EVOLUZIONI DI HEISENBERG CHE SI CANCELLANO SU GS

$$\langle\varphi(t)| O_t |\varphi(t)\rangle - \langle GS| O_t |GS\rangle = \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, \theta(t-t') \langle GS| \left[O_H(t), V_H(t') \right] |GS\rangle$$

COSÌ HO $t' < t$

SI PUÒ XKÈ θ X $t' < t$

LA VARIAZ DEL VAL MEDIO IN t X EFF DELLA PERTURBAZ È LIN IN V

PERTURBAZIONE ESTERNA

$$H_t = H + \int d_3x\, \hat{n}(\underline{x})\, \varphi(\underline{x}t)$$

DIP TEMPORALE SOLO DA CAMPO EXT

$$\varphi(\underline{x}t) = 0 \quad \text{SE } t < 0$$

ORA MISURO PROPRIO $\hat{n}(\underline{x})$

$$\langle\varphi(t)| \hat{n}(\underline{x}) |\varphi(t)\rangle - \langle GS| \hat{n}(\underline{x}) |GS\rangle = \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int d_3\underline{x}'\, \theta(t-t')$$

$$\langle GS| \left[\hat{n}_H(\underline{x}t), \hat{n}_H(\underline{x}'t') \right] |GS\rangle\, \varphi(\underline{x}'t')$$

$$\delta n(\underline{x}t) = \frac{1}{\hbar}\int_{\pm\infty} dt' d_3\underline{x}' D^{RET}(\underline{x}t, \underline{x}'t')\varphi(\underline{x}'t')$$

VARIAZ DENSITÀ IN $\underline{x}$ A TEMPO t

↳ OGGETTO DI H

$$iD^{RET}(xx') \equiv \theta(t-t')\langle GS|[n_H(x), n_H(x')]|GS\rangle$$

VARIAZ DI UNA PROP INDOTTA DA FONTE EXT È UN INTEGRALE DA UNA RISPOSTA IN GEN NON LOC

θ CONSERVA CAUSALITÀ ($t' < t$)

$\Rightarrow$ FUNZ DI RISPOSTA RITARDATA

$D^{RET}(t,t')$ DIP DA $t-t'$

SISTEMA H INVAR x TRASLAZ SPAZIALI [E TEMPORALI]

$D^{RET}(\underline{x}t, \underline{x}'t')$ DIP DA $\underline{x}-\underline{x}'$ E $t-t'$

DIMOSTRABILE CON TRASLAZ SU OP DI CAMPO

$[P, H] = 0 \Rightarrow$ POSSO MUOVERE EVOLUZ TEMP E AGIRE SU $|GS\rangle$

$\Rightarrow$ DIP DA $\underline{x}-\underline{x}' \Rightarrow$ INTEG $\longrightarrow$ CONVOLUZ SU SP-TEMPO

$\Rightarrow$ SP FOURIER $\longrightarrow$ INTEG SPARISCE

$$\delta n(\underline{x}t) = \int \frac{d_3\underline{k}}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi} e^{+i\underline{k}\underline{x}-i\omega t}\delta n(\underline{k}\omega)$$

$$\boxed{\delta n(\underline{k}\omega) = \frac{1}{\hbar}D^{RET}(\underline{k}\omega)\varphi(\underline{k}\omega)}$$

IN SP $\underline{k},\omega$ I VARI MODI RISPONDONO IN MANIERA INDIP

ATTRAVERSO COSTANTE $\frac{1}{\hbar}D^{RET}(\underline{k}\omega)$ SUSCETTIBILITÀ GENERALIZZATA

XES $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ X CORRENTE / CAMPO EM

IDENTITÀ VALIDA FUNZ X FUNZ

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

COME CALCOLO D^{RET}? FUNZ RITARDATA E T-ORD COLLEGATI DA

FUNZ DI LEHMANN

$D^{RET}(\underline{k}\omega)$ DA $D^{T}(\underline{k}\omega)$ IN RAPPR LEHMANN

$$i D^{T}(\underline{x}t\, \underline{x}'t') \equiv \langle GS | T\, \delta n_H(\underline{x}t)\, \delta n_H(\underline{x}'t') | GS \rangle$$

GIÀ VISTO X FORMULE
X INVAR TRASLAZ SP TEMPO $\Rightarrow D^{T}(\underline{k}\omega)$

$$= i\hbar \Pi(\underline{x}t\, \underline{x}'t')$$

RAPPR LEHMANN X δA, δB

RITARDATO X θ

(I) $$i C^{RET}_{AB}(t,t') = \langle GS | [A_H(t), B_H(t')] | GS \rangle \theta(t-t')$$

(II) $$i C^{T}_{AB}(t,t') = \langle GS | T\, \delta A_H(t)\, \delta B_H(t') | GS \rangle$$

$$= \theta(t-t') \langle GS | \delta A_H(t) \delta B_H(t') | GS \rangle + \theta(t'-t) \langle GS | \delta B_H(t') \delta A_H(t) | GS \rangle$$

ANCHE X OP FERMIONICI
AGISCE SEMPRE CON
SCAMBI PARI

SVILUPPO I

$|GS\rangle = |E_0\rangle$ CON $|E_n\rangle$ STATI DI H IN SSP N PARTIC

CIOÈ SUPP A, B OPERINO SU SSP $\mathcal{H}_N$ SENZA USCIRE

→ # PARI DI OP CREAZ/DISTRUZ E LASCINO INVAR H

$$i\, C^{RET}_{AB}(t,t') = \sum_n \left(e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_0)(t-t')} \underset{\substack{\uparrow \\ \langle E_0| \quad |E_0\rangle}}{A_{0n} B_{n0}} - e^{\frac{i}{\hbar}(E_n-E_0)(t-t')} B_{0n} A_{n0} \right) \theta(t-t')$$

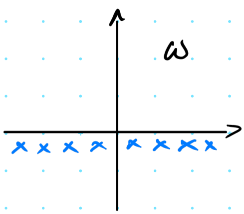
→ IL TERM $n=0$ SI CANCELLA

$$= i \int_{\pm\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \left[\sum_n \frac{A_{0n} B_{n0}}{\omega - \frac{E_n - E_0}{\hbar} + i\eta} - \frac{B_{0n} A_{n0}}{\omega + \frac{E_n - E_0}{\hbar} + i\eta} \right]$$

$$\Rightarrow C^{RET}_{AB}(\omega) = \sum_n \frac{A_{0n} B_{n0}}{\omega - \frac{E_n - E_0}{\hbar} + i\eta} - \frac{B_{0n} A_{n0}}{\omega + \frac{E_n - E_0}{\hbar} + i\eta}$$

$$= \int_{\pm\infty} d\omega' \frac{C_{AB}(\omega')}{\omega - \omega' + i\eta}$$ ↳ FUNZ SPETTRALE

$$C_{AB}(\omega) = \sum_n A_{0n} B_{n0}\, \delta\Big(\omega - \frac{\overbrace{E^N_n - E^N_0}^{>0}}{\hbar}\Big) - B_{0n} A_{n0}\, \delta\Big(\omega + \frac{\overbrace{E^N_n - E^N_0}^{>0}}{\hbar}\Big)$$

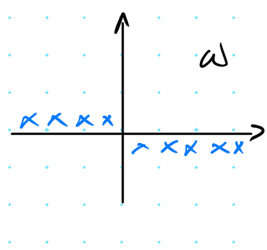


FUNZ RITARDATA HA POLI IN PIANO INFERIORE

⇒ ANALITICA IN PIANO SUP

LA T-ORD È SS DA FARE X ES (UGUALE MA CON 2 θ)

ALLA FINE



$$C^{T}_{AB}(\omega) = \int_{\pm\infty} d\omega' \frac{C_{AB}(\omega')}{\omega - \omega' + i\eta\, \mathrm{sgn}(\omega')}$$

↳ I 2 θ DIVIDONO × 2 INTERVALLI DI t ⇒ SPOSTA POLI

SE $\boxed{A = \hat{n}(x)}$ E $\boxed{B = \hat{n}(x')}$

$\Rightarrow$ ELEM MATR AUTOSTATO DI H

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{x}\vec{p}}\,\varphi(\underline{0})\,e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{x}\vec{p}} = \varphi(\underline{x})$$

$$\Rightarrow \hat{n}(\underline{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{x}p}\,\hat{n}(\underline{0})\,e^{\frac{i}{\hbar}\underline{x}p}$$

$\Rightarrow$ IN BASE $|E_n(\underline{k}), \underline{k}\rangle$

$\langle E_0\, \underline{0} |\, n(\underline{x}) \,| E_n(\underline{k})\, \underline{k}\rangle$ = SVILUPPO FOURIER

(CONTO SULLE NOTE)

FACCIAMOLO EXPLICIT

$A = \hat{n}(\underline{x})$ $B = \hat{n}(\underline{x}')$ CON INVAR X TRASLAZ SPAZIALE

$$i D^{\text{ret}}(x\, x') = \langle E_0 | [n(x), n(x')] | E_0\rangle$$

$\rightarrow$ LEHMANN $\Rightarrow$ SP $\underline{k}\omega$

$$D^{\text{ret}}(\underline{k}\omega) = \int_{\pm\infty} d\omega' \frac{D(\underline{k}\omega)}{\omega - \omega' + i\eta}$$ $\leftarrow$ FUNZ SPETTRALE

$$D^{T}(\underline{k}\omega) = \int_{\pm\infty} d\omega' \frac{D(\underline{k}\omega)}{\omega - \omega' + i\eta\, \mathrm{sgn}(\omega')}$$

FACENDO IL CONTO $\longrightarrow$ $D(\underline{k}\omega)$ FUNZ SPETTRALE È REALE

2) USO $\dfrac{1}{\omega-\omega'\pm i\eta} = \dfrac{P}{\omega-\omega'} \mp i\pi\,\delta(\omega-\omega')$

$$\Rightarrow D^{RET}(\underline{k}\omega) = \fint_{\pm\infty} d\omega' \frac{D(\underline{k}\omega')}{\omega-\omega'} - i\pi D(\underline{k}\omega)$$

$$D^{T}(\underline{k}\omega) = \fint_{\pm\infty} d\omega' \frac{D(\underline{k}\omega')}{\omega-\omega'} - i\pi\,\mathrm{sgn}(\omega) D(\underline{k}\omega)$$

SE $D(\underline{k}\omega) \in \mathbb{R} \Rightarrow D^{RET}$ SEPARATA IN PT Re E Im

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\, D^{RET}(\underline{k}\omega) = \mathrm{Re}\, D^{T}$$
$$\mathrm{Im}\, D^{RET}(\underline{k}\omega) = \mathrm{Im}\, D^{T}\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

ESEMPIO [SCREENING]

IMPUREZZA IN HEG → DENSITÀ SI DISTRIB IN SIMM RADIALE SCHERMANDO IMPUREZZA
↑
IN $\underline{0}$ CON CARICA $+Ze$

$$H_{HEG} - Ze^2 \int d_3\underline{x}\, \frac{\hat{n}(\underline{x})}{|\underline{x}|} \quad \Rightarrow \text{COULOMB}$$

→ PERTURBAZ INDIP DA t MA INTRODUCO PERTURBAZ A $t=-\infty$

$$\delta n(\underline{x}t) = \frac{1}{\hbar}\int dt' d_3\underline{x}' \, D^{RET}(\underline{x}t, \underline{x}'t') \, \varphi(\underline{x}')$$

$$\varphi(\underline{x}) = -\frac{Ze^2}{|\underline{x}|}$$

D^{RET} INVAR x TRASLAZ ANCHE HSG INVAR x TRASLAZ $\Rightarrow \underline{k}$

$$\delta n(\underline{k}\omega) = \frac{1}{\hbar} D(\underline{k}\omega) \, \varphi(\underline{k}\omega)$$

$$\hookrightarrow \varphi(\underline{k}\omega) = -Ze^2 \frac{4\pi}{k^2} 2\pi \delta(\omega)$$

$$\delta n(\underline{x}t) = \int \frac{d_3\underline{k}}{(2\pi)^3} e^{i\underline{k}\underline{x}} \frac{1}{\hbar} D^{RET}(\underline{k}0) \, (-Ze^2) \frac{4\pi}{k^2}$$

$\hookrightarrow$ DIP DA $|\underline{k}|$ $\Longleftarrow$ HSG INVAR x ROTAZ

$$= -Ze^2 \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \, \frac{1}{\hbar} D^{RET}(\underline{k}0) \frac{2\pi}{k^2} \int d\theta \sin\theta \, e^{ik|x|\cos\theta}$$

ANGOLO RELATIVO

$$\int_{-1}^{+1} d\xi \, e^{ikr\xi} = \frac{1}{ikr}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right) \qquad r = |\underline{x}|$$

$$\Rightarrow \delta n(r) = -\frac{Ze^2}{i4\pi^2 r} \int_0^\infty k \, dk \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{\hbar} D(\underline{k}, 0) \left(e^{ikr} - \underbrace{e^{-ikr}}_{\substack{\text{ORA} \\ k \to -k}} \right)$$

$$= \frac{-Ze^2}{i4\pi^2 r} \int_{\pm\infty} k \, dk \, \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{\hbar} D^{RET}(\underline{k}, 0) \, e^{ikr}$$

ORA SAPPIAMO CHE $\quad D^T(x x') = \hbar \Pi(x x')$

$\Rightarrow$ DATO CHE HO $D^{R\delta\tau}(x\,x')$ CHE MI TROVO COL CALCOLATORE

$$\Rightarrow D^{R\delta\tau}(x\,x') \equiv \kappa\, \Pi^{R\delta\tau}(x\,x')$$

$$\Rightarrow \text{IN SP } \underline{k}\omega \quad D^{R\delta\tau}(\underline{k}\omega) = \hbar\, \Pi^{R\delta\tau}(\underline{k}\omega)$$

E SO CHE $\Pi(\underline{k}\omega) = \dfrac{\Pi^*(\underline{k}\omega)}{1 - \mathcal{V}(\underline{k})\Pi^*(\underline{k}\omega)}$ EQ DYSON

$\Rightarrow$ SEMPLICE DIM CHE SE $\Pi^{*R\delta\tau} \equiv \mathrm{Re}\,\Pi^* + i\,\mathrm{Im}\,\Pi^*\,\mathrm{sgn}(\omega)$

$$\Rightarrow \Pi^{R\delta\tau} = \frac{\Pi^{*R\delta\tau}}{1 - \mathcal{V}\,\Pi^{*R\delta\tau}} \quad \text{VALE ANCHE} \times \text{LA RITARDATA}$$

A STO PTO $\dfrac{1}{\hbar} D^{R\delta\tau}(k,0) = \Pi^{R\delta\tau}(\underline{k}0) = \dfrac{\Pi^{*R\delta\tau}(\underline{k}0)}{1 - \underbrace{\dfrac{4\pi e^2}{k^2}}_{\mathcal{V}(k)} \Pi^{*R\delta\tau}(\underline{k}0)}$

$$\Rightarrow \delta n(r) = -\frac{2}{i\,4\pi^2 r} \int_{\pm\infty} k\,dk \; \frac{\frac{4\pi e^2}{k^2}\Pi^{*R\delta\tau}(\underline{k},0)}{1 - \frac{4\pi e^2}{k^2}\Pi^{*R\delta\tau}(\underline{k},0)}\, e^{ikr}$$

NON SO CHI SIA $\Pi^{*R\delta\tau}$ MA SOLO $\Pi^{*R\delta\tau}(\underline{k},0) = \mathrm{Re}\,\Pi^*(\underline{k},0)$

$$\Rightarrow \text{APPROX } \Pi^* \simeq \Pi^{(0)}$$

$\nexists$ CALCOLO ESATTO $\longrightarrow$ MA COSA SUCCEDE A GRANDI DIST?

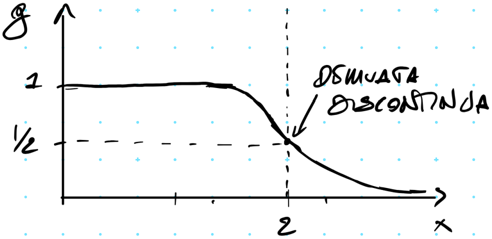
$\times$ r GRANDE $\Rightarrow e^{ikr}$ OSCILLA UN BOTTO

$\rightarrow$ SE IL RESTO È RELATIVAM LENTO ABBIAMO INTERFERENZA CHE VA A 0 VELOCE

⇒ DOMINA L'INTEG $k \to 0$ (OSCILLA E MENO FORTI)

⇒ APPROX $\Pi^{*\,\mathrm{NOT}}$ IN $\underline{k} \to \underline{0}$ ⇒ $\Pi^{(0)}(\underline{k}\,0) \xrightarrow[\underline{k}\to\underline{0}]{} ?$

FACENDO IL CONTO x $\Pi^{*}(\underline{k}\,0) = -\frac{m k_F}{4\pi^2\hbar^2}\, g\left(\frac{k}{k_F}\right)$



$$g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\lg\left|\frac{2-x}{2+x}\right|$$

LA SBATTA DI INTEGRARE È PER g MA VICINO A 0 $g \simeq 1$

⇒ APPROX THOMAS-FERMI $g(x) \simeq 1$

$$\delta n(r) = -\frac{2}{4\pi^2 i r}\int_{\pm\infty} k\,dk\, \frac{4\pi e^2\left(\frac{-m k_F}{4\pi^2\hbar^2}\right)}{k^2 + \underbrace{\frac{m k_F 4\pi e^2}{4\pi^2\hbar^2}}} e^{ikr}$$

$a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2}$

$$k_{TF}^2 = \frac{m k_F e^2}{\pi\hbar^2} = \frac{k_F}{\pi a_0}$$

QUANTO CENTRA CON k_F?

$\frac{k_{TF}^2}{k_F} \simeq 1$ ⟶ NON COSÌ DIVERSO DALLA DENSITÀ DELLA MATERIA CONDENSATA

$$\delta n(r) = \frac{-2}{4\pi^2 i r}\int_{\pm\infty} k\,dk\, \frac{k_{TF}^2}{k^2 + k_{TF}^2}\, e^{ikr} \longrightarrow 2 \text{ POLI } \pm i k_{TF}$$

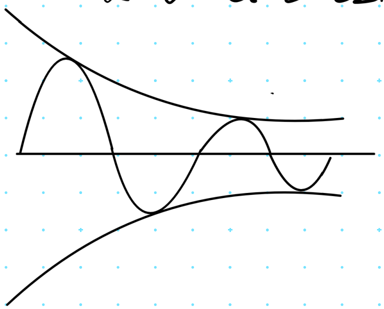
⇒ DAI RESIDUI $= \frac{e^{-r k_{TF}}}{r}\, k_{TF}^2\, \frac{2}{4}$ ANDAMENTO THOMAS-FERMI

IN REALTÀ USANDO MEGLIO g SI PUÒ FARE TRASF FOURIER

$\Rightarrow$ NON PUÒ SCENDERE exp x LA DISCONTINUITÀ DERIVATA

IN REALTÀ $\delta n(r) \approx \frac{1}{r^3}\cos(2k_F r)$ ZONE DI DENSITÀ POS E NEG

$\rightarrow$ LA CARICA È ESALTATA DALLA SOVRASCHERMATURA O MENO



OSCILLAZ DI FRIEDEL

DIFFICILE NEL MONDO REALE

XCHÉ A $T>0$ SCOMPAIONO

OSCILLAZIONI DI PLASMA [ALTRA APPLICAZ]

SPARO e^- SU SUPERFICIE $\Rightarrow$ e^- RIFLESSI $\rightarrow$ ALCUNI PERDONO EN MULTIPLO DI UNA CERTA QUANTITÀ

IDEM PASSANDO LASTRE DI METALLO

$\rightarrow$ PERDO EN x ATTIVARE DI OSCILLAZ COLLETTIVE NEL METALLO

INOLTRE SE LI ILLUMINO CON EN

- $< \hbar\omega_{PLASMA} \Rightarrow$ RIFLESSI
- $> \hbar\omega_{PL} \Rightarrow$ ASSORBITI

$$\omega_{PL}^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m} \longrightarrow \hbar\omega_{PL} \sim 10\, eV > E_F$$

$\hookrightarrow$ NON CONTIENE $\hbar$ $\Rightarrow$ FREQ RISULTATO UNIVERSALE x SIST ELETTRONICI (VALE ANCHE IN IONOSFERA)

TORNIAMO A $\delta n(\underline{x}t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi} e^{ikx - i\omega t}\, \Pi^{\text{rit}}(k\omega)\,\varphi(k\omega)$

$\rightarrow$ DOVE LA RISPOSTA È MAGGIORE?

SE Π^{rit} HA POLI VICINO ASSE Re

SE POLO $\in$ Re $\Rightarrow$ INTEG ESPLODE

COME TUTTE FUNZ RITARD HA POLI IN ASSE INFERIORE

$$\Pi(k\omega) = \frac{\Pi^*}{1 - v\Pi^*} \longrightarrow \text{POLI = ZERI FUNZ DIELETTRICA}$$

$$\varepsilon(\underline{k}\omega) = 1 - v(\underline{k})\Pi(\underline{k}\omega)$$

x NOI $\varepsilon^R(\underline{k}\omega) = 1 - 2v(\underline{k})\Pi^{*R}(\underline{k}\omega)$

ZERI x ε^R GENERALIZ (PER QUALUNQUE)

Pt Re — Pt Im

$0 = 1 - 2v(\underline{k})\Pi^{*R}(\underline{k}\omega) \longrightarrow$ FIX K $\omega(\underline{k}) = \omega_1(\underline{k}) + i\omega_2(\underline{k})$

SONO POLI $\Rightarrow \omega_2 < 0$

$0 = 1 - 2v(\underline{k})\Pi^{*R}(\underline{k}\,\omega_1 + i\omega_2)$ VOGLIO ω_2 PICCOLO $\Rightarrow$ SEPARO Re E Im E SVILUPPO

$$1 - 2v(\underline{k})\left[\text{Re}\,\Pi^{*R}(\underline{k}\omega_1) + i\,\text{Im}\,\Pi^{*R}(\underline{k}\omega_1) + i\omega_2 \frac{\partial}{\partial\omega}\text{Re}\,\Pi^{*R}(\underline{k}\omega)\Big|_{\omega=\omega_1} + \_\_\right]$$

IGNORO x Im MA TANTO POCO SPARISCE

• Pt Re $\quad 0 = 1 - 2v(\underline{k})\,\text{Re}\,\Pi^{*R}(\underline{k}, \omega_1(\underline{k}))$ $\quad$ (+ Pt Im $\cdot\, \omega_2 \to 0$)

• Pt Im $\quad 0 = -2v(\underline{k})\,\text{Im}\,\Pi^{*R}(\underline{k}\omega_1) + \omega_2 \frac{\partial}{\partial\omega}\text{Re}\,\Pi^{*}(\underline{k}\omega)\Big|_{\omega_1} 2v(\underline{k})$

$\rightarrow$ DA QUI HO ω_2

$$\begin{cases} 0 = 1 - \varepsilon(\underline{k})\,\mathrm{Re}\,\Pi^{*R}(\underline{k}\,\omega_1(\underline{k})) \\[2ex] \omega_2(\underline{k}) = \dfrac{\mathrm{Im}\,\Pi^{*R}(\underline{k}\,\omega_2(\underline{k}))}{\dfrac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{Re}\,\Pi^{*R}(\underline{k}\omega)\Big|_{\omega_1(k)}} \end{cases}$$

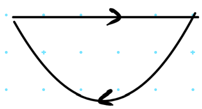
$$\Rightarrow \Pi^{R}(\underline{k}\omega) = \frac{\overset{\text{RESIDUO}}{z(\underline{k})}}{\omega-(\omega_1(\underline{k})+i\omega_2(\underline{k}))} + \Pi^{RES}(\underline{k}\omega)$$

TROVATO IL POLO RISCRIVO Π^{R}

CONTRIBUTO DEL POLO

$$\delta n^{polo}(\underline{x}\,t) = \int \frac{d_3\underline{k}}{(2\pi)^3}\, z(\underline{k})\, e^{-i\underline{k}\,\underline{x}} \int_{\pm\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\omega_1-i\omega_2}\,\varphi(\underline{k}\omega)$$

$t > 0 \rightarrow$ CHIUDO SOTTO



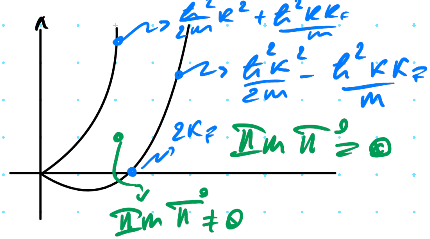
$$-\frac{2\pi i}{2\pi}\, e^{-i(\omega_1+i\omega_2)t}\,\varphi(\underline{k},\omega_1)$$

$\omega_2 < 0 \Rightarrow$ TERMINE DESCRIVE INVERSO TEMPO DI DECADIM

VEDIAMO CHE ω_1 INDIP DA K $\Rightarrow$ ESCE DALL'INTEGRALE E LA FASE OSCILLA
(ALMENO AL I ORDINE)

APPLICHIAMO A CASO COULOMB, IN 1° APPROX $\Pi^{*RET} = \Pi^{(0)RET}$

SE VOGLIO VEDERE A LUNGO IL MIO MOTO COLLETTIVO HO 2 REGIONI IN CUI $\mathrm{Im}\,\Pi^{0} = 0$



PATOLOGICO X L'INTEG XCHÉ SE POLO E Re ESPLODE MA $\exists$ CORREZIONI

$\Rightarrow$ LO USO X BUONA APPROX DI ω_1

SE MI METTO NELLA II° ZONA DI K GRANDE

$\Rightarrow$ LUNGHEZZE MOLTO PICCOLE MA VOGLIO GUARDARE SOPRA A SCALA ATOMICA

$\Rightarrow$ ZONA K PICCOLO $\Rightarrow$ GRANDE LUNGH. D'ONDA

$$1 = \frac{4\pi e^2}{K^2} \overset{0}{\Pi}(K\omega) \qquad \text{SOLUZIONE } \omega(K)$$

$$= \frac{4\pi e^2}{K^2} \frac{2}{\hbar} \int \frac{d_3q}{(2\pi)^3} \theta(K_F - q) \left[\frac{1}{\omega - \frac{\varepsilon_q^0}{\hbar} - \frac{\varepsilon^0_{q+K}}{\hbar}} - \frac{1}{\omega - \frac{\varepsilon_q^0}{\hbar} + \frac{\varepsilon_{q+K}}{\hbar}} \right]$$

$$1 = \frac{4\pi e^2}{K^2} \frac{2}{\hbar} \int \frac{d_3q}{(2\pi)^3} \theta(K_F - q) \frac{2\left(\frac{\varepsilon^0_{q+K} - \varepsilon^0_q}{\hbar}\right)}{\omega^2 - \underbrace{\left(\frac{\varepsilon^0_q - \varepsilon^0_{q+K}}{\hbar}\right)^2}_{\left(\frac{\hbar K^2}{2m} + \frac{\hbar K q}{m}\right)^2}} \qquad q < K_F \ (x\,\theta)$$

SVILUPPO SERIE GEOM.

$$= \frac{4\pi e^2}{K^2} \frac{2}{\hbar} \int \frac{d_3q}{(2\pi)^3} \theta(K_F - q)\, 2\left(\frac{\hbar K^2}{2m} + \frac{\hbar K q}{m}\right) \left[1 + \left(\frac{\hbar K^2}{2m} + \frac{\hbar K q}{m}\right)^2 + \_\_ \right]$$

GRANDE $\omega \Rightarrow \omega_{PL}$ + CORREZIONI

INTEG. 0 XKE' DISP. IN q

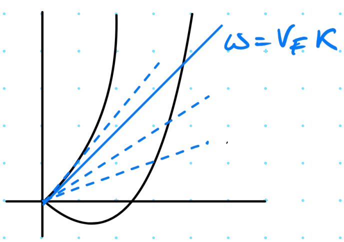
$$1 = \frac{4\pi e^2}{K^2 \omega^2} \frac{4}{\hbar} \int \frac{d_3q}{(2\pi)^3} \theta(K_F - q) \left[\left(\frac{\hbar K^2}{2m} + \hbar \frac{K q}{m}\right) + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\hbar^2 K^2}{2m} + \frac{\hbar K q}{m}\right)^3 + \_\_ \right]$$

MIRACOLO DI COULOMB $\rightarrow$ I° TERM HA K^2 CHE SI CANCELLA CON IL FATTORE

SE NON SI CANCELLASSE XKE' POT PICCOLO E COST

$$\varepsilon(K) = \varepsilon(0) + \_\_ \Rightarrow \omega^2 = \text{COST} \cdot K^2$$

$\hookrightarrow$ LEGGE LIN $\Rightarrow$ ONDE



INTENSITA' $> V_F \Rightarrow$ ONDE

$< V_F$ NON LE VEDO

$\rightarrow$ VEDI He^3 SE FERMION

$$1 = \frac{4\pi e^2}{\omega^2}\frac{4}{\hbar}\frac{\hbar}{2m}\int\frac{d_3q}{(2\pi)^3}\Theta(k_F-q) + \frac{4\pi e^2}{k^2\omega^2}\frac{\hbar}{\hbar\omega^2}\int\frac{d_3q}{(2\pi)^3}\Theta(k_F-q)\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right)^3 + 3\left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right)^2\cancel{\frac{\hbar k}{m}q} + 3\left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right)\left(\frac{\hbar kq}{m}\right)^2 + \cancel{\left(\frac{\hbar kq}{m}\right)^3}\right] + \ldots$$

Θ DISP

Θ DISP

$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{4}{3}\pi\, 3\pi^2 n$$

K PICCOLO $\oplus$ POT GRANDE $\rightarrow$ TRASC

$$1 = \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2} + \frac{4\pi e^2}{k^2\omega^4}\frac{4}{\hbar}\int\frac{d_3q}{(2\pi)^3}\Theta(k_F-q)\,3\left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right)\left(\frac{\hbar}{m}\right)^2 k_i k_j q_i q_j$$

$$\int d_3q\,\Theta(k_F-q)\,q_i q_j = \frac{\delta_{ij}}{3}\int d_3q\,\Theta(k_F-q)\,q^2$$

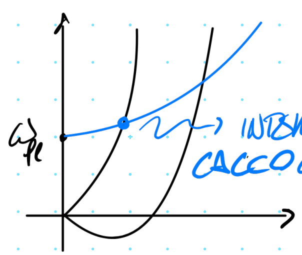
$\hookrightarrow$ SIMM SFERICA $\Rightarrow$ 3 INDICI UGUALI

$$\Rightarrow 1 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} + \frac{4\pi e^2}{k^2\omega^4}\frac{4}{\hbar}\frac{\hbar k^4}{2m}\left(\frac{\hbar^2}{m}\right)\int\frac{4\pi q^4 dq}{(2\pi)^3}$$

$$\Rightarrow \omega^2(k) = \omega_1^2(k) = \omega_{pe}^2 + \text{cost}\,\frac{k^2}{\omega_{pe}^2}$$

$\hookrightarrow$ ORDINE 0 DI ω^2

$\rightarrow$ IL POLO ALL'ORDINE 0 È $\simeq$ PARABOLA



QUANDO ENTRO NELL'ALTRA PARAB NON VALE + APPROX PLASMI

$$\varepsilon(\underline{k}\,\omega) = 1 - \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2 + \ldots$$

$\hookrightarrow$ ORDINE 0 FUNZ DIELETTRICA

$\rightarrow$ ECCO XKÈ IL METALLO RIFLETTE O MENO

EQ MAXWELL $\quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{D} = \nabla_r \vec{E}$

IN SP $\underline{k}$ $\quad -\frac{1}{c^2}\omega^2 D(\underline{k}\omega) = -k^2 E(\underline{k}\omega)$

$$\hookrightarrow \varepsilon(\underline{k}\omega)\, E(\underline{k}\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{\omega^2_{pl}}{\omega^2}+\_\right) = k^2 \Rightarrow \omega^2-\omega_{pl}^2 = c^2k^2$$

$$E(\underline{k}\omega) = E\, e^{i\underline{k}\underline{x}-i\omega t}$$

$\omega > \omega_{pl} \Rightarrow$ POS $\Rightarrow$ PROPAGA DENTRO IL METALLO

$\omega < \omega_{pl} \Rightarrow k \in \mathrm{Im} \Rightarrow$ MUORE SU SUPERFICIE METALLO

TRASF CANONICHE

CONSERVANO COMMUTATORI FOND

$$x_i' = U^+ x_i U \qquad p_i' = U^+ p_i U \qquad S_i' = U^+ S_i U$$

$$\text{INVAR } [x_i, p_j] = [x_i', p_j'] = i\hbar\delta_{ij}$$

$$[S_i, S_j] = [S_i', S_j'] = -i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$$

PRENDIAMO TRASF UNITARIE CHE LASCIANO INVAR x E S

$$x' = x \qquad S' = S \qquad p_i'\psi = \left[p_i - i\hbar\left(U^+\partial_i U\right)\right]\psi$$

× AVERE INVAR LOCALE

INTRO DERIVATA COVARIANTE $\pi_i = p_i - A_i$

$$\Rightarrow \pi_i' = U^+ \pi_i U = p_i - i\hbar(U^+\partial_i U) - A_i'$$

$$= \pi_i + A_i - i\hbar\left(U^+\partial_i U\right) - A_i'$$

IMPONGO SIA INVARIANTE

$\Rightarrow A'_i(x) = A_i - i\hbar(U^+ \partial_i U)$

$[\pi_i, \pi_j] = [p_i - A_i, p_j - A_j] = -i\hbar\partial_i A_j + i\hbar\partial_j A_i + [A_i, A_j]$

INVAR × FASE GLOB → SIMM $U(1)$ $\varphi' = e^{i\alpha}\varphi$

SE PASSO A SIMM $U(1)$ LOC CIOÈ $\varphi'(\underline{x}) = e^{i\frac{\alpha(x)}{\hbar}}\varphi(x)$

IN GEN LA FISICA NON È INVAR
→ x RIOTTENGO INVAR DEVO PASSARE DA p_i A π_i

U IN $U(1)_{loc}$ È $U = e^{-i\alpha(x)/\hbar}$

$\Rightarrow A'_i(x) = A_i - \text{grad}_i\,\alpha$

SUPP CHE TH CHE MI INTERESSA SIA INVAR × UNITARIE

$\varphi'(x) = U\varphi(x) \quad U \in SU(N)$

MATR SU(N) CHE DIP DA $\underline{x}$

IMPONGO INVAR LOC $A'_i = A_i \underbrace{-i\hbar U^+_x \partial_i U_x}_{\text{HERMITIANO } \oplus\, Tr=0}$ → ELEM ALGEBRA

IN EM → TENSORE DI FARADAY

QM → MATRICE

→ VEDI NOTE II QIE: ESTENSIONE SIMM UNITARIA DA SINGOLE PARTIC A N PARTIC

LIVELLI DI LANDAU

SINGLE PARTIC $H = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow$ e^- IN CAMPO EM $\frac{1}{2m}\left(\vec p + \frac{e}{c}\vec A\right)^2 = \frac{1}{2} m v^2$

CON $\vec v = \dot{\vec x} = \frac{\vec p + \frac{e}{c}\vec A}{m}$

PRENDO $\vec B \parallel \hat z$ $\longrightarrow$ HO UNA CERTA LIBERTÀ NELLA SCELTA $\vec A$

POSSO PRENDERE $A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix}$

INDIP DA z

$$\Rightarrow B = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow B_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x$$

$$[v_x, v_y] = \frac{1}{m^2}\left[p_x + \frac{e}{c}A_x,\ p_y + \frac{e}{c}A_y\right] = \frac{1}{m^2}\left(-i\hbar\partial_x A_y + i\hbar\partial_y A_x\right)$$

$$= -\frac{eB_z}{m^2 c} i\hbar$$

COMMUTATORE GAUGE INVARIANT
$\longrightarrow$ B INDIP DA GAUGE

SE HO $\underline{B_z \text{ COST}}$ (INDIP $\vec x$) A MENO DI FATTORI NUM DIVENTANO [ ] CANONICHE

DEF $\hat P = v_x\left(\sqrt{\frac{eB_z}{m^2c}}\,\hbar\right)^{-1}$ $\quad \hat Q = v_y\left(\sqrt{\frac{eB_z}{m^2c}}\,\hbar\right)^{-1}$

$$[\hat P, \hat Q] = -i\hbar$$

$\Rightarrow$ HAMILTONIANA $\frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{p_z^2}{2m} = \frac{1}{2}m\,\frac{eB_z\hbar}{m^2c}\left(P^2 + Q^2\right) + \frac{p_z^2}{2m}$

$$= \hbar\omega_c\left(\frac{P^2+Q^2}{2}\right) + \frac{p_z}{2m}$$

$\hookrightarrow$ FREQ CICLOTRONE

TERMINE CINETICO IN z $\oplus$ OSCILL ARM AUTOVAL $n+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ SPETTRO OSCILLATORE TRASLATO LUNGO z

$\rightarrow$ LIVELLI DI LANDAU

SE PENSO A PARTIC IN BOX $\rightarrow$ CONSERVAZ $p_x \, p_y \, p_z$

$\rightarrow$ n FORTEM DEGENERE XKÉ LIVA 1 gdl UNIFORM p_x e p_y

FACENDO I CONTI DI LANDAU SI PUÓ RICAVARE

$\exists$ MOLTE SCELTE DI A x STA ROBA $\rightarrow$ 2 STD

1. GAUGE DI LANDAU $\vec{A}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ xB \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ PORTA A FORME HERMITE

2. GAUGE SIMM $\vec{A}_S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}yB \\ \frac{1}{2}xB \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ BUONA XKÉ COORD CILINDRICHE

$\rightarrow$ USO LANDAU

$$h = \frac{1}{2m}\left(p_x + \frac{e}{c}A_x\right)^2 + \left(p_y + \frac{e}{c}A_y\right)^2 = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + \left(p_y + \frac{e}{c}Bx\right)^2\right]$$

$\rightarrow$ p_y COST MOTO

x AUTOVAL $h\varphi = E\varphi$ $\qquad \varphi(x,y) = e^{ik_y y}u(x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + \left(\hbar k_y + \frac{eB}{c}x\right)^2\right)u = Eu$$ OSCILLATORE TRASLATO

SI VEDE LUNGHEZZA CARATT FOND $\quad [\hbar k] = \left[\frac{eB}{c}\right]$
$\uparrow$
$k = \frac{1}{L}$

$L^2 = \frac{\hbar c}{eB} \Rightarrow$ RISCALO $s = \frac{x}{L}$

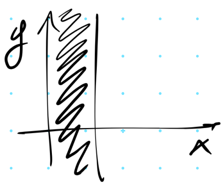
EQ AUTOVAL IN s $\quad \frac{1}{2m}\left(-\frac{\hbar^2}{L^2}\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\hbar^2}{L^2}(s+k_yL)^2\right)u(s) = E\,u(s)$

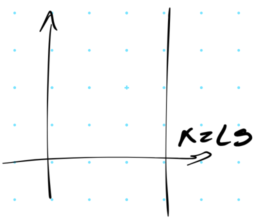
$$\Rightarrow -\frac{u''}{2} + (s+kL)^2\frac{u}{2} = \underbrace{\left(\frac{mL^2}{\hbar^2}\right)}_{\frac{m}{\hbar^2}\frac{\hbar c}{eB}} u E = \frac{E}{\hbar\omega_c}u$$

DEVO CALCOLARE STA ROBACCIA

→ SITUA POSSIBILE: e^- NON È OVUNQUE MA CONFINATO $x \leq 0$ IN UNA BARRIERINA

⟶ GEOM = STRISCIA





SE SIAMO LONTANO DAI BORDI

$\Rightarrow$ SOL $\quad e^{-\frac{1}{2L^2}(x+kL^2)}\,H_n\left(\frac{x+kL^2}{2}\right)$

CENTRATO IN $-kL^2$ E OSCILLANO SU SCALA L

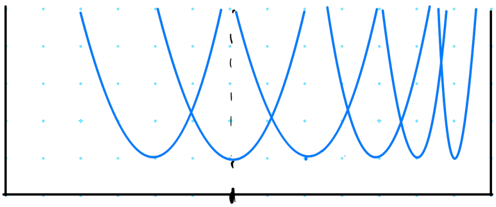
AUTOVAL $\quad \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)$

$L = \frac{2{,}56\ \text{nm}}{\sqrt{B\ (\text{TESLA})}}$ → SCALA MICROSCOPICA SU CUI OSCILLANO AUTOFUNZIONI

$\Rightarrow$ A DIST L DAL BORDO NON SENTO L'EFF

$\Rightarrow$ NEL BULK LIV LANDAU EQUISPAZ ⟶ OSCILLATORE ARMONICO

AVVICINANDOMI AL BORDO SENTO LA PARETE



+ MI AVVICINO AL BORDO + SI INNALZA LA PARABOLA

CLASSICAMENTE AL CENTRO CORRENTE NULLA AL BORDO UNA SALE L'ALTRA SCENDE

→ QUANTO SONO DEGENERI I LIV DI LANDAU NEL BULK?

L_y, L_x

$$\frac{L_x L_y B}{\Phi_0}$$

SCRIVO HAM DIP DA $\vec{A}$

$$H_A = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m}\left(\vec{p}_i + \frac{e}{c}\vec{A}(\underline{x}_i, t)\right)^2 + U(\underline{x}_1 \ldots \underline{x}_N) \quad \text{I° QTZ}$$

$$= \sum \frac{p_i^2}{2m} + \frac{e}{2mc}\sum\left(\vec{p}_i \cdot \vec{A}(\underline{x}_i, t) + \vec{A}(\underline{x}_i, t)\,\vec{p}_i\right) + \frac{e^2}{2mc^2}\sum A^2(\underline{x}_i\, t)$$

$$+ U(\underline{x}_1 \ldots \underline{x}_N)$$

MI LIBERO DA DIP DA $\underline{x}_i$: USANDO δ

$$= H_{A=0} + \int d_3\underline{x}\; \frac{e}{2mc}\sum\left[\vec{p}_i\,\delta_3(\underline{x}-\underline{x}_i) + \delta_3(\underline{x}-\underline{x}_i)\,\vec{p}_i\right]\vec{A}(\underline{x}\, t)$$

NON È UN OP XKÈ INDIP $\underline{x}_i$

$$+ \frac{e^2}{2mc^2}\int d_3\underline{x} \sum_{i=1}^{N} \delta_3(\underline{x}-\underline{x}_i)\, A^2(\underline{x}\, t)$$

$$= H_{A=0} + \frac{e}{c}\int d_3\underline{x}\; \vec{J}(\underline{x})\,\vec{A}(\underline{x}\, t) + \frac{e^2}{2mc^2}\int d_3\underline{x}\; A^2(\underline{x}\, t)\,\hat{n}(\underline{x})$$

↳ IN EQ CONTINUITÀ x PROB POSIZ EMERGE QUESTA CORRENTE DI PROBAB IN ASSENZA DI $\vec{A}$

→ VA MESSO IN EVIDENZA CHE $v \neq p/m$

⇒ SIA $\vec{J}$ NON È LA CORRENTE CHE ESCE × CAMPO MAGN

$$n_{H_A}(\underline{x}t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_A t}\,\hat{n}(\underline{x})\,e^{-\frac{i}{\hbar}H_A t}$$

$$\longrightarrow -\frac{i}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t} n_{H_A}(\underline{x}t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_A t}\,[H_A, n(\underline{x})]\,e^{-\frac{i}{\hbar}H_A t}$$

IN CON DIP DA E XKÉ $\vec{A}$ DIP DA t

$[\hat{n}, U] = 0$ ⇒ EN CINETICA NON COMMUTA

DENSITÀ DI CARICA $\hat{\rho}(\underline{x}t) = -e\,\hat{n}(\underline{x}t)$

→ CONSERVAZ CARICA ⇒ EQ CONTINUITÀ

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(\underline{x}t) = -\mathrm{div}\,\vec{\mathcal{J}}(\underline{x}t)$$

$\hookrightarrow \neq \vec{J}$

$$\vec{\mathcal{J}} = -e\vec{J} - \frac{e^2}{mc}\vec{A}\,\hat{n}(\underline{x})$$ CORRENTE CONSERVATA CHE MIS IN PRESENZA DI CAMPO

$\vec{\mathcal{J}} = \rho\vec{v}$ → X NOI $\vec{v} = \dfrac{\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}}{m}$ ⇒ OTTENIAMO EQ SOPRA

RISPOSTA LINEARE

ACCENDO $\vec{A}$ A UN CERTO TEMPO E PRIMA SONO IN $|GS\rangle$ DI $H_{A=0}$

$$\langle\psi(t)|\mathcal{J}_e(\underline{x}t)|\psi(t)\rangle = \langle GS|\mathcal{J}_e(\underline{x}t)|GS\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int dt'\,\theta(t-t')\,\langle GS|\,[\mathcal{J}_e(\underline{x}t), V_{H_{A=0}}(t')]\,|GS\rangle$$

$\hookrightarrow$ DIP DA E ⇒ $\vec{A}$ DIP DA t

$$\mathcal{J} = e\vec{J} - \frac{e^2}{mc^2}\hat{n}\vec{A}(\underline{x}t)$$ → NEL GS $\vec{J}$ HA $\langle\vec{J}\rangle = 0$ MA IL 2° TERMINE NO

$$= -\frac{e^2}{mc^2}\, n(\underline{x})_{GS}\, A_\ell(\underline{x}t) + \frac{1}{i\hbar}\frac{e}{c}\int dt'\, d_3\underline{x}'\,\theta(t-t')$$

$$\langle GS|\left[J_\ell(\underline{x}t), J_m(\underline{x}'t')\right]|GS\rangle\, A_m(\underline{x}'t')$$

OMETTO ALTRO TERM XKÉ QUADRATICO NELLA PERTURBAZ
(ANCHE SE CONTRIBUISCE A J)

→ VOGLIO ROBA LIN IN $\vec{A}$ ⇒ NEL COMMUTATORE RESTA SOLO $-eJ_\ell$

$$\Rightarrow J_\ell(\underline{x}t) = -\frac{e^2}{mc^2}\, n_{GS}(\underline{x})\, A_\ell(\underline{x}t) - \frac{e^2}{\hbar}\int dt'\, d_3\underline{x}'\, D^{RET}_{\ell m}(\underline{x}t, \underline{x}'t')\, A_m(\underline{x}'t')$$

$$iD^{RET}_{\ell m}(xx') = \theta(t-t')\,\langle GS|\left[J_\ell(x), J_m(x')\right]|GS\rangle$$

PARENTE DELLA FUNZIONE ([DENSITÀ, DENSITÀ])

SE FACCIO $\sum_\ell \partial_\ell D^{RET}_{\ell m} = -\frac{\partial}{\partial t} D^{RET}_{0m}(xx')$

↳ COMP 0 VETT QUADRIDIM
⇒ È LA DENSITÀ

SE FACCIO T ORD

$$iD^{T}_{\ell m}(xx') = \langle GS|\, T\, \delta J_\ell(x)\, \delta J_m(x')\,|GS\rangle$$

LO VEDREMO NEL 2° MODULO

$$J_\ell(\underline{x}t) = \int dt'\, d_3\underline{x}' \left[-\frac{e^2}{mc}\, n(\underline{x}')\, \delta_{\ell m}\, \delta_3(\underline{x}-\underline{x}')\, \delta(t-t') - \frac{e^2}{\hbar} D^{RET}_{\ell m}(\underline{x}t, \underline{x}'t')\right] A_m(\underline{x}'t')$$

NOI VOGLIAMO CAMPO $\vec{E}$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial A_\ell}{\partial t} = E_\ell \xrightarrow{\text{SP } \omega} \frac{i\omega}{c} A_\ell(\underline{x}\omega) = E_\ell(\underline{x}\omega)$$

⇒ POSSO RISCRIVERE J LIN IN E ⇒ CONDUTTIVITÀ (TENSORE)

$$J_e(\underline{x}\omega) = \int d_3\underline{x}'\,dt'\,\sigma_{em}(\underline{x}\,\underline{x}'\omega)\,E_m(\underline{x}'\omega) \longrightarrow$$ LEGGE DI OHM

(NO INVARIANZA × TRA)

$$\sigma_{em}(\underline{x}\,\underline{x}'\omega) = \frac{e^2}{2m\omega}\,n(\underline{x})\,\delta_{em}\,\delta_3(\underline{x}-\underline{x}') + \frac{e^2}{\hbar i\omega}\,D^{RET}_{em}(\underline{x}\,\underline{x}'\omega)$$

→ IMPONGO ANCHE INVAR × TRASLAZ

$$J_e(\underline{k}\omega) = \sigma_{em}(\underline{k}\omega)\,E_m(\underline{k}\omega)$$

→ CALCOLARE D^R_{em} × LEGGE DI OHM ESATTI

→ MODELLO IN CUI e^- SI MUOVONO TRA CENTRI DI SCATTERING (BOSONI) ⇒ DISSIPAZ

SE MANDO $\omega \to 0$ (CORRENTE COST) ⇒ DEVO CANCELLARE SINGOLARITÀ IN σ_{em}

→ IL MODELLO DI SCATTERING FUNZIONA

LEGAME $D = \varepsilon E$

$$H_t = H - e\int d_3\underline{x}\,\hat{n}(\underline{x})\int d_3\underline{x}'\,\frac{\rho_{EXT}(\underline{x}'t')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$ ↗ INTERAZ DENSITÀ e^- INTERNA - EXT

TEOREMA RISP LIN

$$\delta n(\underline{x}t) = \frac{1}{\hbar}\int d_3\underline{x}'\,dt'\,D^{RET}(\underline{x}t\,\underline{x}'t')\,(-e)\underbrace{\int d_3\underline{x}''\,\frac{\rho_{EXT}(\underline{x}''t')}{|\underline{x}'-\underline{x}''|}}_{\varphi(\underline{x}'t')}$$

↑ VARIAZ DENSITÀ DA CAMPO INDOTTA

↑ CORRELATORE RITARDATO DENSITÀ - DENSITÀ

$$\rho_{IND}(\underline{x}t) = \frac{1}{\hbar}\int d_3\underline{x}'\,dt'\,D^{RET}(\underline{x}t,\underline{x}'t')\int d_3\underline{x}''\,dt''\,\frac{e^2}{|\underline{x}'-\underline{x}''|}\,\delta(t'-t'')\,\rho_{EXT}(\underline{x}''t'')$$

$$\rho_{ind}(x) = \int d_4x' \, \Pi^R(x x') \int d_4x'' \, U^0(x' x'') \, \rho_{ext}(x'')$$

→ EQ MAXWELL $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi(\rho_{ext} + \rho_{ind})$

SE SIST (⇒ INVAR TEMP-SPAZ) → ESPR + SEMPLICE

$$i\underline{k} \cdot \underline{E}(\underline{k}\omega) = 4\pi \left[1 + \Pi^R(\underline{k}\omega) U^0(\underline{k})\right] \rho_{ext}(\underline{k}\omega)$$

$$\Pi^R = \frac{\Pi^{*R}}{1 - U^0(\underline{k})\Pi^{*R}}$$ X EQ DYSON SU FUNZ RETARDATE

$$\Rightarrow i\underline{k} \cdot \underline{E} = 4\pi \frac{\rho_{ext}(\underline{k}\omega)}{\varepsilon^R(\underline{k}\omega)}$$ ⇒ FUNZ DIELETTRICA

SE MOSTRO A SIST CON $i\underline{k} \cdot \underline{D} = 4\pi \rho_{ext}$ ⇒ HO INFO SU COMP ∥ $\underline{k}$

→ SUPPONENDO ISOTROPIA ⇒ $\vec{D} \parallel \underline{k} \Rightarrow D = \varepsilon^R E$

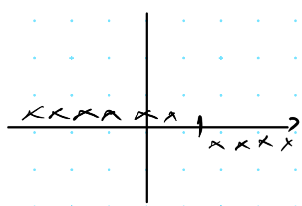
ε CALCOLABILE SOLO CON Π^0 XKÉ $\nexists$ MOLTA NOTA ANALITICA

<u>QUASI-PARTICELLE</u>

SVILUPPO LEHMANN DEL PROPAGATORE

$$G_{\mu\mu'}(\underline{x}\,\underline{x}'\,\omega) = \sum_n \frac{\langle E_0^N | \psi_\mu(\underline{x}) | E_n^{N+1} \rangle \langle E_n^{N+1} | \psi^\dagger_{\mu'}(\underline{x}') | E_0^N \rangle}{\omega - \frac{1}{\hbar}(\mu + \varepsilon_n^{N+1}) + i\eta}$$

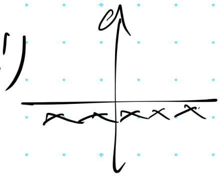
$$+ \frac{\langle E_0^N | \psi^\dagger_{\mu'}(\underline{x}') | E_n^{N-1} \rangle \langle E_n^{N-1} | \psi_\mu(\underline{x}) | E_0^N \rangle}{\omega - \frac{1}{\hbar}(\mu - \varepsilon_n^{N-1}) - i\eta}$$



NON LA VEDIAMO MA LA ACCENNIAMO

$$G^{RET}_{\mu\mu'}(x x') = \langle E_0^N | \{\varphi_\mu(x), \varphi^\dagger_{\mu'}(x')\} | E_0^N \rangle \, \theta(t-t')$$

HA POLI TUTTI SOTTO



SE MANDO $\omega \to \pm\infty$

$$G = \frac{1}{\omega} \sum_n \langle \,|\underbrace{|\,\rangle\langle\,|}_{1}|\,\rangle + \langle\,|\underbrace{|\,\rangle\langle\,|}_{1}|\,\rangle + \text{CORREZIONI}$$

$$= \frac{1}{\omega} \langle E_0^N | \{\varphi_\mu(\underline{x}), \varphi^\dagger_{\mu'}(\underline{x}')\} | E_0^N \rangle = \frac{1}{\omega} \delta_{\mu\mu'} \delta_3(\underline{x} - \underline{x}')$$

NELLE RISPOSTE DI UNA SONDA [illegible]

→ CONSIDERO INVAR x TRASLAZ E INDIP DA SPIN

$$G_{\mu\mu'}(\underline{k}\omega) = \delta_{\mu\mu'} G(\underline{k}\omega) \Rightarrow G(\underline{k}\omega) = \int d\omega' \frac{A(\underline{k}\omega')}{\omega - \omega' + i\eta \, \mathrm{sgn}\left(\omega - \frac{\mu}{\hbar}\right)}$$

$$\begin{cases} A(\underline{k}\omega) \geq 0 \\ \int_{\pm\infty} d\omega \, A(\underline{k}\omega) = 1 \end{cases} \rightarrow$$

SEMBRA SOVRAPP CON UNA MIS DI PROB DI 1/PROPAGATORE PARTIC LIBERA

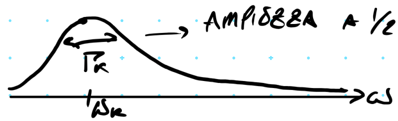
CASO ELEMENTARE: PARTICELLA LIBERA (INVAR x TRASLAZ)

$$A^0(\underline{k}\omega) = \delta\left(\omega - \frac{\varepsilon_0(k)}{\hbar}\right)$$

→ δ CENTRATA SU LEGGE DI DISPERSIONE x FREE PARTICLE ⇒ PROPAGAZIONE LIBERA

SE HO INTERAZ ⇒ LA δ SI ALLARGA → APPROX LORENTZIANA

$$A(\underline{k}\omega) = \frac{\Gamma_k}{\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_k)^2 + \Gamma_k^2}$$



→ AMPIEZZA A 1/2 ALTEZZA

$$A \xrightarrow[\Gamma_k \to 0]{} A^0$$

$$G(\underline{k}\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_k + i\Gamma_k \,\mathrm{sgn}\left(\omega - \frac{\mu}{\hbar}\right)}$$

$n(\underline{k})$ = # OCCUPAZ STATO K $\to$ CALCOLABILE CON ARCTG

APPROX DIFETTOSA: VERO CASO È CHE HA MOMENTI FINITI

MENTRE QUI DECADIMENTO TROPPO LENTO X ANNULLARLI

$$G(\underline{k}\omega) = \underbrace{\fint_{\pm\infty} d\omega' \, \frac{A(\underline{k}\omega')}{\omega - \omega'}}_{\mathrm{Re}} \underbrace{- i\pi A(\underline{k}\omega)\,\mathrm{sgn}\left(\omega - \frac{\mu}{\hbar}\right)}_{\mathrm{Im}}$$

$\mathrm{Im}\, G$ CAMBIA SGN IN POT CHIMICO $\quad \mathrm{Im}\, G < 0$ SE $\omega > \mu/\hbar$

$> 0 \quad \omega < \mu/\hbar$

$\Rightarrow$ IN $\frac{\mu}{\hbar}$ $\mathrm{Im}\, G = 0$

HO SCRITTO LA LORENTZIANA E LA FUNZ DI GREEN

$$G^{lor}(\underline{k}\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_k + i\Gamma_k \,\mathrm{sgn}\left(\omega - \frac{\mu}{\hbar}\right)} \to 1 \text{ POLO}$$

COME QUANDO FACCIO TRASF FOURIER: 2 ONDE PIANE

E 1 FUNZ COME ESSE

$\to$ TRASF DI HILBERT

Z ALTRA MAPPA DELLA FUNZ DI GREEN

$$G(k\omega) = \frac{1}{\omega - \frac{\varepsilon_0^k}{\hbar} - \Sigma^*(\underline{k}\omega)}$$ SOL EQ DYSON IN SP $\underline{k}$

ESPANDO $\times$ ω IN R Re E Im

$$= \frac{1}{\left(\omega - \frac{\varepsilon_0^k}{\hbar} - \mathrm{Re}\,\Sigma^*\right) - i\,\mathrm{Im}\,\Sigma^*}$$

$$\mathrm{Im}\,G(\underline{k}\omega) = \frac{\mathrm{Im}\,\Sigma^*(\underline{k}\omega)}{\left[\omega - \frac{\varepsilon_0^k}{\hbar} - \mathrm{Re}\,\Sigma^*\right]^2 + \mathrm{Im}\,\Sigma^{*2}}$$

$\rightarrow$ SI ANNULLA IN $\omega = \frac{\mu}{\hbar}$ $\forall \underline{k}$ $\Rightarrow$ DENOMINATORE PURAM REALE

IN SP $\underline{k}$ DEF SUP DI FERMI

$\underline{k}$ TC $$\frac{\mu}{\hbar} - \frac{\varepsilon_0(\underline{k})}{\hbar} - \Sigma^*\left(\underline{k}\,\frac{\mu}{\hbar}\right) = 0$$

$\hookrightarrow$ REALE XKÉ $\mathrm{Im}\,\Sigma^*\left(\underline{k}\,\frac{\mu}{\hbar}\right) = 0$

TEOR [LUTTINGER-WARD] (1960)

IL VOLUME RACCHIUSO DA SUP DI FERMI È = ALLA DENSITÀ (x DIVISE DI SPIN IN QUESTO CASO 1/2)

CURIOSITÀ

PARTENDO DA GAS e^- IDEALE E ACCENDENDO COULOMB
LA SUP DI HEG È SF FERMI (INTERAZ NULLA)

$\frac{4}{3}\pi K_F^2 \longrightarrow$ RIMANE INVAR ACCENDENDO INTERAZ

IL SIST RIMANE ISOTROPO

$\exists$ INTERAZ CHE INVECE LA DEFORMANO