QUANTISTICA

$\underline{F} = m\underline{a}$ ⟶ m SCALARE ⇒ INVARIANZA PER:
- ROTAZ
- TRASLAZ
- MRU

$$\Big\downarrow$$

$$\begin{cases} m\dot{\underline{q}} = \underline{p} \\ \dot{\underline{p}} = -\underline{\nabla} V(\underline{q}) \end{cases}$$

$\underline{q}, \underline{p}$ DESCRIVONO IL MOTO ⟶ DEF SP DELLE FASI Γ

OSSERVABILI

$f = f(q,p)$ OSSERVABILE $= f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\longrightarrow \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{q}}\dot{\underline{q}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{p}}\dot{\underline{p}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{q}}\frac{\underline{p}}{m} - \frac{\partial f}{\partial \underline{p}}\frac{\partial V}{\partial \underline{q}}$$

$H(\underline{q},\underline{p}) = \frac{1}{2m}p^2 + V(\underline{q})$ HAMILTONIANA

$$\boxed{\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{q}}\frac{\partial H}{\partial \underline{p}} - \frac{\partial f}{\partial \underline{p}}\frac{\partial H}{\partial \underline{q}} = \{f, H\}}$$

CON $\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} = \sum \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{q}} = \{\underline{q}, H\} = \underline{p}/m \\ \dot{\underline{p}} = \{\underline{p}, H\} = \frac{\partial V}{\partial \underline{q}} \end{cases}$$ EQ. DI HAMILTON

PROP { }

*) $\{f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2\} = \alpha_1\{f, g_1\} + \alpha_2\{f, g_2\}$

**) $\{f, g\cdot h\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$

***) $\{f, \{g, h\}\} + \{g\{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ IDENTITÀ DI JACOBI

ALGEBRA DELLE OSSERVABILI

$f, g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \{f, g\}$ OSSERVABILE

L'INSIEME DELLE OSS È CHIUSO RISP $+, \cdot, \{\ \}$

$\Rightarrow$ FORMA UN'ALGEBRA

COST DEL MOTO

$0 = \dot{f} = \{f, H\}$ DEF COST DEL MOTO

SE f, g COST DEL MOTO $\Rightarrow$ ANCHE $\{f, g\}$ x IDENTITÀ DI JACOBI

$\Rightarrow$ FORMANO UNA SOTTO ALGEBRA

VAR CONIUGATE

DALLA DEF DI $\{\cdot, \cdot\}$

- $\{q_i, q_j\} = 0$
- $\{p_i, p_j\} = 0$
- $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

PARENTESI DI POISSON CANONICHE
q_i, p_j VAR CONIUG

$\{\ \}$ È COMPOSIZIONE OSS

$$f(g(q,p)) \longrightarrow \{f(g), h\} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial g}\{g, h\}$$

ANALOGA $\{f(g), h(l)\} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial h}{\partial l}\{g, l\}$

CAMBIO DI VAR CANONICHE

$f[\underline{Q}, \underline{P}], h[\underline{Q}, \underline{P}]$ CON $\underline{Q} = \underline{Q}[\underline{q}, \underline{p}]$ E $\underline{P} = \underline{P}(\underline{q}, \underline{p})$

$$\Rightarrow \{f[\underline{Q}, \underline{P}], h[\underline{Q}, \underline{P}]\} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial h}{\partial Q_j}\{Q_i, Q_j\} + \frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial h}{\partial P_j}\{Q_i, P_j\} + \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial h}{\partial Q_j}\{P_i, Q_j\}$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial h}{\partial P_j}\{P_i, P_j\}$$

SE Q_i, P_j CONIUGATE, CIOÈ $\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0$ $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$

$$\Rightarrow \{f[\underline{Q},\underline{P}], h[\underline{Q},\underline{P}]\} = \frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial h}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial h}{\partial Q_i} = \{f, h\}_{Q,P}$$

CIOÈ SE Q, P CANONICHE

$$\{f, h\}_{qp} = \{f, h\}_{QP}$$ IN PARTIC L'EQ. DEL MOTO NON CAMBIA FORMA SE CAMBIO LE VAR CANONICHE

$$\Rightarrow \dot{f} = \{f, H\}_{q,p} = \{f, H\}_{Q,P}$$ INVARIANZA DELL'EQ DEL MOTO X VAR CAN (CIOÈ TRASLAZ CANONICHE)

<u>ESEMPIO: PART LIBERA $d=1$</u>

$$H = p^2/2m \qquad \begin{cases} \dot{q}(t) = p(t)/m \\ \dot{p}(t) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} q(t) = q_0 + p_0/m\, t \\ p(t) = p_0 \end{cases}$$

SE PRENDO CONDIZ INIZIALI $(q_0, p_0) \in \Gamma$

*) $\{q(t), p(t)\}_{q_0 p_0} = \{q_0 + p_0/m\, t, p_0\} = \{q_0, p_0\} + \frac{t}{m}\cancel{\{p_0, p_0\}}^{0} = 1$

$\Rightarrow q(t), p(t)$ VAR CANONICHE

$\Rightarrow$ POSSO PARAMETRIZ IL MOTO PRENDENDO q E p A QUALSIASI t

*) POSSO USARE LE EQ. DEL MOTO A INVERTIRE RELAZ TRA q E t

$$t = \frac{m}{p_0}(q - q_0)$$

$$\{t, H\}_{q,p} = \left\{\frac{m}{p_0}(q - q_0), p^2/2m\right\} = \frac{1}{2p_0}\{q, p^2\} = \frac{2\overset{\text{COST}}{p}}{2p_0} = 1$$

$\Rightarrow$ ANCHE t E H CANONICHE

$\Rightarrow$ POSSO USARE $(t(q), H)$ X DESCRIV IL MOTO

EVOLUZ TEMP & VAR CANONICHE

→ EVOLUZ TEMP MANTIENE VAR CANONICHE? DATO X UN TEMPO ∞ESIMO

$$q_i(t+\varepsilon) = q_i(t) + \varepsilon \dot{q}_i(t) + o(\varepsilon^2) = q_i + \varepsilon \{q_i, H\} + o(\varepsilon^2)$$
$$= q_i + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p_i} + o(\varepsilon^2)$$

$$p_i(t+\varepsilon) = p_i(t) + \varepsilon \dot{p}_i(t) + o(\varepsilon^2) = p_i + \varepsilon \dot{p}_i + o(\varepsilon^2)$$
$$= p_i - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial q_i} + o(\varepsilon^2)$$

SONO CANONICHE?

- $$\{q_i(t+\varepsilon), p_k(t+\varepsilon)\} = \frac{\partial q_i(t+\varepsilon)}{\partial q_j} \frac{\partial p_k(t+\varepsilon)}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i(t+\varepsilon)}{\partial p_j} \frac{\partial p_k(t+\varepsilon)}{\partial q_j}$$
$$= \left(\delta_{ij} + \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i}\right)\left(\delta_{kj} - \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_j}\right) + \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}$$
$$= \delta_{ik} + \cancel{\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_i}} - \cancel{\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_i}} + o(\varepsilon^2) \quad ✓$$

- $$\{q_i(t+\varepsilon), q_k(t+\varepsilon)\} = \left(\delta_{ij} + \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i}\right) \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} - (i \leftrightarrow k) = 0 \quad ✓$$

- DOVE $\{p_i(t+\varepsilon), p_k(t+\varepsilon)\} = 0 + o(\varepsilon^2)$

⇒ $\underline{q}(t+\varepsilon), \underline{p}(t+\varepsilon)$ CANONICHE RISP $\underline{q}(t), \underline{p}(t)$

⇒ EVOLUZ TEMP = TRASF CANONICA CIOÈ MANTIENE CANONICHE LE VAR

GENERATORI

$$q(t+\varepsilon) = q + \varepsilon \{q, H\}$$
$$p(t+\varepsilon) = p + \varepsilon \{p, H\}$$
→ L'HAMILTONIANA GENERA L'EVOLUZ TEMPORALE

NUOVE VAR: $Q_i = q_i + \varepsilon \{q_i, G\}$ $\quad \delta q_i = \varepsilon \{q_i, G\}$

$P_i = p_i + \varepsilon \{p_i, G\}$ $\quad$ TRASF ∞ESIME → VARIAZ: $\delta p_i = \varepsilon \{p_i, G\}$

G GENERA QUESTA TRASF ∞ESIMA

TRASLAZ

$$\begin{cases} Q_i = q_i + \varepsilon n_i \\ P_i = p_i \end{cases}$$

$\hat{\underline{n}}$ VERSORE SPOSTAM

ABBIAMO VISTO CHE LE LEGGI DINAMICHE SONO INVAR X TRASLAZ

$$\longrightarrow \quad n_i = \{q_i, G\} = \frac{\partial G}{\partial p_i} \longrightarrow G \text{ LIN A } p_i \text{ CON COEFF } n_i$$

$$0 = \{p_i, G\} = -\frac{\partial G}{\partial q_i} \longrightarrow G \neq G(q_i)$$

$$\Rightarrow G = n_i p_i = \hat{\underline{n}} \cdot \underline{p}$$

IMPULSO GEN TRASLAZ

ROTAZ

ATTORNO A Z:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

X ROTAZ INFINIT ($\theta \to \varepsilon$)

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} X = x - \varepsilon y \\ Y = \varepsilon x + y \\ Z = z \end{cases}$$

$$-y = \{x, G\} = \frac{\partial G}{\partial p_x}$$

$$x = \{y, G\} = \frac{\partial G}{\partial p_y} \quad \Rightarrow \quad G = x p_y - y p_x = L_z = \underline{L} \cdot \hat{\underline{n}}$$

$$0 = \{z, G\} = \frac{\partial G}{\partial p_z}$$

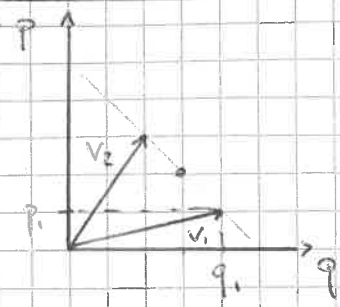
MOMENTO ANG GEN ROTAZ

INVARIANZA RISP TRASF CANONICHE

F, G OSS TC $\{F, G\} = 0$ SIGNIFICA

- F INVARIANTE X TRASF CANONICHE GEN DA G
- G " " " " " " F

PRBL SOVRAPPOSIZ IN MEC CLASSICA



ASSEGNATO UN PTO IN Γ IL SIST È DETERMINATO COMPLETAMENTE

ESSENDO Γ LO SP LIN $\mathbb{R}^2$ POSSO FARE CL DI VETTORI $\longrightarrow$ X ES $\frac{1}{2}\underline{V_1} + \frac{1}{2}\underline{V_2}$ PTO MEDIO

QUESTO DESCRIVE UN SIST CON PTO NOTO $\left(\frac{1}{2}(q_1+q_2), \frac{1}{2}(p_1+p_2)\right)$

MA OLTRE CHE INVARIANZE LEGATE ALLE LEGGI VOTT (SPOSTANDO IL PTO TRASLO E RUOTO IN TRU IL SIST DI RIF) IO RICERCO INVARIANZA X TRASF CANONICHE

CIOÈ SE APPLICO UNA TRASF CANONICA, DEFORMANDO COSÌ L'ASPETTO DELLO SP, IL PTO MEDIO RAPPR ANCORA LO STESSO SIST?

NO

$\Rightarrow$ NOZIONE INUTILE

SIST FISICI E DISTRIB DI PROBAB

$\mathcal{Q} = \{f : \Gamma \to \mathbb{R}\}$ SP VETT SU $\mathbb{R}$

SI PUÒ DEF LO SP DUALE $\mathcal{Q}^* = \{\phi : \mathcal{Q} \to \mathbb{R} \mid \phi \text{ LIN}\}$ SP LIN

DEF UN PROD SCALARE SULLO SP LIN POSSO IDENTIFICARE GLI ELETT DELLO SP DUALE CON QUELLI DELLO SP DI PARTENZA

$\phi[f] = \int f(q,p)\, d\mu(q,p)$ POSSIAMO IMMAGINARE CHE SCELTO ϕ CI SIA UNA DENSITÀ $\phi(q,p)$ RISP ALLA MISURA DI LEBESGUE

$$= \int f(q,p)\, \phi(q,p)\, d\Gamma = \langle \phi, f \rangle$$

QUANDO SONO IN SP VETT FINITO-DIM LI IMMAGINO COME VETT

X DEF UNO STATO FISICO PRENDEREMO I FUNZIONALI CHE ASSOCIANO A UNA FUNZ COST IL VALORE DELLA COST

QUINDI DEL TIPO $\phi : \mathbb{1} \to 1$ = CIOÈ $\phi[\mathbb{1}] = \int \phi(q,p)\, d\Gamma = 1$

$\to$ DENSITÀ NORMALIZZATA

CI RISTRENGEREMO ULTERIOR A FUNZIONALI NORMALIZZATI POS

$$\mathcal{Q}^*_+ = \{\phi : \mathcal{Q} \to \mathbb{R} \mid \phi[f] \geq 0 \ \forall f \in \phi \text{ LIN}\}$$

UNA QUANTITÀ COSÌ FATTA È UNA MISURA DI PROBAB

SOVRAPP DI FUNZIONALI

LAVORANDO IN Q_+^* NON AMMETTIAMO LA + GEN CL X RISP LE CONDIZ DI POSITIVITÀ E NORMALIZZAZIONE

$\Rightarrow$ DATI ϕ_1 E $\phi_2 \in Q_+^*$ $\quad \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \in Q_+^*$ CON $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow$ $\alpha, \beta \geq 0$ (POSITIVITÀ) E $\alpha + \beta = 1$

+ IN GEN SONO AMMESSE $\sum_i t_i \phi_i$ CON $t_i \geq 0$ E $\sum_i t_i = 1$

$\longrightarrow$ COMB. CONVESSE

$\Rightarrow$ LO SP DELLE DISTRIB DI PROBAB È CONVESSO

SP CONVESSI

Ω CONVESSO SE $\forall\, \underline{a}, \underline{b} \in \Omega$ TUTTE LE COMB CONV DI a, b $\in \Omega$
LIN

(CIOÈ $[\underline{a}, \underline{b}] \subseteq \Omega$)

- TUTTI I PTI DI UN INS CONV SONO CONVESSAMENTE GEN DAI PTI DEL BORDO
- TUTTI I PTI DEL BORDO SONO CONV GEN DAI VERTICI

CI SONO 2 POSSIBILI TIPI DI INSIEMI CONV

1) $\exists!$ RAPPR PER UN PTO INTERNO RISP AI VERTICI COME COMB CONV (TRIANGOLO)

$\Rightarrow$ L'INSIEME È UN SIMPLESSO

VERTICI $\equiv$ PTI NON SCRIVIBILI COME COMB CONV DI ALTRI PTI DELL'INSIEME

$\equiv$ ESTREMALI

2) $\exists$ PIÙ POSSIBILI RAPPR RISP AI VERTICI $\forall$ PTO INTERNO (QUADRATO)

$\Rightarrow$ L'INSIEME È UN COMPLESSO

FUNZIONALI ESTREMALI

Q^*_+ NON É UNO SP DI FUNZIONI MA DI DISTRIBUZ

I SUOI PTI ESTREMALI SI INDICANO CON $\delta_{q_0 p_0}$ DELTA DI DIRAC

$$\begin{cases} \delta_{q_0 p_0}(q,p) = 0 & \text{SE } q \neq q_0 \wedge p \neq p_0 \\ \int \delta_{q_0 p_0}(q,p)\, d\Gamma = 1 & \text{MATEMATICAMENTE NON SENSO} \end{cases}$$

OSS I

LA δ DI DIRAC RAPPR LA CERTEZZA DI ASSOCIARE A UN'OSS IL VALORE CHE QUESTA ASSUME IN UN PTO (q_0, p_0)

$$\int f(q,p)\, \delta_{q_0 p_0}(q,p)\, d\Gamma = f(q_0, p_0)$$

OSS II: SOVRAPPOSIZIONE

$$\phi_{V_1} = \delta_{q_1 p_1} \qquad \phi_{V_2} = \delta_{q_2 p_2} \longrightarrow \frac{1}{2}\phi_{V_1} + \frac{1}{2}\phi_{V_2}$$

RAPPR LA PROBAB DI TROVARE LE MISURE IN $V_1 = (q_1, p_1)$ O $V_2 = (q_2, p_2)$ NELLO STATO

$\rightarrow$ HO 1/2 DI TROVARE IL VALORE CHE STA IN V_1 E 1/2 QUELLO CHE STA IN V_2

$\Rightarrow$ LA SOVRAP LIN DA UNA DESCRIZ PROBABILISTICA

VALOR MEDIO

$$\phi[f] = \int f(q,p)\, \phi(q,p)\, d\Gamma$$

GUARDANDOLA COME INTEGRALE UN FUNZIONALE ASSOCIA A f UN SUO VAL MEDIO IN UNA CERTA DISTRIB DI PROBAB

$$\rightarrow \phi[f] = \bar{f}$$

INCERTEZZA

IN UNA DISTRIB ESTREMALE NON C'È INCERTEZZA SUCCHI È IL VAL MEDIO

$$\bar{f} = \int f(q,p)\, \delta_{q_0 p_0}(q,p)\, d\Gamma = f(q_0,p_0)$$

C'È UN MODO OPERATIVO X CARATT GLI STATI ESTREMALI ?

IN GEN, POICHÉ ABBIAMO PRESO FUNZIONALI DEF POSITIVI, ACCADE CHE

$$\phi[f^2] \geq (\phi[f])^2$$

DIM

$\phi[(f-\bar{f})^2] \geq 0$ xKE ϕ DEF POS

$$\phi[f^2 - 2f\bar{f} + \bar{f}^2] \overset{\phi \text{ LIN}}{=} \phi[f^2] - 2\overbrace{\phi[f\bar{f}]}^{\geq 0} + \phi[\bar{f}^2] \rightarrow \bar{f} \text{ È UN NUM.}$$

$$= \phi[f^2] - 2\bar{f}\,\phi[f] + \bar{f}^2\phi[1] = \phi[f^2] - 2\bar{f}^2 + \bar{f}^2$$

$$= \underbrace{\phi[f^2] - (\phi[f])^2}_{\text{SCARTO QUADRATICO MEDIO}} \geq 0 \Rightarrow \text{DIM}$$

$\square$

QUANDO $\phi[f^2] = (\phi[f])^2$?

CIOÈ $\int d\Gamma\, \phi(q,p)\, [f(q,p) - \bar{f}]^2 = 0$

$\Rightarrow f(q,p) = \bar{f}$ DOVE $\phi(q,p) \neq 0$

SE LO RICHIEDO $\forall f \Rightarrow$ L'UNICA SOL È ϕ CONCENTRATO IN UN PTO

$\Rightarrow$ STIAMO QUANTIFICANDO L'INCERTEZZA DELLA MISURA GUARDANDO LO SCARTO QUADR MEDIO

$\rightarrow$ INCERTEZZA NULLA $\longleftrightarrow$ SAPERE CON SICUREZZA IL RISULTATO DELL'ESPERIMENTO

CIOÈ MISURA CONCENTRATA IN UN PTO : $\phi(q,p) = \delta_{q_0 p_0}(q,p)$

EVOLUZ TEMPORALE

$f \xrightarrow{\text{EQ. MOTO}} f_t$ POSSO DESCRIVERE LO STATO AL TEMPO t DICENDO CHE QUESTO È TC

$$\phi_t[f_t] = \phi[f]$$

CIOÈ POSSO DEF L'EVOLUZ TEMP DI UNO STATO COME CIÒ CHE COMPENSA IN MODO INV L'EVOLUZ DELL'OSS

$\Rightarrow$ LA DEF CHE HO DATO DI EVOLUZ TEMPORALE DELLO STATO PORTA ALLA REGOLA

$\dot{\phi} = \{\phi, H\}$ ANALOGA A QUELLA DI UN OSS

STATI DI EQUILIBRIO

$\dot{\phi} = 0 \iff \{\phi, H\} = 0$ CIOÈ ϕ È FUNZ DELLE COST DEL MOTO

IN UN SIST ISOLATO ABBIAMO $\underline{P}, \underline{L}$ E POSSIAMO SCEGLIERE UN SDR TC $\underline{P} = \underline{L} = \underline{0}$ (SIST A RIPOSO)

$\Rightarrow$ L'UNICA POSSIBILITÀ È $\phi = \phi(H)$

X ES: • $\phi = \delta(H - E)$ CIOÈ QUANDO LA MISURA È TUTTA UGUALM SPALMATA SULL'IPERSUPERFICIE IN CUI H HA VALORE E

$\rightarrow$ IN MECC STATISTICA SI CHIAMA SIST MICROCANONICO

• $\phi = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$ SIST CANONICO, DOVE $Z = \int e^{-\beta H} d\Gamma$

(XKÉ DEVE SODDISF $\int \phi \, d\Gamma = 1$

QUESTI SONO GLI STATI CHE DESCRIVONO I SIST DI EQ. IN MEC STATISTICA CLASSICA

ONDE IN MECC CLASSICA

RADIAZ em = SOVRAPP DI ONDE ⟹ POSSIAMO CONSIDERARE SOLO ONDE MONOCROMATICHE

SUPP DI AVERE UN'ONDA em CHE SI PROPAGHI IN DIREZ z

⟹ I CAMPI $\bar{E}$ E $\bar{B}$ OSCILLANO IN x-y

x ES
$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_1) \\ E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi_2) \\ E_z = 0 \end{cases} \qquad \underline{E} \perp \underline{B} \perp z$$

NON È NECESSARIO DESCRIVERE ANCHE $\underline{B}$

$$\begin{cases} E_{0x} = E_0 \cos\theta \\ E_{0y} = E_0 \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = E_0 \cos\theta \, \frac{1}{2} \left[e^{i(kz-\omega t)} e^{i\varphi_1} + cc \right] \\ E_y = E_0 \operatorname{sen}\theta \, \frac{1}{2} \left[e^{i(kz-\omega t)} e^{i\varphi_2} + cc \right] \\ E_z = 0 \end{cases}$$

→ COMPLEX CONIUG

$$\rightarrow \underline{E}(z,t) = \frac{1}{2} E_0 \left[\left(\cos\theta \, e^{i\varphi_1} \hat{\underline{e}}_1 + \operatorname{sen}\theta \, e^{i\varphi_2} \hat{\underline{e}}_2 \right) e^{i(kz-\omega t)} + cc \right]$$

E_0 INTENSITÀ DEL CAMPO ($\propto$ # DI FOTONI)

IL SINGOLO FOTONE È DESCRITTO DA

$$\left(\cos\theta \, e^{i\varphi_1} \hat{\underline{e}}_1 + \operatorname{sen}\theta \, e^{i\varphi_2} \hat{\underline{e}}_2 \right) e^{i(kz-\omega t)}$$

IL COMPLEX CONIUG NON AGGIUNGE INFO

DA QUESTO VETT ~~[illegible]~~ POSSO RICAVARE LA FASE

$$\left(\cos\theta \, \hat{\underline{e}}_1 + \operatorname{sen}\theta \, e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \hat{\underline{e}}_2 \right) e^{i\varphi_1} e^{i(kz-\omega t)}$$

OVVIAMENTE φ_1 DIPENDE DALLA SCELTA DELL'ORIGINE NELLO SP-TEMPO

⟹ NON DA INFO FISICA

CIÒ CHE FORNISCE LE INFO ESSENZIALI, FISSATE LA DIR E LA FREQ, È:

$$\underline{e}_{\theta\varphi} = \cos\theta\, \hat{\underline{e}}_1 + \sin\theta\, e^{i\varphi}\, \hat{\underline{e}}_2 \qquad \text{VETT DI POLARIZ}$$

$\Rightarrow$ IL NOSTRO FOTONE È CARATT DA $(\underline{k}, \theta, \varphi)$

QUESTA TERNA DET COMPLETAM IL FOTONE MA CI SONO DEI CASI PARTIC

- $\varphi = 0 \iff$ POLARIZ RETTILINEA

  $\underline{E}$ OSCILLA LUNGO x E y E HA θ RISP A x

  SE $\theta = 0 \to$ POL RETT LUNGO x
  $\theta = \pi/2 \to$ " " " y

- $e_{\theta\varphi} = e_{\sigma_\pm} = \dfrac{\hat{e}_1 \pm i\, \hat{e}_2}{\sqrt{2}}$ POL CIRCOLARI DX E SX

IN GEN $e_{\theta\varphi}$ VIVE SU UNO SP VETT SUL CAMPO $\mathbb{C}$ DI DIM 2

$$\to e_{\theta\varphi} = \alpha\, \hat{\underline{e}}_1 + \beta\, \hat{\underline{e}}_2 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

A CIASCUN VETT CORRISP UNO STATO DI POLARIZ MA L'INVERSO NON È VERO

2 VETT CHE DIFFERISCONO X LA MOLTIC DI UN FATTORE COMUNE DEF LA STESSA POLARIZ

CIOÈ GLI STATI DI POLARIZ NON SONO IN CORRISP BIUNIVOCA CON I VETT, BENSÌ CON I RAGGI DI QUESTO SP

MECCANICA QUANTISTICA

STATI

RAPPR GLI STATI COME VETT DI UNO SP LIN SU $\mathbb{C}$

VETT PROP L'UNO ALL'ALTRO RAPPR LO STESSO STATO

→ GLI STATI SONO IN CORRISP BIUNIVOCA CON I RAGGI DI UNO SP LIN $\mathcal{H}$ SU CAMPO $\mathbb{C}$

$\mathcal{H}$ È DOTATO DI UN PROD SCALARE DEF: $u, v \in \mathcal{H}$ $(u,v) = \langle u | v \rangle$
NOTAZ DI DIRAC

$\langle u |$ BRA $\quad | v \rangle$ KET

ESSENDO SU $\mathbb{C}$ NON C'È UN $\times$ ENTRAMBI I LATI

→ È LIN PER $|v\rangle$ ANTILIN IN $\langle u|$

INFATTI SU $\mathbb{C}$ $\langle u|v\rangle \neq \langle v|u\rangle$ MA $\langle u|v\rangle = \langle v,u\rangle^*$

$\alpha |v\rangle \longrightarrow \alpha^* \langle v|$

DEF $\mathcal{H}$ COME ∞-DIM

UNO SP ∞ DIM DOTATO DI PROD SCAL, SE COMPLETO, È DETTO DI HILBERT

CHIEDIAMO INOLTRE CHE SIA SEPARABILE, CIOÈ AMMETTA UNA BASE NUMERABILE (CARDIN $|\mathbb{N}|$)

PRENDIAMO I RAGGI X RÉ SU CAMPO $\mathbb{C}$ I VETT DANNO PROB

SI POTREBBE PENSARE CHE RESTRINGENDOSI ALLA SFERA UNIT SI ABBIA CORRISP BIUNIVOCA STATO-VETT, MA ESSENDO SU $\mathbb{C}$:

$|W\rangle = e^{i\phi} |V\rangle \qquad \langle V|V\rangle = e^{-i\phi} e^{i\phi} \langle W|W\rangle$

⇒ NON SI HA CORRISP 1 A 1

OSSERVABILI

IMMAGINIAMO UN'OSS COME UNO STRUMENTO DI MISURA

→ AVRÀ UNA SERIE DI RISULTATI DISCRETI POSSIBILI

ξ OSS → $\xi_1, \xi_2, \dots \in \mathbb{R}$ = AUTOVALORI DELL'OSS

(IL FATTO CHE SIANO DISCRETI E NUMERABILI DISCENDERÀ DALLA SEPARABILITÀ DI $\mathcal{H}$)

IN GEN SE ESEGUIAMO UNA MISURA DI ξ SU UN SIST NELLO STATO RAPPR DA $|A\rangle \in \mathcal{H}$ IL RISULTATO DELLA MISURA NON È DET A PRIORI

CIÒ CHE È DET È SOLO LA PROBAB DI OSSERVARE L'AUTOVAL ξ_i

SE EFFETTUO LA MISURA DI ξ E TROVO L'AUTOVAL ξ_i
RIPETENDO SUBITO LA MISURA RITROVERÒ ξ_i
(SUBITO = PRIMA CHE ACCADANO ALTRI EVENTI)

QUINDI $|A\rangle \xrightarrow{\xi} |\xi_i\rangle$ AUTOSTATO IN CUI MISURANDO TROVO SEMPRE ξ_i

→ LO STATO È CAMBIATO

⇒ LA MISURA PERTURBA LO STATO DEL SIST

ABBIAMO QUINDI COME RISULTATO DELLA MISURA:

UN AUTOVAL ξ_i E UN AUTOSTATO $|\xi_i\rangle$

SE ~~#~~ AUTOVAL ξ_i CORRISP UN SOLO AUTOSTATO $|\xi_i\rangle$

⇒ ξ_i È NON DEGENERE

SE $\forall i$ ξ_i NON DEGENERE ⇒ ξ OSS NON DEGENERE

SE ξ_i AUTOVAL È ASSOCIATO A + DI UN AUTOVETT ⇒ È DETTO DEGENERE

SE $\exists\, \xi_i$ DEGENERE ⇒ ξ OSS DEGENERE

ES CRISTALLO BIRIFRANGENTE

$|e_{\theta\varphi}\rangle = \cos\theta\, |e_1\rangle + \operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi} |e_2\rangle$ POLARIZ FOTONI INCIDENTI

DOPO LA MISURA IL FOTONE SARÀ NEL RAGGIO O OPPURE S

$|e_{\theta\varphi}\rangle \to |e_1\rangle$, $|e_2\rangle$ MA LO STATO È DET ANCHE DA $\underline{k}$ ⇒ AVER FISSATO $e_{\theta\varphi}$ NON FISSA LO STATO

→ È UN OSS DEGENERE: DOVREMMO AFFIANCARE UN ALTRO APPARECCHIO CHE DET $\underline{k}$

PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE

LA PROBAB DI TRANSIZIONE $|A\rangle \to |B\rangle$ CON UNA MISURA NON DIPENDE DALL'OSSERV

$$P(|A\rangle \to |B\rangle) = \frac{|\langle B|A\rangle|^2}{\langle A|A\rangle \langle B|B\rangle}$$ (POSTULATO DELLA TEORIA)

VERIFICHIAMO CHE SIA COMPATIBILE CON LE NOSTRE RICHIESTE:

- SE UNO STATO È RAPPR DA $|A\rangle \Rightarrow$ È RAPPR ANCHE DA $\alpha|A\rangle$
  DISTINTI CON $|B\rangle$ E $\beta|B\rangle$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$P(\alpha|A\rangle \to \beta|B\rangle) = \frac{|\alpha|^2 |\beta|^2 |\langle B|A\rangle|^2}{|\alpha|^2 \langle A|A\rangle |\beta|^2 \langle B|B\rangle} = P(|A\rangle \to |B\rangle)$$

$\Rightarrow$ NON DIP DALLA SCELTA DEL VETT CHE RAPPR LO STATO

- SE P È UNA PROBAB $\in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$

$$P(|A\rangle \to |B\rangle) = \frac{|\langle B|A\rangle|^2}{\langle A|A\rangle \langle B|B\rangle} \geq 0$$ X RÈ NORMA QUADRA

X DISUG SCHWARTZ (VALIDA $\forall$ PROD SCAL)

$$|\langle B|A\rangle|^2 \leq \langle A|A\rangle \langle B|B\rangle \Rightarrow P(|A\rangle \to |B\rangle) \leq 1$$

$\square$

SE SCEGLIAMO VETT NORMALIZZATI $\Rightarrow P(|A\rangle \to |B\rangle) = |\langle B|A\rangle|^2$

$\mathcal{H}$ E BASI DI AUTOVETT: ξ NON DEGENERE

AUTOVAL: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots$

AUTOSTATI: $|\xi_1\rangle, |\xi_2\rangle, \dots, |\xi_k\rangle, \dots$

$$|A\rangle \xrightarrow{\xi} |\xi_i\rangle \xrightarrow{\xi} |\xi_i\rangle$$

IN UNO STATO $|A\rangle$ MISURO ξ E TROVO AUTOVAL ξ_i E AUTOSTATO $|\xi_i\rangle$
RIPETENDO LA MISURA ξ RITROVO ξ_i E $|\xi_i\rangle$

SUPP $|\xi_i\rangle$ NORMALIZ

$$\langle \xi_i | \xi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

CIOÈ HO LA CERTEZZA DI RITROVARE $|\xi_i\rangle$ CON LA MISURA

QUESTO VUOL DIRE CHE L'INSIEME DI AUTOVETT È ORTONORMALE

$\rightarrow$ È UNA BASE DI $\mathcal{H}$?

PER CHÉ LO SIA È NECESSARIO CHE SIA COMPLETO

SUPP CHE NON LO SIA $\Rightarrow \exists A$ ORTOG A TUTTI GLI $|\xi_i\rangle$

CIOÈ $\forall i \in \mathbb{N} \quad \langle \xi_i | A \rangle = 0$

$$\Rightarrow p_i = P(|A\rangle \rightarrow |\xi_i\rangle) = |\langle \xi_i | A \rangle|^2 = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

MA X DEF DI PROBABILITÀ $\sum_i p_i = 1$

SE COSÌ NON FOSSE PARTENDO DA $|A\rangle$ EO EFFETTUANDO LA MISURA NON OTTERREI NESSUNO DEI VALORI POSSIBILI

$\rightarrow$ OGNI AUTOVAL INFATTI CORRISPONDE A UN AUTOSTATO IN VAR NON DEG

$\Rightarrow$ ASSURDO $\Rightarrow \{|\xi_i\rangle\}$ COMPLETO

$\Rightarrow$ GLI AUTOVETT DI UN'OSS (NON DEG) FORMANO UNA BASE ORTONORM DI $\mathcal{H}$ (SP DEGLI STATI)

$\Rightarrow \forall |A\rangle \in \mathcal{H} \quad |A\rangle = \sum_i a_i |\xi_i\rangle$ CON $a_i \in \mathbb{C}$

SOMMATORIA ∞

CHI SONO GLI a_i?

$$\langle \xi_j | A \rangle = \sum_i a_i \langle \xi_j | \xi_i \rangle = \sum_i a_i \delta_{ij} = a_j$$

$$\longrightarrow a_j = \langle \xi_j | A \rangle$$

$$\Rightarrow |A\rangle = \sum |\xi_i\rangle\langle\xi_i|A\rangle = \left(\sum |\xi_i\rangle\langle\xi_i|\right)|A\rangle$$

$$\longrightarrow \boxed{\sum |\xi_i\rangle\langle\xi_i| = 1}$$ RELAZ DI COMPLETEZZA

$$\langle A|A\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} Q_i^* Q_j \langle\xi_i|\xi_j\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i|^2$$

ESSENDO UNA SOMMA DI ∞ NON SIAMO SICURI CHE IL RISULTATO SIA FINITO

SICCOME $\langle A|A\rangle$ DEVE $\exists$ FINITO $\Rightarrow$ DOBBIAMO RICHIEDERE $\sum |Q_i|^2 < \infty$

$\Rightarrow$ LA RAPPR DI $|A\rangle$ NELLA BASE $\{|\xi_i\rangle\}$ NON È ARBITRARIA

IN ALTRI TERMINI NEL NOSTRO SP DI HILBERT PRENDIAMO SOLO QUEI VETT RAPPRESENTABILI DA (INFINITE) COORD A QUADRATO SOMMABILE

D'ALTRA PT SE GLI Q_i RISP QUESTA COND AZ PERMETTONO DI NORMALIZZARE IL VETT $|A\rangle$

$$Q_i \longrightarrow \frac{Q_i}{\sqrt{\sum_j |Q_j|^2}} \quad \text{NUOVI COEFF} \qquad (*)$$

$\Rightarrow |Q_i|^2$ HA UN'INTERPRETAZ FISICA: LA PROBAB DI TRANSIZIONE P_i

Q_i INVECE NON HA INTERPRETAZ FISICA

LA DEF DI PROBAB DI TRANSIZIONE È INVARIANTE X RAPPR DIVERSE DELLO STESSO STATO FISICO, CIOÈ È INDIFF SE SCELGO $|A\rangle$ OPPURE $\alpha|A\rangle$

$(*)$: SIA $|A\rangle$ NORMALIZ

SE $|A\rangle = \sum^{\infty} Q_i |\xi_i\rangle$ CON $\sum |Q_i|^2 = 1$

$$P_i = P(|A\rangle \to |\xi_i\rangle) = |\langle\xi_i|A\rangle|^2 = |Q_i|^2$$

IO NON HO PIENO LA SCELTA DI α MA IMPOSTO CHE SIA NORMALIZ

ANCHE $e^{i\lambda}|A\rangle$ È NORMALIZ SE $|A\rangle$ NORMALIZ

$\Rightarrow |A\rangle$ NON È UNIVOCAMENTE COSÌ COME GLI $|\xi_i\rangle$

(POSSO SEMPRE SCEGLIERE UNA FASE $e^{i\lambda}$)

ES

$$|e_{\theta\varphi}\rangle = \cos\theta\, |e_1\rangle + \operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi} |e_2\rangle$$

$$\rightarrow \langle e_{\theta\varphi} | e_{\theta\varphi}\rangle = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

$$\rightarrow e^{i\lambda} \cos\theta\, |e_1\rangle + e^{i\lambda} \operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi} |e_2\rangle$$ DÀ LO STESSO STATO SO È NORMALIZ

$\Rightarrow$ UNA FASE OVVIAMENTE RAPPR LO STESSO STATO

$\Rightarrow Q_i \longrightarrow e^{i\lambda} Q_i$ RAPPR LO STESSO STATO

E LA PROBAB NON CAMBIA

IN REALTÀ POSSO SCEGLIERE IN MANIERA ARBITRARIA LE FASI DI CIASCUN VETT E AUTOVETT

INFATTI LA RICHIESTA $\langle \xi_j | \xi_i \rangle = \delta_{ij}$

È SODDISFATTA ANCHE SE $|\xi_j\rangle \longrightarrow e^{i\lambda_j} |\xi_j\rangle$

$$\Rightarrow Q_i \longrightarrow e^{-i\lambda_i} Q_i$$

SEMBREREBBE CHE IO NON POSSA VEDERE DET LA FASE RELATIVA

È COSÌ?

SE HO UN FASCIO DI FOTONI COME FACCIO A RENDERMI CONTO DELLO SFASAM TRA QUELLI POLARIZ LIN SU $|e_1\rangle$ E $|e_2\rangle$?

SE NON C'È $\Rightarrow$ C'È UN MAGG DI INTENSITÀ + ALTO DI QUELLO CHE AVEVO PREVISTO.

PERÒ LE PROBAB DI TRANSIZIONE TRA I SINGOLI AUTOSTATI NON RISENTONO DELLO SFASAMENTO

$\Rightarrow$ QUESTA DIFF DI FASE È FISICA?

SÌ, NON LA VEDIAMO A CAUSA DELLE CARATT DI QUESTO EXP:

STIAMO UTILIZZ UN PARTIC CRISTALLO BIRIFRANG CON UN PARTIC ASSE OTTICO IN MODO DA FORMARE θ CON LA POLARIZ

SE CONSIDERO LO STATO $\frac{|e_1\rangle + |e_2\rangle}{\sqrt{2}}$ (NORMALIZ)

$\Rightarrow$ POSSO FARE UN EXP TC HO $P\left(|A\rangle \longrightarrow \frac{|e_1\rangle + |e_2\rangle}{\sqrt{2}}\right)$

SE LA CALCOLIAMO SI VEDE CHE DIPENDE DALLO SFASAM φ

CIOÈ CI SONO TANTE OSS OLTRE A ξ, CI POSSIAMO ASPETTARE CHE

$\forall$ STATO / VETTORE IN $\mathcal{H}$ DEBBA $\exists$ UN'OSS DI CUI SIA AUTOSTATO

$\rightarrow$ SE FACCIO UNA MISURA DI QUELL'OSS AVRÒ UNA PROBAB DI TROVARLO COME STATO FINALE

MORALE:

GLI Q_i NON SONO UNIVOC DET DA ξ CIOÈ SCELTI GLI ELEM DELLA BASE DI $\mathcal{H}$

C'È ARBITRARIETÀ PER FASI OVERALL TC $\sum_i |Q_i|^2 < \infty$

SE NORMALIZZATI $|Q_i|^2$ HANNO INTERPRETAZ FISICA DIRETTA
XKÉ SONO LEGATI A $P(|A\rangle \rightarrow |\xi_i\rangle)$

LA DET DI FASI RELATIVE (CONSEGUENZA DELLA SCELTA ARBITRARIA DI ELEM DELLA BASE)
È + COMPLICATA E RICHIEDE L'UTILIZZO DI ALTRE OSSERVABILI

$\rightarrow$ GLI SFASAM RELATIVI IN LINEA DI PRINCIPIO SONO COMUNQUE OSS

$\mathcal{H}$ E BASI DI AUTOVETT: ξ DEGENERE

ξ DEGENERE $\Rightarrow \exists\, \xi_i$ DEGENERE $\Rightarrow \exists$ + AUTOSTATI CORRISP A ξ_i

SUPP ξ_1 DEGENERE

$\Rightarrow \exists\, |\xi_1'\rangle\ |\xi_1''\rangle$ DIVERSI E ORTOG TRA LORO

$\rightarrow \langle \xi_1' | \xi_1'' \rangle = 0$

ENTRAMBI CORRISP ALLO STESSO AUTOVAL ξ_1

VOGLIO DIM CHE SE $|A\rangle = \alpha |\xi_1'\rangle + \beta |\xi_1''\rangle$

$\Rightarrow |A\rangle$ È AUTOSTATO DI ξ CON AUTOVAL ξ_1

DIM (PA)

SUPP CI SIA $i \geq 2$ TC $p_i > 0$

$\Rightarrow 0 \neq \langle \xi_i | A \rangle = \alpha \langle \xi_i | \xi_1' \rangle + \beta \langle \xi_i | \xi_1'' \rangle$

MA $|\xi_i\rangle$ x DEF È AUTOSTATO DI ξ REL A ξ_i

$\Rightarrow |\xi_1'\rangle$ E $|\xi_1''\rangle$ $\perp$ A TUTTI GLI AUTOSTATI REL A ξ_i $i \geq 2$

$\Rightarrow$ ASSURDO $\square$

SE CI SONO 2 (O +) AUTOVETT DISTINTI (INDIP E $\perp$) CORRISP ALLO STESSO AUTOVAL

$\Rightarrow$ LO SP VETT CHE HA DIM ALMENO 2

DI VETT LI CORRISP ALL'AUTOVAL ξ_i = gr di DEGENERAZ di ξ_i

IN DIM FINITA QUESTO È SEMPRE < DELLA DIM DELLO SP TOT

" " ∞ " PUÒ ESSERE ∞

$\Rightarrow \exists$ AUTOSP REL A UN DET AUTOVAL

$\Rightarrow \mathcal{H} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ CON E_i AUTOSP REL A ξ_i

SE ξ_i DEGENERE $\Rightarrow \dim E_i > 1$

$\rightarrow$ VETT DELL' AUTOSP 1 TRA LORO POSSONO ESSERE PRESI COME ELEM DELLA BASE

$\rightarrow$ GLI ELEM DELLA BASE NON SONO + UNIVOC DET MA NELLA SCELTA È ARBITRARIA LA BASE NEL SSP E_i

x ES: $|A\rangle = Q_1^{(1)} |\xi_1^{(1)}\rangle + Q_1^{(2)} |\xi_1^{(2)}\rangle + \dots + Q_1^{(d_1)} |\xi_1^{(d_1)}\rangle$ $\quad d_1 = $ gr di deg di ξ_1

$+ Q_2^{(1)} |\xi_2^{(1)}\rangle + \dots + Q_2^{(d_2)} |\xi_2^{(d_2)}\rangle + \dots$

$\Rightarrow |\xi_1^{(1)}\rangle \dots |\xi_1^{(d_1)}\rangle$ SONO ARBITRARI CIOÈ SONO UNA GEN BASE IN E_1

x ξ NON DEG $\longrightarrow$ FACENDO UNA MISURA E TROVANDO ξ_i È PERFETTAMENTE DET LO STATO POST-MISURA $|\xi_i\rangle$

x ξ DEG $\longrightarrow$ AVER TROVATO ξ_i LASCIA SP A MOLTI POSSIBILI STATI

NOI RICHIEDEREMO CHE LO STATO SIA UNIVOC DET DOPO LA MISURA

x FARLO UTILIZZIAMO IL <u>POSTULATO DI VON NEUMANN</u>

$|A\rangle$, ξ_i DEGENERE DET IL SOP E_i

DOPO LA MISURA DI ξ_i LO STATO DEL SIST È DATO DALLA PROIEZ DI $|A\rangle$ SU E_i

$$|A\rangle = Q_i^{(1)} |\xi_i^{(1)}\rangle + \dots + Q_i^{(d_i)} |\xi_i^{(d_i)}\rangle + (\text{RESTO EXT A } E_i)$$

$\Big\downarrow$ MISURA DI ξ_i

$$Q_i^{(1)} |\xi_i^{(1)}\rangle + \dots + Q_i^{(d_i)} |\xi_i^{(d_i)}\rangle$$

I d_i COEFF DIPENDONO DALLA SCELTA DELLA BASE DI E_i MA IL VETT NO

$\longrightarrow$ È UNIVOC DET DALLA PROIEZ ORTOG

OSSERVABILI COME OPERATORI AUTOAGGIUNTI SU $\mathcal{H}$

DATA ξ OSS È SEMPRE POSSIBILE SCEGLIERE $\{|\xi_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$ AUTOSTATI CHE FORMINO UNA BASE ORTONORM DI $\mathcal{H}$

ASSOCIAMO UN OPERATORE ξ^{op} TC $\xi^{op}|\xi_i\rangle = \xi_i|\xi_i\rangle$

→ QUESTO DEF L'AZIONE DI ξ^{op} SUGLI AUTOSTATI DI ξ

$$|A\rangle = \sum_{i=1}^{n} Q_i\,|\xi_i\rangle \quad \text{CL FINITA}$$

$$\Rightarrow \xi^{op}|A\rangle = \sum_{i=1}^{n} Q_i\,\xi^{op}|\xi_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} Q_i\,\xi_i\,|\xi_i\rangle$$

IN LINEA DI PRINCIPIO ANCHE SE $|A\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i\,|\xi_i\rangle$ CON $\sum_i |Q_i|^2 < \infty$ (CIOÈ $|A\rangle \in \mathcal{H}$) NON È DETTO CHE ξ^{op} MAPPI UN VETT DI $\mathcal{H}$ IN UN VETT DI $\mathcal{H}$ (CIOÈ IN GEN $\xi^{op}|A\rangle \notin \mathcal{H}$)

INFATTI:

$$\xi^{op}|A\rangle := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Q_i\,\xi_i\,|\xi_i\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i\,\xi_i\,|\xi_i\rangle$$

ED IN GEN NON È VERO CHE $\sum_{i=1}^{\infty} |Q_i\,\xi_i|^2 < \infty$

⇒ DIREMO CHE $|A\rangle \in D_\xi$ INS DI DEF ξ^{op} SE $\sum_i \xi_i^2\,|Q_i|^2 < \infty$

→ $\exists\, \xi^{op}$ TC $D_\xi = \mathcal{H}$

SICURAMENTE È IL CASO DEI COSIDDETTI OP LIMITATI CIOÈ TC

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2\,|Q_i|^2 \le M \underbrace{\sum |Q_i|^2}_{\text{CHIUSO}}$$

PER NOI DI SOLITO $\overline{D_\xi} = \mathcal{H}$ (DENSO IN $\mathcal{H}$)

x un sist di misura fisico ha senso $\exists$ un sup alla misura ma non in mec class abbiamo def le oss come $f: \Gamma \to \mathbb{R}$ che non hanno nec un sup

$\to$ l'energia potrebbe essere arbitrariam grande anche se noi non riusciamo a misurarla

$\Rightarrow$ ad ogni oss $\xi \to \xi^{op}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

- caratt ξ^{op}

1) $\xi^{op} = (\xi^{op})^\dagger$ ($\dagger$ = hermitiano coniugato)

coniugazione: - sp vett su $\mathbb{R}$ con $(\cdot,\cdot)$ $(w, Av) = (A^T w, v)$

- sp vett su $\mathbb{C}$ $(w, Av) = (A^T w, v)^*$ compl coniug

in notaz di Dirac $\langle w|A|v\rangle = \langle v|A^T|w\rangle^*$

$\to$ A agisce alla sua dx

$\langle w|\xi^\dagger|v\rangle := \langle v|\xi|w\rangle^*$

specificare l'azione di un operatore su vett qualunque

$\Rightarrow$ specif l'azione " " " " elem della base

$\Rightarrow$ specif l'operatore

Diremo che ξ^{op} è autoaggiunto se

$$\boxed{\langle w|\xi|v\rangle = \langle v|\xi|w\rangle^*}$$

se il nostro sp vett su $\mathbb{C}$ è di dim finita $\Rightarrow$ finis della storia

" " " operatore è limitato: def su tutti i vett di $\mathcal{H}$ $\Rightarrow$ fine

ma x def che $\xi^{op} = (\xi^{op})^\dagger$ dobbiamo prima def entrambi, e vedere se hanno la stessa azione

ξ agisce su D_ξ, $\xi^\dagger$ su $D_{\xi^\dagger}$ in gen $D_\xi \neq D_{\xi^\dagger}$

abbiamo costruito ξ^{op} in corrisp di ξ tc $\xi^{op}|\xi_i\rangle = \xi_i|\xi_i\rangle$

→ VOGLIAMO DIM CHE ξ^{op} È AUTOAGGIUNTO:

SE $|\xi_i\rangle$ ELEM DELLA BASE $\Rightarrow \sum_i |\xi_i\rangle\langle\xi_i| = 1$

E $\langle\xi_i|\xi_j\rangle = \delta_{ij}$

$$\langle B|\xi^{op}|A\rangle = \langle B|\xi^{op} \sum_i |\xi_i\rangle\langle\xi_i|A\rangle =$$

$$= \sum_i \langle B|\underbrace{\xi^{op}|\xi_i\rangle} \langle\xi_i|A\rangle$$

PROD SCALARE SU $\mathbb{C}$

$$= \sum_i \xi_i \langle B|\xi_i\rangle\langle\xi_i|A\rangle = \sum_i \xi_i \langle A|\xi_i\rangle^* \langle\xi_i|B\rangle^*$$

$$= \left(\sum_i \xi_i \langle A|\xi_i\rangle\langle\xi_i|B\rangle\right)^* = \langle A|\xi^{op}|B\rangle^*$$

$$\Rightarrow (\xi^{op})^\dagger = \xi^{op} \qquad \square$$

PROP OPERATORI AUTO AGGIUNTI

1) $\eta|\eta'\rangle = \eta'|\eta'\rangle$ (DEF IN ALCUNI DI AUTOVETT & AUTOVAL X OP η)

$\rightarrow \langle\eta'|\eta|\eta'\rangle = \eta'\langle\eta'|\eta'\rangle$

SE η AUTOAGGIUNTO $\Rightarrow \eta' \in \mathbb{R}$ (AUTOVAL REALI)

2) $\eta|\eta'\rangle = \eta'|\eta'\rangle \qquad \eta'' \neq \eta'$

$*)\ \langle\eta''|\eta|\eta'\rangle = \eta'\langle\eta''|\eta'\rangle$

SE ANCHE $|\eta''\rangle$ AUTOSTATO $\Rightarrow \eta|\eta''\rangle = \eta''|\eta''\rangle$

$\rightarrow \langle\eta'|\eta|\eta''\rangle = \eta''\langle\eta'|\eta''\rangle$

$**)\ \langle\eta''|\eta|\eta'\rangle = \eta''\langle\eta''|\eta'\rangle$

$* - ** = (\eta' - \eta'')\langle\eta''|\eta'\rangle = 0$

$\rightarrow$ SE $\eta' \neq \eta'' \Rightarrow |\eta''\rangle, |\eta'\rangle$ SONO ORTOGONALI

PROBL OSSERVABILI - OPERATORI

OSSERVABILI $\overset{?}{=}$ OP AUTOAGGIUNTI

IN DIM FINITA O PER OPERATORI LIMITATI NON CI SONO PROBL, IN GEN NO

PRESO UN OP AUTOAGGIUNTO IN DIM FINITA È SEMPRE VERO CHE POSSO SCEGLIERE UNA BASE DEL MIO SP VETT COMPOSTA DA SUOI AUTOSTATI

IN DIM ∞ NON È DETTO, SE HO ∞ AUTOSTATI / AUTOVAL NON È DETTO CHE FORMINO UNA BASE DELLO SP DI HILBERT $\mathcal{H}$

→ CI SONO UNA SERIE DI PATOLOGIE LEGATE ALL'ANALISI DEGLI SP DI HILBERT CHE NON TRATTEREMO

QUANDO ABBIAMO DEF LE OSS ABBIAMO DETTO CHE GLI COMPETE UNO SPETTRO
→ INSIEME DI AUTOVAL O AUTOVETT

LO STUDIO DELLO SPETTRO DI UN OSS CI PORTA AD AVERE UN ∞ NUMERABILE DI AUTOVAL

IN GEN QUESTO NON È VERO X GLI OPERATORI AUTOAGGIUNTI

QUESTI AVRANNO UNA PT DELLO SPETTRO CHE TALVOLTA È DISCRETO MA POSSONO AVERE UN PT " " CHE È CONTINUA CIOÈ FATTO DI AUTOVAL CHE VARIANO IN MANIERA CONTINUA

LE VERE OSS (OSS PROPRIE) SONO OPERATORI AUTOAGGIUNTI CON SPETTRO DISCRETO

VALOR MEDIO DI ξ E ASPETTAZIONE DI UNO STATO

ξ OSS $\equiv \xi^{op}$ $\qquad \xi = \xi^{\dagger}$ AUTOAGGIUNTO

$\Rightarrow$ AMMETTE UNO SPETTRO COMPLETO $\xi_i |\xi_i\rangle$ TC OGNI VETT DEL NOSTRO SP DI HILBERT PUÒ ESSERE DECOMPOSTO SULLA BASE DI AUTOSTATI $|\xi_i\rangle$

$$|A\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i |\xi_i\rangle$$

POSSIAMO SCEGLIERE BASI ORTONORM $\langle \xi_i | \xi_j \rangle = \delta_{ij}$

E POSSIAMO SCRIVERE LA REGOLA DI COMPLETEZZA $\sum_i |\xi_i\rangle\langle\xi_j| = 1$

$P_i = |\xi_i\rangle\langle\xi_i|$ È UN OPERATORE

$P_i |A\rangle = |\xi_i\rangle\langle\xi_i|A\rangle$

1) P_i AUTO AGGIUNTO, CIOÈ $P_i = P_i^{\dagger}$

2) $P_i^2 = P_i$

DIM: $P_i^2 = |\xi_i\rangle \overbrace{\langle\xi_i|\xi_i\rangle}^{=1} \langle\xi_i| = |\xi_i\rangle\langle\xi_i| = P_i$

$\Rightarrow$ HA AUTOVAL 1, 0

VIENE CHIAMATO OPERATORE DI PROIEZ SULL' AUTOSP CORRISP ALL' AUTOVAL 1

IN QUESTO CASO $|\xi_i\rangle$

$\Rightarrow$ POSSIAMO RISCRIVERE LA REGOLA DI COMPLETEZZA $\sum_i P_i = 1$

$$|A\rangle = \sum_i a_i |\xi_i\rangle \longrightarrow P_i |A\rangle = a_i |\xi_i\rangle$$

TORNIAMO ALLA PROCEDURA DI MISURA

STATO $|A\rangle$, OSS ξ $\rightarrow$ IN GEN NON È DET LA MISURA: TROVEREMO UN QUALUNQUE AUTOVAL ξ_i

SUPP DI RIPETERE N VOLTE LA MISURA ξ SU $|A\rangle$

N_i = # DI VOLTE CHE OSS ξ_i

$\longrightarrow \bar{\xi} = \frac{1}{N} \sum_i N_i \xi_i$ $\qquad \frac{N_i}{N}$ = FREQ. CON CUI SI OSS ξ_i

$$\lim_{N\to\infty} \bar{\xi} = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i P_i \qquad P_i = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N}$$

IN QM NON SAPPIAMO QUALE SARÀ IL RISULTATO MA VOGLIAMO PREDIRE LA PROBAB CON CUI SI OSSERVA ξ_i

SUPP DI AVER NORMALIZ $|A\rangle$

$$p_i = P(|A\rangle \to |\xi_i\rangle) = P(|A\rangle \to P_i|A\rangle)$$

$$= \frac{|\langle A|\xi_i\rangle|^2}{\langle A|A\rangle\langle\xi_i|\xi_i\rangle} = \frac{|\langle A|P_i|A\rangle|^2}{\underbrace{\langle A|A\rangle}_{1}\langle A|\underbrace{P_i P_i}_{P_i}|A\rangle} = \frac{|\langle A|P_i|A\rangle|^2}{\langle A|P_i|A\rangle}$$

$= \langle A|P_i|A\rangle$ VALORE DI ASPETTAZIONE DELL'OPERAT P_i NELLO STATO $|A\rangle$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\xi} = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \xi_i} = \sum \xi_i \langle A|P_i|A\rangle = \langle A|\sum \xi_i P_i|A\rangle$$

$$= \boxed{\langle A|\xi|A\rangle}$$ IL VAL DI ASPETTAZ DI ξ IN $|A\rangle$ È IL VAL MEDIO

INCERTEZZA IN UNO STATO

CONSIDERIAMO ξ^2 : $\xi^2|\xi_i\rangle = \xi\xi|\xi_i\rangle = \xi_i\xi|\xi_i\rangle = \xi_i^2|\xi_i\rangle$

STESSI AUTOVETT DI ξ (VALE $\forall$ n-ESIMA POTENZA)

POTREI CHIEDERMI QUANTO VALGA $f(\xi)|\xi_i\rangle$, IN GEN NON LO SO

MEMTRE NO CASO $f(\xi)$ SIA ESPANDIBILE IN SERIE

$$f(\xi)|\xi_i\rangle = \sum_{n=1}^{N} f_n \xi^n|\xi_i\rangle = \sum f_n \xi_i^n|\xi_i\rangle = f(\xi_i)|\xi_i\rangle$$

QUESTE PROP SONO VALE SE $\exists$ L'OPERATORE, ESSENDO IN UNO SPAZ DI H

$\exists\, \xi \not\Rightarrow f(\xi)$ IN GEN

$$\bar{\xi^2} = \langle A|\xi^2|A\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 p_i$$ $\langle A|A\rangle = 1$ ξ^2

FISSATO $|A\rangle$ NORMALIZ POSSO DEF L'INCERTEZZA DI ξ IN $|A\rangle$ COME

$$\Delta\xi = \sqrt{\bar{\xi^2} - (\bar{\xi})^2}$$ SCARTO QUADRATICO MEDIO

$$(\Delta\xi)^2 = \langle A|\xi^2|A\rangle - \langle A|\xi|A\rangle^2 = \langle A|(\xi - \bar{\xi})^2|A\rangle \geq 0$$

$$\underbrace{\overline{(\xi - \bar{\xi})^2}}_{\geq 0} = \overline{\xi^2 - 2\xi\bar{\xi} + \bar{\xi}^2} = \bar{\xi^2} - 2(\bar{\xi})^2 + \bar{\xi}^2 = \bar{\xi^2} - \bar{\xi}^2$$

È NATURALE CHIEDERSI QUANDO L'INCERTEZZA $\Delta\xi = 0$

$\Delta\xi = 0 \iff |A\rangle$ AUTOSTATO DI ξ

DIM

$\Leftarrow$) $|A\rangle$ AUTOSTATO DI ξ

$\Rightarrow \xi|A\rangle = \xi'|A\rangle \Rightarrow \xi^2|A\rangle = (\xi')^2|A\rangle$

$\Rightarrow \bar{\xi} = \langle A|\xi|A\rangle = \xi'$

$\overline{\xi^2} = \langle A|\xi^2|A\rangle = (\xi')^2$

$\Rightarrow (\Delta\xi)^2 = (\xi')^2 - (\xi')^2 = 0$

$\Rightarrow$) $(\Delta\xi)^2 = 0 = \langle A|(\xi - \bar{\xi})^2|A\rangle$

$\Rightarrow \langle A|(\xi - \bar{\xi})(\xi - \bar{\xi})|A\rangle = 0$

NORMA DI $(\xi - \bar{\xi})|A\rangle$

L'UNICO VETT DI NORMA NULLA È $\underline{0}$

$\Rightarrow (\xi - \bar{\xi})|A\rangle = \underline{0} \Rightarrow \xi|A\rangle = \bar{\xi}|A\rangle$ $\square$

GLI STATI DI MIN INCERTEZZA LEGATI A ξ SONO I SUOI AUTOSTATI
$\longrightarrow$ CHE LI CARATTERIZZA

~~RECIPROCO~~
$\Rightarrow$ SE MISURIAMO ξ IN UNO DEI SUOI AUTOSTATI SIAMO SICURI DI OTTENERE IL CORRISP AUTOVAL

IN GEN DATO UNO STATO NON SIAMO SICURI DEL VALORE DELLA MISURA A SEGUIRE DEI SUOI AUTOSTATI

OSSERVABILI COMPATIBILI

ξ, η OSS

$$|A\rangle \xrightarrow{\xi} |\xi'\rangle \xrightarrow{\xi} |\xi'\rangle$$ SE RIPETO ξ TROVO ANCORA ξ'

$$|\xi'\rangle \xrightarrow{\eta} |\eta'\rangle$$ SE MISURO η TROVO η'

SE ORA TORNO A MISURARE ξ COSA TROVO?

1) SE TROVO ANCORA ξ' DOPO AVER MISURATO η

$$|A\rangle \xrightarrow{\xi} |\xi'\rangle \xrightarrow{\eta} |\xi', \eta'\rangle$$

$\Rightarrow$ LO STATO È CONTEMP AUTOSTATO DI ξ E DI η

CIOÈ MI TROVO IN UNO STATO $|\xi', \eta'\rangle$ TC SE MISURO ξ TROVO ξ' E SE MISURO η TROVO η'

DEF

DIREMO CHE ξ E η SONO COMPATIBILI SE AMMETTONO UN INSIEME COMPLETO DI AUTOVETT SIMULTANEI

CIOÈ $\Leftrightarrow$ POSSO SCEGLIERE UNA BASE DI $\mathcal{H}$ FATTA DI AUTOVETT ALLO STESSO TEMPO DI ξ E η

DEF

ξ E η SONO COMPATIBILI SE $\forall$ AUTOSTATO $|\xi'\rangle$ DI ξ CON AUTOVAL ξ'

FACENDO UNA MISURA DI η LO STATO IN CUI SI TROVA IL SIST È ANCORA AUTOSTATO DI ξ CON AUTOVAL ξ'

SE LE OSS NON SONO DEGENERI $\Rightarrow |\xi'\rangle$ FISSA COMPLETAMENTE IL SSP CORRISPONDENTE

DATO CHE ξ E η AMMETTONO AUTOVETT COMUNI, SICCOME LO STATO È UNIVOCO DETT.

$\Rightarrow$ FISSARE $|\xi'\rangle$ SIGNIFICA FISSARE η'

$$|\xi'\rangle = |\xi', \eta'\rangle \qquad \eta|\xi'\rangle = \eta'|\xi'\rangle$$

SE LE OSS SONO NON DEG.

SE HANNO LO STESSO INS DI AUTOVETT $\Rightarrow$ SONO LA STESSA OSS

IL VAL CHE ASSUMONO È DIVERSO MA GLI STATI SONO GLI STESSI (È COME CAMBIARE SCALA)

ABBIAMO VISTO CHE SE $f(\xi)$ È SCRIVIBILE IN SERIE

$$f(\xi)|\xi'\rangle = f(\xi')|\xi'\rangle$$

ξ ED $f(\xi)$ SONO 2 OSS DIVERSE CON VAL DIVERSI CHE ASSUMONO IN MANIERA PRECISAMENTE DETT DA f CHE SEMPLICEMENTE DEFORMA LA SCALA DEL NOSTRO STRUMENTO

IN QUESTO CASO È EVIDENTE CHE SE NON SONO DEG. $\exists$ UNA BASE COMUNE

SE ξ DEGENERE E η NON DEG

POSSIAMO RISCRIVERE $\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{H}_i$

CON $\mathcal{H}_i$ SSP CORRISP ALL'AUTOVAL ξ_i, SSP $\neq$ SONO TRA LORO $\perp$

IN CIASCUN SSP $\mathcal{H}_i$ POSSIAMO SCEGLIERE UNA BASE DI AUTOVETT DI η

XKÉ GLI AUTOVETT DI η GEN TUTTO $\mathcal{H}$ $\Rightarrow$ GENERANO ANCHE GLI $\mathcal{H}_i$

$\Rightarrow$ LA COSTRUZIONE FATTA PRIMA X DIMO L'ARBITRARIETÀ DELLE 2 DEF POT ESSERE FATTA SSP A SSP

LA CARATT ESSENZIALE DI RAPPR OSSERVABILI COME REGOLI OPERATORI E NON COME FUNZIONI CONSISTE NEL FATTO CHE L'OPERAZ DI PRODOTTO TRA 2 OSSERVABILI <u>NON È + COMMUTATIVA</u>

$$\xi\eta \neq \eta\xi$$

DEF $[\xi, \eta] := \xi\eta - \eta\xi$ COMMUTATORE

$[\xi, \eta] = 0 \iff$ IL PRODOTTO DI ξ E η COMMUTA

<u>TEOR</u>

ξ E η SONO OSS COMPATIBILI $\iff [\xi, \eta] = 0$

<u>DIM</u>

NEL CASO DI OSS NON DEG:

$\Rightarrow$) SUPP DI AVERE 2 OSS NON DEG COMPATIBILI

$\longrightarrow$ ABBIAMO UNA BASE DI AUTOSTATI COMUNI

$$\xi\eta|\xi', \eta'\rangle = \xi\eta'|\xi', \eta'\rangle = \eta'\xi'|\xi', \eta'\rangle$$

$$\eta\xi|\xi', \eta'\rangle = \eta\xi'|\xi', \eta'\rangle = \xi'\eta'|\xi', \eta'\rangle$$

SE CIÒ È VERO $\forall$ ELEM DELLA BASE $\Rightarrow$ È VERO X TUTTO LO SP

$\Rightarrow$ TESI

$\Leftarrow$) $[\xi, \eta] = 0$

LEMMA

SE $[\xi, \eta] = 0$ E $\xi|\xi'\rangle = \xi'|\xi'\rangle$

$\Rightarrow$ ANCHE $\eta|\xi'\rangle$ È AUTOSTATO DI ξ CON STESSO AUTOVAL

CIOÈ $\xi(\eta|\xi'\rangle) = \xi'(\eta|\xi'\rangle)$

DIM: $\xi\eta|\xi'\rangle = \eta\xi|\xi'\rangle = \xi'\eta|\xi'\rangle$ $\square$

SE ξ È NON DEG $\Rightarrow$ BANALE XKÉ $\eta|\xi'\rangle = \eta'|\xi'\rangle$

$\Rightarrow$ ABBIAMO UNA BASE DI AUTOVETT SIMULTANEI

SE ξ DEG IL LEMMA DICE CHE $\mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_i$

CON $\mathcal{H}_i$ AUTOSP REL ALL AUTOVAL ξ_i

$\rightarrow$ IN OGNI $\mathcal{H}_i$ POSSO SCEGLIERE UNA BASE DI AUTOVETT DI η

QUESTI SP SONO $\perp$ TRA LORO

$\Rightarrow$ IL LEMMA CI DICE CHE QUANDO η AGISCE SU $\mathcal{H}_i$ LO LASCIA INVARIATO XKÉ ABBIAMO DIM CHE $\eta|\xi_i\rangle$ È ANCORA AUTOSTATO PER ξ $\Rightarrow$ POSSIAMO ANCORA SCEGLIERE UNA BASE DI AUTOVETT DI η $\square$

DETERMINAZIONE DELLE MISURE

SE PRENDIAMO ξ E η TC $[\eta, \xi] = 0$ $\Rightarrow$ COMPATIBILI

GLI ELEM DELLA BASE SARANNO DEL TIPO $|\xi_i, \eta_j\rangle$

$\rightarrow$ CI POSSONO ESSERE + ELEM DELLA BASE CON STESSI AUTOVAL?

CIOÈ ξ E η DEGENERI

$\Rightarrow$ ANCORA FACENDO LA MISURA SIA DI ξ CHE DI η LO STATO NON È UNIVOCAMENTE DET

$\Rightarrow$ INTRODUCO UNA III MISURA λ TC $[\xi, \eta] = [\xi, \lambda] = [\eta, \lambda] = 0$

QUESTO INS DI OSS COMPATIBILI SI DICE COMPLETO QUANDO

C'È UN SOLO STATO AUTOVETT SIMULTANEO DELLE 3 MISURE

UNA VOLTA FISSATI GLI AUTOVAL DI CIASCUNA

X CAPIRE COMPLETAMENTE UN SIST FISICO SERVE UN INSIEME COMPLETO

PROP ALGEBRICHE COMMUTATORE

- $[\xi+\eta, \lambda] = [\xi,\lambda] + [\eta,\lambda]$
- $[a\xi, \lambda] = a[\xi,\lambda] \quad a \in \mathbb{C}$
- $[\xi, a\lambda] = -a[\xi,\lambda]$ xké $[\xi,\lambda] = -[\lambda,\xi]$
- $[\xi\eta, \lambda] = \xi[\eta,\lambda] + [\xi,\lambda]\eta$
- $[\xi,[\lambda,\eta]] + [\lambda,[\eta,\xi]] + [\eta,[\xi,\lambda]] = 0$

MOLTO SIMILE ALLE PARENTESI DI POISSON

RELAZ DI INDETERMINAZIONE

DATO STATO $|A\rangle$ E OSS ξ $\rightarrow \bar{\xi} = \langle A|\xi|A\rangle$

$$\Delta\xi = \sqrt{\overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2} \geq 0$$

E $\Delta\xi = 0 \iff |A\rangle = |\xi_i\rangle$

ABBIAMO POI ANALIZ UNA STOA CON 2 OSS

$|A\rangle$, ξ, η E DEF OSS COMPATIBILI CIOÈ $[\eta,\xi]=0$

$\rightarrow$ IN QUESTO CASO EFFETTUARE UNA MISURA DI η NON CAMBIA LA MISURA DI ξ

TEOR: RELAZ DI INDETERMINAZ

FISSA IL LIMITE INF DEL PRODOTTO DELLE INCERTEZZE SU ξ, η

$$\boxed{\Delta\xi\,\Delta\eta \geq \frac{|\langle A|[\xi,\eta]|A\rangle|}{2}}$$

DIM

INTRODUCIAMO GLI OPERATORI $\begin{cases} \alpha := \xi + i x \eta \\ \alpha^\dagger := \xi^\dagger - i x \eta^\dagger \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$

IN GENERALE NON COMMUTATIVO

$$\rightarrow \alpha^\dagger\alpha = (\xi^\dagger - i x \eta^\dagger)(\xi + i x \eta) = \xi^\dagger\xi + x^2\eta^\dagger\eta + \dots$$

NEL CASO SEMPLICE IN CUI ξ E η SONO OSS

$\Rightarrow$ SONO AUTOAGGIUNTE $\Rightarrow \alpha^\dagger = \xi - i x \eta$

$$\Rightarrow \alpha^\dagger\alpha = \xi^2 + x^2\eta + i x [\xi,\eta]$$

SUPP $|A\rangle$ NORMALIZ.

$\longrightarrow \langle A|\alpha^\dagger\alpha|A\rangle \geq \langle A|\alpha^\dagger|A\rangle\langle A|\alpha|A\rangle$

SI PUÒ DIR CHE:

$|A\rangle \in \mathcal{H}$, x Hp DEL STATO DEVE ESSERE AUTOVALORE UNOSS DI CUI ESSO È AUTOSTATO

$\Rightarrow |A\rangle$ ELEM DI UNA BASE DI $\mathcal{H}$

$\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$ $\sum |e_i\rangle\langle e_i| = 1$

$\longrightarrow |A\rangle := |e_1\rangle$

$$\Rightarrow \langle A|\alpha^\dagger\alpha|A\rangle = \langle e_1|\alpha^\dagger\alpha|e_1\rangle$$
$$= \sum^{\infty} \langle e_1|\alpha^\dagger|e_i\rangle\langle e_i|\alpha|e_1\rangle$$
$$= \langle e_1|\alpha^\dagger|e_1\rangle\langle e_1|\alpha|e_1\rangle + \underbrace{\sum |\langle e_1|\alpha^\dagger|e_i\rangle|^2}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \langle A|\alpha^\dagger\alpha|A\rangle \geq \langle A|\alpha^\dagger|A\rangle\langle A|\alpha|A\rangle$$

ESPLICITANDO

$$\langle A|\xi^2 + x^2\eta^2 + ix[\xi,\eta]|A\rangle \geq \langle A|\xi - ix\eta|A\rangle\langle A|\xi + ix\eta|A\rangle$$

$$\overline{\xi^2} + x^2\overline{\eta^2} + xi\overline{[\xi,\eta]} \geq (\bar{\xi} - ix\bar{\eta})(\bar{\xi} + ix\bar{\eta}) = \bar{\xi}^2 + x^2\bar{\eta}^2$$

$$\Rightarrow (\Delta\xi)^2 + x^2(\Delta\eta)^2 + xi\overline{[\xi,\eta]} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

XKÉ SI A SODDISF $\forall x \Rightarrow \Delta \leq 0$

$$\Rightarrow i\overline{[\xi,\eta]}^2 - 4(\Delta\xi)^2(\Delta\eta)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \Delta\xi\,\Delta\eta \geq \frac{1}{2}\left|i\overline{[\xi,\eta]}\right| \quad \text{CVD} \qquad \square$$

$\Rightarrow$ SE LE OSS NON COMMUTANO IL PROD DELLE INCERTEZZE È $\geq$ DI QUELLO QUANTISTICO

XKÉ ABBIAMO TENUTO LA i AL COMMUTATORE?

SUPP $[\xi, \eta] = \lambda \mathbb{1} \quad \lambda \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ SE CALCOLO $[\xi, \eta]^\dagger = (\xi\eta - \eta\xi)^\dagger = \eta^\dagger \xi^\dagger - \xi^\dagger \eta^\dagger = \eta\xi - \xi\eta$

$$= -[\eta, \xi]$$

$\Rightarrow \lambda = ic \quad c \in \mathbb{R}$

SE I 2 OPERATORI HANNO COMMUTATORE PROP A $\mathbb{1}$ LA COST λ DEVE ESSERE UN IMMAGINARIO PURO

<u>OPERATORI POSIZ E IMPULSO</u>

MC: OSS $f = f(q, p) \longrightarrow$ MQ: OSS $\xi = \xi^\dagger = \xi(q^{op}, p^{op})$

XES: $H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \longrightarrow H^{op} = \frac{(p^{op})^2}{2m} + V(q^{op})$

NELL'HAMILTONIANA NON CI SONO PROBL XKÉ GLI OPERATORI FANNO PROD SOLO CON SÉ STESSI ED OGNI OPERATORE COMMUTA CON SÉ STESSO

I PERÒ FUNZ IN CUI C'È PRODOTTO TRA GLI OPERATORI

$$qp \xrightarrow{?} \begin{cases} q^{op} p^{op} \\ p^{op} q^{op} \\ \alpha (q^{op} p^{op}) + (1-\alpha)(p^{op} q^{op}) \end{cases}$$

QUALE OSS QUANTISTICA CORRISPONDE CON QUELLA CLASSICA? NON È CHIARO

SI DICE CHE C'È UN PROBL NELL'ORDINAMENTO DEI FATTORI IN PRODOTTO DI OPERATORI DI VARIAZ

X POTER MANIPOLARE OGGETTI PRESENTI IN UN'ALGEBRA COMMUTATIVA DOBBIAMO CONOSCERE COME NON COMMUTANO TRA LORO

DATE ξ, η VOGLIAMO CONOSCERE $[\xi, \eta]$

SE FISSASSIMO $[q_i, q_j]$ $[p_i, p_j]$ $[q_i, p_j]$ AVREMMO CHIARE LE PROPAGGAZIONI DELLO EP DELLE OSS

ABBIAMO VISTO CHE $[\xi, \eta]$ SIMILE A $\{\xi, \eta\}$
(SOMMA LE STESSE REGOLE ALGEBRICHE)

ABBIAMO DEF CON p, q UN SIST DI COORD CANONICHE ELEMENTARI

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

<u>POSTULATO DI QUANTIZZAZIONE</u>

$$[q_i, q_j] = 0 \quad [p_i, p_j] = 0 \quad [q_i, p_j] = i c\, \delta_{ij}$$

$\longrightarrow$ C HA LE DIM DI UNA LUNGHEZZA X L'IMPULSO (MOMENTO ANGOLARE)
C È UNA QUANTITÀ FISICA CHIAMATA $\hbar$

$$[q_i, q_j] = i\hbar \{q_i, q_j\}$$
$$[p_i, p_j] = i\hbar \{p_i, p_j\}$$
$$[q_i, p_j] = i\hbar \{q_i, p_j\}$$

<u>NB</u> IN GEN $[\xi, \eta] \neq i\hbar \{\xi, \eta\}$
ABBIAMO PARLATO SOLO DI q E p

PRENDIAMO $[q^2, p^2] = q[q, p^2] + [q, p^2]q$

$$= \underbrace{qp[q, p] + q[q, p]p} + \underbrace{p[q, p]q + [q, p]pq}$$

$$= 2i\hbar(qp + pq)$$

INVECE

$$\{q^2, p^2\} = 4qp$$

$\Rightarrow$ IN GEN NON È VALIDO

HO UN'IDENTITÀ TRA I 2 TERMINI QUANDO IL TERMINE DI DX NON HA PRODOTTI DI QUANTITÀ CHE NON COMMUTANO

ESS: $[q, p^n] = [q, p \cdot p^{n-1}] = p[q, p^{n-1}] + [q, p]p^{n-1}$

$= p[q, p^{n-1}] + i\hbar p^{n-1}$

DEVE ESSERE VERO $\forall n$, SE TROVO $[q, p^n] = i\hbar n p^{n-1}$

SI FA X RICORSIONE

SI PUÒ OSS CHE

$$[q, p^n] = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} p^n \quad \forall n$$

$$\Rightarrow [q, \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n] = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$$

LE SERIE DI POTENZE SONO UN INSIEME DENSO NELL'INSIEME DELLE FUNZ

$$\Rightarrow [q, f(p)] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial p} = i\hbar \{q, f(p)\}$$

ANALOG SI PUÒ DIM CHE

$$[f(q), p] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial q}$$

<u>PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE DI HEISENBERG</u>

$[q, p] = i\hbar$ (1D)

ABBIAMO MOSTRATO CHE $\Delta\xi \Delta\eta \geq \frac{1}{2} |\langle A| [\xi, \eta] |A\rangle|$

$$\Rightarrow \Delta q \Delta p \geq \frac{1}{2} |\langle A| [q, p] |A\rangle| = \frac{\hbar}{2} \langle A|A\rangle = \frac{\hbar}{2}$$

INDIP DALLA SCELTA DI $|A\rangle$ (QUI ABBIAMO TRATTATO $|A\rangle$ NORMALIZ)

$\Rightarrow$ IL PROD DELLE INCERTEZZE TRA POSIZ E IMPULSO È SEMPRE MAGGIORE DI $\hbar/2$

(CONSEGUENZA DEL POSTULATO DI QUANTIZZAZIONE)

OSCILLATORE ARMONICO

È il sist + semplice da analizzare in mecc quant

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$$

↳ può essere promossa a oss quantistica xké non compaiono prodotti che non commutano

→ vogliamo det autoval e autovett di $\hat{H}$ E_k e $|E_k\rangle$ $(E_k \leq E_{k+1})$

1) $E_n \geq 0 \ \forall n$ tutti gli autoval dell'energia sono non neg

Dim

$\forall |A\rangle$ stato $\bar{H} = \langle A|H|A\rangle \geq 0$

$$\langle A|p^2/2m|A\rangle = \frac{1}{2m}\langle A|pp|A\rangle \overset{p=p^\dagger}{=} \frac{1}{2m}\underbrace{\langle A|p^\dagger p|A\rangle}_{\text{norma di } p|A\rangle \geq 0}$$

$\Rightarrow$ è pos

analog

$$\langle A|\frac{m\omega^2 q^2}{2}|A\rangle = \frac{m\omega^2}{2}\langle A|qq|A\rangle = \frac{m\omega^2}{2}\langle A|q^\dagger q|A\rangle \geq 0$$

$\Rightarrow$ H somma di termini pos

→ se è vero ~~per~~ $\forall |A\rangle$ $\Rightarrow$ vero anche per $|A\rangle = |E_n\rangle$

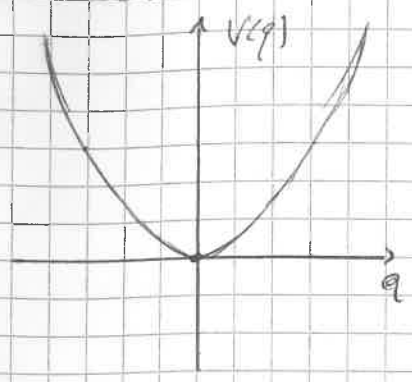
$\longrightarrow E_n = \langle E_n|H|E_n\rangle \geq 0$

$\square$

2) L'AUTO VAL + BASSO PUÒ ESSERE NULLO?

SE $E_0 = 0 \Rightarrow p|E_0\rangle = q|E_0\rangle = 0$ XKÉ L'AUTOVAL SIA NULLO

CLASSICAMENTE



SE $p=0 \vee q=0$ AVREMO L'EN MIN POSSIBILE

→ SE ANCHE FOSSE POSSIBILE AVERE $q|E_0\rangle = p|E_0\rangle = 0$

⇒ NELLO STATO DI MIN ENERGIA (STATO FONDO) POSIZ E IMPULSO SONO DET E VALGONO 0

⇒ $|E_0\rangle$ AUTOSTATO DI POSIZ E IMPULSO CON AUTOVAL 0

⇒ IN $|E_0\rangle$ $\Delta p = \Delta q = 0$ TALE CIÒ NON È POSSIBILE XKÉ IN OGNI AUTOSTATO $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2 \Rightarrow E_0 > 0 \Rightarrow \forall n\ E_n > 0$

3) IN TUTTI GLI AUTOSTATI DI H $|E_n\rangle$

$\langle E_n|p|E_n\rangle = \bar{p} = 0$ $\quad \langle E_n|q|E_n\rangle = \bar{q} = 0$

→ CLASSICAMENTE È VERO?

AUTOSTATO DI H ⇒ ENERGIA FISSATA

SE IN MC FISSO UN VALORE DI EN IL VALORE MEDIO DI q E p È 0?

→ SE FISSO L'EN OSCILLANO AVANTI E INDIETRO ⇒ VERO

DIM

$$[H,q] = \frac{1}{2m}[p^2,q] \overset{\forall V(q)}{=} -\frac{i\hbar}{m}p \Rightarrow p = \frac{im}{\hbar}[H,q]$$

$$\Rightarrow \langle E_n|p|E_n\rangle = \frac{im}{\hbar}\langle E_n|[H,q]|E_n\rangle = \frac{i\hbar}{m}\langle E_n|Hq - qH|E_n\rangle$$

$\langle E_n|H = E_n\langle E_n| \qquad H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$

$$= \frac{i\hbar}{m}\left[E_n\langle E_n|q|E_n\rangle - E_n\langle E_n|q|E_n\rangle\right] = 0 = \bar{p}$$

QUESTO IN REALTÀ È SEMPRE VERO SE CALCOLO IL VALORE DI ASPETTAZ SU UN AUTOSTATO DI H DEL COMMUTATORE DI H CON QUALCOSA

idem con $\bar{q}$

$$0 = \langle E_n | [H, p] | E_n \rangle = \frac{m\omega^2}{2} \langle E_n | [q^2, p] | E_n \rangle$$

$$= \frac{m\omega^2}{2} i\hbar \langle E_n | q | E_n \rangle \Rightarrow \bar{q} = 0$$

$\square$

→ CONSIDERIAMO IL VAL MIN

$$E_0 = \langle E_0 | H | E_0 \rangle$$

$$= \frac{1}{2m} \left[\langle E_0 | p^2 | E_0 \rangle + m^2\omega^2 \langle E_0 | q^2 | E_0 \rangle \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\overline{p^2} + m^2\omega^2 \overline{q^2} \right] \quad \text{in } \forall E_n \ \bar{q} = \bar{p} = 0$$

$$= \frac{1}{2} \left[(\Delta p)^2 + m^2\omega^2 (\Delta q)^2 \right]$$

$$\downarrow \quad a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \text{con} \quad a = \Delta p \ \text{e} \ b = m\omega\Delta q$$

$$E_0 \geq \frac{1}{2m} 2m\omega \Delta q \Delta p = \omega \Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar\omega}{2}$$

q e p NON POSSONO ESSERE UNIVOC DET

$\oplus$

E_n SOMMA DI TERMINI POS

$\Rightarrow E_0 \geq \omega\hbar/2$

QUANDO VALE L'UGUAGLIANZA?

- $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$

$\Rightarrow$ SE LO STATO E_0 È UNO STATO IN CUI LA DISUG DI INCERTEZZA VIENE REALIZZATA AL MIN (DI MIN INDETERMINAZ)

$$\begin{cases} \Delta p = m\omega\Delta q \\ \Delta p \Delta q = \frac{\hbar\omega}{2} \end{cases} \Rightarrow E_0 = \hbar\omega/2$$

ESSENDO $E = \overline{T} + \overline{V} \Rightarrow \overline{T} = \overline{V} = E/2 = \hbar\omega/4$ TEOR DEL VIRIALE

OPERATORE DI DISCESA E SALITA

$$\eta = \frac{p - im\omega q}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$ OPERATORE MA NON OSS, INFATTI $\eta \neq \eta^+$

$$\eta^+ = \frac{p + im\omega q}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

POSSIAMO RISCRIVERE

$$q = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\eta^+ - \eta) \qquad p = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(\eta^+ + \eta)$$

OSS CHE

$$\eta^+\eta = \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2 + im\omega\,[q,p]\right)$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega}\left(H - \frac{\hbar\omega}{2}\right)$$

$$\eta\eta^+ = \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2 - im\omega\,[q,p]\right) = \frac{1}{\hbar\omega}\left(H + \frac{\hbar\omega}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\eta, \eta^+] = \eta\eta^+ - \eta^+\eta = 1 \\ [H, \eta] = \hbar\omega\,[\eta^+\eta, \eta] = \hbar\omega\,[\eta^+, \eta]\,\eta = -\hbar\omega\,\eta \\ \quad \hookrightarrow H = \hbar\omega\,(\eta^+\eta + 1/2) \\ [H, \eta^+] = \hbar\omega\,\eta^+ \end{cases}$$

L'ALGEBRA DI QUESTI OGGETTI SI CHIUDE, CIOÈ NON COMPAIONO ALTRI OGGETTI

SUPP DI CONOSCERE UN AUTOVAL E DI H E IL SUO AUTOSTATO $|E\rangle$

$$H|E\rangle = E|E\rangle \qquad (*)$$

CONSIDERIAMO LO STATO $\eta|E\rangle$

$$H\eta|E\rangle = \eta H|E\rangle + [H,\eta]\,|E\rangle = E\eta|E\rangle - \hbar\omega\,\eta|E\rangle$$

$$= (E - \hbar\omega)\,\eta|E\rangle$$

$(*) \Rightarrow \eta|E\rangle$ È PURE AUTOSTATO DI H CON AUTOVAL $E - \hbar\omega$

η È DETTO OP DI DISCESA O DISTRUZIONE

SE LO RIAPPLICO OTTENGO NUOVI AUTOVAL E, $E - \hbar\omega$, $E - 2\hbar\omega$, ...

QUESTO RAGIONAMENTO SEMBRA PORTARE A UN ASSURDO

$E \to E - n\hbar\omega$, QUALUNQUE SIA IL VALORE DI E INIZIALE

$\exists\, n$ TC $E - n\hbar\omega < 0 \to$ IMPOSSIBILE, DEVE ESSERE + GRANDE DI $\hbar\omega/2$

$\Rightarrow \eta|E\rangle$ AUTOVETT DI H CON AUTOVAL $E - \hbar\omega$ A MENO CHE $\eta|E\rangle = \underline{0}$

XKÉ LA DISCESA VENGA INTERROTTA DEVE $\exists\, E_0$ TC $\eta|E_0\rangle = 0$

$\to E_0$ ENERGIA DELLO STATO FONDO

SE $\eta|E_0\rangle = 0$

$$\Rightarrow 0 = \langle E_0|\eta^\dagger\eta|E_0\rangle = \langle E_0|\frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}|E_0\rangle$$

$$= \left(\frac{E_0}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)\langle E_0|E_0\rangle$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

ABBIAMO DATO IL VAL DELL'EN FONDO DELL'OSCILL ARMONICO

$\Rightarrow$ LO STATO FONDO É UNO STATO DI MIN INDETERMINAZ

$$\Delta p \Delta q = \hbar/2$$

DATO E AUTOVAL E $|E\rangle$ AUTOVETT POSSIAMO REALIZ UNO STATO DI ENERGIA + ALTA OPERANDO $\eta^\dagger$

$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

$$H\eta^\dagger|E\rangle = \eta^\dagger H|E\rangle + [H,\eta^\dagger]|E\rangle = E\eta^\dagger|E\rangle + \hbar\omega\eta^\dagger|E\rangle$$

$$= (E + \hbar\omega)\eta^\dagger|E\rangle$$

$$\to E_0 = \frac{\hbar\omega}{2},\ E_1 = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega, \dots, E_n = \frac{\hbar\omega}{2} + n\hbar\omega, \dots$$

POSSO SALIRE ARBITRARIAMENTE?

SUPP $\exists$ UN LIMITE MAX $\eta^\dagger|E\rangle = 0$

$$\Rightarrow 0 = \langle E|\eta\eta^\dagger|E\rangle = \langle E|\frac{H}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}|E\rangle = \left(\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}\right)\langle E|E\rangle$$

VERREBBE $0 \iff E < 0$

$\Rightarrow$ SÌ POSSO SALIRE IN MODO ARBITRARIO

$\Rightarrow$ GLI AUTOVAL SONO DELLA FORMA

$$E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n \in \mathbb{N} \qquad \text{INFINITI}$$
$$n = 0, 1, \dots$$

CON CORRISP AUTOVET

$$|E_n\rangle \stackrel{N}{=} (\eta^+)^n |E_0\rangle$$

DOVE $|E_0\rangle$ TC $\eta|E_0\rangle = 0$

FORMANO UNA BASE DI $\mathcal{H}$? SÌ È LO DIMOSTREREMO

VEDREMO ANCHE CHE H È NON DEGENERE

<u>NORMALIZZAZIONE AUTOSTATI DI H</u> (OSCILL ARM)

CHIAMIAMO $|0\rangle$ LO STATO FONDO $\longrightarrow$ n-ESIMO AUTOSTATO $(\eta^+)^n|0\rangle$

X CONOSCERE LA NORMA $\langle 0|\eta^n(\eta^+)^n|0\rangle$ DOBBIAMO CONOSCERE $[\eta,(\eta^+)^n]$

$$[\eta,(\eta^+)^n] = n(\eta^+)^{n-1}$$

<u>DIM</u> X INDUZIONE

$n=1 \Rightarrow$ VERA $[\eta,\eta^+]=1$

SUPP SIA VERA PER $n-1$

$$[\eta,(\eta^+)^{n-1}] = (n-1)(\eta^+)^{n-2}$$

$$\rightarrow [\eta,(\eta^+)^n] = [\eta,\eta^+(\eta^+)^{n-1}] = \eta^+[\eta,(\eta)^{n-1}] + [\eta,\eta^+](\eta^+)^{n-1}$$
$$= (n-1)(\eta^+)^{n-1} + (\eta^+)^{n-1} = n(\eta^+)^{n-1} \qquad \square$$

$$\langle 0|\eta^n(\eta^+)^n|0\rangle = \langle 0|\eta^{n-1}\eta(\eta^+)^n|0\rangle = \langle 0|\eta^{n-1}\eta(\eta^+)^n|0\rangle - \langle 0|\eta^{n-1}\underbrace{(\eta^+)^n\eta|0\rangle}_{0}$$
$$= \langle 0|\eta^{n-1}[\eta,(\eta^+)^n]|0\rangle = (n)\langle 0|\eta^{n-1}(\eta^+)^{n-1}|0\rangle = n!\langle 0|0\rangle$$

$\Rightarrow$ SE $\langle 0|0\rangle = 1 \Rightarrow |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\eta^+)^n|0\rangle$ NORMALIZZATO

SONO TC $\begin{cases} H|n\rangle = E_n|n\rangle \\ \langle n|n\rangle = 1 \end{cases}$

$\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ FORMANO UNA BASE DI $\mathcal{H}$

IN QUANTO TALE SODDISFANO

$$\begin{cases} \langle n|m\rangle = \delta_{nm} \\ \sum |n\rangle\langle n| = \mathbb{1} \end{cases}$$

$\Rightarrow |A\rangle \in \mathcal{H} \longrightarrow |A\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n |n\rangle \qquad Q_n \in \mathbb{C} \qquad Q_n = \langle n|A\rangle$

INOLTRE

$$\langle A|A\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle A|n\rangle\langle n|A\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |Q_n|^2 < +\infty$$

$|A\rangle \longrightarrow \{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ RAPPRESENTAZIONE

<u>RAPPRESENTAZIONE DI $\mathcal{H}$ IN AUTOSTATI DI UNA OSS</u>

INTRODUCIAMO UNA BASE QUALUNQUE

$\{|e_n\rangle\}$ BASE ORTONORMALE DI $\mathcal{H}$

$\langle e_n|e_m\rangle = \delta_{nm}$

$\sum |e_n\rangle\langle e_n| = 1$

$\longrightarrow |A\rangle = \sum Q_n |e_n\rangle \qquad \sum |Q_n|^2 < \infty$

$\ell_2(\mathbb{C}) = \{$SUCCESSIONI A MODULO QUADRO CONV SU $\mathbb{C}\}$

POSSIAMO RAPPR $\mathcal{H}$ COME $\ell_2(\mathbb{C})$

SIA f OP LIN DI $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$

$f|A\rangle = |B\rangle$

$b_n = \langle e_n|B\rangle = \langle e_n|f|A\rangle = \sum_m \langle e_n|f|e_m\rangle\langle e_m|A\rangle$

$= \sum_m f_{nm} Q_m$

$\Longrightarrow f_{nm} = \langle e_n|f|e_m\rangle$ RAPPR DA UNA MATRICE

SE PRENDIAMO 2 OPERATORI ξ, η E VOGLIAMO RAPPR $\xi\eta$

$$(\xi\eta)_{nm} = \langle e_n|\xi\eta|e_m\rangle = \sum_r \langle e_n|\xi|e_r\rangle\langle e_r|\eta|e_m\rangle$$

$$= \sum_r \xi_{nr}\eta_{rm}$$ PRODOTTO RIGA x COLONNA

$$(\xi^+)_{nm} = \langle e_n|\xi^+|e_m\rangle = \langle e_m|\xi|e_n\rangle^* = \xi^*_{mn}$$

MATR HERMITIANO CONJ = MATR TRASPOSTA E CONIUGATA

PROBL MECCANICA QUANTISTICA

IL PRODOTTO TRA MATRICI NON È COMMUTATIVO, CIÒ INDUCE DEI PROBL

SIA ξ UN' OSS, SCEGLIAMO COME BASE DI $\mathcal{H}$ QUELLA DEI SUOI AUTOVETT

$\xi|\xi_k\rangle = \xi_k|\xi_k\rangle$ $\{|\xi_k\rangle\}$

CHE TIPO DI MATR SARÀ ξ RISP A $\{|\xi_k\rangle\}$?

$$\langle\xi_n|\xi|\xi_m\rangle = \xi_m\langle\xi_n|\xi_m\rangle = \xi_m\delta_{nm}$$

$\Rightarrow$ ξ È RAPPR DA UNA MATR DIAGONALE

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \xi_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \xi_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

IL PROBL È CHE QUESTA MATR HA UN NUM DI DI RIGHE E COLONNE

MA IL CONCETTO DI MATR È COMUNQUE BEN DEF

SE ξ È DEGENERE $\Rightarrow$ $\exists$ SSP DI DIM MAGGIORE DI 1 IN CUI ξ SARÀ RAPPR DALLO STESSO AUTOVAL

MA SI POSSONO SCEGLIERE BASI ORTONORM $\forall$ SSP

$\Rightarrow$ LA RAPPR CONTINUA A VALERE

OSS COMPATIBILI NELLA BASE DEGLI AUTOSTATI

PRENDIAMO ξ, η COMPATIBILI, CIOÈ $[\xi, \eta] = 0$ (COMMUTANO)

PRENDIAMO $\{|\xi_n\rangle\}$ BASE DI $\mathcal{H}$

SUPP ξ ABBIA UN SSP INVARIANTE DI DIM 3 (ξ DEGENERE)

$$\xi \longrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \xi_4 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

IN QUESTO SSP ξ È PROP ALLA MATRICE IDENTITÀ

$\Rightarrow$ SE ξ ED η COMMUTANO, IN QUESTO SSP DI DIM 3 NON C'È ALCUNA RESTRIZIONE SU η

$$\eta \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{matrix}} & & \emptyset \\ & \eta_{44} & \\ \emptyset & & \ddots \end{pmatrix}$$

CIOÈ η È FATTA A BLOCCHI OGNI BLOCCO CORRISP ALL' AUTOSP $\mathcal{H}_i$ DI AUTOVAL ξ_i PER ξ

CIOÈ ξ ED η COMMUTANO $\not\Rightarrow$ SONO ENTRAMBI DIAGONALI

IN GEN SCELTA UNA BASE DI AUTOVETT DI ξ, SE ξ ED η SONO COMPATIBILI SAPPIAMO SOLO CHE η PUÒ ESSERE SCRITTA A BLOCCHI

MA IN CIASCUN BLOCCO È POSSIBILE SCEGLIERE UNA BASE DI AUTOVETT SIMULTANEI

$\Rightarrow$ IN QUESTA BASE ANCHE η È DIAGONALE MA QUESTO NON GARANTISCE CHE GLI AUTOVAL DI η SIANO TRA LORO TUTTI DIVERSI

SE CE NE POSSONO DI UGUALI $\Rightarrow$ ξ & η NON POSSONO MAPPARE UN SIST COMPLETO DI OSS

$\Rightarrow$ DOVREMMO SCEGLIERE UN'ALTRA OSS COMPATIBILE CON ξ E η IN MODO RENDERE IL SIST COMPLETO

IN QUESTA BASE GLI AUTOVETT SIMULTANEI DELLE OSS CI PERMETTONO DI DISTINGUERE CIASCUN SSP IN MODO UNIVOCO CON UN AUTOVAL SIMULTANEO DI TUTTE LE OSS TRA LORO COMPATIBILI

ARBITRARIETÀ FASE

SCELTA ξ FISSIAMO $|\xi_k\rangle$ TC $\begin{cases} \langle \xi_k | \xi_l \rangle = \delta_{kl} \\ \sum |\xi_n\rangle\langle\xi_n| = 1 \end{cases}$

→ SONO COMPLETAMENTE FISSATI? NO.

FISSATA ξ, ANCHE SE NON DEGENERE, IL SUO AUTOSTATO $|\xi_n\rangle$ NON È UNIVOCO MA C'È ANCORA UNA LIBERTÀ DI FASE

POSSIAMO MODIF $|\xi_k\rangle \longrightarrow e^{i\varphi_k}|\xi_k\rangle$

QUESTA ARBITRARIETÀ È COMPATIBILE CON L'ESSERE UNO AUTOSTATO DI ξ CON AUTOVAL ξ_k E DI FAR PARTE DI UNA BASE ORTONORM COMPLETA

QUEST'ARBITRARIETÀ DI FASE ANDRÀ x UNO STATO $|A\rangle$ A MODIF I COEFF

$$a_n \longrightarrow a_n e^{-i\varphi_n}$$

QUANDO APPLICHEREMO UN OSS, I COEFF DELLA MATRICE DIVENTERANNO

$$\rho_{nm} \longrightarrow \rho_{nm} e^{i(\varphi_m - \varphi_n)}$$

FISSARE ξ $\not\Rightarrow$ FISSARE COMPLETAM GLI ELEM DELLA BASE

C'È UNA SCELTA ARBITRARIA SULLA FASE DEGLI AUTOSTATI DI ξ

NECESSITÀ DI $\mathcal{H}$ ∞ DIM

1) GLI STATI SONO RAGGI DI UNO SP $\mathcal{H}$ SU $\mathbb{C}$

2) LE OSS SONO OPERATORI AUTOAGGIUNTI $S(q,p)$ SU $\mathcal{H}$

3) $[q,p] = i\hbar \mathbb{1}$ DA REGOLE DI COMMUTAZ CANONICHE

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ È ∞ DIM

DIM

SUPP $\mathcal{H}$ FINITO DIM

$\Rightarrow$ SIA q CHE p SONO RAPPR DA MATR HERMITIANE $N \times N$

$(q_{nm} = q^*_{mn}, \; p_{nm} = p^*_{mn})$

$\rightarrow$ QUESTO È COMPATIBILE CON $[q,p] = i\hbar \mathbb{1}$?

$(qp)_{nm} - (pq)_{nm} \overset{?}{=} i\hbar \delta_{nm}$

$\sum_r (q_{nr} p_{rm} - p_{nr} q_{rm}) \overset{?}{=} i\hbar \delta_{nm}$ $\rightarrow$ NO

PRENDIAMO IL CASO $N=2$

$$q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow qp = \begin{pmatrix} ae+fg & af+fh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$$pq = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

$$(qp-pq)_{ij} \neq i\hbar \delta_{ij}$$

XKÉ NON BASTA UN # FINITO DI GR DI LIBERTÀ?

OSS

- X DIRE CHE 2 MATR A, B SONO TC $A \neq B$ DEVO DIRE CHE $\nexists$ BASE TC $A = B$
- $[i(qp-pq)]^* = i(qp-pq)$

NEL NOSTRO CASO VOGLIAMO $\underbrace{i[q,p]}_{A} \neq \underbrace{\lambda \mathbb{1}}_{B}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

A È AUTOAGGIUNTA CIOÈ HA UNO SPETTRO COMPLESSO $\Rightarrow$ È DIAGONALIZZ

NELLA BASE IN CUI È DIAG GLI ELEM (AUTOVAL) SONO REALI

SULLA MATR B TUTTI GLI AUTOVAL COINCIDONO

PUÒ ESSERE CHE A DIAGONALIZ CON AUTOVAL TUTTI COINCIDENTI?

$\det A = \prod^{N} A_i$ $\quad Tr\, A = \sum A_i$ $\quad A_i$ AUTOVAL

$Tr\, \lambda \mathbb{1} = N\lambda$

$i\, Tr[q,p] = i\, Tr(qp - pq)$

LA Tr DI UN COMMUTATORE DI DIM FINITA È

$Tr[A,B] = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$ (LA TRACCIA È INVARIANTE X PERMUTAZ)

$\Rightarrow N\lambda = 0$

$\Rightarrow$ IN DIM FINITA $[q,p] \neq i\hbar \mathbb{1}$ $\quad \square$

COME CI SALVIAMO IN DIM ∞?

OPERATORI UNITARI E TRASF CANONICHE

$\{|e_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ $\{|\tilde{e}_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ 2 BASI ORTONORM

*) $U|e_n\rangle = |\tilde{e}_n\rangle$ U MATRICE CAMBIO DI BASE

$\Rightarrow |A\rangle = \sum a_n |e_n\rangle \longrightarrow U|A\rangle = \sum a_n U|e_n\rangle = \sum a_n |\tilde{e}_n\rangle$

**) $\langle \tilde{e}_n| = \langle e_n| U^{\dagger}$

$\Rightarrow \langle \tilde{e}_n|\tilde{e}_m\rangle = \langle e_n| U^{\dagger} U |e_m\rangle = \delta_{nm}$

CIOÈ L'OPERATORE U PRESERVA IL PRODOTTO SCALARE

$\Rightarrow U^{\dagger}U = \mathbb{1}$

D'ALTRA PARTE

$UU^{\dagger} = U\left(\sum |e_k\rangle\langle e_k|\right)U^{\dagger} = \sum |\tilde{e}_k\rangle\langle \tilde{e}_k| = \mathbb{1}$

$\Rightarrow U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = \mathbb{1}$

SE POSSIAMO IN DIM FINITA

$AB = \mathbb{1} \Rightarrow A^{-1} = B \Rightarrow BA = \mathbb{1}$

IN DIM ∞ QUESTO PERÓ NON SUCCEDERE

ESS: $U|e_n\rangle = |\tilde{e}_n\rangle = |e_{n+1}\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ IL SSP $\{|e_1\rangle\} \notin \mathrm{Im}\, U$ ANCHE SE $U^{\dagger}U = \mathbb{1}$

XKÉ MANDA UN INS ORTONORM IN UN ALTRO MA NON È VERO

CHE $UU^{\dagger} = \mathbb{1}$ XKÉ NON MANDA UN INS COMPLETO IN UN INS COMPLETO

U op TC $UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = \mathbb{1}$ È DETTO UNITARIO

X DEF LASCIA INV IL PROD SCAL $\langle B|U^{\dagger}U|A\rangle = \langle B|A\rangle$

CONSIDERIAMO DATO U UNITARIO GLI OPERATORI

$\tilde{q} = U q U^{-1}$ $\quad \tilde{p} = U p U^{-1}$

$$[\tilde{q}, \tilde{p}] = [U q U^{-1}, U p U^{-1}] = U q U^{-1} U p U^{-1} - U p U^{-1} U q U^{-1} =$$
$$= U q p U^{-1} - U p q U^{-1} = U [q, p] U^{-1} = i\hbar U U^{-1} = i\hbar \mathbb{1}$$

$\Rightarrow$ LE REGOLE DI COMMUTAZ RIMANGONO INVARIATE SE TRASF q E p CON UN OPERATORE UNITARIO

DATE $[\tilde{q}_i, \tilde{p}_j] = i\hbar$ $\exists U : \tilde{q}_i = U q U^{-1}$ E $\tilde{p}_j = U p_j U^{-1}$? SÌ

<u>TEOR DI VON NEUMANN</u>

DATO UN INS DI VAR $\tilde{q}, \tilde{p}$ CANONICHE $\exists$ UN OPERATORE UNITARIO CHE IMPLEMENTA LA TRASF SULLE VAR q, p

CIOÈ IN MC SI PASSA TRA SIST DI VAR CANONICHE ATTRAVERSO TRASF CANONICHE

IN QM $\exists U$ CHE IMPLEMENTA LA TRASF

$\Rightarrow$ LE TRASF UNITARIE RAPPR QUELLO CHE IN MC ERANO LE TRASF CANONICHE

ES: OSCILL ARMONICO

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$$

IL RUOLO DI p E $m\omega q$ NELL HAMILTONIANA È ANALOGO

$\Rightarrow$ IN MC TRASF $q \longrightarrow \tilde{q} = p/m\omega$

$p \longrightarrow \tilde{p} = -m\omega q$ (– KRISP { } DI POIS)

$$\{\tilde{q}, \tilde{p}\} = \{q, p\} = 1$$

ANALOG

$$[\tilde{q}, \tilde{p}] = -[p, q] = [q, p] = i\hbar$$

$\Rightarrow$ X TEOR VON NEUMANN $\exists\, U$ OP TC

$$H(q,p) = H(\tilde{q}, \tilde{p}) = H(UqU^{-1}, UpU^{-1})$$

XKÉ H FUNZ DI POTENZA QUADRATA DI q O p

$$= U H(q,p) U^{-1}$$

$\Rightarrow UHU^{-1} = H \Rightarrow UH = HU$

$\Rightarrow [U, H] = 0$

NELL'OSCILLATORE ARMONICO ABBIAMO DETTO CHE H NON DEGENERE

$\Rightarrow$ GLI AUTOVETT DI H SONO ANCHE AUTOVETT DI U

$U|E\rangle = \lambda|E\rangle$ MA U UNITARIO

$$\Rightarrow \underbrace{\langle E|U^{+}}_{\langle E|\lambda^{+}} \underbrace{U|E\rangle}_{\lambda|E\rangle} = \langle E|E\rangle$$

$\Rightarrow$ AUTOVAL DI U: $|\lambda|^2 = 1$

GLI AUTOVAL DI UN OPERATORE UNITARIO HANNO MODULO 1

$$\Rightarrow \langle E|p^2/2m|E\rangle = \langle E|\tilde{p}^2/2m|E\rangle$$

$$= \langle E|\tfrac{1}{2} m\omega^2 q^2|E\rangle$$

$\Rightarrow \langle E|T|E\rangle = \langle E|V|E\rangle$ TEOREMA VIRIALE

$\downarrow$ VALORE MEDIO EN CINETICA

$\downarrow$ VALORE MEDIO POTENZIALE

DETERMINAZ DELLO SPETTRO DI H

$H|E\rangle = E|E\rangle$

TEOR SPETTRALE: DATO UN OP. AUTOAGGIUNTO QUESTO AMMETTE SPETTRO COMPLETO ED È POSSIBILE DET

$\{|e_\alpha\rangle\}_{\alpha=1}^{N}$ IN DIM FINITA

SCELTA UNA BASE $\longrightarrow H = \{H_{mk}\}$ MATRICE

$\longrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{N} H_{mk} \, V_k^{(\alpha)} = \lambda_\alpha V_m^{(\alpha)}}$ EQ. AGLI AUTOVAL

LA SI PUÒ RISCRIVERE

$\sum (H_{nk} - \lambda_\alpha \delta_{nk}) V_k^{(\alpha)} = 0 \Rightarrow \det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0$ EQ. SECOLARE

$\rightarrow$ EQ. ALGEBRICA DI GR n IN λ

IN DIM FINITA POSSO USARE IL det MA NON IN DIM ∞

$\Rightarrow$ COME SI RISOLVE?

SPETTRO DI q E p

ABBIAMO ESAMINATO I PRINCIPI DELLA QM, DEF LO SP DELLE OSS ED IMPOSTO IL PRINCIPIO DI QUANTIZZAZIONE ATTRAVERSO LE REGOLE DI COMMUTAZ CANONICHE

$[q,p] = i\hbar \qquad q,p$ OSS $\Rightarrow q = q^\dagger \quad p = p^\dagger$

ABBIAMO RICHIESTO CHE LE OSS AVESSERO UNO SPETTRO DISCRETO E FOSSE POSSIBILE COSTRUIRE UNA BASE DI AUTOSTATI

MA SE PENSIAMO A q,p QUESTE NON SONO OSS IN SENSO PROPRIO

P.A. SUPP $|x\rangle$ AUTOSTATO DI q $\qquad q|x\rangle = x|x\rangle$

$i\hbar\langle x|x\rangle = i\hbar\langle x|[q,p]|x\rangle = i\hbar[\langle x|qp|x\rangle - \langle x|pq|x\rangle]$

$= i\hbar\langle x|p-p|x\rangle = 0 \qquad \Rightarrow |x\rangle$ HA NORMA 0

$\rightarrow$ MA NON CI SONO STATI DI NORMA ZERO $\Rightarrow$ ASSURDO

INOLTRE

$\forall a \in \mathbb{R}$ CONSIDERO LA TRASLAZ $\begin{cases} q \to \tilde{q} = q - a \\ p \to \tilde{p} \end{cases}$

SE q, p CANONICHE $([q,p] = i\hbar) \Rightarrow$ ANCHE $\tilde{q}, \tilde{p}$ $([\tilde{q}, \tilde{p}] = i\hbar)$

$\Rightarrow$ X VON NEUMANN $\exists$ OP UNITARIO $U(a)$ TC

$$\begin{cases} U(a)\, q\, U^{-1}(a) = \tilde{q} = q - a \\ U(a)\, p\, U^{-1}(a) = \tilde{p} = p \end{cases}$$

MOLTIP $U(a)$ A DX

$$\begin{cases} U(a)\, q = q\, U(a) - a\, U(a) \\ U(a)\, p = p\, U(a) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} [q, U(a)] = a\, U(a) \\ [p, U(a)] = 0 \end{cases}$$

LA 1° EQ. ASSOMIGLIA ALLA COMMUTAZ TRA H E η / η^+

$\to$ SUPP $\exists$ $|x\rangle$ AUTOSTATO DI q : $q|x\rangle = x|x\rangle$

QUESTO VALE $q\,U(a)|x\rangle$?

$$q\,U(a)|x\rangle = U(a)\,q|x\rangle + [q, U(a)]|x\rangle$$

$$= x\,U(a)|x\rangle + a\,U(a)|x\rangle = (x+a)\,U(a)|x\rangle$$

SE X HP $\exists$ AUTOSTATO $|x\rangle$ DI q

$\Rightarrow$ APPLICANDO $U(a)$ OTTENGO UN AUTOSTATO DI q CON AUTOVAL TRASLATO $x+a$ $\forall a$

$\Rightarrow$ OTTENGO UN ∞ NON NORMABILE DI AUTOSTATI $\forall$ AUTOSTATO DI q

$\forall a \in \mathbb{R}$ $\quad U(a)|x\rangle = |x+a\rangle$

IMPOSSIBILE XKÉ ABBIAMO RICHIESTO $\mathcal{H}$ SEPARABILE

CIOÉ LA BASE DI QUESTO DP DEVE ESSERE NORMABILE

$\Rightarrow$ NON PUÒ VALERE $q|x\rangle = x|x\rangle$

CIOÈ IN $\mathcal{H}$ $\nexists$ AUTOSTATI DI q

POSSIAMO RIPETERE IL RAGIONAM. X L'IMPULSO

$$b \in \mathbb{R} \longrightarrow V(b) \text{ t.c. } \begin{cases} V(b)\, q\, V^{-1}(b) = q \\ V(b)\, p\, V^{-1}(b) = p - b \end{cases}$$

NÉ LA POSIZ q NÉ L'IMPULSO p (IN TERMINI DI CUI COSTRUIAMO LE OSS) SONO OSS (CONSEGUENZA REGOLE DI COMMUTAZ CANONICHE)

TORNIAMO ALLE EQ. PREC

$$\begin{cases} [q, U(a)] = a\, U(a) \\ [p, U(a)] = 0 \end{cases} \Longrightarrow U(a) \text{ NON DIPENDE DA } q$$

$$\Rightarrow [q, U(a)] = a\, U(a) = i\hbar \frac{\partial U}{\partial p}$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dp} = -\frac{i}{\hbar} a\, U(a)$$

SE TRASLIAMO DI $a = 0 \Rightarrow U(0) = \mathbb{1} \longrightarrow$ PROBL DI CAUCHY

$$\Rightarrow \boxed{U(a) = e^{-\frac{i}{\hbar} a p}} \quad \text{OP. DI TRASLAZ}$$

X a PICCOLO:

$$U(a) \simeq \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} a p + o(p^2)$$

A MENO DI $-\frac{i}{\hbar} a$ $U(a)$ È PARENTE STRETTO DI p

$\longrightarrow$ IN MC AVEVAMO COSTRUITO COME GENERATORE DI TRASLAZ PROPRIO p

$$U(a) = e^{-\frac{i}{\hbar} a p} \longrightarrow U^{+}(a) = e^{\frac{i}{\hbar} a p}$$

(XKÉ $p^{+} = p$)

ANALOG $V(b) = e^{i/\hbar\, b q}$

RAPPR DI SCHRODINGER DELLE COORD

IL FATTO CHE GLI IMPULSI NON ABBIANO AUTOSTATI IN $\mathcal{H}$ VIENE RISOLTO ATTRAVERSO LA RAPPR DI SCHRODINGER DELLE POSIZ

ABBIAMO VISTO CHE SE $\exists\, |x\rangle \Rightarrow |x\rangle \notin \mathcal{H}$

QUESTO NON SIGNIFICA CHE $\nexists\, |x\rangle$

IPOTIZZIAMO $\exists\, \langle x|$ $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |A\rangle \longrightarrow \langle x|A\rangle$ (IN REALTÀ L'HP È $\exists\, \langle x|A\rangle$)

$\langle x|A\rangle = \varphi_A(x)$ FUNZ D'ONDA ASSOCIATA AD $|A\rangle$

SE Hp $\exists$ DI QUESTE FUNZ D'ONDA POSSIAMO CHIEDERCI CHI È $\langle B|A\rangle$

SE ABBIAMO UNA BASE

$$\langle B|A\rangle = \sum_k \langle B|e_k\rangle\langle e_k|A\rangle = \sum_k \langle e_k|B\rangle^* \langle e_k|A\rangle$$

(XKÉ $\sum_k |e_k\rangle\langle e_k| = \mathbb{1}$)

MA I VETT $\langle x|$ NON SONO NUMERABILI MA CONTINUI

$\Rightarrow \int dx\, |x\rangle\langle x| = \mathbb{1}$ QUESTA DOVREBBE ESSERE LA RELAZ DI COMPLETEZZA

SE QUESTA FOSSE VALIDA

$$\Rightarrow \langle B|A\rangle = \int dx\, \langle B|x\rangle\langle x|A\rangle = \int dx\, \varphi_B^*(x)\, \varphi_A(x)$$

$$\Rightarrow \langle A|A\rangle = \int dx\, |\varphi_A(x)|^2 < \infty$$

COSÌ COME ABBIAMO RAPPR $\mathcal{H}$ CONSIDERANDO $\ell_2(\mathbb{C}) = \{a_k\}$ TC $\sum |a_k|^2 < \infty$

LA RAPPR DI SCHR DELLE COORD EQUIVALE A INTERPRETARE CHE

$$\mathcal{H} \equiv L_2(\mathbb{C}) = \{\text{FUNZ } \varphi(x) \text{ TC } \int dx\, |\varphi(x)|^2 < \infty\}$$

SE $q = q^+$ COME SI RAPPR IN QUESTO SP?

COME ABBIAMO RICHIESTO $\langle x | q = \langle x | x$, SE VALE

$\Rightarrow q|A\rangle \rightarrow \langle x | q | A \rangle = x \varphi_A(x)$

ALTRIMENTI: RICHIEDO CHE $q \varphi_A(x) = x \varphi_A(x)$

COME POSSO RAPPR p?

p TC $[q,p] = i\hbar \mathbb{1}$

$p \varphi_A(x) := -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \varphi_A(x)$ È COMP CON LE REGOLE DI COMMUTAZ

CIOÈ $[q,p]\varphi(x) = qp\varphi(x) - pq\varphi(x)$

$= q\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)\right) - p x \varphi(x) = -i\hbar x \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x) + i\hbar \frac{\partial}{\partial x}(x\varphi(x))$

$= -i\hbar \cancel{x \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)} + i\hbar\left[\varphi(x) + \cancel{x\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)}\right] = i\hbar\varphi(x)$

$\Rightarrow$ OTTENGO UNA RAPPR DI $\mathcal{H}$ SE

$$\begin{cases} |A\rangle \longrightarrow \varphi_A(x) \\ q|A\rangle \longrightarrow x\varphi_A(x) \\ p|A\rangle \longrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\varphi_A(x) \end{cases}$$

RAPPR DI $\mathcal{H}$ CON $L_2(\mathbb{C})$

QUINDI NELLA RAPPR DI SCHR DELLE COORD $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

POSSIAMO ASSOCIARE $\forall |A\rangle \in \mathcal{H}$ $\quad |A\rangle \longrightarrow \varphi_A(x_1 \dots x_n)$

CON $\langle A|A\rangle \longrightarrow \int dx_1 \dots dx_n \, |\varphi_A(x_1 \dots x_n)|^2 < \infty$

ABBIAMO DEF L'AZIONE DI $q_i |A\rangle = x_i \varphi_A(x_1 \dots x_n)$

INOLTRE $p_i |A\rangle \longrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_A(x_1 \dots x_n)$

$$\Rightarrow [q_i, p_j]|A\rangle = i\hbar \, \delta_{ij} |A\rangle$$

$$[q_i, q_j]|A\rangle = \underbrace{[x_i, x_j]}_{\text{SONO NULL}}|A\rangle = 0$$

$$[p_i, p_j]|A\rangle = -\hbar^2 \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]}_{\text{AZIONE DERIVATA CONTRATTA}} |A\rangle = 0$$

DOBBIAMO ANCORA VERIF CHE $q_i^+ = q_i$

CIOÈ $\langle B|q_i|A\rangle = \langle A|q_i|B\rangle^*$

$$\int dx_1 \dots dx_n \, \varphi_B^*(x_1 \dots x_n) \varphi_A(x_1 \dots x_n) x_i = \left[\int dx_1 \dots dx_n \, \varphi_A^*(x_1 \dots x_n) \varphi_B(x_1 \dots x_n) x_i\right]^*$$

x L'IMPULSO $p_i^+ = p_i$ CIOÈ

$$-i\hbar \int dx_1 \dots dx_n \, \varphi_B^*(x_1 \dots x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_A(x_1 \dots x_n)$$

$$\stackrel{?}{=} \left(-i\hbar \int dx_1 \dots dx_n \, \varphi_A^*(x_1 \dots x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_B(x_1 \dots x_n)\right)^*$$

$$\rightarrow \left(-i\hbar \int d\underline{x} \, \varphi_A^* \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_B\right)^* = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} d\underline{x} \, \varphi_A \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_B^*$$

$\forall x_i$: INTEGRO SU TUTTO IL VOL

INTEG x PARTI

$$= -i\hbar \int d\underline{x} \, \varphi_B^* \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_A + i\hbar \underbrace{\int d\underline{x} \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_A \varphi_B^*)}_{\text{INTEG SU TUTTO IL VOL DI UNA DIVERGENZA}}$$

POSSO INTEG PRENDERE IL CONTRIBUTO CHE VIENE DAI BORDI CIOÈ QUANDO $\varphi_A \varphi_B^*$ PRENDONO I VAL $+\infty$ E $-\infty$

$$(\varphi_A(\infty)\varphi_B^*(\infty) - \varphi_A(-\infty)\varphi_B^*(-\infty))$$

SICCOME $\varphi_A, \varphi_B \in L_2(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \int d\underline{x}\, |\varphi_A|^2 < \infty \qquad \int d\underline{x}\, |\varphi_B|^2 < \infty$

QUESTO NON RICHIEDE STRETTAM CHE LE φ ABBIANO lim A $\pm\infty$

MA È CHIARO CHE L'INS DELLE FUNZ CHE ARRIVANO lim A $\pm\infty$

(E SICCOME L'INTEG È CONV IL lim È NEC NULLO) COSTITUISCE

UN INSIEME DENSO

$\Rightarrow$ SU UN INS DENSO DI FUNZ, QUELLE TC $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$, POSSIAMO

ELIDERE IL III TERMINE

$\Rightarrow$ ABBIAMO DUN CHE AGISCONO SU QUESTO SOTTOINS DENSO DI FUNZ

ANCHE p NELLA RAPPR DI SCHR DELLE COORD È UN OPERATORE AUTOAGGIUNTO

QUI EMERGE UNA DIFFICOLTÀ GIÀ VISTA:

SE ABBIAMO UNA FUNZ $\varphi_A(x)$ TC $\int dx\, |\varphi_A(x)|^2 < \infty$

DEF $|A'\rangle = q|A\rangle \Rightarrow \varphi_{A'}(x) = x\,\varphi_A(x)$

LA POSIZ È CHIARAMENTE UN OP NON LIMITATO

$\Rightarrow$ q NON PUÒ AGIRE SU QUALUNQUE FUNZ D'ONDA

ANCHE SE È INTEGRABILE AL QUADRATO MA È OVVIAMENTE:

$\int d\underline{x}\, |\varphi_{A'}(x)|^2 = \int d\underline{x}\, x^2 |\varphi_A(x)|^2$ NON È DETTO SIA FINITA

$\Rightarrow$ L'AZIONE DI q È DEF SOLO SU UN SOTTOINS DELLE FUNZ D'ONDA

NON BASTA $\int dx\, |\varphi_A(x)|^2 < \infty$ MA DEVE ANDARE A ZERO ABBASTANZA RAPIDAMENTE

ANALOG NON POSSIAMO NEANCHE AFFERMARE $\int d\underline{x}\, \left|\frac{\partial \varphi_A}{\partial x}\right|^2 < \infty$

IN GEN q E p NON SONO BEN DEF SU QUALUNQUE FUNZ D'ONDA

x ES: $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

$H|E\rangle = E|E\rangle$ LA POSSO SCRIVERE IN RS

$$\underline{p}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} p_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$= -\hbar^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = -\hbar^2 \Delta$$

$\hookrightarrow$ LAPLACIANO

$\rightarrow H|E\rangle = E|E\rangle$ DIVENTA

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\underline{x})\right]\varphi_E(\underline{x}) = E\varphi_E(x)}$$

EQ. DI SCHRODINGER

EQ. DELLE AUTOFUNZ IN RS

RS DEGLI IMPULSI

RS DELLE COORD: FUNZ D'ONDA CHE SONO FUNZ DELLE COORD E

q AGISCE SU ESSE COME MOLTIPLIC

DATO IL FORMALISMO CANONICO TRA q E p $\exists$ UNA RS DEGLI IMPULSI

IN QUESTA CIASCUNO STATO AVRÀ RAPPR CON FUNZ D'ONDA DELLE IMPULSI

$p \rightarrow k$ (VALORI DELL'IMPULSO)

$$|A\rangle \longrightarrow \varphi_A(k)$$

$$p_i|A\rangle \longrightarrow k_i\,\varphi_A(k)$$

$$q_i|A\rangle \longrightarrow +i\hbar \frac{\partial}{\partial k_i}\varphi_A(k)$$

IL SGN DERIVA DALL'IMPOSIZ DI $[q_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$

(SCAMBIO q E p = TRASF ANTICANONICA)

SIGNIFICATO FISICO DI $|\psi_A(x)|^2$

SUPP DI AVERE UN OSS FUNZ SOLO DI q: $f(q)$

DATO UNO STATO $|A\rangle$ NORMALIZ $\Rightarrow$ ABBIAMO DEF IL VAL MEDIO

$$\overline{f(q)} = \langle A | f(q) | A \rangle$$

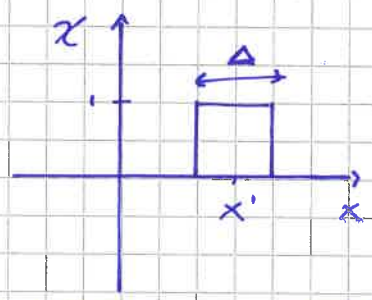
$$= \int dx\, \psi_A^*(x)\, f(x)\, \psi_A(x) = \int dx\, f(x)\, |\psi_A(x)|^2$$

x FUNZ SOLO DELLA POSIZ x DET IL VAL MEDIO ENTRA SOLO IL MODULO QUADRO $|\psi_A(x)|^2$, NON LA FUNZ IN SÉ

$\rightarrow$ VOGLIAMO MOSTRARE CHE HA UN SIGNIF FISICO DIRETTO

INTRODUCIAMO $\chi_{x'\Delta}(q)$ FUNZ CARATT DELL' INT $[x'-\Delta/2, x'+\Delta/2]$

$$\chi_{x'\Delta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in [x'-\Delta/2, x'+\Delta/2] \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$



OSS CHE $\chi^2_{x'\Delta} = \chi_{x'\Delta}$

$\rightarrow$ DEF DI OPERATORE DI PROIEZIONE

(OP AUTOAGGIUNTI CON AUTOVAL 0, 1)

$\Rightarrow$ DATO UN CERTO STATO

$$\overline{\chi_{x'\Delta}(q)} = 0 \cdot p_0 + 1\, p_1 = p_1$$

$$\Rightarrow p_1 = \int dx\, \chi_{x'\Delta}(x)\, |\psi_A(x)|^2 = \int_{x'-\Delta/2}^{x'+\Delta/2} dx\, \chi_{x'\Delta}(x)\, |\psi_A(x)|^2$$

SE $\Delta \to 0$ $\simeq |\psi_A(x')|^2 \Delta$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta \to 0} p_1/\Delta = |\psi_A(x')|^2$$

DENSITÀ DI PROBAB DI TROVARE LA PARTICELLA IN POSIZ x'

PERFETTAM COMPATIBILE CON IL CASO GEN

$$\overline{f(q)} = \int dx\, \underbrace{|\psi_A(x)|^2}_{\text{PROBAB DI TROVARE LA PART IN } x}\, f(x)$$

RS DELLE COORD E FUNZ D'ONDA

$|A\rangle \in \mathcal{H} \quad [q,p] = i\hbar \mathbb{1}$

IN RS DELLE COORD

$$\mathcal{H} = \mathbb{L}^2(\mathbb{C}) \qquad \begin{cases} q\,\varphi_A(x) = x\,\varphi_A(x) \\ p\,\varphi_A(x) = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi_A(x) \end{cases}$$

CON $\varphi_A(x) = \langle x|A\rangle$ FUNZIONE D'ONDA ($|x\rangle$ AUTOSTATO q) $\notin \ell_2(\mathbb{C}) = \mathcal{H}$

IN QUESTA NOTAZ q È ~~[illegible]~~ CON MOTTO

$\langle x|q|A\rangle = x\,\varphi_A = x\langle x|A\rangle$

$\langle A|q|x\rangle = x\langle A|x\rangle$

$q|x\rangle = x|x\rangle$ (DEF DI AUTOSTATO DI q)

COS'È $|x\rangle$? $\quad |x\rangle \notin \mathcal{H}$ (IN NOTAZ DI DIRAC)

$\Rightarrow$ NON È UNO STATO MA UNO STATO IN SENSO GENERALIZZATO

$$\boxed{\langle B|A\rangle = \int dx\, \varphi_B^* \varphi_A = \int dx\, \langle B|x\rangle\langle x|A\rangle}$$ PROIEZ DI A SU B

$$\boxed{\mathbb{1} = \int dx\, |x\rangle\langle x|}$$ RELAZ DI COMPLETEZZA IN RS X COORD

STRUTTURA FUNZIONE D'ONDA:

$$\varphi_A(x) = \langle x|A\rangle = \int dx' \langle x|x'\rangle\langle x'|A\rangle = \int dx'\, g(x,x')\,\varphi_A(x')$$

$\forall\, |A\rangle \in \mathcal{H} \quad \forall\, \varphi_A(x) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{C})$

$g(x,x') := \langle x|x'\rangle$

SE APPLICHIAMO UNA TRASLAZ $\quad g(x,x') \longrightarrow g(x+a, x'+a)$

$$\int dx'\, g(x+a, x'+a)\,\varphi_A(x') = \int dx'\, g(x+a, x'+a)\,\tilde{\varphi}_A(x'+a)$$

$$= \int dy\, g(x+a, y)\,\tilde{\varphi}_A(y) = \tilde{\varphi}_A(x+a) = \varphi_A(x)$$

$\Rightarrow \varphi_A(x') = \tilde{\varphi}_A(x'+a) \Rightarrow g(x,x') = g(x-x')$ DIPENDE SOLO DALLA COORD DIFFERENZA

$$\varphi_A(x) = \int dx' \, g(x-x') \, \varphi_A(x')$$

$\Rightarrow g(x-x') = \delta(x-x')$ NON È UNA FUNZ MA UNA DISTRIB

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \, dx = 1$$

$$\Rightarrow \varphi_A(x) = \int dx' \, \delta(x-x') \, \varphi_A(x')$$

LEGAME TRA RS IN COORD E IMPULSI

$$\begin{cases} \varphi_A(k) = \langle k | A \rangle \\ \varphi_A(x) = \langle x | A \rangle \end{cases}$$

$|k\rangle$ AUTOSTATO DI p $\in \mathcal{H}$

$p|k\rangle = k|k\rangle$

$$\varphi_A(k) = \langle k | A \rangle = \int dx \langle k | x \rangle \langle x | A \rangle = \int dx \langle k | x \rangle \varphi_A(x)$$

$$\varphi_A(x) = \langle x | A \rangle = \int dk \langle x | k \rangle \langle k | A \rangle = \int dk \langle x | k \rangle \varphi_A(k)$$

$$\langle x | k \rangle = \langle k | x \rangle^*$$

$$\rightarrow \begin{cases} \langle x | p | k \rangle = k \langle x | k \rangle \\ \langle x | p | k \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} \langle x | k \rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow -i\hbar \frac{d}{dx} \langle x | k \rangle = k \langle x | k \rangle \qquad \text{EQ. DIFF}$$

$$\begin{cases} \langle x | k \rangle = c \, e^{\frac{i}{\hbar} k x} \qquad (1) \\ \langle k | k' \rangle = \delta(k-k') \end{cases}$$

$$\rightarrow \langle k | k' \rangle = \int dx \langle k | x \rangle \langle x | k' \rangle = \int dx \langle x | k \rangle^* \langle x | k' \rangle$$

$$\overset{(1)}{=} |c|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{\frac{i}{\hbar}(k'-k)}$$

$$= |c|^2 \, 2\pi\hbar \, \delta(k-k')$$

$$\Rightarrow |c|^2 2\pi\hbar = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$\varphi_A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \; e^{-\frac{i}{\hbar}kx} \; \psi_A(x)$$

$$\psi_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dk \; e^{\frac{i}{\hbar}kx} \; \varphi_A(k)$$

LE FUNZ D'ONDA IN RS DELLE COORD E DEGLI IMPULSI SONO LEGATE DA UNA TRASFORMATA DI FOURIER

AUTOSTATI GENERALIZ PER q E p: SPETTRO CONTINUO

q E p NON SONO OSS IN SENSO STRETTO:

1) NON SONO OP LIMITATI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, |\psi(x)|^2 < \infty \quad \not\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x^2 \, |\psi(x)|^2 < \infty$$

2) HANNO UNO SPETTRO (GENERALIZ) CONTINUO

$$q|x\rangle = x|x\rangle \qquad x \in \mathbb{R}$$

DEF $q_\Delta := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \, \chi_{x_n \Delta}(q)$

$$\langle A|q|A\rangle = \bar{q} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; q \, |\psi_A(x)|^2 = \lim_{\Delta \to 0} \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \, |\psi_A(x_n)|^2$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \langle A|q_\Delta|A\rangle$$

$\Rightarrow \bar{q} = \lim_{\Delta \to 0} \bar{q}_\Delta$ PER Δ PICCOLO $q_\Delta \simeq q$

q_Δ A Δ FISSATO È UNA BUONA OSS: HA UNO SPETTRO DISCRETO (ANCHE SE NON LIMITATO

x_n SONO I SUOI AUTOVAL E $\chi_{x_n \Delta}(x)$ SONO LE AUTOFUNZ

$\lim$ DI FUNZ = FUNZ GENERALIZZATE

ANALOG

q E p SONO OSS GENERALIZZATE POICHÉ $\lim$ DI OSS PROPRIE

PARTICELLA LIBERA IN d=1

$H = p^2/2m$ → NON DIP DA q ⇒ $[H,p]=0$

INVARIANTE X TRASLAZ $q \to q+a$

H, p OSS COMPATIBILI, p È NON DEGENERE

$$H|p'\rangle = \frac{p^2}{2m}|p'\rangle = \frac{p'^2}{2m}|p'\rangle = \mathcal{E}|p'\rangle$$

$|p'\rangle$ È UNO STATO IN SENSO GEN $-\infty < p' < \infty$ CON CONTINUITÀ

$\mathcal{E} = p'^2/2m$ $\quad 0 \leq \mathcal{E} < \infty$ CON CONTINUITÀ

⇒ H DELLA PARTICELLA LIBERA HA UNO SPETTRO CONTINUO

SE $\mathcal{E} \neq 0$ ⇒ GLI AUTOVETT COMPLESSI DI H SONO

$\alpha|p'\rangle + \beta|-p'\rangle \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

⇒ QUESTO È UN SSP DI DEGENERAZIONE 2

⇒ H È DEGENERE

CLASSICAMENTE LA PART VA VERSO DX O SX

$$\alpha\langle x|p'\rangle + \beta\langle x|-p'\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ip'x}{\hbar}} + \frac{\beta}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{ip'x}{\hbar}}$$

$H|\mathcal{E}\rangle = \mathcal{E}|\mathcal{E}\rangle$ EQ. DI SCHR

$$H = p^2/2m = 1/2m\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = \mathcal{E}\varphi(x)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{\mathcal{E}}(x) = A e^{\frac{i\sqrt{2m\mathcal{E}}}{\hbar}x} + B e^{-i\frac{\sqrt{2m\mathcal{E}}}{\hbar}x}$$

DEF TEOR DI DEGENERAZ

DEF I OPERATORE INVERSIONE SPAZIALE $q \to -q$ $p \to -p$

ABBIAMO CHE X UNA PARTIC LIBERA

$$[H, p] = 0 \quad [H, I] = 0 \quad [p, I] \neq 0$$

INFATTI:

$$\begin{cases} I q I^{-1} = -q \\ I p I^{-1} = -p \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} I q = -q I \\ I p = -p I \end{cases} \Rightarrow [p, I] \neq 0$$

$$I H I^{-1} = \frac{1}{2m} I p^2 I^{-1} = \frac{1}{2m} I p I^{-1} I p I^{-1} = \frac{1}{2m}(-p)^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$\Rightarrow [H, I] = 0 \Rightarrow H$ È DEGENERE

OPERATORE INVERSIONE E PROP

$$\begin{cases} I q I^{-1} = -q \\ I p I^{-1} = -p \end{cases}$$ OP INVERSIONE SPAZIALE

POSSIAMO DEF ANCHE SUGLI STATI

$$I \psi_A(x) = \psi_A(-x)$$

DATO CHE È COMPATIBILE CON LA DEF PRECEDENTE

OSS: • $I^2 = \mathbb{1}$ INFATTI:

$$I^2 \psi_A(x) = I I \psi_A(x) = I \psi_A(-x) = \psi_A(x)$$

• I AUTOAGGIUNTO

$$\langle A | I | B \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi_A^*(x) \psi_B(-x) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_B^*(-x) \psi_A(x) \right)^*$$

CAMBIO COORD $x \to -x$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_B^*(x) \psi_A(-x) \right)^* = \langle B | I | A \rangle^*$$

$\Rightarrow I = I^+$

• $I^{-1} = I^+ = I$ UNITARIO

ESSENDO AUTOAGGIUNTO QUAL'È IL SUO SPETTRO?

CIOÈ CE $\varphi_\omega(x)$ TC $I\varphi_\omega(x) = \omega\varphi_\omega(x)$ $\qquad I^2 = \mathbb{1}$

$\rightarrow$ ABBIAMO CHE $I^2\varphi_\omega(x) = \omega I\varphi_\omega(x) = \omega^2\varphi_\omega(x) = \varphi_\omega(x)$

$\Rightarrow \omega^2 = 1 \Rightarrow \omega = \pm 1$ AUTOVALORI DI I

SE $\omega = 1 \Rightarrow \varphi_+(x)$ TC $I\varphi_+(x) = \varphi_+(x)$

$\Rightarrow \varphi_+(-x) = \varphi_+(x)$ FUNZ PARI

SE $\omega = -1 \Rightarrow \varphi_-(x)$ TC $I\varphi_-(x) = -\varphi_-(x)$

$\Rightarrow \varphi_-(-x) = -\varphi_-(x)$ FUNZ DISPARI

SICCOME I AUTOAGGIUNTO $\Rightarrow \mathcal{H} = \underset{\text{F. PARI}}{\mathcal{H}_+} \oplus \underset{\text{F. DISP}}{\mathcal{H}_-}$ CON $\mathcal{H}_+ \perp \mathcal{H}_-$

$\Rightarrow$ POSSO DECOMPORRE OGNI FUNZ D'ONDA NELLA SUA PARTE PARI E DISPARI

$$\varphi(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[\varphi(x) + \varphi(-x)\right]}_{\text{PARI}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\varphi(x) - \varphi(-x)\right]}_{\text{DISPARI}}$$

$$I q I^{-1} \overset{?}{=} -q \iff I q = -q I$$

$$I q |A\rangle \rightarrow I q\,\varphi_A(x) = I x\,\varphi_A(x) = -x\,\varphi_A(-x)$$
$$= -q I\varphi_A(x) = -q I|A\rangle \quad \forall |A\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow I q = -q I \qquad \nabla$$

ANALOGO $I p I^{-1} \overset{?}{=} -p \iff I p \overset{?}{=} -p I$

$$I p |A\rangle \longrightarrow I\left(-i\hbar \frac{d}{dx}\varphi_A(x)\right) = I\left(-i\hbar\,\varphi_A'(x)\right) = -i\hbar\,\varphi_A'(-x)$$

$$p I |A\rangle \longrightarrow p\,\varphi_A(-x) = -i\hbar \frac{d}{dx}\varphi_A(-x) = i\hbar\,\varphi_A'(-x) \quad \forall |A\rangle$$

$$\Rightarrow I p = -p I \qquad \Pi$$

IN GEN $I f(q,p) I^{-1} = f(IqI^{-1}, IpI^{-1}) = f(-q,-p)$

SE IN GEN PRENDIAMO $H = p^2/2m + V(q)$

CHIEDERE $[I,H]=0$ CIOÈ $IHI^{-1} = H$ COMPORTA

$H(q,p) = H(-q,-p) = p^2/2m + V(-q)$

$\Rightarrow$ H È INVARIANTE SOTTO INVERSIONE SE $V(q)$ È UNA FUNZ PARI

x ES: OSCILLATORE ARMONICO

AVEVAMO VISTO CHE LE SUE AUTOFUNZ $|n\rangle$

$H|n\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})|n\rangle$

SONO NON DEGENERI

SE $[H,I]=0 \Rightarrow |n\rangle$ DEVE ESSERE AUTOSTATO DI I

$\Rightarrow$ LE FUNZ D'ONDA CHE RAPPR GLI AUTOSTATI DELL'ESAM

DEVONO ESSERE NEC O PARI O DISP

PARTICELLA LIBERA

$H = p^2/2m \longrightarrow$ GLI AUTOSPAZI CORRISP ALL'AUTOVAL $E = p'^2/2m$ SONO DEGENERI

$\alpha |p'\rangle + \beta |-p'\rangle$

LO ABBIAMO DEDOTTO PERCHÉ $[H, p] = 0$

$[H, I] = 0$

$[p, I] \neq 0$

$\Rightarrow$ PRESO UN AUTOSTATO DI p

$I|p'\rangle = |-p'\rangle$

QUESTO XKÉ ABBIAMO SCELTO DI RAPPR GLI STATI DI H IN TERMINI DI AUTOSTATI DELL'IMPULSO

$$\varphi_{p'} = A\, e^{\frac{i}{\hbar} p' x} \qquad \varphi_{-p'}(x) = B\, e^{-\frac{i}{\hbar} p' x}$$

POTREMMO SCEGLIERE DI RAPPR L'AUTOSTATO DI H NON COME AUTOSTATO DI p MA COME AUTOSTATO DI I CIOÈ IN TERMINI DELLA SUA ~~PARTE~~ PT PARI E DELLA SUA PT DISP

$$\alpha\, e^{\frac{i}{\hbar} p' x} \xrightarrow{\text{PARI}} \alpha \cos \frac{p'}{\hbar} x$$

$$\xrightarrow{\text{DISP}} \alpha \operatorname{sen} \frac{p' x}{\hbar}$$

SE AGISCO SULLA PARTE PARI CON p IN RS DELLE COORD

$\Rightarrow$ OTTENGO PARTE DISPARI E NON VICEVERSA

QUESTO È CONSEGUENZA DEL TEOR DI DEGENERAZ APPLICATO AD H DI UNA PARTICELLA LIBERA

SOL. EQ. DI SCHR 1D

$H = p^2/2m + V(q) \longrightarrow H|E\rangle = E|E\rangle \qquad |E\rangle \in \mathcal{H}$ ∞ dim

NEL CASO $\mathcal{H} \equiv \mathbb{L}^2(\mathbb{C})$ CIOÈ $|A\rangle \longrightarrow \varphi_A(x)$

$q|A\rangle \longrightarrow x\,\varphi_A(x) \qquad p|A\rangle \longrightarrow -i\hbar \frac{d}{dx}\varphi_A(x)$

$\Rightarrow [q,p]|A\rangle \longrightarrow -i\hbar\left[x, \frac{d}{dx}\right]\varphi_A(x) = i\hbar\varphi_A(x) = i\hbar\mathbb{1}|A\rangle$

ABBIAMO IMPLEMENTATO LE REGOLE DI COMMUTAZ SFRUTTANDO LA RS x COORD

$\Rightarrow H|E\rangle = E|E\rangle$ DIVENTA

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi_E''(x) + V(x)\varphi_E(x) = E\varphi_E(x)}$$

CON QUESTA VOGLIAMO DEF COMPLETAM LO SPETTRO DI H

$\longrightarrow \varphi_E''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x) - E\right]\varphi_E(x)$ EQ. LIN DEL II ORDINE

FISSANDO 2 COND INIZ OTTENIAMO UNA SOL $\forall E$

NOI VOGLIAMO SOL $\varphi_E \in \mathbb{L}^2(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\varphi_E(x)|^2 < \infty$

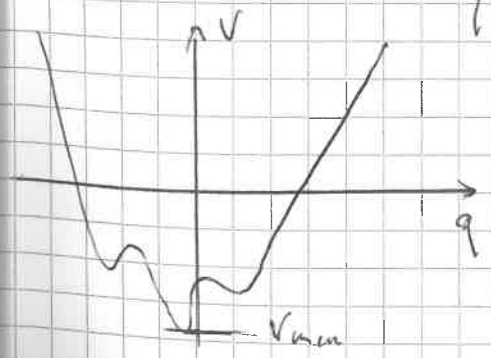
REGIONI CLASSICAMENTE ACCESSIBILI E INACCESSIBILI

IN MECCANICA CLASSICA, DATO $H = p^2/2m + V(q)$ POSSO PRENDERE COME $V(q)$ UNA QUALSIASI FUNZ DI q?

NON RICHIEDIAMO CHE ABBIA UN MIN, CIOÈ SIA LIMITATA DAL BASSO

ALTRIMENTI LA PARTIC VA A ∞ IN UN TEMPO FINITO

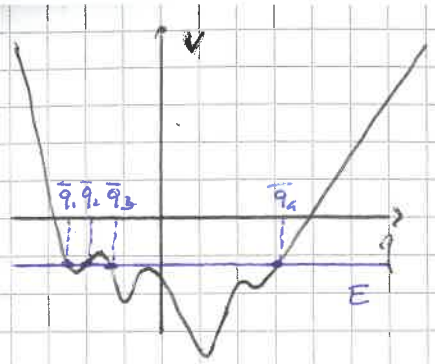
SE $\exists\, V_{min} \Rightarrow \lim_{q\to+\infty} V(q) = \lim_{q\to-\infty} V(q) = +\infty$ È IL CASO + SEMPLICE



QUESTO CASO È DETTO POTENZIALE CONFINANTE

ABBIAMO $E \geq V_{min}$ POICHÉ

$E = T + V$ DOVE $T \geq 0$ E $V \geq V_{min}$



SI DICE POT CONFINANTE X KÉ FISSATO E AVREMO UN CERTO # DI PTI IN CUI V PRENDE QUEL VALORE

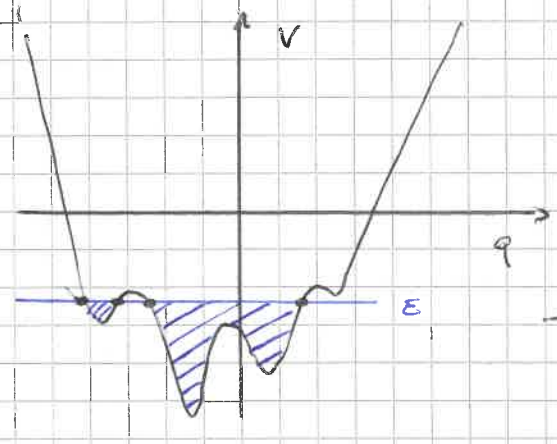
IN QUEI PTI $T(\bar{q}_i) = 0$

$V(\bar{q}_i) = E$

IL # DI $\bar{q}_i$ É SEMPRE PARI

CI POSSONO ESSERE DEGENERAZIONI DOVUTE A SOL DOPPIE

QUESTI PTI DETTI DI INVERSIONE DELIMITANO DELLE REGIONI IN CUI LA PARTICELLA RESTA CONFINATA CIOÉ ZONE DI MOTO PERIODICO



NON C'È MODO FISSATA E DI PASSARE DA UNA REGIONE ALL'ALTRA

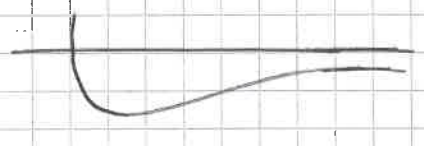
SI DOVREBBE PASSARE DA ZONE IN CUI $V > E$

$\Rightarrow T < 0$ IMPOSSIBILE

$\rightarrow$ IL MOTO É CLASSICAMENTE POSSIBILE QUANDO

$V(q) \leq E$

CHIARAMENTE SE V É CONFINATO DA UNA PTE MA VA A UNA COST DALL'ALTRA $\Rightarrow$ HA LA POSSIBILITÀ DI ANDARSENE A ∞



TORNIAMO ALL'EQ. DI SCHR

$$\psi_E''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x) - E\right]\psi_E(x)$$

$\Rightarrow \dfrac{\psi_E''}{\psi_E} \leq 0$ IN REGIONI CLASSICAM ACCESSIBILI

$\dfrac{\psi_E''}{\psi_E} \geq 0$ IN REGIONI CLASSIC INACCESSIBILI

QUESTO CI DÀ UN INFO SULLA CONCAVITÀ DELLA SOL NELLE DIVERSE REGIONI

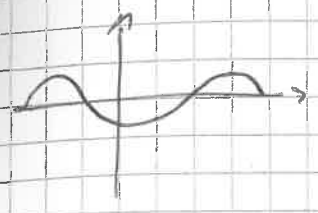
~~IN REGIONI ACCESS~~

IN REGION CLASSICAMENTE ACCESSIBILI $\varphi''(x)/\varphi(x) \leq 0$

CIOÈ IN REGION DOVE $\varphi \geq 0 \Rightarrow$ CONCAVITÀ VERSO IL BASSO

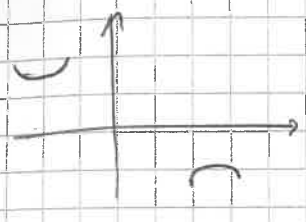
$\varphi \leq 0 \Rightarrow$ " VERSO L'ALTO

QUANDO ATTRAVERSA L'ASSE $\Rightarrow$ CAMBIA SEGNO LA CONCAVITÀ



CIOÈ OSCILLA

IN REGION CLASSICAMENTE INACCESSIBILI $\varphi''/\varphi > 0$



<u>POTENZIALE CONFINANTE LIMITATO DAL BASSO</u> ($\exists V_{min}$)

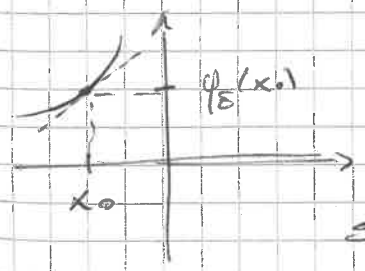
SCEGLIAMO $E < V_{min}$ $\longrightarrow$ CLASSICAM IMPOSSIBILE

MA NOI SAPPIAMO CHE L'EQ. DI SCHR AMMETTE SOL $\forall$ VALORE DI E

$\longrightarrow$ SCEGLIAMO UN PTO x_0 E SUPP $\varphi_E(x_0) \neq 0$

DOVE $\exists$ ALMENO UN PTO x_0 IN CUI $\varphi(x_0) \neq 0$ ALTRIMENTI AVREMMO LA SOL BANALE CHE CORRISP ALLO STATO DI $\mathcal{H}$ E NON CI INTERESSA

SENZA PERDERE GENERALITÀ SUPP $\varphi(x_0) > 0$ (NEL CASO VI MOLTIPLICO -1, INFATTI L'EQ. DI SCHR È LIN $\Rightarrow$ $\alpha\varphi$ È SOL SE φ È SOL $\forall \alpha$)



X DET LA SOL DEVO FISSARE LA DERIVATA IN x_0

SO CHE LA CONCAVITÀ È VERSO L'ALTO (REGIONE CLASS IMP)

SE $\varphi'(x_0) > 0 \Rightarrow$ IN UN PTO ALLA DESTRA φ AVRÀ UN VALORE + ALTO, E COSÌ φ' ($\varphi'' > 0$)

POSSO RIPETERE IL RAGIONAMENTO SPOSTANDOMI A DX

$\longrightarrow \varphi$ STA ANDANDO A ∞

$\lim_{x \to +\infty} \varphi_E(x) = \infty$ SE $\varphi_E'(x) \geq 0$

ANALOG PER $\varphi_E'(x) < 0$ SPOSTANDOSI A SX $\lim_{x \to -\infty} \varphi_E(x) = \infty$

$\Rightarrow$ IN OGNI CASO SCEGLIENDO $E < V_{min}$ AVRÒ SOL DIVERGENTI

$\Rightarrow$ IL SUO QUADRATO NON PUÒ ESSERE SOMMABILE $\Rightarrow \varphi_E \notin \mathbb{L}^2(\mathbb{C})$

SE $\varphi_E'(x_0) = 0$ PEGGIO ANCORA, POSSO SCEGLIERE SIA PER A SX CHE A DX

SAPEVATO GIÀ CHE NON L'ERANO SOL POSSIBILI:

PRENDENDO UNO ~~AUTO~~ STATO QUALUNQUE

$\langle A|H|A\rangle = \langle A|T|A\rangle + \langle A|V|A\rangle$

$$\langle A|T|A\rangle = \frac{1}{2m}\langle A|p\,p|A\rangle \geq 0$$

$$\langle A|V|A\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\varphi_A(x)|^2 V(x) \geq V_{min}$$

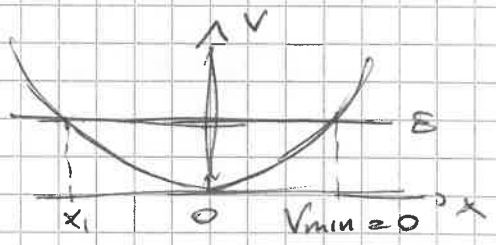
$\Rightarrow \boxed{\langle A|H|A\rangle \geq V_{min} \quad \forall |A\rangle}$

MA SE $|A\rangle = |E\rangle \Rightarrow E \geq V_{min}$

GLI AUTOVAL POSSIBILI IN H DEVONO AVERE ENERGIA MAGGIORE DI V_{min}

ALTRIMENTI CI SONO SOL MA DIVERGONO E NON DANNO STATI APPARTENENTI AD $\mathcal{H}$

SOL ACCETTABILI $\Rightarrow$ SPETTRO DISCRETO DI H



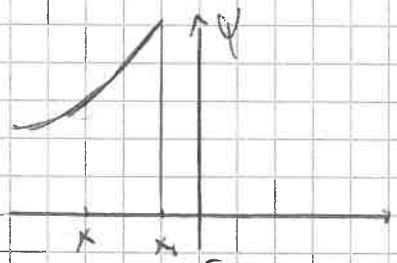
METTIAMOCI NEL CASO $E > V_{min}$

E SUPP $\exists$ 2 PTI DI INVERSIONE x_1, x_2

$\Rightarrow$ OSCILLATORE ARMONICO

- REGIONE $\boxed{x < x_1}$ $\longrightarrow$ CLASSICA INACCESSIBILE (fuori dal potenziale)

PRENDENDO $\varphi(x) > 0 \Rightarrow \varphi'(x) > 0$



φ CRESCE A DX FINO AD ARRIVARE AL PTO x_1 DOVE AVVIENE IL CAMBIAMENTO DI CONVESSITÀ

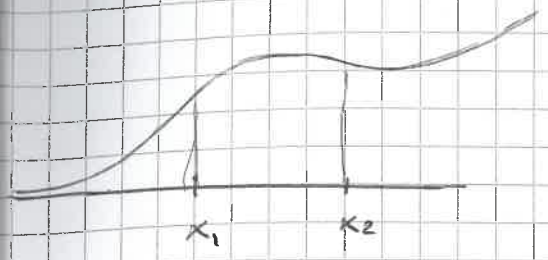
A SX DIPENDE TUTTO DA φ'

SE φ' È MOLTO ALTO $\Rightarrow \varphi$ POTRÀ INTERSECARE L'ASSE x CAMBIANDO CONCAVITÀ

$\Rightarrow \varphi_E$ ANDRÀ A $-\infty$ (NON INTEG.

FISSATO $\psi_E(x)$ $\exists!$ VALORE PRIVILEGIATO DI $\psi_E'(x)$ TC VA A ZERO A SX

CIOÈ FISSATO $\psi_E(\bar{x})$ POSSO SCEGLIERE $\psi_E'(\bar{x})$ TC $\lim_{x\to-\infty} \psi_E(x)=0$

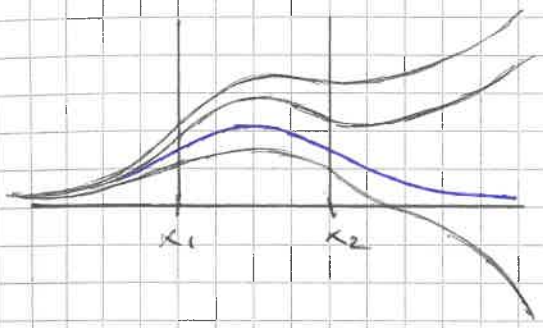


A QUESTO PTO LA MIA FUNZ PARAMETRIZZATA È COMPLETAMENTE DET (PC)

• REGIONE $\boxed{x > x_2}$ → CLASS WALL

SE LA SITUAZIONE È QUELLA DEL DISEGNO NON È ACCETTABILE

POSSIAMO CAMBIARE IL VALORE DI E, INFATTI AL CRESCERE DI E AUMENTA LA CURVATURA



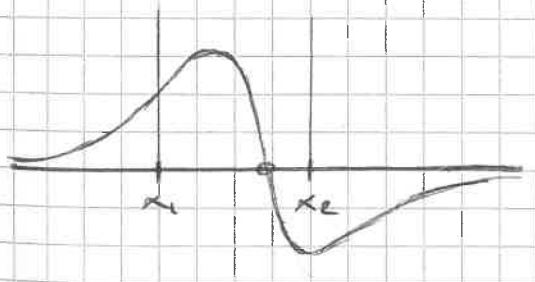
POSSO SCEGLIERE UN VALORE INTERMEDIO TC ψ_E VA A ZERO

$\Rightarrow \exists E$ TC $\psi_E(x) > 0$

$\lim_{x\to\infty} \psi_E(x) = 0$

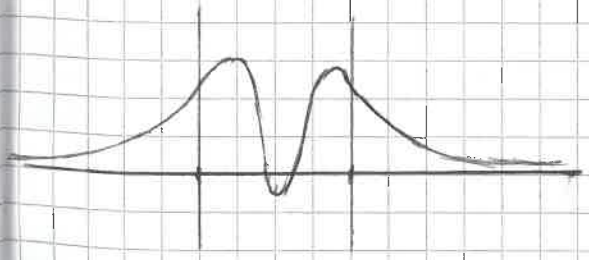
SE AUMENTO DI POCO E ψ_E INTERSECA L'ASSE E VA A ∞

SE AUMENTO DI TROPPO E IL PTO DI INTERSEZIONE ENTRA IN $[x_1, x_2]$



$\exists$ UN VALORE PARTIC TC PASSATO x_2 ψ_E VA A ZERO PASSANDO

AUMENTANDO ANCORA POTREI OTTENERE 2 PTI DI INTERSEZ



AL CRESCERE DI E AUMENTA IL # DI PTI IN CUI ψ_E SI ANNULLA

→ QUESTI SONO DETTI NODI

(AUMENTA IL # DI NODI NOTIAMO SOL ACCETTABILI

NELLO STATO FONDO ψ_{E_0} NON HA NODI $\psi_{E_0}(x) > 0$

$\Rightarrow$ TUTTE LE ACCETTABILI DEVONO AVERE ALMENO UNO

KREÉ!

L'EQ. DI SCHR È A COEFF REALI

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_E''(x) + V(x)\,\psi_E(x) = E\,\psi_E(x)$$

SICCOME H È AUTOAGGIUNTO SE E AUTOVAL $\Rightarrow E \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ SE $\psi_E(x)$ È SOL $\Rightarrow$ ANCHE $\psi_E^*(x)$ LO È

$\Rightarrow$ POSSO SEMPRE PRENDERE $\psi_E + \psi_E^*$ COME SOL REALE

LE FUNZ D'ONDA DEGLI STATI ECCITATI (NON FONDO) HANNO ALMENO UN NODO

DIM

SIA $\psi_0(x)$ FUNZ D'ONDA DELLO STATO FONDO E $\psi_n(x)$ DI UNO STATO ECCITATO

$\Rightarrow$ SAPPIAMO CHE

1) $\psi_0(x) > 0$

2) CORRISP A VALORI DIVERSI DELL'ENERGIA LE FUNZ DEVONO ESSERE $\perp$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi_0(x)\,\psi_n(x) = 0$$

SE $\psi_0(x)$ SEMPRE POS $\Rightarrow \psi_n(x)$ NON PUÒ AVERE SEMPRE LO STESSO SEGNO

ALTRIMENTI INTEGRO UNA COSA SEMPRE POS E L'INTEG NON SI ANNULLA

$\Rightarrow$ ANALOG POSSO DIM CHE L'N-ESIMO STATO ECCITATO ($E_1 < \dots < E_n < \dots$) HA ESATTAMENTE N NODI

$\square$

TEOR DI NON DEGENERAZIONE ($d=1$)

GLI AUTOSTATI CHE CORRISP A SOL NELLO SPETTRO DISCRETO SONO NON DEGENERI

DIM (PA)

SUPP PA $\exists$ 2 SOL LI ψ_1 E ψ_2 A E FISSATO QUADRATO INTEGRABILI

$$\begin{cases} \psi_1'' = \frac{2m}{\hbar^2}[V-E]\,\psi_1 \\ \psi_2'' = \frac{2m}{\hbar^2}[V-E]\,\psi_2 \end{cases} \longrightarrow \psi_2\psi_1'' - \psi_1\psi_2'' = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left[\psi_2\psi_1' - \psi_1\psi_2'\right] = 0$$

$\Rightarrow \psi_2(x)\psi_1'(x) - \psi_1(x)\psi_2'(x) = \text{cost}$

POSSO SCEGLIERE UNITÀ X APPACERE PUN VALUTARE C

SE SONO AL QUADRATO INTEG $\Rightarrow$ QUANDO $x \to \infty$ O $x \to -\infty$

DEVE ANDARE A ZERO

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[\varphi_2(x)\, \varphi_1'(x) - \varphi_1(x)\, \varphi_2'(x) \right] = 0$$

MA SICCOME NON DIPENDE DAL PARTICOLARE PTO x

$\Rightarrow$ SE SONO FUNZ AL QUADRATO INTEG $\quad C = 0$

$$\Rightarrow \varphi_1'(x)\, \varphi_2(x) = \varphi_1(x)\, \varphi_2'(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)}$$

CIOÈ $\frac{d}{dx} \lg \varphi_1(x) = \frac{d}{dx} \lg \varphi_2(x)$

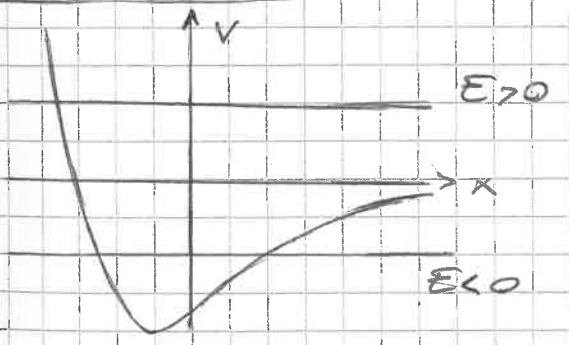
$$\Rightarrow \lg \varphi_1(x) = \lg \varphi_2(x) + \text{cost} \Rightarrow \varphi_1(x) = A\, \varphi_2(x)$$

OVVERO SONO UNA MULTIPLO DELL'ALTRA $\to$ ASSURDO (DOVEVANO ESSERE LI)

$\square$

$\Rightarrow$ ABBIAMO DIM CHE SOL APPARTENENTI AD UNO SPETTRO DISCRETO NON SONO DEGENERI

POTENZIALE NON CONFINANTE



PER $\boxed{E<0}$ ABBIAMO 2 PTI DI INVERSIONE

$\Rightarrow$ SE CI SONO SOL CORRISP A FUNZ D'ONDA AL QUADRATO INTEG QUESTE SONO DETTE STATI LEGATI

PER $\boxed{E>0}$ $\Rightarrow$ 1 PTO DI INVERSIONE

CI ASPETTIAMO DI AVERE X L'HAMILTONIANA UNO SPETTRO CONTINUO

ABBIAMO UNA PT DELLO SPETTRO DISCRETO $E<0$ ED UNA PT IN CUI È CONTINUO $(E>0)$

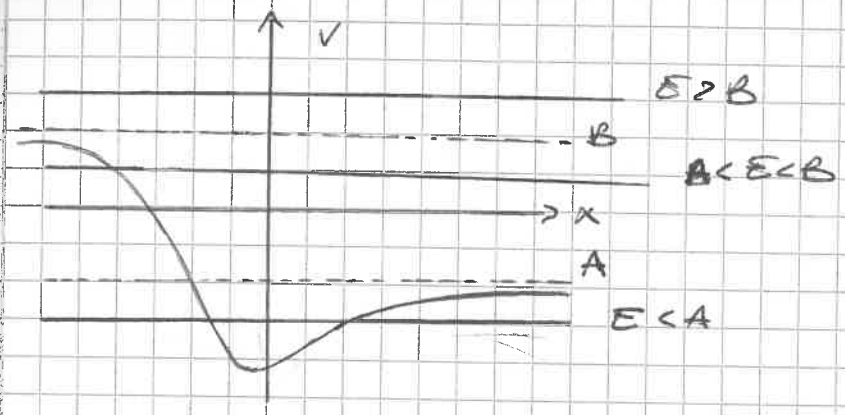
QUESTE SOL SONO DEGENERI?

QUESTE SOL SONO DEGENERI? POSSIAMO DI NUOVO APPLICARE IL TEOR VISTO PRIMA UTILIZZ IL VALORE DELLA COST CALCOLATA NELLA REGIONE CLASSICAMENTE INACC (SX)

TROVIAMO CHE SICCOME φ DEVE ANDARE A ZERO LA COST È ZERO

$\Rightarrow$ CI ASPETTIAMO SIANO NON DEGENERI

NEL CASO IN CUI IL POTENZIALE SIA DEL TIPO IN FIGURA



SE $\boxed{E < A}$ SPETTRO DISCRETO E NON DEGENERE

$\boxed{A < E < B}$ SPETTRO CONTINUO E NON DEGEN (HO ANCORA UN PTO DI INV E φ DEVE ANDARE A 0)

$\boxed{E > B}$ SPETTRO CONTINUO, NON POSSIAMO + APPLICARE IL TEOR

$\Rightarrow$ CI ASPETTIAMO SOL DEGENERI

AUTOFUNZ DELL'OSCILL ARM IN 1D - RS DELLE COORD

$$-\frac{\hbar}{2m}\psi_E''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi_E(x) = E\psi_E(x)$$

VOGLIAMO TROVARE $\psi_E(x) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{C})$, DET GLI AUTOVAL E

ABBIAMO VISTO CHE H È NON DEGENERE E POSSIAMO SCEGLIERE SOL $\psi_E(x)$ REALI

IN REALTÀ OLTRE ALL'EQ. DIFF ABBIAMO IL METODO ALGEBRICO CHE PASSA ATTRAVERSO GLI OPERATORI DI CREAZIONE E DISTRUZIONE

x ES $\eta := \frac{p + i m\omega q}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$ IN RS DELLE COORD DIVENTA $\eta = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dx} + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right]$

$q := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x$ QUANTITÀ ADIMENSIONATA

$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ NELLE UNITÀ IN CUI $m = \omega = \hbar = 1$

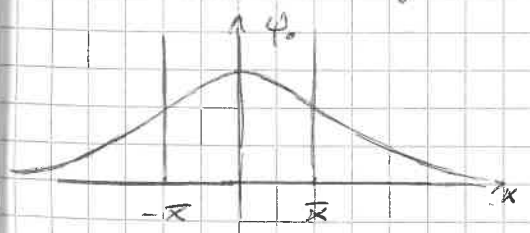
ESAMINIAMO L'EQ. CHE DET LO STATO FONDO

$$\eta|0\rangle = 0 \longrightarrow \eta\psi_0(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dq} + q\right)\psi_0(q) = 0 \Rightarrow \psi_0(q) = A e^{-q^2/2} = A e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

LA COST È DET DALLA COND DI NORMALIZZAZIONE

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dq\, \psi_0^2(q) = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq\, e^{-q^2} = A^2\sqrt{\pi} \Rightarrow A = \pi^{-1/4}$$



STATO FONDO OSCILLATORE ARMONICO

1) NON HA NODI

2) $\psi_0(-x) = \psi_0(x)$ È PARI

XKÉ $[H, I] = 0$ E H NON DEGEN $\Rightarrow I\psi_0(x) = \psi_0(x)$

3) CI SONO 2 PT IN CUI CAMBIA CONVESSITÀ

SAPPIAMO CHE LA CONVESSITÀ CAMBIA AL PASSAGGIO TRA REGIONI ACCESSIBILI CLASSICAMENTE E INACCESSIBILI CLASSICAMENTE

4) POSSIAMO TROVARE LA PARTICELLA IN UNA REGIONE CLASSICAMENTE INACCESSIBILE $E < V(x)$ MA QUESTO NON HA SENSO IN MECC CLASSICA

X QUALE STIAMO DICENDO L'ENERGIA È DIVENTATA NEG?

$\rightarrow$ $[H, q] \neq 0$ NON COMPATIBILI (NEMMENO CON q_A)

CIOÈ SE SIAMO IN UN AUTOSTATO DI H E MISURIAMO q NON CI TROVEREMO + NELLO STESSO AUTOSTATO DI H

SUPP DI PRENDERE $|0\rangle$ E MISURARE q_A

$\Rightarrow$ POSSIAMO TROVARE UN VALORE NON POSSIBILE CLASSICAM

QUESTO PERÒ L'OPERAZ DI MISURA NON LASCIA L'OSCILL ARM. INALTERATO

GUARDANDO LA PARTICE DOBBIAMO USARE DELLA LUCE
$\Rightarrow$ MISURIAMO UN ENERGIA MAGGIORE DI $|0\rangle$

$\Rightarrow$ C'È PROBAB FINITA DI TROVARE LA PART IN UNA POSIZ IN CUI NON DOVREBBE STARE

ANALOGA A COME ABBIAMO COSTRUITO $\varphi_0(x)$ POSSIAMO COSTRUIRE TUTTE LE FUNZ D'ONDA

$$\varphi_n(q) = \frac{(-i)^n}{\sqrt{n!}} (\eta^+)^n \varphi_0(q)$$

FATTORE DI FASE ARBITRARIO CHE CI PERMETTE DI AVERE TUTTE FUNZ REALI

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(q - \frac{d}{dq}\right)^n \varphi_0(q)$$ SCRIVENDO η^+ IN RS COORD

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(q)\, \varphi_0(q)$$

DOVE H_n POLINOMIO DI q TC

$$H_n = e^{q^2/2} \left(q - \frac{d}{dq}\right)^n e^{-q^2/2}$$

OVVIAMENTE

$$H_n e^{-q^2/2} = \left(q - \frac{d}{dq}\right)\left(q - \frac{d}{dq}\right)^{n-1} e^{-q^2/2} = \left(q - \frac{d}{dq}\right) H_{n-1}(q)\, e^{-q^2/2}$$

$$= \left[2y\, H_{n-1}(y) - H'_{n-1}(y)\right] e^{-y^2/2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_n(y) = 2y\, H_{n-1}(y) - H'_{n-1}(y) \\ H_0(y) = 1 \end{cases}$$ FORMULA RICORSIVA

- $H_1(y) = 2y$ DISPARI
  $\Rightarrow \varphi_1(y)$ È DISPARI
  $\Rightarrow \varphi_1(y)$ HA UN NODO IN $y=0$

- $H_2(y) = 2y H_1 - H_1' = 4y^2 - 2$ PARI $\rightarrow$ 2 SOL REALI
  $\Rightarrow \varphi_2$ HA 2 NODI

- $H_3(y) = 2y H_2 - H_2' = 8y^3 - 12y$ DISPARI $\rightarrow y=0$ + 2 SOL REALI
  $\Rightarrow \varphi_3$ HA 3 NODI

- $H_n(y)$ POLIN DI GR n CON n SOL $\in \mathbb{R}$
  $H_n(y) = (-1)^n H_n(-y)$ HA PARITÀ $(-1)^n$

GLI H_n SONO DETTI POLINOMI DI HERMITE

MOLTE PROP SI POSSONO RICAVARE TRAMITE GLI OPER DI COSTRUZ/DISTRUZ

$$\eta\, \varphi_n(y) = \eta \frac{(-i)^n}{\sqrt{n!}} (\eta^+)^n \varphi_0(y) = \frac{(-i)^n}{\sqrt{n!}} [\eta, (\eta^+)^n] \varphi_0(y) + 0$$

$$= \frac{(-i)^n}{\sqrt{n!}} \eta (\eta^+)^{n-1} \varphi_0(y) = (-i)\sqrt{n}\, \varphi_{n-1}(y)$$

$$\Rightarrow i\eta\, \varphi_n(y) = \sqrt{n}\, \varphi_{n-1}(y)$$

$$\downarrow \eta = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(y + \frac{d}{dy}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y + \frac{d}{dy}\right) \varphi_n(y) = \sqrt{n}\, \varphi_{n-1}(y) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y + \frac{d}{dy}\right) \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(y)\, \varphi_0(y)$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2^{n-1}(n-1)!}} H_{n-1}(y)\, \varphi_0(y)$$

$$\rightarrow \left(y + \frac{\partial}{\partial y}\right) H_n\, \varphi_0(y) = 2n\, H_{n-1}\, \varphi_0(y)$$

$$\Rightarrow \boxed{H_n'(y) = 2n\, H_{n-1}(y)}$$

PRIMA AVEVAMO: $H_n(y) = 2y\, H_{n-1}(y) - H_{n-1}'(y)$

$$\Rightarrow H_n'(y) = 2H_{n-1}(y) + 2y\, H_{n-1}'(y) - H_{n-1}''(y)$$

$n \longrightarrow n+1$

$$-H_n''(y) + 2y\, H_n'(y) = H_{n+1}'(y) - 2H_n(y)$$
$$= [2(n+1) - 2]\, H_n(y)$$
$$= 2n\, H_n(y)$$

ORA SIAMO IN GRADO DI DISCUTERE LE SOL DI SCHR

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\varphi_n(y) = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi_n(y)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{m\omega}{\hbar}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\hbar}{m\omega}y^2\right)\varphi_n(y) = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi_n(y)$$

$$\longrightarrow \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + y^2\right)\varphi_n(y) = (2n+1)\,\varphi_n(y)$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + y^2\right) H_n\, e^{-y^2/2} = (2n+1)\, H_n\, e^{-y^2/2}$$

$$\frac{\partial H_n e^{-y^2/2}}{\partial y} = (H_n' - y H_n)\, e^{-y^2/2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} H_n e^{-y^2/2} = \left[H_n'' - 2y H_n' + (y^2-1) H_n\right] e^{-y^2/2}$$

$$-H_n'' + 2y H_n' = 2n H_n$$ PROPRIO AVEVAMO DETTO X I POLINOMI DI HERMITE

$\Rightarrow$ LE SOL OTTENUTE X I LIVELLI ECCITATI DELL'OSCILL ARM SODDISFANO L'EQ. DI SCHR CON IL GIUSTO VAL DELL'AUTOVAL

SICCOME H APPARE SOLO E NON DIP $\Rightarrow$ LA SOL È UNICA

SICCOME SONO SOL NORMALIZZATE ED ORTOG

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \varphi_n(y)\, \varphi_m(y) = \delta_{mn}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-y^2} H_n(y) H_m(y) = \delta_{nm}\, 2^n n!$$

I POLINOMI SONO $\perp$ NELLA MISURA ESPONENZIALE DI e^{-y^2}

<u>FUNZ GENERATRICE</u>

$$H_n = e^{y^2/2} \left(y - \frac{d}{dy} \right)^n e^{-y^2/2}$$

$\exists$ UNA DEF ALTERNATIVA: $H_n = e^{y^2} \left(-\frac{d}{dy} \right)^n e^{-y^2}$

COINCIDONO?

DEF FUNZ GENERATRICE DEI POLIN DI HERMITE

$$F(t,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y)}{n!} t^n$$

(LA GEN FUNZ GENERATRICE È $F(t,y) = \sum \frac{Q_n(y)}{n!} t^n$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(y) = \sum \frac{t^n}{n!} e^{y^2/2} \left(y - \frac{d}{dy} \right)^n e^{-y^2/2}$$

$$= e^{y^2/2} \left[\sum \frac{t^n}{n!} \left(y - \frac{d}{dy} \right)^n \right] e^{-y^2/2}$$

$$= e^{+y^2/2}\, e^{-t\left(y - \frac{d}{dy}\right)}\, e^{-y^2/2}$$

$$\longrightarrow e^{ty}\, e^{-t\, d/dy} \overset{?}{=} e^{t(y - d/dy)}$$

CIOÈ X GLI OPERATORI $e^A e^B \overset{?}{=} e^{A+B}$

DIPENDE DAL COMMUTATORE

VALE X MATRICI DIAGONALI XKÉ COMMUTANO $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k^n \end{pmatrix}$

~~DERIVARE RECIPROCA~~

SUPP DI PRENDERE $e^{\varepsilon A} e^{\varepsilon B} \overset{?}{=} e^{\varepsilon(A+B)}$

$$\rightarrow \left(\sum^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} A^n\right)\left(\sum^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} B^m\right) \quad \text{Sx}$$

$$\left(\sum^{\infty} \frac{\varepsilon^r}{r!} (A+B)^r\right) \quad \text{Dx}$$

	Sx	Dx
GR 0 :	$1 \cdot 1$	1
GR I :	$(1+\varepsilon A)(1+\varepsilon B) = 1+\varepsilon A+\varepsilon B$	$1+\varepsilon A+\varepsilon B$
GR II :	$\left(1+\varepsilon A+\frac{\varepsilon^2}{2}A^2\right)\left(1+\varepsilon B+\frac{\varepsilon^2}{2}B^2\right)$	$1+\varepsilon(A+B)+\frac{\varepsilon^2}{2}(A+B)^2$
	$= 1+\varepsilon(A+B)+\frac{\varepsilon^2}{2}(A^2+B^2+2AB)$ $\neq$	$= 1+\varepsilon(A+B)+\frac{\varepsilon^2}{2}(A^2+B^2+BA+AB)$

COINCIDONO SOLO SE $AB = BA$

$\longrightarrow$ AL II ORDINE MANCA UN $\frac{\varepsilon^2}{2}[A,B]$

TORNANDO A PRIMA E SVILUPPANDO AL III ORDINE

$$e^{tg} e^{-t\,d/dg} = e^{tg - t\,d/dg - \frac{t^2}{2}[g, d/dg]}$$

$$= e^{tg - t\,d/dg + t^2/2} = e^{t^2/2}\, e^{tg - t\,d/dg}$$

$$\Rightarrow \quad e^{tg - t\,d/dg} = e^{-t^2/2}\, e^{tg}\, e^{-t\,d/dg} \quad (?)$$

ABBIAMO VISTO QUINDI CHE

$$H_n(g) = e^{g^2/2}\left(g - \frac{d}{dg}\right)^n e^{-g^2/2}$$

VOGLIAMO CONFRONTARLA CON ALTRE DEF

ATTRAVERSO LA FORMULA GENERATRICE ABBIAMO SCRITTO

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(g)}{n!} t^n = e^{g^2/2}\, e^{t(g - d/dg)}\, e^{-g^2/2}$$

PER ABBIAMO OTTENUTO CHE

$$e^{tg} e^{-t\,d/dg} = e^{t(g - d/dg) - \frac{t^2}{2}[g, d/dg]} = e^{t(g - d/dg) + \frac{t^2}{2}}$$

$\longrightarrow$ FORMULA DI CAMPBELL-BAKER-HAUSDORFF-DYNKIN ....

CHE DICE CHE PER A, B OPERATORI

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]+\dots}$$

NEL CASO IN CUI $[A,B]$ SIA UN NUMERO SCOMPAIONO I TERMINI SUCCESSIVI

$$\Rightarrow e^{t(y-\frac{d}{dy})} e^{-y^2/2} = e^{-t^2/2} e^{ty} \underbrace{e^{-t\frac{d}{dy}} e^{-y^2/2}}$$

CONCENTRIAMOCI SU QUESTO FATTORE

$$e^{x\frac{d}{dy}} f(y) \overset{\text{x DEF}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\frac{d}{dy}\right)^n f(y) \longrightarrow$$ SVILUPPO DI TAYLOR-LAGRANGE DI $f(y+x)$

$$\Rightarrow \boxed{e^{-t\frac{d}{dy}} e^{-y^2/2} = e^{-\frac{(y-t)^2}{2}}}$$

QUINDI

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y)}{n!} t^n = e^{y^2/2} e^{t(y-d/dy)} e^{-y^2/2}$$

$$= e^{y^2/2} e^{-t^2/2} e^{ty} e^{-t\,d/dy} e^{-y^2/2}$$

$$= e^{y^2/2 - t^2/2 + ty - \frac{1}{2}(y-t)^2}$$

$$= e^{2yt - t^2} = e^{y^2-(y-t)^2} = e^{y^2} e^{-t\,d/dy} e^{-y^2}$$

$$= e^{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{d}{dy}\right)^n \frac{t^n}{n!} e^{-y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{y^2} \frac{t^n}{n!} \left(-\frac{d}{dy}\right)^n e^{-y^2}$$

$$\Rightarrow H_n(y) = e^{y^2} \left(-\frac{d}{dy}\right)^n e^{-y^2} \longrightarrow$$ FORMULA DI RICORSIONE

$\Rightarrow$ ABBIAMO DEF EQUIVALENTI DEI POLINOMI DI HERMITE ∎

IL METODO DELLA FUNZ GEN È APPLICABILE A QUALSIASI REGOLA DERIVATA RIGUARDANTE I POLINOMI DI HERMITE

x ES: RELAZ DI ORTOGONALITÀ

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{\pi}} H_n(y) H_m(y) = 2^n n! \, \delta_{nm} \right]$$

SI PUÒ VERIF CON LA FUNZ GEN

$$\sum_n \frac{t^n}{n!} \sum_m \frac{z^m}{m!} [\ldots\ldots]$$

MEMBRO DI SX

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} e^{2yt-t^2} e^{2yz-z^2} = e^{-(t^2+z^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2+2y(z+t)}$$

$$= e^{-(t^2+z^2)} e^{(z+t)^2} = e^{2tz}$$

MEMBRO DX:

$$\sum_n \frac{t^n}{n!} \sum_m \frac{z^m}{m!} 2^n n! \, \delta_{nm} = \sum_n \frac{(2tz)^n}{n!} = e^{2tz} \quad \blacksquare$$

L'EQ. DI SCHR IN y DICE CHE:

$$\left[\left(-\frac{d^2}{dy^2} + y^2\right) H_n e^{-y^2/2} = (2n+1) H_n e^{-y^2/2} \right]$$

DOVREI VERIFICARLA $\forall n$ MA POSSO USARE LA FUNZ GENERATRICE

$$\sum \frac{t^n}{n!} [\quad]$$

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + y^2\right) e^{2ty-t^2-y^2/2} = \left(1 + t\frac{d}{dt}\right) e^{2ty-t^2-y^2/2}$$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!} \longrightarrow t\frac{d}{dt} F(t) = \sum n \frac{a_n}{n!} t^n$$

$$-\frac{d}{dy} e^{+2ty-t^2-y^2/2} = (-2t+y) e^{2ty-t^2-y^2/2}$$

$$\left(-\frac{d}{dy}\right)^2 e^{2ty-t^2-y^2/2} = [1-(2t-y)^2] e^{2ty-t^2-y^2/2}$$

A SX: $1-(2t-y)^2+y^2 = 1+2t(2y-2t)$

A DX: $1-4t^2+4ty$

SONO UGUALI

VOLEVATO CALCOLARE LE DERIVATE DEI POLINOMI DI HERMITE

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n'(y)\frac{t^n}{n!} = \frac{d}{dy}\sum_{n=0}^{\infty} H_n(y)\frac{t^n}{n!} = \frac{d}{dy}e^{2ty-t^2} = 2t\,e^{2ty-t^2}$$

$$= 2t\sum_{n=0}^{\infty} H_n(y)\frac{t^n}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} H_n(y)\frac{t^{n+1}}{n!}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)H_n(y)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} n\,H_{n-1}(y)\frac{t^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_n'(y) = 2n\,H_{n-1}(y)}$$

II

RICAVIAMO LA FORMULA RICORSIVA

$$\sum_n H_n(y)\frac{t^n}{n!} = e^{2ty-t^2}$$

$$\sum H_n(y)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = (2y-2t)\,e^{2ty-t^2} = (2y-2t)\sum H_n(y)\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum H_{n+1}(y)\frac{t^n}{n!} = 2y\sum_n H_n\frac{t^n}{n!} - 2\sum_n H_n\frac{t^{n+1}}{n!}$$

$$= 2y\sum_n H_n\frac{t^n}{n!} - 2\sum_n n\,H_{n-1}\frac{t^n}{n!}$$

SPOSTANDO GLI INDICI

$$\boxed{H_n(y) = 2y\,H_{n-1}(y) - H_{n-1}'(y)}$$

STUDIO DELLE FUNZIONI D'ONDA

NEL CASO DELL'OSCILLATORE ARMONICO SIAMO IN GRADO DI CALCOLARE ESATTAMENTE LE FUNZ D'ONDA CORRISP AI LIVELLI ENERGETICI (AUTOFUNZ DI H)

NON ABBIAMO ANCORA SFRUTTATO TUTTA LA POTENZA DELL'EQ. DIFF

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+y^2\right)\varphi_n(y)=(2n+1)\varphi_n(y) \qquad \forall y$$

COME SI COMPORTA $\varphi_n(y)$ x GRANDI y

$|y|$ GRANDE $\Rightarrow$ $\varphi_n(y)$ TRASCURABILE RISP $y^2\varphi_n(y)$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+y^2\right)\varphi_n(y)=0 \quad \forall n$$

$\Rightarrow$ PONIAMO $\varphi_n(y)\simeq e^{-\beta y^K}$

$$\rightarrow \varphi_n'(y)\simeq -\beta K y^{K-1}e^{-\beta y^K}$$

$$\varphi_n''(y)\simeq\left[\beta^2K^2y^{2K-2}-\beta K(K-1)y^{K-2}\right]e^{-\beta y^K}$$

$$\simeq \beta^2K^2y^{2K-2}e^{-\beta y^K}$$

$$\Rightarrow -\beta^2K^2y^{2n-2}+y^2=0 \Rightarrow K=2 \quad \beta=1/2$$

ABBIAMO TROVATO COME NELL'OSCILLATORE ARMONICO DECADONO TUTTE LE FUNZ D'ONDA

SUPP DI INTRODURRE UNA CORREZIONE A POTENZA

$$\varphi_n(y)=y^\alpha e^{-y^2/2} \longrightarrow \varphi_n'(y)=(\alpha y^{\alpha-1}-y^{\alpha+1})e^{-y^2/2}$$

$$\rightarrow \varphi_n''(y)=\left[\alpha(\alpha-1)y^{\alpha-2}-(\alpha+1)y^\alpha-\alpha y^\alpha+y^{\alpha+2}\right]e^{-y^2/2}$$

$$\Rightarrow \overbrace{-\varphi_n''(y)+y^2\varphi_n(y)}^{\circledast}\simeq\left[-\alpha(\alpha-1)y^{\alpha-2}+(2\alpha+1)y^\alpha\right]e^{-y^2/2}$$

$$\begin{cases}\circledast\simeq(2\alpha+1)\varphi_n(y)\\ \circledast=(2n+1)\varphi_n(y)\end{cases}\Rightarrow \boxed{\alpha=n} \Rightarrow \boxed{\varphi_n(y)\simeq y^n e^{-y^2/2}}$$

COMPORTAMENTO ASINTOTICO

COSÌ UNA VOLTA STABILITO y^n POSSO INTRODURRE UN TERMINE DI CORREZIONE + BASSO

$$\psi_n(y) \simeq y^n e^{-y^2/2}\left[1+\frac{A}{y^2}+\dots\right]$$

x ES ABBIAMO STABILITO $V(x)=\frac{\alpha}{2}x^2$, COSA ACCADREBBE SE $V(x)\sim x^4$?

NON SAPPIAMO RISOLVERLA MA POSSIAMO DIR IL COMPORTAMENTO ASINTOTICO

x GRANDI y

POSIZIONE E PROBABILITÀ IN MECCANICA CLASSICA

$|\psi_E(x)|^2$ DÀ LA MISURA DI PROBABILITÀ DI TROVARE LA PARTICELLA IN x FISSATO E

$$H=\frac{p^2}{2m}+V(q)$$

CLASSICAMENTE FISSATO $H=E$ E L'INTERVALLO DI TEMPO $[t_0,t_1]$

QUAL'È LA PROBAB DI TROVARE LA PARTICELLA IN x?

x MOTO PERIODICO PRENDIAMO UN INTERVALLO DI UN PERIODO

$$\rho_E(x)=\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1}dt\,\delta[x(t)-x]$$

$$\Rightarrow \int dx\,\rho_E(x)=1$$ DOVE $x(t)$ È LA TRAIETTORIA CLASSICA

FACCIO UN CAMBIO DI VAR TRA dt E dx

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}\,\theta(E-V(x)) \quad \text{DOVE } \theta(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & \text{ALTRIMENTI}\end{cases}$$

SE PRENDIAMO $t_1-t_0=T/2$

$$\Rightarrow \rho_E(x)=\frac{2}{T}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}=\frac{2}{T}\frac{1}{|v(x)|}\longrightarrow \text{VELOCITÀ}$$

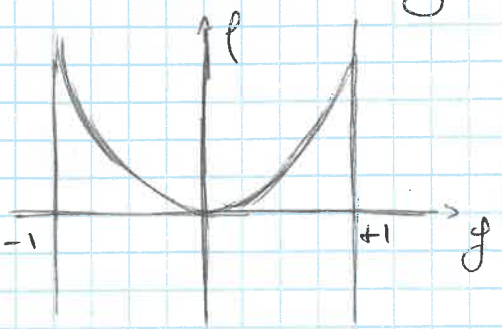
x ES NEL CASO DELL'OSCILLATORE ARMONICO DI FREQ ω $(\omega T=2\pi$

$$\rho_E(x)=\frac{\omega}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{m\omega^2}{2}x^2\right)}}=\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\,\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{m\omega^2}{2E}x^2}}$$

$$y:=\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\,x \Rightarrow \rho_E(x)dx=\rho(y)dy$$

$$\rho(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

È FISSA LA SCALA MA LA DISTRIBUZ È SEMPRE UGUALE



SI TENDE A TROVARE + FACILMENTE LA PARTICOLA VICINO AI PTI DI INVERSIONE

SOL EQ. DI SCHR X POTENZIALI CON DISCONTINUITÀ

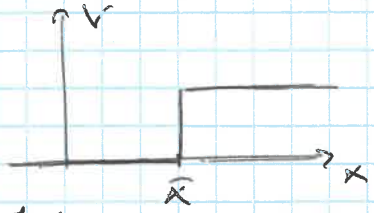
$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

IN GEN NON SIAMO IN GRADO DI TROVARE SOL SENNÒ X UN INSIEME MOLTO PICCOLO DI POTENZIALI POSSIBILI

X UTILIZZARE METODI ANALITICI SERVE APPROSSIMARE

NEL CASO IN CUI IL POTENZIALE HA UNA RAPIDA VARIAZIONE IMMAGINIAMO CHE IN $\bar{x}$ CI SIA UNA DISCONTINUITÀ

$$\lim_{x \to \bar{x}^-} V(x) \neq \lim_{x \to \bar{x}^+} V(x)$$



EQ. DI SCHR: $\varphi_E''(x) = \frac{2m}{\hbar}[V(x)-E]\varphi_E(x)$

IN $U_\varepsilon(\bar{x})$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dx\, \varphi''(x) = \varphi'(\varepsilon) - \varphi'(-\varepsilon) \qquad \text{I° MEMBRO}$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dx\, [V(x) - E]\varphi(x) \qquad \text{II MEMBRO}$$

QUANDO $\varepsilon \to 0$

SE $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dx\, [V(x) - E]\varphi(x)\, dx \neq 0 \iff V$ o φ DIVERGONO IN 0

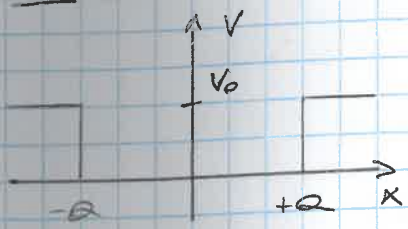
$\Rightarrow \varphi'(x)$ È CONTINUA ANCHE NELLA DISCONTINUITÀ DI V

$\Rightarrow \varphi(x)$ " " " " " " "

$\varphi''(x) = \frac{2m}{\hbar}[V(x)-E]\varphi(x)$ È DISCONTINUA XCÉ $V(x)$ DISCONTINUA

$\Rightarrow$ PER V DISCONTINUO ~~DOBBIAMO~~ ESSERE CERTI CHE ψ E ψ' SIANO CONTINUI NELLA DISCONTINUITÀ DEL POTENZIALE

ES BUCA DI POTENZIALE



$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x|<a \\ V_0 & |x|>a \end{cases}$$

$\Rightarrow$ EQ. DI SCHR:

$$\begin{cases} \psi''(x) = \dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) & |x|<a \\ \psi''(x) = \dfrac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\psi(x) & |x|>a \end{cases}$$

QUANDO / COME CI ASPETTIAMO DI TROVARE SOL AL QUADRATO INTEGR?

X DARE LUOGO A $\underbrace{\text{STATI LEGATI}}_{\substack{\parallel \\ \text{SOL AL QUADRATO} \\ \text{INTEGRABILI}}}$ ABBIAMO VISTO CHE SERVE $E > V_{min} = 0$

INOLTRE X AVERE STATI LEGATI DEVE ESSERE MINORE DI $\lim_{x\to\infty} V(x)$

ALTRIMENTI LA PARTICELLA SE NE ANDRÀ

$\Rightarrow 0 < E < V_0$ NON SAPPIAMO SE E QUANTE SOL $\exists$

SE $E > V_0$ $\nexists$ STATI LEGATI (SPETTRO CONTINUO)

SICCOME LA PARTICELLA PUÒ ANDARE SIA A SX CHE DX $\Rightarrow$ È ANCHE DEGENERE

$\boxed{|x|<a}$ REGIONE CLASSICAMENTE ACCESSIBILE

SOL GEN: $\psi(x) = A\cos kx + B\,\text{sen}\,kx$ $\quad k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$\boxed{|x|>a}$ REGIONE CLASSICAMENTE INACCESSIBILE

$$\psi(x) = \begin{cases} Be^{-k_0x} + B'e^{+k_0x} & x>a \\ Ce^{k_0x} + C'e^{-k_0x} & x<-a \end{cases} \qquad k_0 = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

VOGLIAMO STATI LEGATI $\Rightarrow$ A ∞ DEVONO ANDARE A 0

$$\psi(x) = \begin{cases} Be^{-k_0x} & x>a \\ A\cos kx + B\,\text{sen}\,kx & -a<x<a \\ Ce^{k_0x} & x<-a \end{cases} \qquad k_0 = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

GLI STATI LEGATI DI PBSL 1D SONO NON DEGENERI $\Rightarrow \exists!$ SOL

ABBIAMO PRESO UN POTENZIALE PARI $V(-x)=V(x) \Rightarrow [H, I]=0$

SICCOME PER $E<V_0$ LO SPETTRO DI H È NON DEGENERE

$\Rightarrow$ AUTOFUNZ CORRISP A STATI LEGATI DEVONO ESSERE AUTOSTATI DELLA PARITÀ $\longrightarrow \pm 1$

$$I\varphi_E(x) = \pm\varphi_E(x) \longrightarrow \varphi_E(-x) = \pm\varphi_E(x)$$ AUTOFUNZ PARI O DISPARI

LO STATO FONDO DEVE ESSERE PARI X KÉ NON HA NODI

CERCHIAMO SOL PARI

$$\Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} B e^{-k_0 x} & x>a \\ A\cos kx & |x|<a \\ B e^{k_0 x} & x<-a \end{cases}$$

$\rightarrow$ RIMANE ARBITRARIETÀ A, B, E

UNA COST OVERALL NON HA MOLTA IMPORTANZA $\Rightarrow$ POSSIAMO FISSARE LA SUA ATTRAVERSO CHIEDENDOLA NORMALIZZATA

X DET LE 2 COST IMPONIAMO CONTINUITÀ φ E φ' IN $\pm a$

$\rightarrow \varphi$ SIMM $\Rightarrow$ BASTA FARLO IN $x=a$

$$\begin{cases} A\cos ka = B e^{-k_0 a} \\ -Ak\,\mathrm{sen}\,ka = -Bk_0 e^{-k_0 a} \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cos ka & -e^{-k_0 a} \\ k\,\mathrm{sen}\,ka & k_0 e^{-ka} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SOL BANALE: $A=B=0$
SOL NON BANALE: $\det = 0$

$$\Rightarrow k\,\mathrm{sen}\,ka = k_0\cos ka \rightarrow k\,\mathrm{tg}\,ka = k_0$$

$$\Rightarrow \boxed{ka\,\mathrm{tg}\,ka = k_0 a}$$

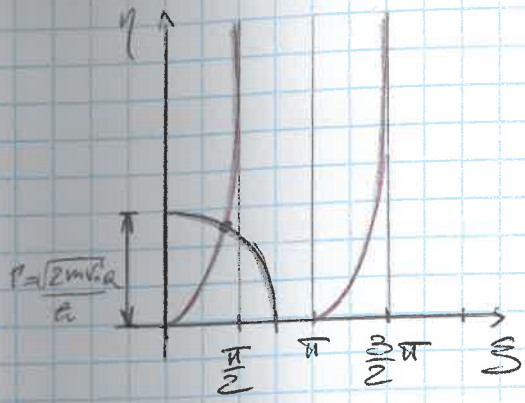
$$\begin{cases} k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ k_0 = \dfrac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} \end{cases} \Rightarrow k^2+k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \longrightarrow a^2(k^2+k_0^2) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}a^2$$

$$\xi := ak, \quad \eta := ak_0$$

$$\begin{cases} \xi\,\mathrm{tg}\,\xi = \eta \\ \xi^2+\eta^2 = \dfrac{2mV_0}{\hbar^2}a^2 \end{cases}$$

x discutere quando ci sono sol rappresentandolo graficamente

ci interessa il quadrante $\xi, \eta > 0$ $(ak, ak_0 > 0)$



per $\xi < \pi/2$ c'è sempre una sol

x avere una II sol serve che la curva della II eq. sia sup. quando

→ almeno due ess $\Gamma > \pi$

e così via

Noi stiamo cercando sol pari → la II sol pari deve avere 2 nodi

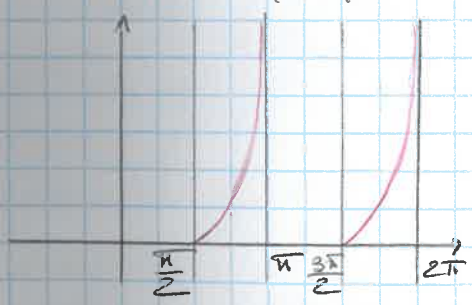
⇒ prima ci sarà un'altro nodo che sarà x forza una sol dispari con nodo nell'origine

x sol negative si ripete l'analisi

$$\varphi(x) = \begin{cases} Be^{-k_0 x} & x > a \\ A \operatorname{sen} kx & |x| < a \\ -B e^{-k_0 x} & x < -a \end{cases}$$

sol dispari

continuità φ e φ' ⇒ $\eta = -\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon}$



la II sol compare per $\Gamma > \pi/2$

⇒ ∀ buca simmetrica ∃ almeno uno stato legato

ciò che dist il num di stati legati a disposizione è

$\Gamma = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} a$ da confrontare con $n\frac{\pi}{2}$

$$\longrightarrow \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} a \geq n\frac{\pi}{2}$$

$\Gamma \propto \sqrt{V_0}, a$ ma ∀ larghezza e profondità si produce almeno uno stato legato

BUCA DI POTENZIALE INFINITA

BUCA DI POT 1D $\longrightarrow$ $\exists$ SEMPRE ALMENO UNO STATO LEGATO INDIP DALLA PROF

NEL $\lim_{V_0 \to \infty}$ LA BUCA DIVENTA SEMPRE + PROFONDA E IL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA $\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} a^2$ DIVENTA SEMPRE + GRANDE $\longrightarrow \infty$

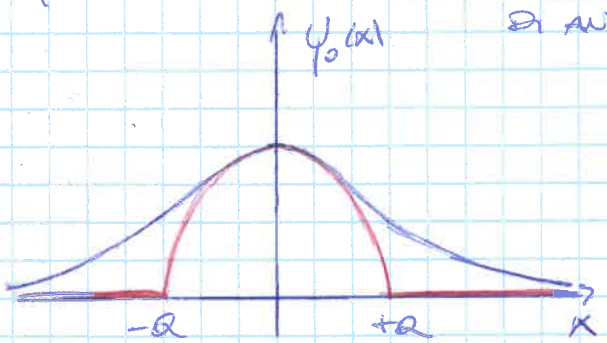
$\Rightarrow$ CRESCE ANCHE IL PTO DI INTERSEZ TRA LE 2 CURVE FINO A RAGGIUNGERE IL VAL lim DI $\pi/2$

$$\xi = ka \longrightarrow \pi/2 \Rightarrow E_0 \longrightarrow \frac{\pi \hbar^2}{8ma^2}$$

FUNZIONE D'ONDA? (DEVE ESSERE SOLO IN QUESTO STATO)

$$\psi_0(x) = \begin{cases} A \cos ka \, e^{k_0(x+a)} & x < -a \\ A \cos kx & |x| < a \\ A \cos ka \, e^{-k_0(x-a)} & x > a \end{cases}$$

QUANDO $ka \longrightarrow \pi/2$ LA FUNZ D'ONDA HA COME lim QUELLO DI ANNULLARSI AL DI FUORI DELLA BUCA



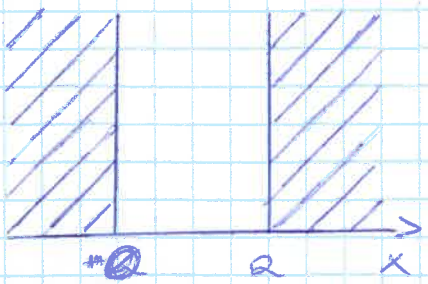
$$\lim_{V_0 \to \infty} \psi_0(x) = \begin{cases} 0 \\ A \cos \frac{\pi x}{2a} & |x| < a \\ 0 \end{cases}$$

POSSIAMO RIOTTENERE QUESTO RISULTATO CON UN ALTRA STRADA:

SFRUTTANDO IL FATTO CHE SE IL POTENZIALE DIVENTA ∞ IN UN PTO

$\Rightarrow$ IN QUEL PTO LA FUNZ D'ONDA SI ANNULLA

SUPP DI AVERE UNA BUCA DI POTENZIALE INFINITA



$$\psi \in L^2(I_{-a,a}I)$$

INVECE CHE IMPORRE LA CONDIZ DI RACCORDO IN ψ E ψ' DOBBIAMO IMPORRE CHE QUESTA SI ANNULLI ALLORA

$$\psi_0(-a) = \psi(a) = 0$$

→ Eq. di Schr: $-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = \mathcal{E}\varphi(x)$

Sol gen: $\varphi(x) = A\cos kx + B\sin kx \qquad k = \frac{\sqrt{2m\mathcal{E}}}{\hbar}$

Siccome φ si annulla sul bordo non c'è il rischio di andare a ∞

⇒ ci aspettiamo uno spettro discreto (⇒ autoval non degeneri)

$\varphi(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$\varphi(Q) = 0 \Rightarrow B\sin kQ = 0 \Rightarrow kQ = n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \varphi_n(x) = B\sin\left(\frac{n\pi}{Q}x\right)$

Siccome $k = \frac{\sqrt{2m\mathcal{E}}}{\hbar} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mQ^2}n^2}$

x la buca infinita siamo in grado di det completamente lo spettro di H

La base del nostro sp di Hilbert vive in $[0, Q]$ con funz che si annullano sul bordo è data dalle funz periodiche nella scatola

→ Serie di Fourier nella scatola

Abbiamo utilizzato l'eq di Schr x det i cosiddetti stati legati corrisp ad un potenziale (preso x avere uno spettro discreto ⇒ pot confinante)

C'è una situaz fisica importante:

Quando il potenziale ha un supporto compatto, cioè su tutto $\mathbb{R}$ c'è solo una regione finita in cui $V(x) \neq 0$ $\quad \lambda$

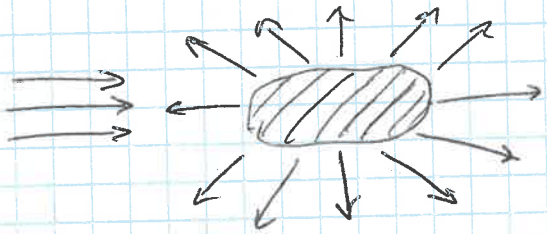
se $x \notin \lambda \Rightarrow V(x) = 0$ → in partic a ∞ $V(x) = 0$

Questa situaz rappresenta ciò che fisicam succede nei fenomeni d'urto molto inf sulle interaz fondamentali nasce dall'analisi dei fenomeni d'urto

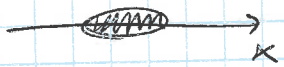
IN UNA REGIONE DELLO SP IN CUI AVVIENE L'INTERAZ SI FA CONFLUIRE UN FASCIO DI PARTICELLE (LIBERE AL DI FUORI DELLA REGIONE)

→ C'È UN POTENZIALE A RAGGIO FINITO (REGIONE COMPATTA NELLO SP-TEMPO) IN CUI AVVIENE L'INTERAZIONE

DOPO SI OSSERVA UN FLUSSO DI PART DOPO L'URTO INDIRIZZATO NELLE VARIE REGIONI DELLO SP



VOGLIAMO STUDIARE QUESTA SITUA NEL PROB UNIDIM



LUNGO UNA DIR C'È UNA ZONA A POT NON NULLO (DI CUI NON SAPPIAMO ALTRO)

FUORI DA QUESTA ZONA LA SITUA È UNA PART LIBERA

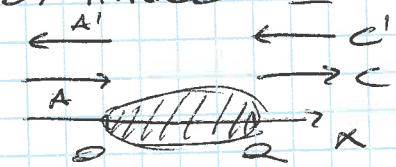
→ SUPP $V(x) \neq 0$ IN $[0, a]$

FISSATA E TROVERÒ SOL $\varphi_E(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + A' e^{-ikx} & x<0 \\ C e^{ikx} + C' e^{-ikx} & x>a \end{cases}$

AL DI FUORI DELLA REGIONE LE φ_E SONO ONDE CON

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

X LA PART LIBERA FISSATA L'ENERGIA CI SONO 2 POSSIBILI STATI DI IMPULSO $\pm k$ (IMPULSO POS ONDA)



NON SAPPIAMO NULLA SU $V(x)$

⇒ NON POSSIAMO RACCORDARE LE SOL IMPONENDO CONDIZ AL BORDO IN 0 E a

→ QUELLO CHE FARÀ $V(x)$ CREERÀ RELAZ TRA LE COST

PERÒ HO 4 COST E L'EQ. DI SCHR È DEL II ORDINE

⇒ AMMETTE 2 COST

SE φ È SOL ⇒ $\lambda\varphi$ È SOL ⇒ POSSO FISSARE $A = 1$ (COST ARBITRARIA SX)

SE IMMAGINO DI FAR INCIDERE UN ONDA DA SX

⇒ UNA PT DI PARTIC ANDRÀ DRITTO E UNA PT RIMBALZERÀ TORNANDO A SX

→ RICAVO $C' = 0$

$\begin{cases} A' = 1 \\ C' = 0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ STATI DI SCATTERING (CORTO)

$\Rightarrow$ CERCHEREMO SOL DEL TIPO, CON $V(x) \neq 0$ SU $[0, a]$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A e^{-ikx} & x < 0 \\ C e^{ikx} & x > a \end{cases} \qquad A, C \in \mathbb{C}$$

$|A|^2 :=$ COEFF DI DEFLESSIONE

$|C|^2 :=$ COEFF DI TRASMISSIONE

UNA COSA POSSO VERIF. INDIP. DALLA FORMA DI $V(x)$ È CHE $|A|^2 + |C|^2 = 1$ EQ. DI CONTINUITÀ

XKÉ ABBIAMO SCELTO COEFF 1 IN INGRESSO

DIM (x DIM GENERICA)

SE $H = p^2/2m + V(x) \Rightarrow$ EQ. DI SCHR: $-\frac{\hbar^2}{2m}\overbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}^{\Delta}\psi_E(x) + V(x)\psi_E(x) = E\psi_E(x)$

X RICAVARE L'EQ. DI CONTINUITÀ UTILIZZIAMO IL FATTO CHE NELL'EQ. COMPAIONO COEFF REALI

$\Rightarrow$ SE ψ È SOL $\Rightarrow$ ANCHE ψ^*

$$\longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_E^*(x) + V(x)\psi_E^*(x) = E\psi_E^*(x)$$

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_E(x) + V(x)\psi_E(x) = E\psi_E(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_E^*(x) + V(x)\psi_E^*(x) = E\psi_E^*(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} \cdot\,\psi_E^* \\ \ominus \\ \cdot\,\psi_E \end{matrix} \longrightarrow \psi_E^*\Delta\psi_E - \psi_E\Delta\psi_E^* = 0$$

SI PUÒ RISCRIVERE COME

$$\underline{\nabla}(\psi_E^*\underline{\nabla}\psi_E - \psi_E\underline{\nabla}\psi_E^*) = 0 \quad \text{DIVERGENZA DI UN VETTORE}$$

CHIAMIAMO $\underline{j} = -i\frac{\hbar}{2m}(\psi_E^*\underline{\nabla}\psi_E - \psi_E\underline{\nabla}\psi_E^*) \longrightarrow \underline{\nabla}\underline{j} = 0$ EQ. DI CONTINUITÀ

IN $\boxed{d=1}$

$$\frac{d}{dx}\left(\psi_E^* \psi_E' - \psi_E \psi_E'^*\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{Im}\left(\psi_E^* \psi_E'\right)\right] = 0 \longrightarrow \text{cost sono } x$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\, \psi_E^*(x_1)\, \psi_E'(x_1) = \mathrm{Im}\, \psi_E^*(x_2)\, \psi_E'(x_2)$$

NEL NOSTRO CASO $x_1 < 0$ $x_2 > a$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A e^{-ikx} & x<0 \\ C e^{ikx} & x>a \end{cases}$$

$$\psi_E'(x) = \begin{cases} ik\left[e^{ikx} - A e^{-ikx}\right] & x<0 \\ ik\, C e^{ikx} & x>a \end{cases}$$

$$\psi_E^*(x) = \begin{cases} e^{-ikx} + A^* e^{ikx} & x<0 \\ C^* e^{-ikx} & x>a \end{cases}$$

IN $\boxed{x_1 < 0}$

$$\psi^* \psi' = \left[e^{-ikx_1} + A^* e^{ikx_1}\right] ik \left[e^{ikx_1} - A e^{-ikx_1}\right]$$

$$= ik\left[\underbrace{1 - A e^{-2ikx_1} + A^* e^{2ikx_1}}_{\text{DIF TRA } x \text{ E } x^* \Rightarrow \text{IMMAGINARIO PURO}} - |A|^2\right]$$

$\longrightarrow$ PT IMMAGINARIA: $k\left[1 - |A|^2\right]$

IN $\boxed{x_2 > a}$

$$C^* e^{-ikx_2}\, ik\, C e^{ikx_2} = ik|C|^2$$

HA PT IMMAGINARIA $k|C|^2$

$$\Rightarrow k\left[1 - |A|^2\right] = k|C|^2 \Rightarrow |A|^2 + |C|^2 = 1 \qquad \square$$

CI SONO UNA SERIE DI RISULTATI RICAVABILI IN FORMA GENERALE INDIP DALLA FORMA DEL POTENZIALE

X ORA ABBIAMO IMMAGINATO UNA SITUA DI SCATTERING IN CUI UN CERTO POTENZIALE È NULLO AL DI FUORI DI UNA CERTA REGIONE E FACENDO INCIDERE LE PARTICELLE DA SX ABBIAMO STUDIATO IL COEFF DI RIFLESSIONE

RISULTATO INTERESSANTE:

SE INVECE CHE DA SX LE PART LE FACCIAMO INCIDERE DA DX

$\Rightarrow$ INDIP DALLA FORMA DI $V(x)$ IL COEFF DI TRASMISSIONE E QUELLO DI RIFLESSIONE SONO ESATTAMENTE GLI STESSI

DIM

INCIDENZA SX: $\varphi_E(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A e^{-ikx} & x<0 \\ C e^{ikx} & x>a \end{cases}$

ANCHE φ_E^* SOL $\longrightarrow \varphi_E^* = \begin{cases} e^{-ikx} + A^* e^{ikx} & x<0 \\ C^* e^{-ikx} & x>a \end{cases}$

φ_E E φ_E^* SONO LI $\longrightarrow$ ESSENDO EQ. DI SCHR. AL II ORDINE

$\Rightarrow$ TUTTE LE SOL DEVONO ESSERE CL DI φ_E E φ_E^*

$\Rightarrow$ SOL GEN: $\tilde{\varphi}_E(x) = \alpha \varphi_E(x) + \beta \varphi_E^*(x)$

$$\tilde{\varphi}_E(x) = \begin{cases} (\alpha + \beta A^*) e^{ikx} + (\alpha A + \beta) e^{-ikx} & x<0 \\ \alpha C e^{ikx} + \beta C^* e^{-ikx} & x>a \end{cases}$$

VOGLIAMO CONOSCERE GLI STATI DI SCATTERING X PART INCIDENTE DA DX

IMPONIAMO LA CONDIZ DI NORMALIZZ X L'ONDA ENTRANTE

$\beta C^* = 1 \qquad \alpha + \beta A^* = 0$

$\downarrow$

$\beta = \frac{1}{C^*} \Rightarrow \alpha = -\frac{A^*}{C^*}$

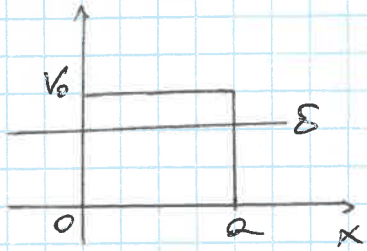
COEFF DI RIFLESSIONE: $|\tilde{A}|^2 = |\alpha C|^2 = |A|^2$

$\Rightarrow$ COEFF DI TRASMISSIONE È UGUALE

$\blacksquare$

EFFETTO TUNNEL

UNA SECONDA COSA INTERESSANTE È LA STUDIA IN CORRENDO UN POTENZIALE A GRADINO ED EN $0<E<V_0$



CLASSICO: PARTICELLA RIMBALZA E TORNA INDIETRO
→ NO SONO TRASMESSA

QM: ∃ PROBABILITÀ FINITA CHE LA PARTICELLA ATTRAVERSI QUESTO POTENZIALE
→ EFF TUNNEL

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ V_0 & 0<x<a \\ 0 & x>a \end{cases}$$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A e^{-ikx} & x<0 \\ B e^{k_0 x} + B' e^{-k_0 x} & 0<x<a \\ C e^{ik(x-a)} & x>a \end{cases}$$

EXP KVS CLASSICO → INACCESSIBILE

→ ABBIAMO MESSO C CON e^{-ika} DI CUI IL MODULO QUADRO SARÀ LA TRASMESSA

$$k_0 = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

IN $\boxed{x=0}$

$$\begin{cases} \psi: & 1+A = B+B' \\ \psi': & i\frac{k}{k_0}(1-A) = B-B' \end{cases}$$

IN $\boxed{x=a}$

$$\begin{cases} \psi: & C = B e^{k_0 a} + B' e^{-k_0 a} \\ \psi': & C = -i\frac{k_0}{k}\left(B e^{k_0 a} - B' e^{-k_0 a}\right) \end{cases}$$

$$C = (B+B')\cosh(k_0 a) + (B-B')\sinh(k_0 a)$$

$$\Rightarrow \quad C = -i\frac{k_0}{k}\left[(B-B')\cosh(k_0 a) + (B+B')\sinh(k_0 a)\right]$$

DA EQ. CONTINUITÀ IN $x=0$

$$\rightarrow \begin{cases} C = (1+A)\cosh(k_0 a) + i\frac{k}{k_0}(1-A)\sinh(k_0 a) \\ C = (1-A)\cosh(k_0 a) - i\frac{k_0}{k}(1+A)\sinh(k_0 a) \end{cases}$$

$$A\left(\cosh k_0 a - \frac{k}{k_0}\sinh k_0 a\right) - C = -\left(\cosh k_0 a + i\frac{k}{k_0}\sinh k_0 a\right)$$

$$A\left(\cosh k_0 a + i\frac{k_0}{k}\sinh k_0 a\right) + C = \cosh k_0 a - i\frac{k_0}{k}\sinh k_0 a$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{2}{2\cosh k_0 a + i\left(\frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right)\sinh k_0 a}$$

$$|C|^2 = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2 k_0 a}$$

$(E < V_0)$

$$|A|^2 = \frac{V_0^2 \sinh^2 k_0 a}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2 k_0 a}$$

C'È UNA PROBAB FINITA CHE PASSI LA BARRIERA ANCHE PER $E < V_0$

EVOLUZIONE TEMPORALE

H GENERATORE DELL'EVOLUZ TEMPORALE IN MQ

$$|A\rangle \xrightarrow{\text{EVOLUZ TEMP}} |A, t\rangle$$

CI SONO 2 ASPETTI IMPORTANTI:

- QUANDO PARLIAMO DI EVOLUZ TEMP DOBBIAMO IMMAGINARE DI NON INTERAGIRE CON IL SIST, IN PARTIC NON EFFETTUARE MISURE

  $U(t,0)|A,0\rangle = |A,t\rangle$ OP DI EVOLUZ TEMP

  CI ASPETTIAMO VALGAN NELL'EVOLUZ TEMP IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZ

  $|C,0\rangle = \alpha|A,0\rangle + \beta|B,0\rangle \Rightarrow |C,t\rangle = \alpha|A,t\rangle + \beta|B,t\rangle$

  OVVERO $U(t,0)|C,0\rangle = |C,t\rangle$ OP LINEARE

- VOGLIAMO CHE LE PROBAB DI TRANSIZIONE SIANO INV AL TEMPO

  $\langle B,0|A,0\rangle = \langle B,t|A,t\rangle$

  $\Rightarrow \langle B,0|A,0\rangle = \langle B,0|U^\dagger U|A,0\rangle \quad \forall A,B$

  $\Rightarrow U^\dagger(t,0)\,U(t,0) = \mathbb{1}$ UNITARIO

ABBIAMO VISTO IN MC CHE L'EVOLUZ TEMP È CANONICA

CIOÈ MANTIENE CONIUGATE LE VAR AD OGNI TEMPO

$q(t), p(t)$ CANONICHE $\forall t$

IL GENERATORE È H IN MC

x TEOR VON NEUMANN ABBIAMO VISTO CHE TRASF CANONICHE SONO IMPLEMENTATE DA OP UNITARI

UN GRUPPO DI TRASF CANONICHE È ASSOCIATO A DEI GENERATORI CHE SONO LEGATI A

$$U(t,0) = e^{iKt}$$

ESSENDO UNITARIO $K^+ = K$ ASTRATTO $\Rightarrow$ K OSS

È NATURALE IMMAGINARE UN LEGAME TRA K E H

$$U(t,0) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

FORMULA ANALOGA ALL'EVOLUZ SPAZIALE

$$U(x) = e^{+\frac{i}{\hbar}px}$$

EVOLUZ TEMP LEGATA AD H EQUIVALE AD CHIEDERE CHE

$|A,t\rangle$ SI OTTENGA AGENDO CON H A $|A,0\rangle$

$$|A,t\rangle = e^{-i/\hbar Ht}|A,0\rangle$$

RAPPR UN EVOLUZ TEMP FINITA

CI ASPETTIAMO CHE LE TRASF ASSOCIATE ALL'EVOLUZ TEMP FORMINO UN GRUPPO

CIOÈ $U(t_2,t_0) = U(t_2,t_1)U(t_1,t_0) \quad t_0 < t_1 < t_2$

CHIARO CHE IN CONDIZ DI OMOGENEITÀ NEL TEMPO (NESSUNA FORZA INDIPENDENTE)

$\Rightarrow$ H INDIPENDENTE

$\Rightarrow$ SCELTA ORIGINE DEL TEMPO IRRILEVANTE

IN QUESTE CONDIZ $U(t_1,t_0) = U(t_1-t_0)$

$\rightarrow U(t_1,t_0) = U(t_1-t_0,0) = e^{-i/\hbar H(t_1-t_0)}$

UNA CARATT. INTERESSANTE DI CERTI OP. TRASF. È CHE POSSIAMO PRENDERNE DEF. DA TEMPO INFINITESIMO

$$U(t) \simeq \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H t + o(t^2) \qquad (U(0) = \mathbb{1} \text{ XKÉ NON STO EVOLVENDO})$$

CIOÈ LA DEF. DI OPERATORE HAMILTONIANO SI PUÒ OTTENERE DIFFERENZIANDO LA DEF. DI OP. TEMPORALE A TEMPO t

$$\frac{d}{dt} U(t) = -\frac{i}{\hbar} H U(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} |A,t\rangle = \frac{d}{dt} U(t) |A,0\rangle = -\frac{i}{\hbar} H U(t) |A,0\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |A,t\rangle$$

$$\longrightarrow \boxed{i\hbar \frac{d}{dt} |A,t\rangle = H |A,t\rangle}$$

SIMILE ALL'OPERATORE p IN RS DELLE COORD.

EQ. DI SCHR. DIPENDENTE DAL TEMPO

IN RS DELLE COORD.

$$\varphi_A(x) = \langle x|A\rangle \qquad \varphi_A(x,t) = \langle x|A,t\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi_A(x,t) = H\left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi_A(x,t)$$

ABBIAMO PARLATO DELL'EQ. DI CONTINUITÀ DEF $\underline{j} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\varphi_\sigma^* \underline{\nabla} \varphi_\sigma - \varphi_\sigma \underline{\nabla} \varphi_\sigma^*\right)$ E RIFORMULANDOLA $\underline{\nabla} \underline{j} = 0$

POSSIAMO RIFORMULARLA CON LA DIPENDENZA DAL TEMPO

$$\boxed{\underline{\nabla} \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) = 0}$$

DOVE $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ DENSITÀ DI PROBAB.

LEGGE DI CONSERVAZ. DELLA PROBABILITÀ (EQ. DI CONTINUITÀ X SITUAZ. VARIABILI NEL TEMPO)

QUINDI ABBIAMO DUE LE EVOLUZ TEMP IN 2 MODI:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |A,t\rangle = H \; |A,t\rangle & ** \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) = H(t)\, U(t) & * \end{cases}$$

DERIVATI POSTULANDO CHE $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$

IN REALTÀ (*) AMMETTE QUESTA SOL CON COND INIZ $U(0) = \mathbb{1}$

SE $H \neq H(t) \Rightarrow$ (*) E (**) SONO EQUIVALENTI

SE $H = H(t)$?

(*) E (**) NON SONO + EQUIVALENTI

INNANZITUTTO $U(t_1, t_2) \neq U(t_1 - t_2)$

INOLTRE LA SOL DI (*) NON È + QUELLA SCRITTA SOPRA

DOVREMMO CALCOLARE LA SOL DI (*) QUANDO L'HAMILTONIANA A TEMPI DIVERSI NON COMMUTA CIOÈ $[H(t_1), H(t_2)] \neq 0$

PER ORA ANCH INTERESSA H INDIP DAL TEMPO

STATI STAZIONARI E CONDIZ DI STAZIONARIETÀ

SITUAZ STAZIONARIA: LA DESCRIZ DEL SIST NON CAMBIA AL VARIARE DEL TEMPO

UN ESEMPIO È IL CASO $|A,t\rangle = |A,0\rangle$?

SE LO RICHIEDIAMO $\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt}|A,t\rangle = H|A,t\rangle \Rightarrow 0 = H|A,t\rangle$

$\Rightarrow |A,t\rangle$ AUTOVETT DI H CON AUTOVAL 0

$\rightarrow$ RICHIESTA ESTREMAMENTE RESTRITTIVA CHE NON CORRISP A CIÒ CHE VOGLIAMO

NOI VOGLIAMO CHE LO STATO FISICO SIA LO STESSO

CIÒ CHE HO SCRITTO SOPRA NON DICE CHE RIMANE INVARIATO LO STATO BENSÌ IL VETT CON CUI LO STO RAPPRESENTANDO

$\rightarrow$ RICHIESTA TROPPO FORTE

$\rightsquigarrow$ VOGLIAMO SOLO CHE IL VETT RAPPR LO STESSO STATO
$\Rightarrow$ DIFFERISCA DI UN FATTORE

$$\boxed{|A,t\rangle = C(t)\,|A,0\rangle}$$ DEF DI STATO STAZIONARIO

TEOR

GLI STATI STAZIONARI SONO TUTTI E SOLI GLI AUTOSTATI DI H

DIM

$\Rightarrow H|E\rangle = E|E\rangle$ $\quad |E\rangle$ AUTOSTATO H

$\Rightarrow U(t)|E\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|E\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}|E\rangle \quad (U = f(H) \Rightarrow$ AUTOVAL $f(E))$

$\Rightarrow |E,t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}|E\rangle \Rightarrow$ AUTOSTATI DI H SONO STAZIONARI

$\Leftarrow)$ $i\hbar \frac{d}{dt}|A,t\rangle = H|A,t\rangle \rightarrow$ STATO STAZ: $i\hbar\,\dot{C}(t)|A,0\rangle = H\,C(t)|A,0\rangle$

$\Rightarrow i\hbar \frac{\dot{C}(t)}{C(t)}|A,0\rangle = \underbrace{H|A,0\rangle}_{\text{INDIP DA } t}$

$\Rightarrow$ ANCHE IL MEMBRO A SX NON DIP DA $t \Rightarrow i\hbar \frac{\dot{C}(t)}{C(t)}$ INDIP DA t

$\Rightarrow i\hbar \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} =: E \qquad C(0) = 1$ X DEF EVOLUZ TEMP

$\Rightarrow C(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \Rightarrow$ AUTOSTATO DI H $\blacksquare$

QUESTA OSSERVAZIONE CI PERMETTE DI DISCUTERE L'EVOLUZ DI UNO STATO GENERICO
XRÉ SE ASSUMIAMO CHE H SIA UNA BUONA OSS SAPPIAMO CHE OGNI STATO PUÒ ESSERE SCRITTO COME

$$|A,0\rangle = \sum_n a_n |E_n\rangle \quad \text{DOVE } H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$$

$$|A,t\rangle = U(t)|A,0\rangle = e^{-i/\hbar\, Ht}|A,0\rangle \overset{U_{LIN}}{=} \sum a_n e^{-i/\hbar\, Ht}|E_n\rangle$$

$$= \sum_n a_n e^{-iE_n t/\hbar}|E_n\rangle$$

⇒ LO STATO AL TEMPO t É SOVRAPP DELLI OGN DELLA BASE IN CUI CIASCUNO DEI COEFF HA FATTORE DI FASE CORRISP ALL'AUTOSTATO A CUI CORRISPONDE

→ QUESTO RISOLVE COMPLETAMENTO IL PROB DELL'EVOLUZ TEMP SE CONOSCIAMO LO SPETTRO DI H

<u>ES</u> OSCILLATORE ARMONICO

$$H|n\rangle = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle$$

$$|A,0\rangle = \sum_{n\geq 0} a_n |n\rangle \qquad a_n = \langle n|A,0\rangle$$

$$|A,t\rangle = \sum a_n e^{-i/\hbar\, \hbar\omega(n+\frac{1}{2})t}|n\rangle = e^{-i/2\,\omega t}\sum a_n e^{-in\omega t}|n\rangle$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

NOTIAMO CHE $e^{-in\omega(t+T)} = e^{-in\omega t - 2\pi i n} = e^{-in\omega t}$

⇒ $|A,t+T\rangle = -|A,t\rangle$ IL SIST DOPO T TORNA IN SÉ STESSO

SE PRENDO $T/2$

$|A,t+T/2\rangle$ PUNTA AL PTO CON POSIZ E IMPULSO OPPOSTE

→ OP DI INV

$$|A,t+T/2\rangle = e^{-i\pi/2}\sum a_n(-1)^n|n\rangle$$

$$= e^{-i\pi/2}\sum a_n I|n\rangle$$

⇒ NELLA SOVRAPP DEGLI STATI CI SARANNO STATI PARI E DISP A MENO CHE LO STATO DI PARTENZA NON ABBIA PARITÀ DEFINITA
IN TAL CASO AVRÒ O STATI PARI O STATI DISPARI

IL FATTORE $(-1)^n$ È COMUNE A TUTTI GLI $|n\rangle$ CON $a_n \neq 0$

→ SE SONO PARTITO DA UNO STATO PARI O DISPARI DOPO $T/2$ TORNO NELLO STESSO STATO

QUESTO XKÉ GLI STATI PARI O DISP SONO SOVRAPP DI STATI CON FISSATO p, q E p, q OPPOSTI

→ È UNA CARATT PURAMENTE QUANTISTICA

CIÒ CI PERMETTE DI STABILIRE UNA RELAZ TRA L'OP DI INVERSIONE TEMP ED EVOLUZ TEMP DI UN OSCILL ARMONICO X UNA QUANTITÀ $T/2$

⇒ POSSIAMO RAPPR L'OP DI INV TEMP

$$I = i\, e^{-i\frac{\pi}{2}\left(p^2/m\hbar\omega + \frac{m\omega}{\hbar} q^2\right)}$$

COSTI DEL MOTO

IN GEN VAL D'ASPETTAZIONE: $\bar{\xi} = \langle A|\xi|A\rangle$

+ IN GEN $\bar{\xi}_t = \langle A,t|\xi|A,t\rangle = \langle A,0|U^\dagger(t)\,\xi\, U(t)|A,0\rangle$

SE $|A,0\rangle$ STAZIONARIO ⇒ $|A,t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}|A,0\rangle$

$$\Rightarrow \bar{\xi}_t = \cancel{e^{+\frac{i}{\hbar}Et}}\langle A,0|\xi|A,0\rangle\, \cancel{e^{-\frac{i}{\hbar}Et}} = \bar{\xi}_0$$

→ IN STATI STAZIONARI IL VAL MEDIO DI UN OSS NON DIPENDE DAL TEMPO

QUANDO $\bar{\xi}_t = \bar{\xi}_0$ INDIP DALLA SCELTA DELLO STATO?

$$\bar{\xi}_t = \langle A,0|U^\dagger(t)\,\xi\, U(t)|A,0\rangle \overset{?}{=} \langle A,0|\xi|A,0\rangle \quad \forall |A,0\rangle$$

$$\Rightarrow U^\dagger(t)\,\xi\, U(t) = \xi$$

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{x } t \text{ piccoli}}}{\simeq} \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}Ht \Rightarrow U^\dagger(t) \simeq \mathbb{1} + \frac{i}{\hbar}Ht$$

$$\rightarrow \left(\mathbb{1} + \frac{i}{\hbar}Ht\right)\xi\left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}Ht\right) \simeq \xi + \frac{i}{\hbar}t\,[H,\xi] + o(t^2) = \xi$$

POSSIBILE $\Longleftrightarrow$ $\boxed{[H,\xi] = 0}$

OSS CHE COMMUTANO CON H HANNO VAL DI ASPETTAZ IN UNO STATO GENERICO INDIP DA t

→ COSTI DEL MOTO

SE ξ DEGENERE $\Rightarrow$ UN SUO AUTOSTATO CORRISP A UN PARTIC SSP

SE $[\xi, H] = 0 \Rightarrow$ L'EVOLUZ TEMP NON FA USCIRE DAL SSP

QUINDI SE ξ COST DEL MOTO E STATO INIZIALE È AUTOSTATO DI ξ

$\Rightarrow$ L'EVOLUTO DI ξ CONTINUERÀ AD ESSERE AUTOSTATO DI ξ

D'ALTRA PT

QUINDI RITROVIAMO IL RISULTATO SULL'ALGEBRA DELLE COST DEL MOTO APPLICATO AL COMMUTATORE

$\rightarrow$ COST DEL MOTO: ALGEBRA CHIUSA RISP ALLA COMMUTAZIONE

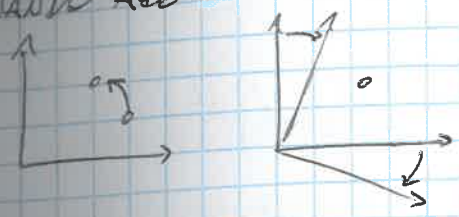
CIOÈ SE ξ, η COST DEL MOTO $\Rightarrow [\xi, \eta]$ COST DEL MOTO

$\Rightarrow$ VALGONO TUTTE LE PROP CONSERVATE

QUESTO ESAURISCE LA DISCUSS SULL'EVOLUZ TEMPORALE

EQ. DI HEISENBERG X EVOLUZ TEMPORALE

QUANDO ABBIAMO A CHE FARE CON TRASF CI SONO 2 POSSIBILI PTI DI VISTA



TRASF L'OGGETTO O IL SOGG

- SCHEMA DI SCHR

$$|A,0\rangle \longrightarrow |A,t\rangle = U(t)\,|A,0\rangle$$

$$\Rightarrow \bar{\xi}_t = \langle A,t|\xi|A,t\rangle = \langle A,0|U^\dagger \xi U|A,0\rangle$$

OSS FISSE, STATI EVOLVONO

- SCHEMA DI HEISENBERG

STATI FISSI, OSS EVOLVONO $\quad \xi \longrightarrow \xi_t = U^\dagger(t)\,\xi\, U(t)$

$$\Rightarrow \bar{\xi}_t = \langle A,0|\xi_t|A,0\rangle \quad \text{(CONTO IN HC)}$$

SONO PTI DI VISTA EQUIVALENTI

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \longrightarrow \xi(t) = U^\dagger(t)\,\xi\, U(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\xi}(t) = \dot{U}^\dagger(t)\,\xi\, U(t) + U^\dagger(t)\,\xi\,\dot{U}(t)$$

$$= \frac{i}{\hbar} U^\dagger H \xi U - \frac{i}{\hbar} U^\dagger \xi H U = \frac{i}{\hbar} U^\dagger [H,\xi] U$$

$$= \frac{i}{\hbar}[H, U^\dagger \xi U] = \frac{i}{\hbar}[H,\xi(t)]$$

$[U,H]=0$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\xi}(t) = \frac{i}{\hbar}[H,\xi(t)]} \quad \text{EQ. DI HEISENBERG}$$

LA FORMA È QUELLA DELLE EQ. DI HAMILTON (CICLO KKÉ IL "-" ALL'EXP DI U)

ESEMPI

1) $H = p^2/2m + V(q)$

$$\dot{q}(t) = \frac{i}{\hbar}[H, q(t)] = \frac{i}{\hbar} U^+ [H, q] U = \frac{i}{\hbar} U^+ [p^2/2m, q] U$$

$$= \frac{i}{\hbar} \frac{U^+}{2m} [p^2, q] U = \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2m} U^+ (p[p,q] + [p,q]p) U$$

$$= \frac{U^+}{m} p U = \frac{p(t)}{m}$$ CLASSICA RELAZ IMPULSO - VELOCITÀ

ANALOG

$$\dot{p}(t) = \frac{i}{\hbar} U^+ [H, p] U = \frac{i}{\hbar} U^+ [V, p] U = -U^+ \frac{\partial V}{\partial q} U$$

$$= -\frac{\partial V(q(t))}{\partial q}$$

LE EQ. DEL MOTO DI HEISENBERG COINCIDONO IN FORMA CON QUELLE CLASSICHE

2) $q(t) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$ x OSCILL DI FREQ. ω

OPERATORI

$q(0) = q \Rightarrow A = q$

$\dot{q}(0) = p/m \Rightarrow B = p/m\omega$

$\Rightarrow q(t) = q \cos \omega t + p/m\omega \operatorname{sen} \omega t$

ANALOG

$$p(t) = m\dot{q}(t) = p \cos \omega t - q m\omega \operatorname{sen} \omega t$$

SPARPAGLIAMENTO DEI PACCHETTI D'ONDA

CHE RELAZ C'È TRA QM E MC? COME EMERGE LA SECONDA?

IN MC ABBIAMO AVUTO LA PRETESA DI DEF ALLO STESSO TEMPO q E p (VAR CANONICHE)

CIÒ CONTRASTA CON L'ESPERIMENTO + IMPORTANTE X CUI È EMERSA LA Q.M

→ ESSENDO VAR CONIUGATE (COMMUTAZIONE PIÙ DI $\hbar$)
È IMPOSSIBILE DEF ALLO STESSO TEMPO

CIÒ CHE CHIAMIAMO POSIZ E IMPULSO IN MC E QM SONO COSE DIVERSE

MC: FUNZIONI QM: OPERATORI

POSSIAMO PARAGONARLI SE IN UN PARTIC STATO LA DISTRIB DEI POSSIBILI VALORI DELLA NOSTRA OSSERVABILE È MOLTO STRETTA

DOBBIAMO AVERE UNO STATO IN CUI IDENTIFICHIAMO

$$q_{class} = \bar{q} = \langle A|q|A\rangle$$

E Δq MOLTO PICCOLO (DALL'ORDINE DELL'ERRORE CON CUI POSSIAMO DEF LA POSIZ CLASSICA)

X AVERE UNA VERA DESCRIZ CLASSICA LO STESSO DEVE VALERE X L'IMPULSO IN $|A\rangle$

$$p_{clas} = \bar{p} = \langle A|p|A\rangle \quad \text{E } \Delta p \text{ MOLTO PICCOLO}$$

QUESTO È POSSIBILE

$$\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$$

QUANDO SIAMO VICINI AD UNO STATO DI MIN INDETERMINAZ POSSIAMO ASPETTARCI

$$\Delta p \Delta q \sim \hbar$$

⇒ POSSIAMO PASSARE AD UNA DESCRIZ CLASSICA XKÉ ABBIAMO POSIZ E IMPULSO BEN CONCENTRATI ATTORNO A UN VALORE MEDIO CON UN CONTORNO ABBASTANZA PICCOLO DA ESSERE COMPATIBILE CON UNA DESCRIZ CLASSICA

MA SITIAMO SUPP CHE CIÒ VALGA AD UN CERTO TEMPO

SE VALE AD UN CERTO TEMPO LA DESCRIZ CLASSICA, QUÒ VALERE X SEMPRE

DA UN PTO DI VISTA CLASSICO:

$$m\ddot{q}_{cl}(t) = F(q_{cl}) = -\frac{\partial V}{\partial q_{cl}}(q_{cl}) \qquad (I)$$

CON LO SCHEMA DI HEISENBERG:

$$m\ddot{q}(t) = F(q) \qquad (II)$$

QUANTO SONO COMPATIBILI QUESTE 2?

X LA II POSSIAMO PRENDERE IL VALOR DI ASPETTAZIONE IN $|A\rangle$

$$m\,\overline{\ddot{q}(t)} = \overline{F(q)} = \langle A|F(q)|A\rangle$$

$$\parallel$$

$$m\ddot{q}_{cl}(t) = F(q_{cl}) = F(\bar{q})$$

$\Rightarrow$ XKÉ SIANO COMPATIBILI SERVE CHE

$$\boxed{\overline{F(q)} = F(\bar{q})} \quad (CN)$$

IN GEN NON È VERO

È VERO SOLTANTO SE LA FORZA È LIN IN q

$$F(q) = a\,q + b$$

CI SONO 3 POSSIBILITÀ:

1) $V(q)$ QUADRATICO
2) $V(q)$ LINEARE (MUA)
3) $V(q)$ COST (PART LIBERA)

IN QUESTI 3 CASI L'EVOLUZ TEMPORALE CLASSICA COINCIDE CON QUELLA DELLE VAR QUANTISTICHE

VEDREMO CHE ANCHE IN QUESTI 3 CASI $\exists$ UN TEMPO MAX DOPO IL QUALE NON VALE + UNA DESCRIZ CLASSICA COMPATIBILE

A PARTE QUESTI CASI CI ASPETTIAMO CHE $F(q)$ SIA ESPANDIBILE IN SERIE

$$F(q) = F(\bar{q}) + F'(\bar{q})(q-\bar{q}) + R(q)$$

TC $\overline{R(q)} \neq R(\bar{q})$

$$R(q) \simeq \frac{1}{2} F''(\bar{q})(q-\bar{q})^2 + \dots$$

$\Rightarrow$ CI ASPETTIAMO CI SIA UNA DISCREPANZA NEL TEMPO TRA DESCRIZ CLASSICA E QUANTISTICA

IL FATTO DI AVER ASSUNTO CHE GLI SCARTI QUADRATICI SIANO COMPATIBILI CON $\Delta q \Delta p \simeq \hbar$ PUÒ ESSERE MANTENUTO NEL TEMPO?

<u>NO</u>

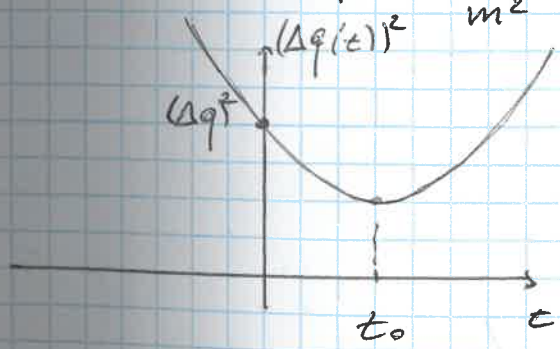
<u>ES</u> PARTICELLA LIBERA $\longrightarrow V(q) = 0$

$\Rightarrow p(t) = p \qquad q(t) = q + p/m\, t$ SONO DEL MOTO VALIDE $\forall t$ FISSATE LE CONDIZ A $t=0$

CALCOLIAMO $(\Delta q(t))^2 = \overline{q(t)^2} - \overline{q(t)}^2$

$$= \overline{q^2} + \overline{p^2/m^2}\, t^2 + (\overline{qp} + \overline{pq})\frac{t}{m} - \overline{q}^2 - \overline{p/m}^2 t^2 - 2\overline{p}\,\overline{q}\frac{t}{m}$$

$$= (\Delta q)^2 + \frac{(\Delta p)^2}{m^2} t^2 + \frac{t}{m}(\overline{pq} + \overline{qp} - 2\overline{q}\,\overline{p})$$



AL PASSARE DEL TEMPO $(\Delta q(t))^2$ INIZIERÀ A CRESCERE NOTEVOLMENTE

$$\Delta q(t) \simeq \frac{\Delta p}{m} t \sim \left(\frac{\hbar}{m \Delta q}\right) t \quad \text{PER } t \text{ GRANDI}$$

CI SARÀ UNA VELOCITÀ DI SPARPAGLIAMENTO DEL PACCHETTO D'ONDA

ALL'INIZIO ABBIAMO UNA POSIZ SUFF CONCENTRATA ATTORNO AL SUO VALORE MEDIO MA QUESTO SCARTO QUADRATICO MEDIO NECESSARIAM CRESCERÀ

$\Rightarrow$ DOVREMO ABBANDONARE LA DESCRIZ CLASSICA XKÉ L'INCERTEZZA DIVENTA ARBITRARIAMENTE GRANDE

IN QUESTA VELOCITÀ DI SPARPAGLIAMENTO ENTRANO 2 FATTORI: m E Δq

Δq ABBIAMO TENTATO DI PRENDERLO PICCOLO X PASSARE INIZIALM A UNA DESCRIZ CLASSICA

$\Rightarrow$ L'UNICO PARAM DA MANIPOLARE È m $\rightarrow$ X MANTENERE UNA DESCRIZ CLASSICA + A LUNGO POSSIBILE È NEC m GRANDE

METODO WKB E DESCRIZIONE SEMI-CLASSICA

QUINDI QUAL'È LA RELAZ TRA DESCRIZ CLASSICA E QUANTISTICA?

X CARICO TORNIAMO ALLO STUDIO DELLA EQ. DI SCHR

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

POSSIAMO RISCRIVERE $\psi(x)=e^{\frac{i}{\hbar}\sigma(x)}$ SENZA PERDITA DI GEN

$$\rightarrow \psi'(x)=\frac{i}{\hbar}\sigma'(x)\psi(x)$$

$$\psi''(x)=\frac{i}{\hbar}\sigma''(x)\psi(x)-\left(\frac{\sigma'(x)}{\hbar}\right)^2\psi(x)$$

SOSTITUENDO OTTENIAMO CHE

$$\boxed{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2-\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}=E-V(x)}$$

CERCHIAMO UNA SOL

$$\sigma(x)=\sigma_0(x)+\frac{\hbar}{i}\sigma_1(x)+\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\sigma_2(x)+\dots$$ SERIE DI POTENZE DI

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial x}\right)^2+V(x)=E & \text{ORDINE 0 IN } \hbar \quad (*)\\ \sigma_0'\sigma_1'+\frac{1}{2}\sigma_0''=0 & \text{ORDINE 1 IN } \hbar\\ [\dots] & \text{ORDINE K IN } \hbar\end{cases}$$

(*) = EQ. DI HAMILTON-JACOBI

$$\rightarrow \text{RISOLVENDOLA } \sigma_0(x)=\pm\int_a^x dy\sqrt{2m[E-V(y)]}=\pm\int_a^x dy\, p$$

INTEGRA INTERES
LUNGO LA TRAI

CHE IL TERMINE DI CORREZ TRASCURATO NELL'EQ. DI HAMILTON-JACOBI SIA TRASCURABILE SI PUÒ SCRIVERE COME:

$$\frac{\hbar}{2m}\left|\frac{dp}{dx}\right|\ll p^2/2m$$ CONDIZ VALIDITÀ DELL'APPROSSIMAZIONE

COSA SIGNIFICA E DOVE VIENE REALIZZATO?

$$\left|\frac{d}{dx}\frac{\hbar}{p}\right|\ll 1$$

INTERPRETANDO LA FUNZ D'ONDA COME ONDE

$$\varphi(x) \sim e^{i/\hbar\, p x}$$ $\frac{\hbar}{p}$ È LA LUNGHEZZA D'ONDA

$$\left|\frac{d}{dx}\lambda(x)\right| << 1$$

MA LA CONDIZ DI VALIDITÀ NON PUÒ SEMPRE ESSERE SODDISFATTA

x ES VICINO AI PTI DI INVERSIONE $V(x) = E$ (XKÈ ALLORA $p \to 0$)

SE VALE LA CONDIZ $\Rightarrow$ POSSIAMO RISOLVERE LA II EQ.

$$2\sigma_0'\sigma_1' + \sigma_0'' = 0 \longrightarrow \sigma_1' = -\frac{1}{2}\frac{\sigma_0''}{\sigma_0'} = -p'/2p$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = -\frac{1}{2}\lg p + c$$

AL PRIMO ORDINE ABBIAMO (NELLE REGIONI CLASSICAM ACCESSIBILI)

2 SOL: $$\varphi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{p}}\, e^{i/\hbar \int p\, dx} + \frac{C_2}{\sqrt{p}}\, e^{-i/\hbar \int p\, dx}$$

ABBIAMO SOL OSCILLANTI E LA SOL AL 1° ORDINE CI HA DATO COME TERMINE CORRETTIVO I FATTORI $1/\sqrt{p}$

AVEVAMO GIÀ VISTO CHE NELLE REGIONI CLASSICAMENTE ACCESSIBILI

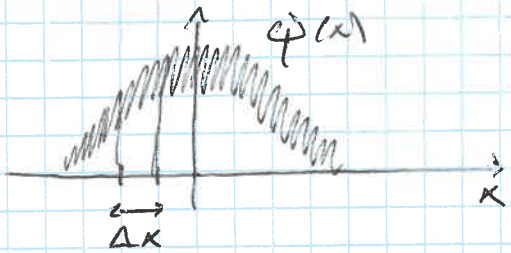
$|\varphi(x)|^2 \sim \frac{1}{p}$ XKÈ LADDOVE LA PART È + VELOCE PASSA MENO TEMPO E LA PROBAB DI TROVARLA È MINORE

ALMENO NEI PTI LONTANI DA $p=0$ EMERGE UNA DESCRIZ ~~QUASI~~ SEMI-CLASSICA IN CUI φ HA COMPORTAMENTO OSCILLANTE CHE DIPENDE DALL'INTEGRALE DELL'IMPULSO LUNGO LA TRAIETTORIA CLASSICA

LA FASE LEGATA A QUESTA OSCILLAZ È L'INTEG DELL'IMPULSO LUNGO QUESTA TRAIETTORIA CLASSICA (DIMENSIONI DI UN AZIONE) MISURATO IN UNITÀ DI $\hbar$

⇒ X PARTICELLE X CUI QUESTA QUANTITÀ È GRANDE PER t_i LA FUNZ ψ FARÀ RAPIDAMENTE MOLTE OSCILLAZIONI

⇒ SE GLI ASSEGNAMO UN'ENERGIA CHE HA UN VALORE CLASSICO E QUINDI APPARTENENTE A VALORI MOLTO ALTI AVRÀ UN NUMERO DI NODI MOLTO ALTO ⇒ MOLTE OSCILLAZIONI



⇒ LA FUNZ AVRÀ UN COMPORTAMENTO TOTALMENTE DIVERSO CHE SEMPLICE

NON È BEN DEF NELL'INTERVALLO CLASSICO Δx IL VALORE DI ψ XKÉ FA MOLTE OSCILLAZIONI

NON CI POSSIAMO ASPETTARE CHE NEL lim IN CUI $\hbar$ VA A ZERO, CIOÈ NEL lim IN CUI LA QUANTITÀ D'AZIONE DELLA NOSTRA PARTIC (INTEGRALE DI p SULL'ORBITA) SIA MOLTO + GRANDE DI $\hbar$, NON CI POSSIAMO ASPETTARE UNA CONV PUNTUALE DI ψ ALLA DISTRIB CLASSICA DI PROBABILITÀ

INVECE POSSIAMO CONV I VALORI MEDI, XKÉ, PER AVENDO UN ALTO NUMERO DI FLUTTUAZIONI IN UN INTERVALLO Δx, È ASSOCIATO UN BUON VALOR MEDIO

QUESTO POTRÀ AVERE UN COMPORTAMENTO ± COMPARABILE CON LA DISTRIB CLASSICA

QUINDI SE PRENDIAMO UN OGGETTO MACROSCOPICO X CUI LA DESCRIZ CLASSICA CI ASPETTIAMO SIA BUONA, QUESTO NON SIGNIFICA CHE POSSIAMO ASSOCIARCI IN OGNI PTO UNA BUONA FUNZ D'ONDA, SEMPRE IL CONTRARIO:

LA FUNZ D'ONDA OSCILLA RAPIDAMENTE ALL'INTERNO DELLA IMPRECISIONE DELLE NOSTRE DETERMINAZIONI CLASSICHE

⇒ ABBIAMO UNA CONV DELLA NOSTRA FUNZ D'ONDA ALLA DISTRIB CLASSICA DI UN TIPO MOLTO PARTICOLARE

COSA ACCADE NELLE REGIONI CLASSICAMENTE INACCESSIBILI? $(E < V(x))$

$$p = \sqrt{2m[E - V(x)]} \in \mathbb{I}m \Rightarrow \frac{i}{\hbar}\int p\,dx = -\frac{1}{\hbar}\int |p|\,dx$$

IMPULSO CLASSICO

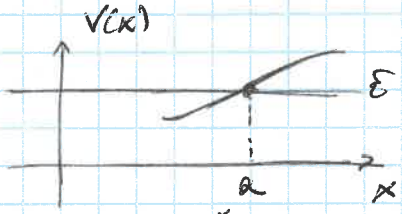
$$\Rightarrow \psi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar}\int |p|dx} + \frac{C_2}{\sqrt{|p|}} e^{+\frac{i}{\hbar}\int |p|dx}$$

SE QUESTA REGIONE SI ESTENDE FINO A ∞ $\Rightarrow$ SOLO UNA SOL VA TENUTA ALTRIMENTI ψ DIVERGE

$\Rightarrow$ RITROVIAMO IL TRENTO DI ψ A ∞ CHE AVEVAMO VISTO NEI CASI IN CUI ERAVAMO IN GRADO DI ESAMINARE IL COMPORTAM DI ψ A ∞

$\Rightarrow$ È CHIARO CHE SE SIAMO LONTANI DAI PTI DI INVERSIONE POSSIAMO ADATTARE QUESTA DESCRIZIONE SEMI-CLASSICA CHE PERMETTE DI DARE UNA FORMA ALLA FUNZ D'ONDA E QUINDI RISOLVERE IN MANIERA APPROSSIMATA L'EQ DI SCHR

VEDIAMO NEL CONCRETO:



SUPP DI AVERE UN CERTO $V(x)$ TC $V(a) = E$

NELL'APPROSSIMAZIONE SEMICLASSICA

SE $x \gg a$ CI ASPETTIAMO CHE $\psi(x) = \frac{C}{2\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar}\left|\int_a^x p(y)dy\right|}$

$\rightarrow$ OTTICA X DOPO

A SX DEL PTO DI INV: $x < a$

$$\psi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{p(x)}} e^{\frac{i}{\hbar}\int_a^x p\,dy} + \frac{C_2}{\sqrt{p(x)}} e^{-\frac{i}{\hbar}\int_a^x p\,dy}$$

ABBIAMO DELLE APPROSSIMAZIONI DEL COMPORTAMENTO A SX E DX

CI ASPETTIAMO SIANO BUONE PERCHÉ CONTANO DA UN INTORNO DI a

$\Rightarrow$ NON POSSIAMO RACCORDARLE XKÉ NON SONO VALIDE AVVICINANDOSI IN a

$\longrightarrow$ COME PROCEDERE?

UNA STRATEGIA È DIRE CHE SE L'INTORNO DI a È SUFF PICCOLO SI PUÒ APPROSSIMARE $V(x)$ TC

$$E - V(x) = F_0(x - a) \quad \text{APPROSSIMAZ LIN}$$

CIOÈ IN UN INTORNO DI a CONSIDERO LE SOL DI SCHR X UN'EQ LIN OVVERO UNA FORZA COST

$$F_0 = -\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=a}$$

NON ABBIAMO ANCORA DISCUSSO PROB DI FORZA COST

C'È UN' ALTRA STRATEGIA

NON POSSO PASSARE DAL PTO a
⇒ PASSO DA UN'ALTRA DIMENSIONE

→ SI CHIAMA PROLUNGAMENTO ANALITICO

SE HO $f(x)$ E POSSO PROLUNGARLA A $f(z)$ CON $z = x + iy$
o $f(x,y)$

CIOÈ SE HO UN MODO DI ESTENDERLA AL PIANO COMPLESSO

⇒ POSSO GIRARE NEL PIANO COMPLESSO SENZA MAI AVVICINARMI AL PTO a

x ES: $f(x) = x - a$ VOGLIO ANDARE AL NEG SENZA PASSARE PER $x = a$

IMMAGINO SIA DEF SU $\mathbb{C}$

$f(x) = x - a = \rho e^{i\varphi}$ DIST SU $\mathbb{C}$ DA a

SE TENGO FISSO ρ E CAMBIO φ

→ X ANDARE DAL POS AL NEG CAMBIO φ TRA 0 E π

$x > a$

$$\psi(x) = \frac{C}{2\left[2mF_0(x-a)\right]^{1/4}} e^{-\frac{1}{\hbar}\int_a^x \sqrt{2mF_0(y-a)}\,dy}$$

$$\int_a^x dy \sqrt{y-a} = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} = \frac{2}{3}\rho^{3/2}\left(\cos\frac{3}{2}\varphi + i\sin\frac{3}{2}\varphi\right)$$

L'INTEG SULLA SX: $\underbrace{-\frac{i}{\hbar}\frac{2}{3}(x-a)^{3/2}}_{\varphi=0} \to \frac{i}{\hbar}\frac{2}{3}(a-x)^{3/2}$

$$= -\frac{i}{\hbar}\int_a^x \sqrt{a-x}\,dx$$

⇒ CON QUESTA ROTAZ SIAMO PASSATI DA

$$-\frac{i}{\hbar}\int_a^x \sqrt{x-a}\,dx \longrightarrow -\frac{i}{\hbar}\int_a^x \sqrt{a-x}\,dx$$

x QUANTO RIGUARDA L'EXP ABBIAMO UN FATTORE

$$(x-a)^{-1/4} \longrightarrow (a-x)^{-1/4} e^{-i\pi/4}$$

SIAMO PASSATI DA UNA FUNZ D'ONDA ESPONENZIALMENTE DECRESCENTE A UNO DEI 2 TERMINI DELLA FUNZ OSCILLANTE

→ QUESTO DÀ $C_2 = \frac{C}{2} e^{-i\pi/4}$

MANCA ANCORA C_1, POICHÉ NEL FARE IL PROLUNGAMENTO ANALITICO ABBIAMO FATTO IL GIRO DA SOPRA

$\Rightarrow$ UNA DELLE COMPONENTI È DIVENTATA EXP PICCOLA ED È STATA QUINDI TRASCURATA NELL'APPROSSIMAZIONE

FACENDO IL GIRO DA SOTTO AVREMMO OTTENUTO $C_1 = \frac{C}{2} e^{i\pi/4}$

IL 2 È STATO AGGIUNTO X AVERE LE 2 FASI CONTROCONTROCONTROC

$\Rightarrow$ SONO L'ARGOMENTO DEL COS

$$\begin{cases} \frac{1}{\hbar}\int_b^a p\,dx - \pi/2 = n\pi \\ C = (-1)^n C' \end{cases}$$

LA CONDIZ DI COMPATIBILITÀ È CHE LA DIFF DELLE FASI SIA UN MULTIPLO DI π

LA COMPATIBILITÀ DÀ IL SEGNO

INTEGRARE SUL PERIODO È COME INTEGRARE 2 VOLTE SUL SEMIPERIODO

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\oint p\,dx = n+\frac{1}{2}$$

INTEGRALE SU UN PERIODO $\rightarrow$ AREA RACCHIUSA DA TRAIETTORIA CHIUSA

$$\boxed{A = \oint p\,dx = \left(n+\frac{1}{2}\right)n\pi\hbar}$$

È UNA CONDIZ DI QUANTIZZAZIONE NELL'APPROSSIMAZ SEMICLASSICA

$\rightarrow$ QUANTIZZAZIONE DI BOHR SOMMERFELD

IL METODO CHE ABBIAMO USATO È DETTO APPROSSIMAZ SEMICLASSICA O METODO WKB (WENTZEL-KRAMERS-BRILLOUIN)

LA QUANTIZ DI BOHR-SOMMERFELD DICE CHE IL NUMERO DEGLI STATI DEL TUO SISTEMA LO POSSO CONTARE

L'AREA È QUANTIZZATA: CIOÈ SE LA DIVIDO IN RETTANGOLINI DI AREA FINITA $\frac{\Delta p\,\Delta q}{2}$ QUESTI DI ENTRANO DI NUOVO FINITA DI VOLTE

È UNA DELLE FORME DI QUANTIZ CHE HANNO PROCEDUTO LA NOSTRA

UNA DIRETTA SEMPLICE APPLICAZIONE È: SE A DI COMPLESSI DI CENTRO LIVELLO ENERGIA $\Rightarrow$ LA DIFFERENZA 2 LIVELLI SARÀ INCREMENTARE DI 1

$\Rightarrow$ DIFF DI 2 AREE: $2\pi\hbar$

$$\Delta\oint p\,dx = 2\pi\hbar$$

FISSARE L'ITERESO EQUIVALE A FISSARE L'ENERGIA

$$\Delta E\oint\frac{\partial p}{\partial E}dx = \Delta E\oint\frac{dx}{v} = \Delta E\,T \Rightarrow \Delta E = \frac{2\pi\hbar}{T} = \omega\hbar$$

QUANTISTICA
II MODULO

x risolvere lo spettro di H dell'atomo di idrogeno utilizzeremo il fatto che il suo potenziale è centrale (dipende solo dalla distanza tra i corpi)

Classicamente si utilizza la simm che porta alla conservaz del momento angolare => ci si riduce a prob 1D effettiva

Dovremo affrontare la conservaz di $\vec{L}$ in QM e discuterne la quantizzazione

Parleremo di simmetrie e l'effetto su uno sp generico di un gruppo di trasf

Passeremo a studiare in dettaglio il gruppo delle rotaz e la sua rappr su $\mathcal{H}$

Poi studieremo l'atomo di idrogeno

x studiare sist fisici + complessi non avremo + i metodi esatti del prob 1D

=> esamineremo sol approssimate (teoria delle perturbazioni)

complicazione necessaria x spiegare interazioni tra atomi e interazioni limite

Passando da idrogeno a elio dovremo trattare l'indistinguibilità quantistica tra particelle

Entrando nel dettaglio della fisica atomica metteremo in discussione il principio che ci aveva portato a costruire il concetto di osservabile

Dovremo assumere che l'elettrone abbia uno "spin" (=> 1 gr di libertà in più)

SIMMETRIA

1° PRINCIPIO TD: CONSERVAZIONE ENERGIA

QUESTO IN REALTÀ È STRETTAMENTE COLLEGATO ALL'INVARIANZA X TRASLAZIONI TEMPORALI

X QUANTO CI FOSSE CONSAPEVOLEZZA DELLA RELAZIONE TRA CONSERVAZI E LEGGI DI INVARIANZA INIZIALMENTE FU SOTTOVALUTATO

ANCHE L'ELETTRODINAMICA DERIVA DALL'INVARIANZA DI GAUGE

QUESTO HA POI PORTATO NEGLI ANNI 50 ALLA GENERALIZZAZIONE DELL' ELETTRODINAMICA E ALLA NASCITA DEL MODELLO STANDARD

TEORIA DEL TUTTO = GRUPPO DI SIMMETRIE CHE SPIEGA TUTTE LE NOZIONI FONDAMENTALI

DEF

INSIEME DI TRASF CHE GODE DI ALCUNE PROPRIETÀ ALGEBRICHE CHE DEF IL CONCETTO DI GRUPPO (SIMM $\subseteq$ GRUPPO)

DEF GRUPPO G

INSIEME DOTATO DI UN OPERAZ BINARIA

CIOÈ CHE ASSEGNA AD UNA COPPIA ORDINATA (g_1, g_2) DI ELEM DI G UN 3° ELEMENTO g_3

$g_3 = g_1 \circ g_2$ (NOTAZ MOLTIPLICATIVA, ≠ DALLA MOLTIPLICAZ USUALE)

IL PRODOTTO SODDISFA 3 POSTULATI

G1) ASSOCIATIVITÀ: $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$

G2) $\exists$ IDENTITÀ: $\exists e \in G$ TC $\forall g \in G$ $eg = g$

G3) $\exists$ INVERSO: $\forall g \in G$ $\exists g^{-1} \in G$ TC $g^{-1} g = e$

CONSEGUENZE

- $g \cdot g^{-1} = e$? cioè $g = (g^{-1})^{-1}$? sì

DIM

$g^{-1} g = e \Rightarrow g^{-1} g g^{-1} = e g^{-1} = g^{-1} \longrightarrow$ moltip $\times (g^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow g g^{-1} = e$ ■

- $eg = g \Rightarrow ge = g$? sì

DIM

$ge = g(g^{-1}g) = (gg^{-1})g = eg$ ■

- e è unico? sì

DIM

SUPP $\exists e_1 \neq e : \forall g \; e_1 g = g = eg \xrightarrow[\text{a dx } g^{-1}]{\text{moltip}} e_1 = e$ ■

- $\forall g \; \exists! \, g^{-1}$? sì

DIM

SUPP $\exists g_1, g_2$ tc $g_1 g = g_2 g = e \xrightarrow[\text{per } g^{-1}]{\text{moltiplica}} g_1 = g_2$ ■

IN GEN ABBIAMO DETTO CHE $g_1 g_2 \neq g_2 g_1$

SE $g_1 g_2 = g_2 g_1 \Rightarrow$ COMMUTANO: $[g_1, g_2] = 0$

SE TUTTI GLI ELEM DI G COMMUTANO TRA LORO $\Rightarrow G$ ABELIANO

G È UN INSIEME, SI DICE FINITO SE HA UN # FINITO DI ELEMENTI

CARDINALITÀ $|G|$ SI DICE ORDINE DEL GRUPPO

ESERCIZI

1) INSIEME INTERI $\mathbb{Z}$ CON L'ADDIZIONE

0 IDENTITÀ $\longrightarrow$ $m \in \mathbb{Z}$ $\quad m+0 = 0+m = m$

$-m$ INVERSO $\longrightarrow$ $m \in \mathbb{Z}$ $\quad -m+m = m+(-m) = 0$

$(\mathbb{Z}, +)$ ABELIANO, NON È FINITO

2) GLI INTERI MODULO n $\mathbb{Z}_n$

$(m, m') \longrightarrow m+m' \pmod{n}$

0 IDENTITÀ

ABELIANO, FINITO CON ORDINE n $\quad G = (0, 1 \ldots n-1)$

3) $(\mathbb{Z}_p, *)$

$(m, m') \longrightarrow m \cdot m' \pmod{p}$

1 IDENTITÀ

SE p È UN NUMERO PRIMO $\Rightarrow$ GRUPPO

SE p NON È PRIMO $\Rightarrow$ NO

DIM SE p NON È PRIMO $\Rightarrow \exists\, m, n$ TC $p = mn$

$p \bmod p = 0 \Rightarrow (m \cdot n) \pmod{p} = 0$

QUESTO NON HA L'INVERSO

4) $G = \{2, 4, 6, 8\}$ MOLTIPLICAZIONE mod 10

IDENTITÀ 6 XKÉ $6 \cdot 2 = 12 \xrightarrow{\text{mod } 10} 2$

$6 \cdot 4 = 24 \xrightarrow{\text{mod } 10} 4$

---

5) INSIEME DI FUNZ

XES $f_1(z) = z$ $\quad f_2(z) = \frac{1}{1-z}$ $\quad f_3(z) = \frac{z-1}{z}$

$f_4(z) = \frac{1}{z}$ $\quad f_5(z) = 1-z$ $\quad f_6(z) = \frac{z}{z-1}$

DEF $(f_i, f_j) = f_i \circ f_j$ COMPOSIZIONE

È UN GRUPPO W CON $e = f_1(z)$

6) MATRICI 3×3 TC ${}^TMM = \mathbb{1}$ $\quad O(3)$ INSIEME MATRICI ORTOGONALI

$A, B \in O(3) \quad {}^TAA = \mathbb{1} \quad {}^TBB = \mathbb{1}$

$${}^T(AB)(AB) = {}^TB\,\underbrace{{}^TA\,A}_{\mathbb{1}}\,B = {}^TBB = \mathbb{1}$$

$\Rightarrow (O(3), \cdot)$ GRUPPO

SAPPIAMO CHE $\det({}^TMM) = \det{}^TM \det M = (\det M)^2 = \det \mathbb{1} = 1$

$\Rightarrow \det M = \pm 1$

LE $M \in O(3)$ TC $\det M = 1$ SONO IN $SO(3)$ GRUPPO ORTOGONALE SPECIALE

SONO DETTE <u>ROTAZIONI</u>

$\det AB = \det A \det B$ SE $A, B \in SO(3) \Rightarrow \det AB = 1$

$\Rightarrow AB \in SO(3)$

$\Rightarrow (SO(3), \cdot)$ È UN GRUPPO

7) SI POSSONO DARE UNA LISTA DI GENERATORI E RELAZIONI

<u>ES</u> UN SOLO GEN: $a \longrightarrow$ GENERA $a, a^2, a^3 \dots a^n$

SUPP $a^n = e$ x UN CERTO n

$C_n = \{\mathbb{1}, a, a^2 \dots a^{n-1}\}$ GRUPPO CICLICO DI ORDINE n

<u>ES</u> GRUPPO DIEDRALE D_n

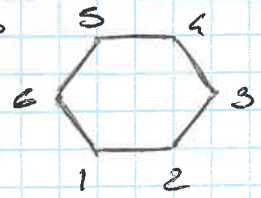
HA 2 GENERATORI a, b

$a^n = e, \; b^2 = e, \; (ab)^2 = e$ (REGOLE)

CHI SONO GLI ELEM DEL GRUPPO? (L'ORDINE È $2n$)

ANCHE IN GEOM ELEMENTARE SI PARLA DI TRASF E GRUPPI DI TRASF

x ES

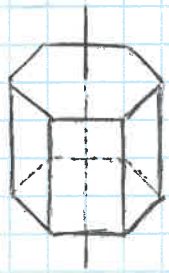


SE RUOTO DI $\pi/3$ MANDO L'ESAGONO IN SÉ STESSO MA NON I VERTICI

SE LO FACCIO 6 VOLTE OTTENGO L'IDENTITÀ

$\Rightarrow$ IL GRUPPO CICLICO SONO LE ROTAZ NEL PIANO DI UN POLIGONO A n VERTICI

INVECE IL GRUPPO DIEDRALE È UN DIEDRO



GRUPPO DIEDRALE

a, b GENERATORI

$a^n = e \quad b^2 = e \quad (ab)^2 = e$

$|D| = 2n$ COME MAI?

SE HO a, b CON QUESTI POSSO COSTRUIRE QUALUNQUE PAROLA

$$a\underbrace{bb}_{e}a\underbrace{aba}_{e}ba = aaaab = a^4 b$$

$$abab = e \Rightarrow abab^2 = b \Rightarrow aba = b$$

MOLTIP x a^{-1} SAPENDO CHE $a^n = e$

$$ba = a^{n-1} b$$

$\Rightarrow$ IN GEN $a^k b^s \quad k = 0 \dots n-1$, $s = 0, 1$

$\Rightarrow |D_n| = 2n$

POSSO ORA INIZIARE AD ESAMINARE I POSSIBILI GRUPPI

- C'È UN SOLO GRUPPO TC $|G| = 1 \longrightarrow G = \{e\}$

  INFATTI $ee = e \Rightarrow e^{-1} = e$

- $|G| = 2$ 2 ELEM $\longrightarrow G = \{0, 1\}$ CON LA SOMMA mod 2

  $0+0=0$ $\quad 0+1 = 1+0 = 1$ $\quad 1+1 = 0$ (1 INVERSO DI SÉ

POSSIAMO SINTETIZZARE LE REGOLE DI COMPOSIZIONE

+	0	1
0	0	1
1	1	0

TUTTE LE INFO RIGUARDO AL GRUPPO SONO RACCHIUSE NELLA TABELLA DI COMPOSIZ

- PRODOTTO mod 2 $\quad G = \{1, -1\}$

  $1 \circ 1 = 1$

  $-1 \circ 1 = 1 \circ (-1) = -1$

  $-1 \circ (-1) = 1$

×	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

- GRUPPO DELLE PERMUTAZ DI 2 ELEMENTI

  $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

  $\mathbb{1} \circ \mathbb{1} = \mathbb{1}$

  $\mathbb{1} \circ \sigma = \sigma \circ \mathbb{1} = \sigma$

  $\sigma \circ \sigma = \mathbb{1}$

	$\mathbb{1}$	σ
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	σ
σ	σ	$\mathbb{1}$

- $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ CONSIDERIAMO IL GRUPPO DELLE ISOMETRIE SULL'INTERVALLO $[-1, 1]$

  CIOÈ $f: [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ CONSERVA LE DISTANZE

  $\{\mathbb{1}, I\}$ $\quad \mathbb{1}: x \longmapsto x$

  $I: x \longmapsto -x$

  $\mathbb{1} \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1}$

  $\mathbb{1} I = I \mathbb{1} = I$

  $I I = \mathbb{1}$

	$\mathbb{1}$	I
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	I
I	I	$\mathbb{1}$

GRUPPI APPARENTEMENTE DIVERSI HANNO LA STESSA FORMA NELLA TABELLA DI COMPOSIZIONE

	e	a
e	e	a
a	a	e

$\Rightarrow$ IN TERMINI ASTRATTI C'È UN SOLO GRUPPO $\{e, a\}$ CON REGOLA $\boxed{a^2 = e}$

DOBBIAMO IMMAGINARE UN GRUPPO IN TERMINI ASTRATTI DIVERSAMENTE DALLA SUA AZIONE SULLO SP MA IN BASE ALLE SUE REGOLE DI COMPOSIZIONE

CONSIDERIAMO ORA $|G| = 3$ $\{e, a, b\}$

DEVE $\exists a^{-1} \longrightarrow$ L'UNICA POSSIBILITÀ È $b = a^{-1} \Rightarrow ab = e$

DIM

PA SUPP NON SIA VERO

SUPP $ab = a \Rightarrow b = e \Rightarrow |G| \neq 3$ ASSURDO

■

SE $ab = e \Rightarrow a^2 = b$

DIM

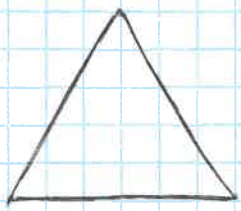
SE $a^2 = e \Rightarrow \overset{SE}{ab} = e \Rightarrow b = a \Rightarrow |G| = 2 \neq 3$ ASSURDO

SE $a^2 = a \Rightarrow a = e \Rightarrow |G| = 2 \neq 3$ ASSURDO

■

$\Rightarrow G = \{e, a, a^2\} = C_3$ È IL GRUPPO CICLICO DI ORDINE 3

SI PUÒ VEDERE COME LE ISOMETRIE DI UN TRIANGOLO EQUILATERO



$a = rot\left(\frac{2}{3}\pi\right)$

OPPURE COME $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

NB: NELLA TABELLA DI COMPOSIZ. LE RIGHE DELLA MATRICE SONO UNA LA PERMUTAZ. DELL'ALTRA

$\Rightarrow$ LA NOSTRA REGOLA DI COMPOSIZ. EFFETTUA SEMPLICEMENTE ALCUNE PERMUTAZIONI

$\Rightarrow$ OGNI GRUPPO FINITO È UN SOTTOGRUPPO DEL GRUPPO DI PERMUTAZ. DI $|G|$ (NUM. DI ELEMENTI DEL GRUPPO)

<u>SOTTOGRUPPO DEL GRUPPO G</u>

INSIEME DI ELEM. DI G CHE FORMA UN GRUPPO

X ES: $\mathbb{Z}_{12}$ (SOMMA mod 12)

$H = \{0, 3, 6, 9\}$ È UN SOTTOGRUPPO

INFATTI $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, \ldots, 11\} \Rightarrow H \subset \mathbb{Z}_{12}$

E SOMMANDO ELEM. DI H OTTENIAMO ELEM. DI H

È CHIARO CHE $\forall$ GRUPPO G $\exists$ ALMENO 2 SOTTOGRUPPI BANALI

$H = \{e\}$ E $H = G$

GLI ALTRI, SE $\exists$, SONO DETTI "PROPRI"

DATO G E UN SUO SOTTOGRUPPO H PROPRIO

$H = \{h_1 \ldots\}$ EVENTUALMENTE ∞

SCEGLIAMO $g \in G$ E DEF $gH = \{gh_1, gh_2, \ldots\}$

QUESTA È DETTA <u>CLASSE</u> <u>LATERALE</u> <u>SINISTRA</u>

HA LO STESSO # DI ELEM. DI H

ABBIAMO CLASSI LATERALI DIVERSE AL VARIARE DI g

<u>OSS</u>

2 CLASSI LATERALI O COINCIDONO O SONO DISGIUNTE ($\nexists$ ELEM. COMUNI)

<u>DIM</u> SUPP $\exists$ ELEM. COMUNE $g_1 h_1 = g_2 h_2 \Rightarrow g_2 = g_1 h_1 h_2^{-1} = g_1 \underbrace{h_3}_{\in H}$

$\Rightarrow$ TRANSLA $H \longrightarrow H \Rightarrow g_1 H = g_2 H$ ∎

CONSEGUENZE

- G si deve poter scrivere come unione di classi laterali

$$G = g_1 H \cup g_2 H \cup \dots$$

(G finito $\Rightarrow$ unione finita)

- $|G|$ deve essere divisibile per $|H|$

siccome $G = \bigcup_{g_j \in G} g_j H$ che hanno tutte cardinalità $|H|$

$\Rightarrow$ se G finito ha card multipla di $|H|$

(teor di Lagrange)

SOTTOGRUPPO NORMALE O INVARIANTE

$H = \{h_1, h_2 \dots\} \subseteq G$

portiamo la classe $g^{-1} H g = \{g^{-1} h_1 g, g^{-1} h_2 g, \dots\}$

il sottogruppo H è normale o invariante se

$$g^{-1} H g = H$$

cioè l'applicaz $h \longmapsto g^{-1} h g \quad \forall g \in G$

manda H in H

CLASSE DI EQUIVALENZA

introduciamo una classe di equivalenza x gli elementi di G

$g_1 \sim g_2$ se $g_2 = g_1 h$ con $h \in H$

$$[g] = \{g h \mid h \in H\} = gH$$

abbiamo che le classi di equivalenza o coincidono o sono disgiunte, infatti:

$$g h_1 = \tilde{g} h_2 \Rightarrow \tilde{g} = g h_1 h_2^{-1} \Rightarrow [g] = \tilde{g} \Rightarrow \text{teor Lagrange}$$

POSSIAMO COSTRUIRE CLASSI LATERALI SX O DX

H È NORMALE SE $\forall g \in G \quad gH = Hg$ (DEF ANALOGA)

SIA H SOTTOGR DI G

G/H INSIEME DELLE CLASSI LATERALI

SE RICHIEDO H NORMALE $\Rightarrow$ G/H DEF UN GRUPPO

INFATTI SE H NORMALE $\Rightarrow$ È BEN DEF $\boxed{gH * g'H = gg'H}$

SUPP $a \sim a'$ $\quad b \sim b'$

$\Rightarrow a' = ah \quad b' = bk$ CON $h, k \in H$

$$\Rightarrow (ab)^{-1} a' b' = b^{-1} a^{-1} a' b' = b^{-1} \underbrace{a^{-1} a}_{e} h b k$$

$$= b^{-1} h b k$$

SICCOME H NORMALE $b^{-1} h b \in H \Rightarrow b^{-1} h b k \in H$

$\Rightarrow$ SCEGLIERE ab O $a'b'$ È INDIFFERENTE

QUESTO È DEF <u>GRUPPO QUOZIENTE</u>

UN GRUPPO SE HA UN SOTTOGR NORMALE H SI PUÒ SCOMPORRE IN H E G/H

<u>GRUPPO SEMPLICE</u>: GRUPPO CHE NON HA SOTTOGR NORMALI

$\rightarrow$ OGNI GR PUÒ ESSERE VISTO COME COMPOSIZIONE DI GRUPPI SEMPLICI

I GR SEMPLICI FINITI SONO CATALOGATI (SI CONOSCONO TUTTI)

CI SONO 18 FAMIGLIE ∞ NUMERABILI E 26 GRUPPI SPORADICI

TRA QUESTI 26 $\exists$ OVVIAMENTE QUELLO CON IL NUM PIÙ GRANDE DI ELEMENTI: <u>GRUPPO MOSTRO</u>

HA $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 59 \cdot 71$

$\simeq 8 \cdot 10^{53}$ ELEMENTI

CLASSI DI CONIUGAZIONE

g_1, g_2 coniugati se $\exists\, g \in G$ tc $g_2 = g^{-1} g_1 g$

ovviamente $g_2 \sim g_1$

È facile vedere che se accade non è detto che g sia unico

L'insieme di gli g tc $g_2 = h^{-1} g_1 h$

formano un sottogr di G

Esempio gruppo di rotaz in 3D $SO(3)$

rotaz capita da asse + angolo

le classi di coniugaz sono le rotaz dello stesso angolo risp ad assi differenti

Esempio $U(n)$ trasf unitarie in n dim

le classi di equivalenza sono generalizz di matrici con gli stessi autovalori

GRUPPO DELLE PERMUTAZIONI DI n OGGETTI

DETTO GR SIMMETRICO DI ORDINE n $S(n)$

$$|S_n| = n!$$

PRENDIAMO $n=8$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$\exists$ UN'ALTRA NOTAZ POSSIBILE x LE PERMUTAZ $\rightarrow$ NOTAZ IN CICLI (RUFFINI)

$$\pi_1 = (123)(45)(67)(8)$$

$$\pi_2 = (12345678)$$

$$\pi_2 \circ \pi_1 = (132468)(5)(7)$$

r_1 1 CICLO

r_2 2 CICLI $\qquad r_1 + 2r_2 + \dots + n r_n = n$

r_k k CICLI $\qquad (r_1 \dots r_n)$ DET LA FORMA DELLA STRUTTURA IN CICLI

$$N_{(r_1 \dots r_n)} = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \dots r_n!\; 1^{r_1} 2^{r_2} \dots n^{r_n}}$$

Sgn DELLA PERMUTAZIONE:

$$\varepsilon_{\pi(1) \dots \pi(n)} = \operatorname{sgn} \pi = (-1)^{r_1+1} \dots (-1)^{r_n+1}$$

INOLTRE $\operatorname{sgn}(\pi_2 \circ \pi_1) = \operatorname{sgn} \pi_2 \cdot \operatorname{sgn} \pi_1$

LE PERMUTAZ DI Sgn PARI A_n FORMANO UN SOTTOGRUPPO DI S_n (GRUPPO ALTERNANTE)

A_n CON $n \geq 5$ È SEMPLICE (SI RÓ DIM)

LA CUI CONSEGUENZA x LO STUDIO DI EQ. DI GR ≥ 5? NON SONO SOLUBILI IN FORMA DI RADICALI

IN CHE SENSO GRUPPI SONO ASSOCIATI A TRASF?

ABBIAMO VISTO LA DEF DI GRUPPO TRA COME PUÒ AGIRE SULLO SP?

X È UN INSIEME (SP) CHIAMIAMO I SUOI ELEMENTI PUNTI

x DEF L'AZIONE DI G SU X INTENDIAMO CHE $\forall g \in G$

È BEN DEF UNA MAPPA $X \longrightarrow X$

CIOÈ

$\forall x \in X$ FISSATO $g \in G$ ASSOCIAMO UN NUOVO PTO $gx \in X$

PRESI $g_1, g_2 \in G$

$$\begin{cases} g_2(g_1 x) = (g_2 \circ g_1) x \\ e x = x \end{cases}$$

<u>DEF 2</u>

$x \in X$ DEF ORBITA DI x (DOVUTA A G)

$$Gx = \{ gx : g \in G \}$$

<u>ES</u> EVOLUZ TEMPORALE

$G = \{ U(t) : t \in \mathbb{R} \}$ X SP DOVE POSSO

$$\begin{cases} U(t_1 + t_2) = U(t_1)\, U(t_2) \\ U(0) = e \end{cases}$$

$U(t)\, x = x(t)$

$\Rightarrow Gx = \{ x(t) \mid t \in \mathbb{R} \}$ È ORBITA : POSSO AL TEMPO t

DEF

L'AZIONE DI G SU X È TRANSITIVA SE $\forall$ ORBITA QUESTA COINCIDE CON TUTTO LO SP

CIOÈ $\forall x \quad Gx = X$

DEF

L'AZIONE DI $g \in G$ È EFFETTIVA O FEDELE SE LA MAPPA CHE CORRISP A $g: X \to X$ È LA MAPPA IDENTICA

$\Rightarrow g = e$

SE L'AZIONE DI G NON È FEDELE

$\Rightarrow \exists$ UN SOTTOGR H DI G CHE AGISCE SU X COME LA MAPPA IDENTICA

SOLO LO SP QUOZIENTE G/H AGISCE ALLORA IN MODO FEDELE SU X

DEF

L'AZIONE DI g È LIBERA SE L'ESISTENZA DI UN PTO FISSO $gx = x$ IMPLICA $g = e$

(CIOÈ SE SOLTANTO L'IDENTITÀ LASCIA INVARIATO)

TEOR

SE G AGISCE LIBERAMENTE ($\nexists$ PTI FISSI SE $g \neq e$) E TRANSITIVAM

$\Rightarrow$ SE SCELGO UN PTO DI RIFERIMENTO x_0

$\Rightarrow \forall x \in X \ \exists! \, g \in G : x = g x_0$

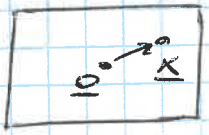
(SE VENE FOSSERO DUE: $g_1, g_2 \in G$ TC $x = g_1 x_0 = g_2 x_0$

$\Rightarrow x_0 = g_1^{-1} g_2 x_0$ MA SICCOME G AGISCE LIBERAMENTE

$g_1^{-1} g_2 = e \Rightarrow g_1 = g_2$)

$\Rightarrow$ IN QUESTO CASO $G \equiv X$ (POSSIAMO ASSOCIARLI)

ESEMPIO: PIANO



$\exists!$ TRASLAZIONE CHE FA $O \mapsto X$

$\Rightarrow$ È NATURALE IDENTIFICARE IL PIANO CON L'INSIEME DELLE TRASLAZ CHE LO GENERANO UNA VOLTA SCELTA L'ORIGINE

TEOR

SE G AGISCE TRANSITIVAMENTE MA NON LIBERAMENTE

SIA H IL SOTTOGR CHE LASCIA INVARIATO X_0

$$X_0 = g_1 X_0 = g_2 X_0 \qquad g_1, g_2 \in H$$

$$\Rightarrow X_0 = g_1^{-1} g_2 X_0 \Rightarrow g_1^{-1} g_2 \in H$$

IN QUESTO CASO POSSIAMO IDENTIF $X = G/H$ INSIEME CLASSI LATERALI

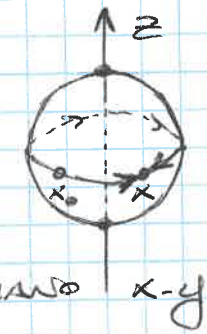
VENGONO DETTI SP QUOZIENTE O OMOGENEI

ESEMPIO

$G = SO(3)$ ROTAZ $\qquad X = S^2$ SFERA BIDIM (SUP SFERA)

$SO(3)$ AGISCE TRANSITIVAM (SCELTO UN PTO QUALUNQUE X POSSO TRASPORTARE X_0 CON UNA ROTAZ)

$\exists g : g X_0 = X$



MA QUESTA NON È UNICA

PRENDENDO I POLI HO CHE OGNI ROTAZ ATTORNO ALL'ASSE LASCIA INVARIATI I POLI (ROTAZ BIDIM DEL PIANO x-y)

$\Rightarrow H = SO(2)$ I PTI DELLA SFERA POSSONO ESSERE IDENTIF CON $S^2 \sim SO(3)/SO(2)$

RAPPRESENTAZIONE

UNA RAPPRESENTAZ n-DIMENSIONALE DEL GRUPPO G È UNA MAPPA ~~INVERTIBILE~~ $G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$

$GL(n, \mathbb{C})$ = GRUPPO LIN DELLE MATRICI INVERTIBILI (SE NO NON È UN GRUPPO) $n \times n$ SU CAMPO $\mathbb{C}$

CHIAMEREMO LA MAPPA $D: G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$

$g \in G \Rightarrow D(g)$ MATR $n \times n$ INVERTIBILE SU CAMPO $\mathbb{C}$

$D(g)$ INVERTIBILE $\Rightarrow \det D(g) \neq 0$

INOLTRE DOBBIAMO CHIEDERE CHE D RISPETTI LA STRUTTURA DI GRUPPO

COMPOSIZ ELEM DI G

1) $D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2)$ (PRODOTTO MATRICIALE)

CIOÈ $[D(g_1 g_2)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [D(g_1)]_{ik} [D(g_2)]_{kj}$

2) $D(g^{-1}) = [D(g)]^{-1}$

$\Rightarrow D(e) = \mathbb{1}$

QUINDI AD UN CERTO GRUPPO ASTRATTO ASSOCIAMO UN GRUPPO DI MATRICI SOTTOGRUPPO DI $GL(n, \mathbb{C})$

DEF [RAPPRESENTAZIONI EQUIVALENTI]

RAPPR CHE SI ASSOMIGLIANO SI DICONO EQUIVALENTI

DATA $D(g)$ SIA $C \in GL(n, \mathbb{C})$

$\rightarrow$ INTRODUCIAMO $D'(g) = C^{-1} D(g) C$ MATRICI SIMILI (DEF)

× DEF:

- $D'(g_1 g_2) = C^{-1} D(g_1 g_2) C = C^{-1} D(g_1) D(g_2) C$
  $= C^{-1} D(g_1) C C^{-1} D(g_2) C = D'(g_1) D'(g_2)$

- $D'(g^{-1}) = C^{-1} D(g^{-1}) C = C^{-1} [D(g)]^{-1} C$
  $= [C^{-1} D(g) C]^{-1} = [D'(g)]^{-1}$

$\rightarrow D' \sim D$ (SIMBOLO RAPPR EQUIVALENTI)

(POSSIAMO IMMAGINARE COME LA STESSA TRASF IN BASI DIVERSE. LE DUE BASI SONO LEGATE DA C)

DATA UNA RAPPR POSSO COSTRUIRE LA CONIUGATA

$D'(g) = D^*(g)$ RAPPR CONIUG COMPLESSA

- $D'(g_1 g_2) = D^*(g_1 g_2) = D^*(g_1) D^*(g_2) = [D(g_1) D(g_2)]^*$
  $= D'(g_1) D'(g_2)$

- $D'(g^{-1}) = ([D(g)]^{-1})^* = [D^*(g)]^{-1} = [D'(g)]^{-1}$

SE $D^* \sim D$ PUÒ SUCCEDERE CHE IN UNA BASE D SIA REALE

$\rightarrow$ SI DICE CHE LA RAPPR È PSEUDO-REALE

SE $D^* = D$ INDIP DALLE BASI $\Rightarrow$ RAPPR REALE

TEOR

OGNI RAPPR DI UN GRUPPO FINITO È EQUIV AD UNA RAPPR UNITARIA

CIOÈ X GRUPPI FINITI SCEGLIAMO COME RAPPR DI CONSIDERARE SOLO MATRICI UNITARIE

DIM

$$D: G \to V = GL(n, \mathbb{C})$$

$$Q := \sum_{g \in G} D^+(g) D(g)$$ SOMMA DI MATR $n \times n$ = MATR $n \times n$

1° OSS: Q HERMITIANA CIOÈ $Q^+ = Q$

$\Rightarrow$ Q DIAGONALIZZABILE

$\Rightarrow$ AUTOVALORI DI Q SONO REALI (X TEOR SPETTRALE)

QUESTI SONO ADDIRITTURA POSITIVI, INFATTI:

$$\forall \underline{v} \in \mathbb{C}^n \quad (\underline{v}, Q\underline{v}) = \langle \underline{v} | Q | \underline{v} \rangle = \sum_{g \in G} (\underline{v}, D^+(g) D(g) \underline{v})$$

$$= \sum_{g \in G} (D(g)\underline{v}, D(g)\underline{v}) = \sum_{g \in G} \| D(g)\underline{v} \|^2 > 0$$

$\| D(g)\underline{v} \| > 0$ XKÉ $D(g)$ INVERTIBILE

$\Rightarrow Q > 0$ E HA TUTTI AUTOVAL POSITIVI

2° OSS QUALSIASI MATR HERMITIANA PUÒ ESSERE SCRITTA COME

$$Q = X^+ X$$

Q HERMITIANA POSITIVA HA UNA RADICE QUADRATA CON X NON SINGOLARE

$$\forall g \in G \quad D^+(g) Q D(g) = \sum_{g'} D^+(g) D^+(g') D(g') D(g)$$

$$= \sum_{g'} D^+(gg') D(\underbrace{g'g}_{\in G}) = \sum_{g} D^+(g) D(g) = Q$$

DEF RAPPR EQUIVALENTE

$D'(g) = X D(g) X^{-1}$ VERIFICHIAMO CHE È UNITARIA

$$[D'(g)]^{+} D'(g) = [X D(g) X^{-1}]^{+} X D(g) X^{-1}$$

$$= (X^{-1})^{+} D^{+}(g) \underbrace{X^{+} X}_{\varphi} D(g) X^{-1}$$

$$= (X^{-1})^{+} \underbrace{D^{+}(g) \varphi D(g)}_{\varphi} X^{-1} = (X^{-1})^{+} \varphi X^{-1} = (X^{-1})^{+} X^{+} X X^{-1} = \mathbb{1}$$

$\Rightarrow$ EQUIV AD UNA RAPPR D' UNITARIA

■

$\Rightarrow$ CI BASTA CONSIDERARE RAPPR UNITARIE LE ALTRE SONO EQUIVALENTI

DEF [SOMMA DIRETTA DI RAPPRESENTAZIONI]

$D^{(1)}(g)\, D^{(2)}(g)$

$D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g)$

LA SOMMA DIRETTA È FATTA DI MATR A BLOCCHI

$$\begin{array}{c} m\left[\right. \\ n\left[\right. \end{array} \left(\begin{array}{c|c} D^{(1)}(g) & \emptyset \\ \hline \emptyset & D^{(2)}(g) \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} D^{(1)} \quad m \times m \\ D^{(2)} \quad n \times n \end{array}$$

$\underbrace{\qquad}_{m} \quad \underbrace{\qquad}_{n}$

GLI $\emptyset$ SONO $n \times m$ E $m \times n$

DEF [PRODOTTO DIRETTO]

$D^{(1)} \otimes D^{(2)}$

$\{\vec{e}_i^{\,(1)}\}_{i=1}^{m}$ BASE DEL PRIMO SP

$\{\vec{e}_i^{\,(2)}\}_{i=1}^{n}$ BASE DEL SECONDO SP

$\{\vec{e}_i^{\,(1)} \otimes \vec{e}_j^{\,(2)}\}_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$

IL FATTO DI AVERE RAPPR TENSORIALE TI DICE CHE

$$D^{(1)}(g)\, \vec{e}_i^{\,(1)} = \sum_{j=1}^{m} \vec{e}_j^{\,(1)} [D^{(1)}(g)]_{ij}$$

$$D^{(2)}(g)\,\vec{e}_j^{\,(2)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i^{\,(2)} \left[D^{(2)}(g)\right]_{ij}$$

$\Rightarrow$ DEF PRODOTTO TENSORE

$$\left[D^{(1)} \otimes D^{(2)}\right](g)\left(\vec{e}_i^{\,(1)} \otimes \vec{e}_j^{\,(2)}\right) = \sum_{\substack{k=1\dots m\\ l=1\dots n}} \left(e_k^{(1)} \otimes e_l^{(2)}\right) D^{(1)}_{ki}(g)\, D^{(2)}_{il}(g)$$

$$\left[D^{(1)}(g) \otimes D^{(2)}(g)\right]_{kl,\,ij}$$

SI DICE CHE LA RAPPR È PRODOTTO TENSORIALE DELLE RAPPR

<u>PROP</u>

SIA A $m \times m$, B $n \times n$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \emptyset \\ \hline \emptyset & B \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \mathrm{Tr}(A \oplus B) = \sum_{i=1}^{m+n} (A \oplus B)_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii} = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B$$

$$\longrightarrow \mathrm{Tr}(A \otimes B) = \sum_{I=1}^{n\cdot m} (A \otimes B)_{II} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (A \otimes B)_{ij,\,ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ii} B_{jj} = \sum_{i=1}^{m} A_{ii} \sum_{j=1}^{n} B_{jj}$$

$$= \mathrm{Tr}\,A \cdot \mathrm{Tr}\,B$$

$$\longrightarrow \exp[A \oplus B] = ?$$

$$\exp[A \oplus B] = \sum_{s \geq 0} \frac{1}{s!} (A \oplus B)^s$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \emptyset \\ \hline \emptyset & B \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A & \emptyset \\ \hline \emptyset & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A^2 & \emptyset \\ \hline \emptyset & B^2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \emptyset \\ \hline \emptyset & B \end{array}\right]^s = \left[\begin{array}{c|c} A^s & \emptyset \\ \hline \emptyset & B^s \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \exp[A \oplus B] = \sum_{s \geq 0} \frac{1}{s!} \left(A^s \oplus B^s\right) = \sum_{s \geq 0} \frac{A^s}{s!} \oplus \frac{B^s}{s!}$$

$$= \exp A \oplus \exp B$$

$\rightarrow$ CONSIDERIAMO $\exp[A \otimes \mathbb{1}_{n\times n} + \mathbb{1}_{m\times m} \otimes B]$

$$[A \otimes \mathbb{1}_n]^2_{rs,tu} = (A \otimes \mathbb{1}_n)_{rs,\alpha\beta} (A \otimes \mathbb{1}_n)_{\alpha\beta,tu}$$

SAPENDO CHE

$$[A \times \mathbb{1}_n]_{k\ell,ij} = A_{ki}\,\delta_{\ell j}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} A_{r\alpha}\,\delta_{s\beta}\,A_{\alpha t}\,\delta_{\beta u} = A^2_{rt}\,\delta_{su}$$

$$= (A^2 \otimes \mathbb{1}_n)_{rs,tu}$$

$$\Rightarrow \exp[A \otimes \mathbb{1}_n + \mathbb{1}_m \otimes B] = \exp(A) \otimes \exp(B)$$

$\rightarrow$ $\det(A \oplus B) = \det A \cdot \det B$

$\det(A \otimes B) = (\det A)^n (\det B)^m$

VOGLIAMO STUDIARE LE RAPPR DEI GRUPPI, IN PARTIC LE ROTAZ

IRRIDUCIBILITÀ DI UNA RAPPRESENTAZIONE

V SP VETT $\{A_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$ MAPPE CHE AGISCONO SU V

DIREMO CHE UN SSP $U \subseteq V$ È <u>INVARIANTE</u> PER L'INSIEME DELLE MAPPE SE

$$x \in U \Rightarrow A_\alpha x \in U \quad \forall \alpha$$

CIOÈ $\forall \alpha$ A_α MANDA I EL DI U IN U

DIREMO CHE $\{A_\alpha\}$ È <u>IRRIDUCIBILE</u> SE I SOLI SSP INVARIANTI SONO $\emptyset$ OPPURE V

SUPP INVECE CHE $\{A_\alpha\}$ ABBIA UN SSP INVARIANTE $U \subseteq V$ $(\neq \emptyset, V)$

$\Rightarrow V = U \oplus U'$

$\hookrightarrow$ COMPLEMENTARE DI U

$\Rightarrow$ SCELTA UNA BASE DI V AVREMO TOT ELEM IN U E TOT IN U'

$\Rightarrow$ A_α SARÀ SCRIVIBILE A BLOCCHI

$$A_\alpha = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline \emptyset & Z \end{array}\right] \begin{array}{l} U \\ U' \end{array} \\ \begin{array}{cc} U & U' \end{array} \end{array}$$

ORA PRESO UN VETT DI V $\begin{pmatrix} \lambda \\ \hline \mu \end{pmatrix} \begin{array}{l} \in U \\ \in U' \end{array}$

QUESTO APPLICATO AD A_α DEVE ANDARE IN U O U'

$$A_\alpha \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in V$$

SE $Y = \emptyset$ $\Rightarrow$ COMPLETAMENTE IRRIDUCIBILE

CIOÈ SIA U CHE U' SONO INVARIANTI

$\Rightarrow$ A_α COMPLETAMENTE IRRIDUCIBILE

SE A_α È UNITARIA $\Rightarrow$ SE U INVARIANTE LO È ANCHE $U^\perp$

IRRIDUCIBILITÀ + UNITARIETÀ = COMPLETA IRRIDUCIBILITÀ

RISULTATO GENERALE DI GRANDE IMPATTO: LEMMA DI SCHUR

U, V SP VETT E 2 INSIEMI DI MAPPE

$A_\alpha : U \to U \qquad B_\alpha : V \to V$

SUPP CHE QUESTI AGISCANO IN MODO IRRIDUCIBILE

SUPPONIAMO CHE $\exists\, \Lambda : U \to V$ TC

$\Lambda A_\alpha = B_\alpha \Lambda$

$\Rightarrow$ CI SONO SOLTANTO 2 POSSIBILITÀ:

$\Lambda = 0$ OPPURE Λ INVERTIBILE

IN QUESTO CASO SE $\dim U = \dim V$

$\Rightarrow A_\alpha = \Lambda^{-1} B_\alpha \Lambda$

$\Rightarrow A_\alpha$ E B_α SONO CONIUGATE ATTRAVERSO Λ

DIM

VOGLIAMO DIR CHE $\operatorname{Ker}\Lambda \subseteq U$ E $\operatorname{Im}\Lambda \subseteq V$

SONO SSP INVARIANTI RISPETTIVAM PER A_α E B_α

$x \in \operatorname{Ker}\Lambda \Rightarrow \Lambda A_\alpha x = 0 \Rightarrow A_\alpha x \in \operatorname{Ker}\Lambda$

$y \in \operatorname{Im}\Lambda \Rightarrow \exists\, \underset{\substack{\uparrow \\ x \in U}}{x}$ TC $\Lambda x = y$

$\Rightarrow B_\alpha y = B_\alpha \Lambda x = \Lambda A_\alpha x \in \operatorname{Im}\Lambda$

$\Rightarrow$ SONO SSP INVARIANTI

$\to$ SE LE MAPPE SONO IRRIDUCIBILI SONO 0 O TUTTO LO SP

SUPP $\Lambda = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker}\Lambda = U \Rightarrow \operatorname{Im}\Lambda = 0$

ALTRIMENTI $\operatorname{Ker}\Lambda = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\Lambda = V \Rightarrow$ TESI ∎

LO APPLICHEREMO A MAPPE CHE MANDANO UNO SP IN SÉ STESSO

COROLLARIO

$\{A_\alpha\}$ MAPPE CHE AGISCONO IRRIDUCIBILMENTE SU UNO SP VETT DI DIM n

SUPP $\exists\, \Lambda$ TC $\Lambda A_\alpha = A_\alpha \Lambda$

CIOÈ $[\Lambda, A_\alpha] = \emptyset \quad \forall \alpha$

SE SONO TUTTE IRRIDUCIBILI

$\Rightarrow \Lambda = \emptyset$ OPPURE $\Lambda = \lambda \mathbb{1}_n$

DIM

$(\Lambda - \lambda \mathbb{1}_n) A_\alpha = A_\alpha (\Lambda - \lambda \mathbb{1}_n)$

SICCOME STIAMO IN DIM FINITA POSSIAMO COSTRUIRE IL POLINOMIO CARATTERISTICO

$\det(\Lambda - \lambda \mathbb{1}_n) = P_n(\lambda)$ POLIN DI gr n IN $\lambda \Rightarrow \exists$ UNO ZERO

$P_n(\bar{\lambda}) = 0$

$\Rightarrow \Lambda - \bar{\lambda} \mathbb{1}_n$ NON È INVERTIBILE $\left(\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}\right)$

ESSENDO INVARIANTE E NON INVERTIBILE

$\Rightarrow$ x SCHUR $\Lambda - \lambda \mathbb{1}_n = \emptyset$

$\Rightarrow \Lambda = \bar{\lambda} \mathbb{1}_n$ ■

ESEMPIO

G GRUPPO, T È RAPPRESENTAZIONE SE $T(g) \in GL(n, \mathbb{C}) \ \forall g \in G$

$\mathbb{C}^n$ SP VETT, $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$

$\rightarrow \tilde{v}_i = \sum_{j=1}^{n} [T(g)]_{ij} v_j$

$\hookrightarrow$ VETT IMMAGINE

LE RAPPR AGISCONO IN MODO NATURALE SU $\mathbb{C}^n$

ESEMPIO

G GRUPPO DELLE TRASLAZIONI

V SP DI DIM DELLE FUNZIONI C^∞

$f(x+a)$ VOGLIAMO CALCOLARLO $\forall x$

$f'(x) = f(x+a)$ TRASLAZIONE

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)$$

$$= \left[\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\right] f(x) = e^{a\frac{d}{dx}} f(x)$$

ESPONENZIALE A UN OPERATORE

L'AVEVAMO VISTO SCRIVENDO LA TRASLAZ IN RELAZ ALL'INTRECCIO IN RS DELLE COORD

$$= T(a) f(x)$$

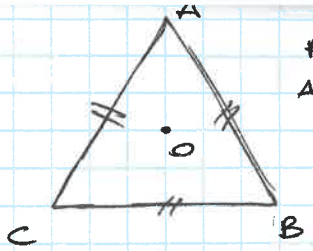
↳ RAPPR DEL GRUPPO DELLE TRASLAZ

IN PARTIC $T(a+b) = e^{(a+b)\frac{d}{dx}} = e^{a\frac{d}{dx}} e^{b\frac{d}{dx}} = T(a)T(b)$

INOLTRE È UN GRUPPO ABELIANO!

ESEMPIO DI RAPPR DI UN GRUPPO FINITO

C_{3V}



ROTAZ $\frac{2\pi}{3}$ INTORN A ASSE O

CI SONO 2 FAMIGLIE COMPOSTE CIASCUNA DA 3 TRASF CHE LASCIANO INV IL TRIANGOLO

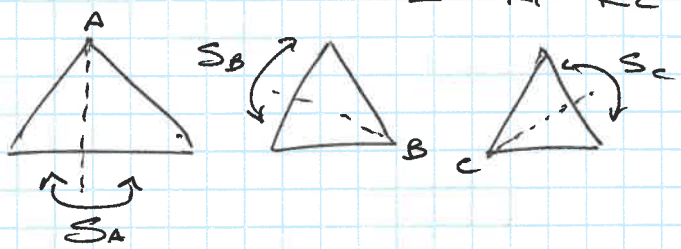
MANDA IL TRIANGOLO IN SÉ STESSO

$C_3 = (0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$

$\mathbb{1}$ R_1 R_2

ROTAZ: $C_3 = (0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi)$

RIFLESSIONI: S_A, S_B, S_C



ABBIAMO VISTO CHE UN GRUPPO È DEF DALLA SUA TABELLA DI COMPOSIZ

$g_j \circ g_i$	$\mathbb{1}$	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
R_1	R_1	R_2	$\mathbb{1}$	S_B	S_C	S_A
R_2	R_2	$\mathbb{1}$	R_1	S_C	S_A	S_B
S_A	S_A	S_C	S_B	$\mathbb{1}$	R_2	R_1
S_B	S_B	S_A	S_C	R_1	$\mathbb{1}$	R_2
S_C	S_C	S_B	S_A	R_2	R_1	$\mathbb{1}$

g_j

→ PERMUTAZ DI C_3 ←

QUESTO GR È <u>NON ABELIANO</u>

CONSIDERIAMO LE SUE RAPPR:

1) BANALE: MATR IDENTITÀ (TUTTO IL GRUPPO VA NELL'IDENTITÀ)

OSS CHE ROTAZ × ROTAZ = ROTAZ

ROTAZ × INV = INV

INV × INV = ROTAZ

⇒ ∃ UN'ALTRA RAPPR 2)

2) ASSOCIO ALLA ROTAZ $+1$
ALL' INV -1

1	-1
-1	1

RAPPR CONDIZ

3) RAPPR BIDIM

$$T(\mathbb{1}) = \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(R_1) = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$T(R_2) = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$T(S_A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(S_B) = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$T(S_C) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

SOPRASF CA TAB DI COMPOSIZ

NOI CONOSCIAMO LA FORMA GEN DI UNA ROTAZ NEL PIANO

SONO CARATT UNICAM DA θ ANGOLO DI ROTAZ

$$T(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$T T^{T} = \mathbb{1}$$

$\exists$ UN ALTRO MODO SEMPLICE DI VEDERE LE ROTAZ

PIANO = COPPIA DI NUM $\in \mathbb{R}$ = NUM $\in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ LE ROTAZ SONO DESCRITTE IN MODO NATURALE DA $\mathbb{C}$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$z' := x' + iy' = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta) + i(x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$$
$$= (x+iy)\cos\theta + (ix-y)\operatorname{sen}\theta$$
$$= (x+iy)(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = z\, e^{i\theta}$$

$\Rightarrow$ MOLTO + SEMPLICE: $\boxed{z' = z\, e^{i\theta}}$

HANNO LO STESSO CONTENUTO ALGEBRICO

NOTIAMO CHE $T(R_1)$ È LA MATR DI ROTAZ RISP AD UN ASSE

$\longrightarrow$ CAMBIO ASSE = CAMBIO BASE DI SDR

$\Rightarrow$ C'È UNA MATR CHE MANDA UNA BASE IN UN'ALTRA U

$\boxed{T_g' = U T_g U^{-1}}$ RAPPR EQUIVALENTE

ANCHE $T(S_i)$ SONO TRASF ORTOGONALI $TT^T = \mathbb{1}$

MA NON SONO ROTAZ XKÈ $\det T = -1$

QUINDI ABBIAMO 3 RAPPR POSSIBILI:

$\longrightarrow$ IDENTITÀ: ROTAZ X SCALARI

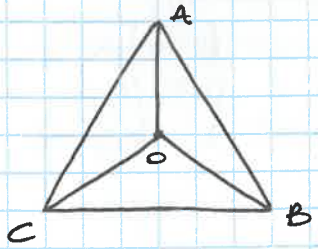
$\longrightarrow$ INVARIANTI X ROTAZ MA PRENDONO SGN − SE FACCIO SIMMETRIA

$\Rightarrow$ PSEUDOSCALARI

$\longrightarrow$ RAPPR X VETTORI

LE RAPPR IN FISICA SONO LEGATE AD OGGETTI CHE TRASF IN UN DET MODO SOTTO L'AZIONE DEL GRUPPO

$\Rightarrow$ CONOSCERE RAPPR = CONOSCERE COME TRASFORMANO DETERMINATI OGGETTI



$\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ SCALARI $\longrightarrow$ INVARIANTI x ROTAZ

$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = (OA)_x (OB)_y - (OA)_y (OB)_x$

PSEUDOSCALARE $\longrightarrow$ NON INVARIANTE x TRASF S
INVARIANTE x TRASF R

SE PRENDO IL VETT

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \leftarrow \\ \mathbb{R} \leftarrow \end{array} \left[\begin{array}{c} \vec{OA} \\ (\vec{OA})^2 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^3$$

[...]

ROTAZ IN 3D

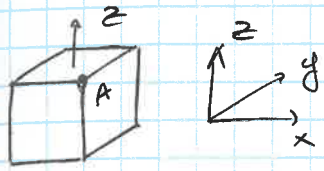
ASSE DI ROTAZ + ANGOLO DI ROTAZ + VERSO (DEF ADATTA SOLO AL CASO 3D)

↓

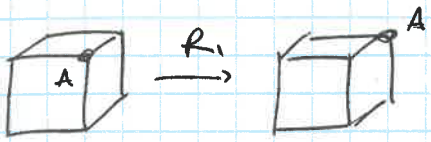
UTILIZZATA ANCHE NEL 2D ANCHE SE L'ASSE NON NE FA PARTE

PER TRATTARE TRASF GENERICHE A DIM ARBITRARIA ABBANDONIAMO L'IDEA DI ASSE

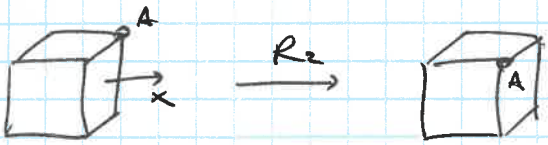
→ LA ROTAZ AVVIENE SU UN PIANO



RUOTANDO DI 90° IN ANTIORARIO TRASFORMO IL CUBO IN SÉ STESSO



SEGUENDO L'ASSE x E RUOTANDO DI 90°



A TORNA NELLA POSIZ INIZIALE

$R_1 R_2$ ROTAZ → DEVE AVERE UN ASSE ED UN ANGOLO

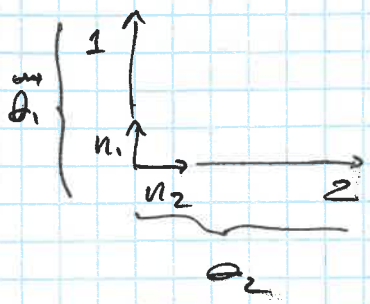
L'ASSE È LA DIAGONALE DEL CUBO CHE PASSA PER A

KKÈ L'ORIGINE ED A RIMANGONO IN SÉ STESSI IN QUANTO SULL'ASSE

L'ANGOLO È DI $2/3\pi$ (GUARDANDO GLI SPIGOLI IN CUI È CONNESSO DIVIDONO IL PIANO IN 3 E RUOTANO 2 VOLTE)

IN GEN GUARDANDO GLI ASSI DI R_1 ED R_2 POSSIAMO DEF L'ASSE DELLA COMPOSTA? NON È FACILE

POSSIAMO PENSARE DI PARE

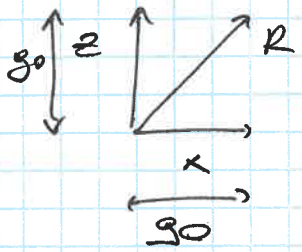


$(\hat{n}_1, \theta_1) \longrightarrow \vec{\theta}_1 = \hat{n}_1 \theta_1$

$(\hat{n}_2, \theta_2) \longrightarrow \vec{\theta}_2 = \hat{n}_2 \theta_2$

COMPOSIZIONE $= \vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2$?

MA APPLICANDOLA AL CASO PRIC



AVREI DOVUTO OTTENERE R

MA NON È ACCADUTO

POTREI PRENDERE IL PRODOTTO VETTORE?

ALLORA AVREI DOVUTO OTTENERE UN ASSE LUNGO y MA CIÒ NON AVVIENE

$\Rightarrow$ I VETT NON VANNO BENE X DESCRIVERE LA COMPOSIZ

IL 16 OTTOBRE 1843 HAMILTON PASSEGGIANDO CON LA MOGLIE EBBE UN'IDEA!

INCISE SUL PONTE BROGA CON UN COLTELLINO:

$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \qquad ijk = -1$

X DESCRIVERE IN MANIERA COMPATTA LA ROTAZ NEL PIANO ABBIAMO USATO $\mathbb{C}$ $\qquad z' = z e^{i\theta}$

HAMILTON ESTESE IL CAMPO $\mathbb{C}$ ALLE QUADRUPLE QUATERNIONI

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \qquad (x, y) \longmapsto x + iy$

$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{Q} \qquad (t, x, y, z) \longmapsto t + ix + jy + kz$

DOVE $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ E $ijk = -1$

IL PRODOTTO TRA 2 QUATERNIONI È REGOLAMENTATO DALLE REGOLE SCRITTE DA HAMILTON SUL PONTE IN MODO TC IL PRODOTTO DI QUATERNIONI SIA UN QUATERNIONE

I GIGANTI DELLA QM NON CONOSCEVANO PERÒ I QUATERNIONI

UNO DI QUESTI ERA PAULI

INTRODUSSE 3 MATR ~~[illegible]~~ 2x2: LE MATRICI DI PAULI

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = i\,\underline{i}$$

i UNITÀ IMMAG DI $\mathbb{C}$

$\underline{i}$ UNITÀ DEI QUATERNIONI $\mathbb{Q}$

$$\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = i\,\underline{j}$$

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = i\,\underline{k}$$

$$\Rightarrow \underline{i} = -i\sigma_x \; ; \; \underline{j} = -i\sigma_y \; ; \; \underline{k} = -i\sigma_z$$

DATE LE MATR DI PAULI POSSIAMO SOTTOLINEARE:

1) • $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{1}$ ANALOGA ALLA 1° EQ. DI HAMILTON

• $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z$ ANALOGA ALLA 2° EQ. DI HAMILTON

2) SI PUÒ RISCRIVERE:

$$\boxed{\sigma_r \sigma_s = i\,\varepsilon_{rsu}\,\sigma_u + \delta_{rs}\,\mathbb{1}}$$

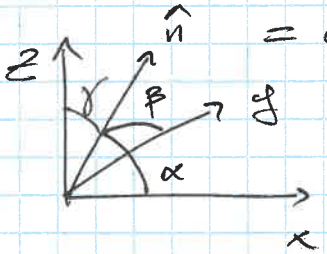
SONO LE REGOLE ALGEBRICHE DELLE MATR DI PAULI ANALOGHE A QUELLE DI HAMILTON PER I QUATERNIONI

IL RISULTATO FOND DOVUTO A HAMILTON È CHE UNA MATR DI ROTAZ ASSOCIATA A VERSORE $\hat{n}$ E UN ANGOLO θ È RAPPR DA UNA MATR 2x2

$$R(\hat{n},\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbb{1} - i\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$$

$$= \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbb{1} - i\,(\sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z)\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$$

$$= \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbb{1} - i\,(\sigma_x \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma)\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$$



QUESTO GEN LA ROTAZ IN 2D A 3D

IN 2D: $R(\theta) = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$

XKÉ UTILIZ $\theta/2$? VEDREMO CHE QUESTO GENERA CONSEGUENZE FANTASTICHE:
X ES PERMETTE AGLI ELETTRONI DI AVERE UNO SPIN

TORNANDO ALLA DOMANDA INIZ: DATE R_1 E R_2 POSSIAMO DIR LA LORO COMBINAZ $R_1 R_2$?

$$R_1(z, \pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} - i\sigma_z)$$

$$R_2 = (x, \pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} - i\sigma_x)$$

$$R_2 R_1 = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - i\sigma_x)(\mathbb{1} - i\sigma_z)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - i\sigma_x - \sigma_x\sigma_z - i\sigma_z)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - i\sigma_x + i\sigma_y - i\sigma_z$$

$$= \cos 60^\circ - i\,\mathrm{sen}\,60\,\frac{(\sigma_x - \sigma_y + \sigma_z)}{\sqrt{3}}$$

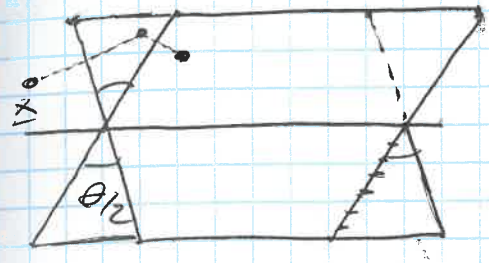
xkè $\theta/2$? ROTAZ: TRASF ORTOG a det = 1

ABBIAMO VISTO CHE C'È UN SOTTOGR DI TRASF ORTOG POSSIBILI

→ QUELLE a det −1

UNA MATR DI ROTAZ PUÒ ESSERE VISTA COME COMBINAZ DI 2 INVERSIONI

CONSIDERIAMO 2 PIANI CHE HANNO TRA LORO UN ANGOLO DI $\theta/2$



PRENDENDO UN PTO QUALUNQUE

FACCIO L'INV RISP AD UN PIANO E POI RISP ALL'ALTRO

ROTAZ DI θ = 2 INV RISP A 2 PIANI POSTI CON ANGOLO $\theta/2$

→ 2 ROTAZ SONO 4 INV? POSSO SCEGLIERE I PIANI A PIACERE

⇒ POSSO PRENDERLI COINCIDENTI FACENDO SVANIRE IL COMO EFFETTO

⇒ HO COMUNQUE 2 PIANI

$R(\hat{n},\theta)$ HA INVERSA $R(\hat{n},-\theta)$ → $R^{-1}(\hat{n},\theta) = R(\hat{n},-\theta)$

USANDO LA FORMULA DI PRIMA

$$= \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{1} + i(\vec{\sigma}\vec{n})\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$$

CAMBIA IL SGN xkè sen DISP

→ VERIFICHIAMOLO

$$R(\hat{n},-\theta)\,R(\hat{n},\theta) = \left[\cos\frac{\theta}{2}\mathbb{1} + i(\vec{\sigma}\hat{n})\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right]\left[\cos\frac{\theta}{2}\mathbb{1} - i(\vec{\sigma}\vec{n})\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2}\mathbb{1} + \underbrace{(\vec{\sigma}\vec{n})^2}\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

x REALAZ POND NATURALE $\vec{\sigma}$

$$(\vec{\sigma}\hat{n})^2 \overset{\text{(somma)}}{=} \sigma_i\sigma_j n_i n_j = (i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij})\,n_i n_j$$

$$= n_i n_j = 1 \quad (\text{xkè } \hat{n} \text{ versore})$$

SI ANNULLA IL PROD VETTORE DI UN VETT x SÉ STESSO

$$\Rightarrow R(\hat{n},-\theta)\,R(\hat{n},\theta) = 1 \Rightarrow R(\hat{n},-\theta) = R^{-1}(\hat{n},\theta)$$

È un'altra notazione interessante:

$$R^+(\hat{n},\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbb{1} + i(\vec{\sigma}\hat{n})\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$$

le matr $\vec{\sigma}$ sono tutte hermitiane (o sono reali o antisimm a coeff immaginari puri)

$$\Rightarrow R^+(\hat{n},\theta) = R^{-1}(\hat{n},\theta)$$

$\Rightarrow R$ è tc $R^+(\hat{n},\theta)R(\hat{n},\theta) = \mathbb{1}$

$\Rightarrow R(\hat{n},\theta)$ matr 2x2 unitaria

$U(2)$ = gruppo matr 2x2 unitarie

Abbiamo che

$$\det(R^+R) = 1 \Rightarrow \det R^+ \det R = 1 \Rightarrow |\det R|^2 = 1$$

$\Rightarrow$ in gen il $\det R$ è una pura fase ($\in \mathbb{C}$)

Vogliamo dire che $\det R = 1$

<u>1° oss:</u>

R è una funz di θ $\Rightarrow$ è ben def la derivata risp a θ

$$\frac{dR}{d\theta} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\,\mathbb{1} - \frac{i}{2}(\vec{\sigma}\hat{n})\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ (\vec{\sigma}\hat{n})^2 = \mathbb{1}}}{=} -\frac{i}{2}(\vec{\sigma}\hat{n})\left[\cos\frac{\theta}{2} - i(\vec{\sigma}\hat{n})\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{d\theta} = -\frac{i}{2}(\vec{\sigma}\hat{n})R$$

utile xké voglio calcolare $\frac{d}{d\theta}(\det R)$

Sappiamo che $\lg(\det M) = \mathrm{Tr}(\lg M)$

Abbiamo M unitaria

se M diagonalizz $\Rightarrow \det M = \prod \lambda_i$ (autoval)

$$\frac{d}{d\theta}\lg(\det R) = \frac{d}{d\theta}\mathrm{Tr}(\lg R) = \mathrm{Tr}\left(\frac{d}{d\theta}\lg R\right)$$

MA IN GEN NON È DETTO CHE $\frac{dR}{d\theta}$ E $\frac{1}{R}$ COMMUTINO E QUINDI NON CONTI L'ORDINE CON CUI LO SCRIVO

MA SICCOME SONO DENTRO ALLA TRACCIA <u>POSSO FORTUNATAMENTE</u>

$$= \mathrm{Tr}\left(R^{-1}\frac{dR}{d\theta}\right) = \mathrm{Tr}\left(-\frac{i}{2}(\vec{\sigma}\hat{n})\right) = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\vec{\sigma}\hat{n})$$

LE $\vec{\sigma}$ HANNO UN IMPORTANTE PROP: $\mathrm{Tr}(\sigma_i) = 0 \ \forall i$

$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\lg(\det R) = 0 \Rightarrow \lg(\det R)$ NON DIPENDE DA θ

$\Rightarrow \det R$ NON DIPENDE DA θ

SE $\theta = 0 \Rightarrow R = \mathbb{1} \Rightarrow$ <u>TUTTE LE MATR R HANNO $\det R = 1$</u>

M TC $\det M = 1$ FORMANO UN SOTTOGR DI $U(2)$

$\boxed{SU(2)}$ MATR UNITARIE 2x2 CON DETERMINANTE 1

<u>2° OSS</u>

ABBIAMO VISTO CHE $(\vec{\sigma}\hat{n})^2 = \mathbb{1} \Rightarrow (\vec{\sigma}\hat{n})^k = \begin{cases} \mathbb{1} & \text{SE } k \text{ PARI} \\ \vec{\sigma}\hat{n} & \text{SE } k \text{ DISP} \end{cases}$

NEL CASO 2D ABBIAMO OTTENUTO $z' = e^{-i\theta} z = (\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta) z$

(FACILE DA VEDERE NELLO SVILUPPO ESPONENZ)

$\Rightarrow$ ANCHE R SI PUÒ SCRIVERE

$$R(\hat{n},\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{1} - i(\vec{\sigma}\hat{n})\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} = e^{-i\vec{\sigma}\hat{n}\frac{\theta}{2}}$$

(L'EXP DI UNA MATR È DEFIN RIGOROSAM DALLA SUA ESPANSIONE IN SERIE)

QUINDI:

- R SI PUÒ SCRIVERE IN FORMA ESPONENZIALE $\Rightarrow \det R = e^{\mathrm{Tr}\,A}$
- $R \in SU(2)$

<u>OSS</u>

EFFETTIVAMENTE È COMPARSO IL VETT $\vec{\theta} = \hat{n}\theta$

ENTRA A CONTATTO CON LE MATRICI SINGOLE

IMMAGINIAMO ADESSO DI FARE $R_2 R_1 = e^{-\frac{i}{2}\theta_2 \vec{\sigma}\hat{n}_2} e^{-\frac{i}{2}\theta_1 \vec{\sigma}\hat{n}_1}$

→ FORMULA DI SARCAZZO FRITTO X PRODOTTO DI EXP DI MATRICI

$$e^a e^b = e^{a+b+\frac{1}{2}[a,b]+\frac{1}{12}[a,[a,b]]+\dots}$$

⇒ IL PRIMO TERMINE SARÀ $e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}(\theta_2\hat{n}_2+\theta_1\hat{n}_1)}$

MA $e^a e^b = e^{a+b} \iff [a,b]=0$ IN GEN NON È VERO

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[a,b] \longrightarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{4}[\sigma_i,\sigma_j]\, n_{2i}\, n_{1j}$$

$$[\sigma_i,\sigma_j] = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i$$

SE $i=j \Rightarrow$ NULLO

SE $i\neq j \Rightarrow 2i\,\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

$$\longrightarrow \left[\frac{\sigma_i}{2},\frac{\sigma_j}{2}\right] = i\,\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

IL COMMUTATORE DI MATRICI σ DÀ UNA MATRICE σ

NOI SAPPIAMO CHE INFATTI 2 ROTAZ DANNO UNA ROTAZ

⇒ IL RISULTATO DEVE ESSERE DEL TIPO

$$e^{-\frac{i}{2}\theta_3\vec{\sigma}\hat{n}_3}$$

→ <u>ALGEBRA DI LIE</u>

IL PRODOTTO DI COMBINAZ LINEARE DI MATRICI σ È UNA MATR σ

LA SOMMA DI COMBINAZ LIN DI MATRICI σ È UNA MATR σ

QUESTA ALGEBRA È COMPLETATA DAI COMMUTATORI DELLE MATRICI σ

$$R(\hat{n},\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbb{1} - i(\vec{\sigma}\hat{n})\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$$

$R(\hat{n},\theta) \in SU(2)$ MATR 2x2 UNITARIA CON $\det R = 1$

CHE RELAZ C'È TRA $SU(2)$ E $O(3)$?
↳ ROTAZIONI

SE PRENDIAMO M 2x2 SU $\mathbb{C}$

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

UNA MATR PUÒ ESSERE SCRITTA COME CL DI $\mathbb{1}$ E LE MATRICI $\vec{\sigma}$

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = a_0\mathbb{1} + \vec{\sigma}\cdot\vec{a} = a_0\mathbb{1} + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$$

$$= a_0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - i a_2 \\ a_1 + i a_2 & a_0 - a_3 \end{bmatrix}$$

LO SP DI MATR 2x2 HA DIM 4

QUESTO È FATTIBILE SE $\{\mathbb{1}, \vec{\sigma}\}$ BASE

→ SONO LI? (CN)

<u>I° OSS</u>

$$\begin{bmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - i a_2 \\ a_1 + i a_2 & a_0 - a_3 \end{bmatrix} = 0 \iff a_i = 0 \ \forall i$$

⇒ SONO UNA BASE DI $M_{2\times2}(\mathbb{C})$

<u>II° OSS</u>

$$\det M = a_0^2 - \vec{a}^{\,2}$$

⇒ $R(\hat{n},\theta)$ RISCRITTA COME MATRICE SODDISFA QUESTE CONDIZ

ABBIAMO VISTO CHE SICCOME $\sigma_i^{+} = \sigma_i$

$\Rightarrow R^{-1} = R^{+} \Rightarrow R R^{+} = \mathbb{1} = R^{+} R$ (MATR UNITARIA CON $\det 1$)

RICHIEDIAMO A M DI ESSERE UNITARIA CON det 1

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} = 0 \\ \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{COMPL. CONJ. DELLA PRIMA}$$

$\Rightarrow$ ABBIAMO 3 EQ.

POSSIAMO ELIMINARNE UNA:

$$\gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} = 0 \rightarrow \delta = -\gamma\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ |\gamma|^2 + \left|-\gamma\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\right|^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow |\gamma|^2\left(1 + \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2}\right) = |\gamma|^2\left(\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{|\beta|^2}\right)$$

$$= \frac{|\gamma|^2}{|\beta|^2} = 1 \Rightarrow |\gamma|^2 = |\beta|^2$$

QUINDI $\boxed{\gamma = -\bar{\beta}e^{i\varphi}} \Rightarrow \boxed{\delta = \bar{\alpha}e^{i\varphi}}$

$\Rightarrow$ SE M UNITARIA $\quad M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta}e^{i\varphi} & \bar{\alpha}e^{i\varphi} \end{bmatrix}$ GENERICA MATR 2x2 UNITARIA

$$\det M = |\alpha|^2 e^{i\varphi} + |\beta|^2 e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$$

SE VOGLIAMO $M \in SU(2) \Rightarrow \det M = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{CON } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

HO 2 NUM $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow$ 4 NUM $\in \mathbb{R}$

+ 1 CONDIZ $\Rightarrow M$ È CARATT DA 3 NUM REALI

$\Rightarrow$ OGNI MATR DI $SU(2)$ È CARATT DA 3 PARAMETRI REALI

NELLE ROTAZ AVEVAMO 3 PARAM REALI:

$\theta, n_x, n_y, n_z \oplus n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ E COSTRUIAMO $X = \vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ MATR 2x2

$\Longrightarrow$ SCRIVIBILE COME CL DI $\mathbb{1}, \vec{\sigma}$

ABBIAMO $\overset{\text{MESSO}}{\gamma Q_0} = 0$

$$X = \begin{bmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_3 & -x_3 \end{bmatrix}$$

$\vec{x}$ È TC $\mathrm{Tr}\, X = 0$ (EQUIVALE A DIRE $Q_0 = 0$)

INOLTRE

$$\det X = -\vec{x}^2$$

PRENDIAMO $U \in SU(2)$

$X \longrightarrow X' = U X U^{-1}$ CONIUG ATTRAVERSO $U \equiv R_U(X)$

<u>OSS</u>: L'OPERAZ DI CONIUG È TC

$$\mathrm{Tr}\, X' = \mathrm{Tr}\, U X U^{+} = \mathrm{Tr}\, X U U^{+} = \mathrm{Tr}\, X = 0$$

$\rightarrow$ SICCOME X' HA TR NULLA $\Rightarrow$ ANCHE LEI È ~~SCRIVIBILE~~ SCRIVIBILE COME CL DI SOLO $\vec{\sigma}$

$\Rightarrow$ $X' = \vec{x}' \cdot \vec{\sigma}$ CARATT DA 3 SOLI NUM REALI x'_i

$$\det X' = \det U X U^{+} = |\det U|^2 \det X = \det X$$

U UNITARIA $\rightarrow$ DET FASE PURA

$$-|\vec{x}'|^2 \Longrightarrow |\vec{x}'|^2 = |\vec{x}|^2$$

$\Rightarrow$ $\forall\, U \in SU(2)$ CORRISP UN VETT RUOTATO

(LA NORMA NON VIENE CAMBIATA DA U)

CONSIDERIAMO V, U UNITARIE, LE MATR UNITARIE SONO UN GRUPPO

$\Rightarrow$ IL PRODOTTO È ANCORA UNITARIO

$$VU \longrightarrow R_{VU}(X) = VUX(VU)^{-1} = VUXU^{-1}V^{-1}$$
$$= V R_U(X) V^{-1} = R_V [R_U(X)]$$
$$= (R_V \circ R_U)(X) \quad \forall X$$

$\Rightarrow$ $\boxed{R_{VU} = R_V \circ R_U}$ COSÌ SI COMPONGONO LE MATR CON CUI IN PARTICOLARE DI $SU(2)$ ABBIAMO COSTRUITO LE ROTAZ

CHI È $R_U(X)$?

$$R_U(X) = U X U^{-1} = U \vec{x}\vec{\sigma} U^{\dagger} = U x_i \sigma_i U^{\dagger}$$

$$\shortparallel$$

$$x' = x_i \underbrace{[U \sigma_i U^{\dagger}]}_{} = x'_j \sigma_j$$

DEF UNA MATR CHE $\forall \sigma_i$ SARÀ CL DELLO σ_j

$$= x_i R^{T}_{ij}(U) \sigma_j$$

COME FACCIO A DET I COEFF?
→ PRODOTTO SCALARE O INTERNO

IL PRODOTTO INTERNO CHE ADOPERERESTO VA DEF

$$\sigma_\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \longrightarrow \frac{1}{2} \mathrm{Tr}[\sigma_\mu \sigma_\nu] = \delta_{\mu\nu}$$

SUPP $\mu = 0$ ⇒ 2 CASI → $\nu = 0$, $\nu \neq 0$

CASO $\boxed{\mu = \nu = 0}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\mathbb{1}\mathbb{1}) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\mathbb{1}) = 1$$

CASO $\boxed{\mu = 0}$ $\boxed{\nu = i}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\mathbb{1}\sigma_i) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\sigma_i) = 0$$

CASO $\boxed{\mu = i}$ $\boxed{\nu = j}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\delta_{ik}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbb{1}) = \frac{\delta_{ij}}{2} \mathrm{Tr}\,\mathbb{1} = \delta_{ij}$$

QUINDI SE $X = x_i \sigma_i$

$$\frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, X \sigma_j = \frac{x_i}{2} \mathrm{Tr}\, \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} x_i = x_j$$

X ESTRARRE IL COEFF STUDIO $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\circ\ \circ)$ COME PRODOTTO INTERNO

$$\Rightarrow R_{ji}(U) x_i \sigma_j = x'_j \sigma_j$$

$$\Rightarrow \boxed{x'_j = R_{ji}(U) x_i}$$

QUINDI ABBIAMO CHE $R^{T}_{ij} = R_{ji} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}[\sigma_j U \sigma_i U^{\dagger}]$ $(i,j = 1 \dots 3)$

CHE AGISCE SU X MANDANDOLO IN X' TC HANNO LA STESSA NORMA

⇒ È UNA MATR ORTOGONALE

→ COME È FATTA? CALCOLIAMOLA

$U\sigma_i U^\dagger$ PRENDIAMO U COME MATR ROTAZ $R(\hat{n},\theta)$

$$U\sigma_i U^\dagger = \left(\cos\frac{\theta}{2} - i\vec{\sigma}\hat{n}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right)\sigma_i\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\vec{\sigma}\hat{n}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2}\sigma_i - i\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\,n_k[\sigma_k,\sigma_i] + \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\,n_k n_l\sigma_k\sigma_i\sigma_l$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2}\sigma_i + \overbrace{2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}^{\mathrm{sen}\,\theta}\,n_k\varepsilon_{kil}\sigma_l + \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\,n_k n_l\sigma_k(i\varepsilon_{ilr}\sigma_r + \delta_{il})$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2}\sigma_i - \mathrm{sen}\,\theta\,\varepsilon_{ikl}\,n_k\sigma_l + \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\,n_k n_l\left[i\varepsilon_{ilr}(i\varepsilon_{krs}\sigma_s + \delta_{rk}) + \delta_{ir}\right]$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2}\sigma_i - \mathrm{sen}\,\theta\,\varepsilon_{ikl}\,n_k\sigma_l + \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\,n_i(\hat{n}\vec{\sigma}) - \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\,n_k n_l(-\delta_{ik}\delta_{ls} + \delta_{is}\delta_{lk})$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2}\sigma_i - \mathrm{sen}\,\theta\,\varepsilon_{ikl}\,n_k\sigma_l + \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\,n_i n_k\sigma_k + \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\,n_i n_k\sigma_k - \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\sigma_i$$

$$= \cos\theta\,\sigma_i - \mathrm{sen}\,\theta\,\varepsilon_{ikl}\,n_k\sigma_l + (1-\cos\theta)\,n_i n_j\sigma_j$$

$$= \left[\cos\theta\,\delta_{ij} - \mathrm{sen}\,\theta\,\varepsilon_{ikj}\,n_k + (1-\cos\theta)\,n_i n_j\right]\sigma_j$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{ji} = \cos\theta\,\delta_{ij} - \mathrm{sen}\,\theta\,\varepsilon_{ijk}\,n_k(1-\cos\theta)\,n_i n_j}$$

<u>ESEMPIO</u>

PRENDIAMO $\hat{n} = n_3\delta_{3i}$

$$R_{ij}(\theta,\hat{n}_3) = \cos\theta\,\delta_{ij} + \mathrm{sen}\,\theta\,\varepsilon_{ij3} - (1-\cos\theta)\,\delta_{ij}\delta_{i3}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ROTAZ IN x-y ATTORNO A z

LA MATR U CORRISP È:

$$U = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbb{1} - i\sigma_3\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} - i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

OSS

LA MAPPA U IN ROTAZ NON È UNA MAPPA 1 A 1

INFATTI CON $(-U)$ HO LA STESSA ROTAZ

$\Rightarrow R_U \equiv R_{-U}$

COME OTTENGO $-U$ DA U?

$$U = \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{1} - i\sigma_3 \sin\frac{\theta}{2}$$

SE TRASF $\theta \to \theta + 2\pi \Rightarrow U$ CAMBIA SGN MA LA ROTAZ RIMANE UGUALE

OGNI ROTAZ È DEF DA 2 MATRICI CHE DIFFERISCONO TRA LORO

X UN SGN GENERALE

"RIASSUNTO" CORRISP SU(2) & O(3)

MATR $R_{ij}(\theta,\hat{n}) = \cos\theta\,\delta_{ij} - \operatorname{sen}\theta\,\varepsilon_{ijk} n_k + n_i n_j (1-\cos\theta)$
$\in SO(3)$

LA MATR SU(2) ERA:

$$R(\theta,\hat{n}) = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbb{1} - i\vec{\sigma}\,\hat{n}\,\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

IN PARTIC SE $\hat{n} = \hat{n}_3$

$$R_{ij}(\theta,\hat{n}_3) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{ij} = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix}$$

ABBIAMO ANCHE DISCUSSO CHE COME $\pm U$ DANNO LUOGO ALLA STESSA MATR R

LUI PARTI, È EQUIV A FARE $\theta \to \theta + 2\pi$

$$\Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} \to \cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) = -\cos\theta/2$$

$$\operatorname{sen}\theta/2 \to \operatorname{sen}(\theta/2 + \pi) = -\operatorname{sen}\theta/2$$

OSS

ABBIAMO VISTO COME LA GEN ROTAZ

$$U(\theta,\hat{n}) = e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{n}\vec{\sigma}}$$

E ABBIAMO RICORDATO COME QUESTO FATTO CI DICE

$$e^{-\frac{i}{2}\theta_2\hat{n}_2\vec{\sigma}}\, e^{-\frac{i}{2}\theta_1\hat{n}_1\vec{\sigma}} = e^{-\frac{i}{2}\theta_3\hat{n}_3\vec{\sigma}}$$

2 ROTAZ IN GEN NON COMMUTANO

$\Rightarrow$ X CALCOLARE IL PRODOTTO DOBBIAMO USARE LA FORMULA SARCAZZO

$$e^{A}\cdot e^{B} = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$$

IL FATTO CHE QUESTA SOMMA INFINITA SI POSSA SCRIVERE COME $e^{-\frac{i}{2}\theta_3 \hat{n}_3 \vec{\sigma}}$ VIENE DAL FATTO CHE L'ALGEBRA DELLE $\vec{\sigma}$ È CHIUSA RISPETTO AL COMMUTATORE

$$\boxed{\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}}$$

FORMULA DELLE COMBINAZIONI

SUPP DI INTRODURRE LE MATR J_1, J_2, J_3 TC

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k$$

SE PRENDO $e^{-i\theta_2 \hat{n}_2 \cdot \vec{J}}$ $e^{-i\theta_1 \hat{n}_1 \vec{J}}$ QUANTO VALE?

VISTO CHE LA FORMULA DI BARGAZZO DET IN MANIERA UNIVOCA IL PRODOTTO $\Rightarrow$ OTTENGO LO STESSO RISULT DELLE $\vec{\sigma}$

$$= e^{-i\theta_3 \hat{n}_3 \cdot \vec{J}}$$

→ SE CONOSCO LA COMMUTAZ DEI QUATERNIONI / MATR $\vec{\sigma}$ CONOSCO IL RISULTATO DI PRODOTTI TRA OGGETTI CHE SODDISFANO LE STESSE REGOLE DI COMMUTAZ

AVER SCRITTO GLI OPERATORI IN FORMA EXP e^{tA} CONSENTE PER t PICCOLI

$$e^{tA} \simeq \mathbb{1} + tA + O(t^2)$$

$\Rightarrow$ LA MATR A È LA VARIAZ MASSIMA RALL IDENTITÀ

↳ O PICCOLO

ABBIAMO VISTO GRUPPI CHE VARIANO CON CONTINUITÀ RISP AD UN PARAMETRO COME LE TRASLAZIONI

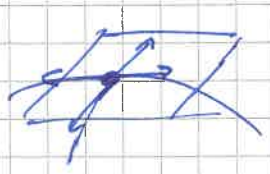
→ AGENDO QUESTE IN MODO CONTINUO SI PUÒ IDENTIFICARE $\mathbb{R}^n$ CON IL GRUPPO DELLE TRASLAZ

IDEM X LE ROTAZ

NEL MOTO DI CORPO RIGIDO SI PUÒ INTRODURRE UNA PARAMETRIZZAZIONE IN TERMINI DEI COSIDDETTI ANGOLI DI EULERO.

QUANDO CARATT UNA QUANTITÀ IN TERMINI DI PARAMETRI CONTINUI, QUESTI AL LORO VARIARE IN GEN NON DESCRIVERANNO SEMPLICEM $\mathbb{R}^n$ MA UNA VARIETÀ CIOÈ UN OGGETTO CHE PUÒ ESSERE IMMERSO IN $\mathbb{R}^n$ MA CHE AVRÀ UNA CURVATURA E, NON SARÀ UNO SP PIATTO

→ SE LO SP NON È PIATTO ⇒ HA SENSO PRENDERE LO SP TG IN UN PTO (SP DELLE DIREZIONI TG AD UN PTO)



GLI OGGETTI CHE VIVONO IN UNO SP TG SONO LEGATI ALLE VARIAZ INFINITE CHE STRETTAM TROVANDOSI LUNGO LA VARIETÀ

SE PRENDIAMO LE ROTAZ DI UNA PALLA, FACENDO UNA ROTAZ INFINITA QUESTA È LEGATA NON AD e^{tA} MA A tA VARIAZ INFINITA AVRÒ TANTI OP POSSIBILI QUANTE SONO LE POSSIBILI ROTAZ

LE TRASF INFINITESIME INDIPENDENTI SONO 3 (LEGATE A n_1, n_2, n_3) E ABBIAMO RAPPR I GENERATORI ASSOCIATI IN TERMINI DI MATR $\vec{\sigma}$

→ COME SONO FATTI QUESTI OPERATORI IN 3D? (R_{ij})

ABBIAMO VISTO QUELLO LUNGO $\hat{n}_3$

$\times\ \theta$ PICCOLI $(\theta \ll 1)$ ⇒ $R_{ij} \longrightarrow \mathbb{1} + \theta \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

⇒ IL GEN DELLA ~~RAPPR~~ TRASF INFINITESIMA LUNGO Z È

$$-i J_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(J_3)_{ij} = -i \varepsilon_{3ij}$$

ANTISIMM E PURAM IMMAGINARIA

⇒ HERMITIANA $J_3 = J_3^{+}$

POSSO FARE LO STESSO RAGIONAM LUNGO $\hat{n}_1$ OD $\hat{n}_2$

$\Rightarrow (J_k)_{ij} = -i\,\varepsilon_{kij}$ TUTTO HERMITIANA E A TRACCIA NULLA

$k = 1 \dots 3$

→ QUALI REGOLE DI COMMUTAZ SODDISFANO?

(SOMMA SU S)

$$(J_k J_l)_{mn} = (J_k)_{ms}(J_l)_{sn} = -\varepsilon_{kms}\varepsilon_{lsn}$$

$$= \varepsilon_{kms}\varepsilon_{lns} = \delta_{kl}\delta_{mn} - \delta_{kn}\delta_{ml}$$

$$([J_k, J_l])_{mn} = (J_k J_l)_{mn} - (J_l J_k)_{mn}$$

$$= -\delta_{kn}\delta_{ml} + \delta_{ln}\delta_{mk}$$

SE LE $\vec{J}$ SODDISFACESSERO UNA RELAZ ANALOGA ALLE $\vec{\sigma}$ CORRISPONDEVANO PURE

→ CERCHIAMO

$$i\,\varepsilon_{klr}(J_r)_{mn} = \varepsilon_{klr}\varepsilon_{rmn} = \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}$$

→ STESSO RISULTATO

⇒ I GENERATORI INFINITESIMI DELLE ROTAZ IN 3D SODDISFANO ESATTAMENTE LE STESSE REGOLE DELLE $\vec{\sigma}$ ⇒ SAPPIAMO ESATTAM QUALE È IL PRODOTTO DI ROTAZ

⇒ POSSIAMO USARE I QUATERNIONI X DEF ESATTAM LA COMPOSIZ DI ROTAZ IN 3D, UNA RAPPR DEL GRUPPO DELLE ROTAZ 3D

LE $\vec{J}$ SONO CHIUSE RISP ALLA COMMUTAZIONE

CIÒ CHE DEF IL GRUPPO DELLE ROTAZ È CHE SE PRENDO MATRICI $\vec{\Lambda}$

TC $[\Lambda_i, \Lambda_j] = \underbrace{i\,f_{ijk}}_{\text{ANTISIMMETRICHE}}\Lambda_k$ ⇒ HO UN'ALGEBRA DI LIE

ALGEBRA DI LIE: FISSA REGOLE COMMUTAZ

POSSO COSTRUIRE TRASF FINITE FACENDO $e^{-i\vec{\lambda}\cdot\vec{\Lambda}}$ DA TRASF INFINITESIME

DATA UN'ALGEBRA DI LIE ESISTE ALMENO UN GRUPPO (UNIVOCAMENTE) DI LIE

PARLANDO DI GR ABBIAMO VISTO CHE È LA TAB DI MOLTIPLICAZ A DEF IL GR

SE $|G| = n \Rightarrow$ TAB $n \times n$

ASSEGNATA LA TAB ASTRATTA È FISSATO IL GRUPPO ASTRATTO CHE PUÒ AVERE MATRICI CONCRETE

NEL CASO DI UN GRUPPO CONTINUO, IN CUI VI È UN'∞ CONTINUA DI ELEM, NON POSSIAMO DEF CON LA TAB MOLTIPLICATIVA

NEL CASO DI PARTICOLARI GRUPPI CONTINUI DOTTI DI LIE IN CUI LE TRASF INFINITESIME SONO GEN DA ELEM DI UN'ALGEBRA DI LIE

$\Rightarrow$ TUTTA LA COMPLICA ESSENZIALE DEGLI ELEMENTI È SCRITTA IN QUELL'ALGEBRA CHE REGOLA LA COMBINAZ DI 2 ELEMENTI.

C'È UN ALTRO ASPETTO DEL GRUPPO DELLE ROTAZ

NON È SOLO CONTINUO È DI LIE

OVVIAMENTE I GENERATORI HANNO A CHE VEDERE ALLO SP TG INFINITO

CIOÈ L'ANALISI DI UN INTORNO INFINITO

PRESI 2 PTI VICINI HO UN PEZZETTO DELLA VARIETÀ:

ATTACCANDOLI TUTTI NON HO PERÒ DESCRITTO LA TOPOLOGIA DELLA VARIETÀ

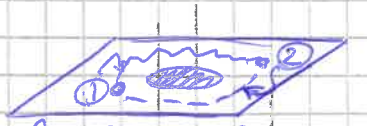
NELLO STUDIO GLOBALE CI INTERESSA IL TIPO DI CONNESSIONE TRA I VARI PTI

HO OVVENDOCI DALLA TRASF NULLA ($\mathbb{1}$) DOVREMMO ESSERE IN GRADO DI GIUNGERE A QUALSIASI TRASF

DEF
SP CONNESSO

PRESI 2 PTI ARBITRARI IN UNO SP QUESTO È CONNESSO SE $\exists$ UNA CURVA TUTTA CONTENUTA NELLO SP CHE LI CONGIUNGE

DEF SP NON SEMPLICEMENTE CONNESSO



PIANO CON BUCO

$\exists$ CURVE CONTENUTE CHE LI CONNETTONO

CONSIDERIAMO UNA CURVA E TUTTE QUELLE CHE POSSIAMO OTTENERE MODIFICANDOLA CON CONTINUITÀ (TOPOLOGIA)

→ NON C'È MODO DI PORTARE 1 IN 2 XKÉ DI MEZZO C'È IL BUCO

CI SONO SITUAZ + COMPLESSE

POSSO PRENDERE CURVE CHIUSE (PARTE DA A E TORNA IN A)

SE POSSO DEFORMARE CON CONTINUITÀ UNA CURVA CHIUSA FINO AD OTTENERNE SOLO IL PTO FACENDOLA SPARIRE
→ IL PIANO È SEMPLIC CONNESSO

MA SE C'È IL BUCO ⇒ NON POSSO FAR SPARIRE LA CURVA

⇒ NON È SEMPLIC CONNESSO

PRENDIAMO UN QUADRATO, QUESTO È SEMPLICE CONNESSO

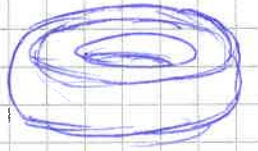
SE IMMAGINO DI IDENTIFICARE UN PTO A SX CON UN PTO ALLA STESSA ALTEZZA A DX

→ IDENTIFICO IL LATO SX CON IL LATO DX

IMMAGINO DI INTERPRETARE IL PIANO IN UNO SP 3D E CHE QUESTO SIA MALLEABILE → LO DEFORMO FIN CHE COINCIDONO I 2 LATI

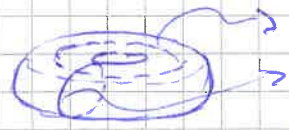
QUADRATO → CILINDRO
(È COME PRENDERE FUNE PONTICELLO)

FACCIO LA STESSA COSA CON I LATI SUP E INF



LA CAMBRIA DAL PTO DI VISTA DEL PIANO È DI DIM TRA IN $\mathbb{R}^3$ HA UNA CERTA CURVATURA

→ ADESSO CI SONO COSE CHE NON POSSONO ESSERE DEFORMATE FINO A SPARIRE



NON RIESCO DEFORMARLE X FARLE SPARIRE

⇒ QUESTO SP NON È SEMPLICE CONNESSO

IDENTIFICANDO GLI ESTREMI OPPOSTI

DAL PTO DI VISTA DELL'ANALISI LOCALE LA CAMBRIA ED IL QUADRATO SONO UGUALI

MA LE PROP GLOBALI SONO ALTERATE X COME SONO CONNESSI I PTI.

NOI ABBIAMO IL GRUPPO SO(3) ED SU(2)

SO(3) → INVARIANZA DI 2π

SU(2) → INVARIANZA DI 4π

NON C'È CORRISP 1A 1 TRA SO(3) ED SU(2)

∃ 2 MATR DI SU(2) CHE CORRISP AD UNA DI SO(3)

E PURE LA LORO ALGEBRA DI LIE È UGUALE

I 2 GRUPPI SO(3) ED SU(2) DANNO ORIGINE ALLA STESSA ALGEBRA ⇒ LOC INDISTINGUIBILI MA GLOB NO

VARIANDO I PARAM SU(2) È UN RICOPRIMENTO DI SO(3) MA È UN RICOPRIMENTO DOPPIO

QUESTO RICOPRIMENTO È SEMPLICEMENTE CONNESSO

ANZI È IL + PICCOLO RICOPRIMENTO SEMPLICEMENTE CONNESSO DEI PARAMETRI DI SO(3) DETTO UNIVERSALE

SU(2) RICOPR UNIV DI SO(3)

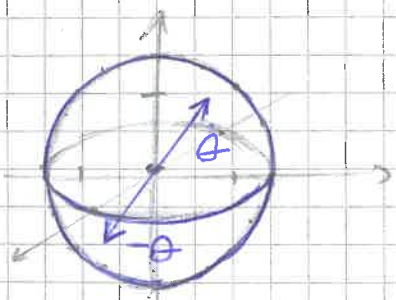
XKÉ CLASSICI?

ABBIAMO DETTO CHE X UNA ROTAZ SCEGLIAMO UN ASSE (DIREZ IN 3D) (= SCEGLIERE UN PTO SU UNA SFERA)

DOPO DICHIARE UN ANGOLO $\in [0, 2\pi]$

SE PRENDO UNA SFERA DI $R = 2\pi$

$\Rightarrow$ IL PTO DELL'ASSE E LA LUNGHEZZA DEL VETT L'ANGOLO



QUESTA DESCRIZIONE È RIDONDANTE

$\longrightarrow$ SE SCELGO UN ASSE SCELGO UN VERSO MA X ASSE OPPOSTO E ANGOLO $-\theta$ CONCLUDONO LE ROTAZ

$\Rightarrow$ BASTA UNA SF DI RAGGIO π E IDENTIFICARE I PTI DIAMETRALMENTE OPPOSTI

COME X IL QUADRATO A CAUSA DI QUESTA IDENTIFICAZ $\exists$ CURVE NON RIDUCIBILI AD UN PTO X CONTINUITÀ

$\Rightarrow$ TOPOLOGIA NON BANALE (NON SEMPLIC CONNESSI)

OGGETTI CHE NON RIMANGONO INVARIATI X 2π E CAMBIANO SGN X 4π SI CHIAMANO <u>SPINORI</u>

GLI e^- SONO SPINORI $\longrightarrow$ HANNO SPIN 1/2 (SPIN INTERNO)

SE $\cancel{A}$ È CON SPIN 1/2 $\cancel{\text{[illegible]}}$ $\cancel{A}$ ATOMI

PIÙ + RELATIVITÀ RISTRETTA = SPIN

PARTICELLE CON SPIN SEMINTERO = FERMIONI

QUESTI DESCRIVONO QUASI TUTTA LA MATERIA IN QUANTITÀ FOND

QUESTI $\exists$ XKÉ IL GRUPPO DELLE ROTAZ È SEMPLICE CONNESSO E IL SUO RICOPRIM UNIV È $SU(2)$

<u>OSS</u>

ALL'INIZIO DI QM 1 QUANDO SI PARLAVA DI MECCANICA ANALITICA ABBIAMO FATTO ESPLICITAM $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$

IN MEC L È IL GEN DI TRASF CANONICHE ASSOCIATE A ROTAZ DEL SIST

→ IMPONENDO LE REGOLE DI COMMUTAZ CANONICHE POSSIAMO CALCOLARE:

$$[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk}\, i\hbar L_k$$

→ $$\left[\frac{L_i}{\hbar}, \frac{L_j}{\hbar}\right] = i\,\varepsilon_{ijk} L_k$$

QUESTO SODDISFA LE REGOLE DI COMMUTAZ DELL'ALGEBRA DI LIE DEI GENERATORI

→ IL MOMENTO ANGOLARE GENERERÀ LE RAPP DELLE ROTAZ SU $\mathcal{H}$ SP DI HILBERT DELLE STATI IN QM

MOMENTO ANGOLARE

$\underline{L} = \underline{q} \wedge \underline{p} \longrightarrow L_i = \varepsilon_{ijk} q_j p_k$ MOMENTO ANGOLARE (È ANTISIM)

$\neq 0$ SE $j \neq k \longrightarrow$ COMMUTANO $\Rightarrow$ OR $[q_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$

IL TENSORE ε_{ijk} È TIPICAM 3D

NON SIAMO ABITUATI AD UTILIZZ IN DIM ARBITRARIA

ABBIAMO VISTO CHE IL MOMENTO È IL GEN DELLA ROTAZ E IL SUO VETT DEF L'ASSE DI ROTAZ SOSTITUIBILE CON LA NOZIONE DI PIANO DI ROTAZ

PIANO UNA DEF ALTERNATIVA

$L^*_{ij} = q_i p_j - q_j p_i$ L'ORDINE È IMPORTANTE XKÉ SE $i=j$ NON COMMUTANO

ANTISIMMETRICO

SE MI MOVO IN $d=3$

$L^*_{ij} = \varepsilon_{ijk} L_k$ E $L_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} L^*_{ij}$

$L^*_{12} = L_3$ $\quad L_3 = \frac{1}{2}(L^*_{12} - L^*_{21}) = L^*_{12}$ ANTISIM

ABBIAMO GEN IL MOM ANGOLARE A DIM ARBITRARIA

DEF $L_i L_i = L^2$ COME LO OTTENIAMO?

$L^2 = \frac{1}{2} L^*_{ij} L^*_{ij}$

CASO $d=3$

$\frac{1}{2} L^*_{ij} L^*_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} L_k \varepsilon_{ijs} L_s = \delta_{ks} L_k L_s = L_k L_k = L^2$

CHI È L^2 IN QM?

$L^2 = \frac{1}{2} L^*_{ij} L^*_{ij} = \frac{1}{2}(q_i p_j - q_j p_i)(q_i p_j - q_j p_i)$

$= \frac{1}{2}(2 q_i p_j q_i p_j - 2 q_i (\underline{p} \cdot \underline{q}) p_i) = q_i p_j q_i p_j - q_i (\underline{p}\,\underline{q}) p_i$

RISCRIVIAMOLO CON COMMUTATORI

$= -q_i (\underline{q}\,\underline{p} - i\hbar d) p_i + q_i (q_i p_j - i\hbar \delta_{ij}) p_j$

$\hookrightarrow$ # DI DIMENSIONI ($\mathbb{R}^d$)

$$= -(\underline{q}\,\underline{p})^2 + i\hbar(d-1)(\underline{q}\,\underline{p}) + q^2p^2 - i\hbar\,\underline{q}\,\underline{p}$$

$$= -(\underline{q}\,\underline{p})^2 + i\hbar(d-2)(\underline{q}\,\underline{p}) + q^2p^2$$

$\frac{L^2}{q^2}$ È INVARIANTE X L'ORDINAMENTO XKÉ ABBIAMO VISTO CHE TUTTI GLI SCALARI COMMUTANO CON L

$\Rightarrow$ TUTTE LE FUNZ DI q COMMUTANO CON L

$$\frac{L^2}{q^2} = \frac{-1}{q^2}(\underline{q}\,\underline{p})^2 + i\hbar(d-2)\frac{1}{q^2}(\underline{q}\,\underline{p}) + p^2$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{1}{q^2}(\underline{q}\,\underline{p})^2 - i\hbar\frac{d-2}{q^2}(\underline{q}\,\underline{p}) + \frac{L^2}{q^2}$$

SE ABBIAMO CON PROB A SIMM CENTRALE $\Rightarrow$ CONVIENE USARE COORD SF

$\longrightarrow$ EN CINETICA IN COORD SF:

IN QM APPARE UN TERMINE AGGIUNTIVO ALL'HAMILTONIANA PROP AD $\hbar$ PER $d,n>2$

$$r\frac{\partial}{\partial r} = r\frac{\partial x_i}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_i} = x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

(SOMMA SU i)

RAGGIO (COORD POLARI) — COORD CART — x_i SONO LIN IN r ($x_i = r\cos\theta$ x es)

$$\underline{q}\,\underline{p} = q_i p_i \xrightarrow[\text{RS DELLE COORD}]{} -i\hbar x_i\frac{\partial}{\partial x_i} = -i\hbar r\frac{\partial}{\partial r}$$

INTRODUCIAMO LA QUANTITÀ $\boxed{p_r := -i\hbar\frac{\partial}{\partial r}}$

$$\Rightarrow \underline{q}\,\underline{p} \longrightarrow r p_r$$

p_r È UN OP CHE AGISCE SU $\mathcal{H}$ $\longrightarrow$ POSSO PROMUOVERLO AD OSS?

QUANDO LO ABBIAMO DATO PER p IN RS COORD ABBIAMO FATTO

$$\langle\varphi|p|\varphi\rangle = -i\hbar\int dx\,\varphi^*(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)$$

$$= +i\hbar\int dx\,\varphi(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi^*(x) \quad \text{(INTEG PER PARTI)}$$

$$\langle\varphi|p|\varphi\rangle^* = \left(i\hbar\int dx\,\varphi(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi^*(x)\right)^* = -i\hbar\int dx\,\varphi^*(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)$$

$$= \langle\varphi|p|\varphi\rangle \quad \Rightarrow p \text{ HERMITIANO}$$

PROCEDIAMO ANALOG CON p_r X VEDERE SE È AUTOAGGIUNTO

SE SONO IN $\mathbb{R}^d$

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = \int d\underline{x}\, \varphi^*(\underline{x})\, \varphi(\underline{x})$$ LA DERIV RISP $\underline{x}$ RIMANE INTUTATA

→ IN COORD POLARI?

$$= \int dr\, r^{d-1} d\Omega\, \varphi^*(r,\theta,\varphi) \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r,\theta,\varphi)$$

↳ INTEGRALE ANGOLARE

NEL PROD SCAL IN COORD POLARI p_r NON È UN OPERATORE AUTOAGG

⇒ NON È UN OSS

$$(\underline{q}\,\underline{p})^2 = -\hbar^2 \left(r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) = -\hbar^2 \left(r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right)$$

$$= q^2 p_r^2 - i\hbar (\underline{q}\,\underline{p})$$

$$\Rightarrow p^2 = p_r^2 - i\hbar \frac{d-1}{q^2} (\underline{q}\,\underline{p}) + \frac{L^2}{q^2} = p_r^2 - i\hbar (d-1) \frac{1}{r^2} p_r + \frac{L^2}{q^2}$$

$$= -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{L^2}{r^2} = -\hbar^2 \left[\frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{L^2}{r^2}$$

$$\longrightarrow p^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{L^2}{r^2} = -\hbar^2 \Delta$$

CI TORNERÀ UTILE X ES IN UN HAMILTONIANA DI UNA PART IN 2D

→ $p^2/2m$ SE AVRÒ POT CENTRALE CONVIENE UTILIZZ COORD POLARI

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$ IN COORD CARTESIANE

SE LO SCRIVO IN COORD POLARI OTTENGO CHE LA PT NON DIP DA r

È L^2/r^2

PRBL A POTENZIALE CENTRALE

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(|\underline{q}|)$$

IN MC SE FACCIO UNA ROTAZ $\longrightarrow$ K INVARIANTE XKÉ FUNZ DI SCALARI

V INVAR XKÉ FUNZ DI $|\underline{q}|$ (SCALAR)

$\Rightarrow$ SIMMETRIA X ROTAZ

$\rightarrow$ $\underline{L}$ GENERATORE DELLE ROTAZ $\Rightarrow$ INTC $\left\{\underline{L}, \frac{H}{m}\right\} = 0$

SI CONSERVA $\underline{L}$ $\Rightarrow$ COSTANTE DEL MOTO

$\underline{L}$ FISSA UN PIANO AD ESSO ORTOGONALE IN CUI AVVIENE IL MOTO $\Rightarrow$ PRBL BIDIM

INOLTRE $|\vec{q}| = r$

$$p^2/2m = p_r^2/2m + \frac{L^2}{2mr^2} \Rightarrow H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r) \quad \underline{\text{PBL 1D}}$$

IN QM H È LA STESSA E $[H, \underline{L}] = 0$ (SI PUÒ VERIF)

IN RS POSSO SCRIVERE φ IN FUNZ DI θ, φ, r IN 3D

$$H\varphi(r, \theta_1 \dots \theta_{d-1}) = E\varphi(r, \theta_1 \dots \theta_{d-1})$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r} r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r}\right]\varphi(r, \theta_1 \dots \theta_{d-1}) + \frac{L^2}{r^2}\varphi(r, \theta_1 \dots \theta_{d-1}) +$$

$$+ V(r)\varphi(r, \theta_1 \dots \theta_{d-1}) = E\varphi(r, \theta_1 \dots \theta_{d-1})$$

PROVIAMO A IPOTIZZARE UNA CERTA FORMA PER φ

$$\varphi(r, \theta_1 \dots \theta_{d-1}) = R(r)\, Y(\theta_1 \dots \theta_{d-1})$$

E SUPP DI SEPARAZIONE VTC

$$L^2 Y(\theta_1 \dots \theta_{d-1}) = \lambda Y(\theta_1 \dots \theta_{d-1})$$

PERCHÉ

IN ALTRI TERMINI SE $[H, \underline{L}] = 0 \Rightarrow$ COMPATIBILI $\Rightarrow$ POSSO SCEGLIERE UNA BASE IN CUI SONO SIMULTANEAMENTE DIAGONALI

$\Rightarrow$ TROVARE SPETTRO DI $H \Leftrightarrow$ TROVARE SPETTRO DI L^2 UTILIZZANDO Y ~~SFERICA~~ MI STO' MUOVENDO IN TALE BASE

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r} r^{d-1}\frac{\partial}{\partial r}\right\}R(r) + \frac{\lambda}{2mr^2}R(r) + V(r)R(r) = ER(r)$$

OTTENGO UN EQ. DI SCHR UNIDIM

OSS 1

GLI AUTOVAL DI L^2 NON HANNO NULLA A CHE VEDERE COL POT CENTRALE $V(q)$

$\Rightarrow$ X STUDIARLI POSSO STUDIARE IL PROB SENZA $V(q)$

$\longrightarrow$ PARTICELLA LIBERA

OSS 2

NEL PROB DELLA PARTE LIBERA SCRIVIAMO

$H = H_x + H_y + H_z$ CHE TRA LORO COMMUTANO $\Rightarrow$ COMPATIBILI

$\Rightarrow$ SIMULTANEAMENTE DIAGONALIZZABILI

$\Rightarrow$ SI PUÒ FATTORIZZARE LA FUNZ D'ONDA

$\Rightarrow$ SI PUÒ RISOLVERE IL PROB LUNGO LE 3 DIM

$\Rightarrow$ CONOSCIAMO GLI AUTOVAL DA QM 1

UNO DI QUESTI È 0

$\Rightarrow$ L'EQ. DI SCHR DIVENTA (X PARTE LIBERA ED $E = 0$)

$\Delta\varphi = 0$ EQ. DI LAPLACE

$\Rightarrow$ SE SO RISOLVERLA POSSO RISOLVERE GLI AUTOVAL DI L^2

ABBIAMO SOTTOLINEATO COME IN QM È NATURALE SFRUTTARE LE SIMM, X ES X DET LO SPETTRO DI H

ABBIAMO SFRUTTATO $|L^2|$ E CONCLUSO SUL N CON VI È FATTORE RADIALE

SE IL NOSTRO SCOPO È DET LO SPETTRO DI L^2 ⇒ CI RIDUCIAMO AL CASO PARTIC LIBERA

POI CI SCOMPONIAMO IN H LUNGO LE DIR CHE COMMUTANO TRA LORO

⇒ POSSONO ESSERE DIAGONALIZ

→ EQ. DI SCHR X PARTIC LIBERE

$$\Delta \varphi = -k^2 \varphi \qquad k = |\vec{k}|$$

SE SIAMO INTERESSATI ALLA PT RADIALE CIÒ NON DIP DAL PARTIC

K AUTOVALORI H ⇒ POSSIAMO PRENDERE L'AUTOVAL Φ

POSSIAMO IMMAGINARE

$$\varphi = \varphi(x_1 \dots x_n) \text{ OPPURE } \varphi(r, \theta_1 \dots \theta_{n-1})$$

ABBIAMO SCRITTO IL LAPLACIANO SEPARANDO PT ANGOLARE DA PT RADIALE

<u>OSS</u>

IL CASO SPECIFICO A CUI CI SIAMO RIDOTTI (EQ. DI LAPLACE) DICE CHE SE φ SOL DI LAPLACE ⇒ ANCHE $\varphi(\lambda x_1 \dots \lambda x_d)$ SOL XKÉ AVRÒ UN FATTORE λ^2 DAVANTI ALLE DERIV II

DETTO IN COORD POLARI $\varphi(\lambda r, \theta_1 \dots \theta_{d-1})$

CASO BIDIM

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \mathrm{arctg}\, y/x \end{cases}$$

→ LAVORIAMO IN COORD POLARI

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{1+y^2/x^2}\left(-y/x^2\right)\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varphi} = y/r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{1+y^2/x^2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$= \mathrm{sen}\,\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = e^{i\varphi}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + i\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$= e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \cancel{\frac{i}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}} - \cancel{\frac{i}{r}\frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \cancel{\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}}\right) + \cancel{\frac{i}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$\Rightarrow$ IN 2D $\boxed{\frac{1}{\hbar^2}L^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}$

POSSIAMO SCRIVERE L'EQ. AUTOVAL DI L^2

$$L^2 Y(\varphi) = \lambda Y(\varphi) \longrightarrow -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}Y(\varphi) = \lambda Y(\varphi)$$

$\Rightarrow Y_{\pm \ell}(\theta) = e^{\pm i \ell \theta}$ con $\lambda = \ell^2$

(ANALOGIA L e p) (?) (DISCORSO SUI POLINOMI ORTOGONALI?)

θ VARIA TRA 0 E 2π

$\rightarrow$ I VAL DI ℓ ACCETTABILI SONO DET DALL'FATTO CHE QUESTA VALUTAZ IN UNO SP COMPATTO; IL CERCHIO SUL BORDO NON POSSIAMO DISTINGUERE TRA 0 E 2π

$\Rightarrow$ DEVONO ESSERE NUM NUMERI INTERI

CIOÈ L^2 DEVE AVERE AUTOFUNZ PERIODICHE SU 2π E CIÒ DETTA LA CONDIZ SU ℓ

$\Rightarrow \ell \in \mathbb{Z}$

L È UNA BUONA OSS, ABBIAMO INFATTI UNO SPETTRO DISCRETO (AL CONTRARIO DI p) PERCHÉ ESSO AGISCE COME UN DOVE ROTAZ SU UNO SP COMPATTO

<u>STRADA ALTERNATIVA</u>: EQ. DI LAPLACE

2DIM REALI $\longleftrightarrow$ VAR COMPLESSA

$$\eta = x + iy \quad \bar{\eta} = x - iy \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\eta + \bar{\eta}}{2} \\ y = \frac{\eta - \bar{\eta}}{2i} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \bar{\eta}}$$

I oss SE $\varphi = \varphi(\eta) \Rightarrow \Delta\varphi = 0$

$\varphi = \varphi(\bar{\eta}) \Rightarrow \Delta\varphi = 0$

II oss

C'È INVARIANZA DI SCALA X LE EQ. DI LAPLACE (NO PARAM DIMENSIONALI)

(NON CI SAREBBE SE FOSSE $\Delta\varphi^2 + k^2\varphi$ x es)

$\Rightarrow$ SE TRASLO φ RIMANE SOL

SE RUOTO φ RIMANE SOL

GRUPPO CONFORME: ROTAZ, TRASLAZ, DILATAZ E TRASF FATTE PRENDENDO UN INVERSIONE, GENERANDO GLI ALTRI OPERATORI E FACENDO UN ALTRA INVERSIONE

LE EQ. DI LAPLACE SONO INVARIANTI X IL GRUPPO CONFORME

$\Rightarrow$ ANCHE $\varphi(g(\eta))$ HA LAPLACIANO NULLO

VOGLIAMO ADOPERARE L'IDEA CHE LE SOL SIANO POLINOMI

DEVONO ESSERE OMOGENEI DI GRADO ℓ

$$u_\ell(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{0 \le p \le \ell} c_p \, \eta^p \, \bar{\eta}^{\ell - p}$$

$$\Delta u_\ell = 4 \sum_{0 \le p \le \ell} c_p \, p(\ell - p) \, \eta^{p-1} \, \bar{\eta}^{\ell-p-1}$$

DEVO RICHIEDERE CHE SIA SOL $\Rightarrow \Delta u_\ell = 0$

XKÉ SIA NULLO $\Rightarrow$ c_p PER $p \neq 0, \ell$ SIANO NULLI

$\Rightarrow u_\ell = c_0 \bar{\eta}^\ell + c_\ell \eta^\ell$ 2 SOL INDIP

$\eta^\ell = (x + iy)^\ell = (r e^{i\theta})^\ell = r^\ell \underbrace{e^{i\ell\theta}}_{\text{PT ANGOLARE}}$ È FATTORIZZATA

$\bar{\eta}^\ell = (x - iy)^\ell = r^\ell e^{-i\ell\theta} \longrightarrow$ IDEM AUTOFUNZ DI L^2 CON AUTOVAL ℓ^2

QUANTI SONO GLI AUTOVALORI DI L^2 IN DIMENSIONE d?

X CAPIRLO DOBBIAMO UNIRE 3 COSE

1 → CERCHIAMO SOL LAPLACE IN d DIM ⇒ POLIN OMOG DI gr ℓ

(TC $\Delta u_\ell = 0$)

$u_\ell(x_1 \dots x_d)$

IMMAGINIAMO SIA DEL TIPO $u_\ell(r, \theta_1 \dots \theta_{d-1})$ FUNZ OMOG DI gr ℓ IN r

CE N'È UNA SOLA $r^\ell Y(\theta_1 \dots \theta_{d-1})$

SICCOME POSSO FISSARE LA SCALA IN MODO ARBITRARIO

(X INVARIANZA GR CONFORME) ⇒ POSSO FISSARE $r=1$

⇒ 1) POSSO SCRIVERE LA FUNZ OMOG DI gr ℓ COME

$r^\ell Y(\theta_1 \dots \theta_{d-1})$

2 → Δ IN d DIM È

$$\Delta = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \Delta u_\ell = \left(\frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} r^\ell\right) Y(\theta_1 \dots \theta_{d-1}) - r^{\ell-2} L^2 Y(\theta_1 \dots \theta_{d-1})$$

SE u_ℓ SOL ⇒ $\Delta u_\ell = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{\ell}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{d+\ell-2}\right) Y - r^{\ell-2} L^2 Y =$$

$$= \ell(d+\ell-2) r^{\ell-2} Y - r^{\ell-2} L^2 Y = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\ell(d+\ell-2) Y = L^2 Y}$$ SPETTRO DI L^2

NEL CASO $d=2$ FA ℓ^2 (COME ABBIAMO TROVATO PRIMA)

IN $d=3$ $\ell(\ell+1)$ ECC

3 →

LE SOL DI LAPLACE SONO DETTE FUNZ ARMONICHE

IN GEN LE AUTOFUNZ DI L^2 SONO DETTE <u>ARMONICHE IPERSFERICHE</u>

(VIVONO SU UN'IPERSFERA)

IN $d=3$ SONO <u>ARMONICHE SFERICHE</u>

$x, y, z \longrightarrow \eta, \bar{\eta}, z$ DOVE $\eta, \bar{\eta}$ COME NEL CASO $d=2$

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$u_\ell(x,y,z) = \sum_{p,q} c_{pq}\, \eta^p \bar{\eta}^q z^{\ell-p-q} \qquad p,q \geq 0$$

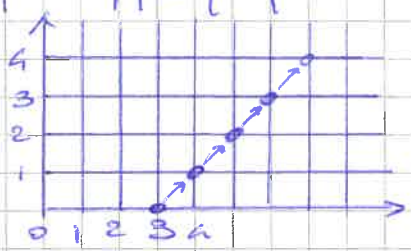
$p=0$ E $q=0$ NON CONTRIB $\qquad 0 \leq p+q \leq \ell$

$$0 = \Delta u_\ell = \sum_{p,q} c_{pq} \left(4pq\, \eta^{p-1} \bar{\eta}^{q-1} z^{\ell-p-q} + (\ell-p-q)(\ell-p-q-1)\, \eta^p \bar{\eta}^q z^{\ell-p-q-2} \right)$$

SCRITTO GLI INDICI DEL 1° TERM

$$= \sum_{pq} \left[4(p+1)(q+1)\, c_{p+1\, q+1} + (\ell-p-q)(\ell-p-q-1)\, c_{pq} \right] \eta^p \bar{\eta}^q z^{\ell-p-q-2}$$

$$\Rightarrow c_{p+1\, q+1} = -\frac{(\ell-p-q)(\ell-p-q-1)}{4(p+1)(q+1)}\, c_{pq}$$



⇒ FISSATO UN c_{pq} HO FISSATO GLI ALTRI RICORSIVAM

XES c_{41} PUÒ ESSERE ESPRESSO IN TERMINI DI c_{30}

⇒ TUTTI I TERMINI DELLA REGIONE POSSONO ESSERE ESPRESSI DAI TERMINI SUL BORDO

XES DATO $c_{00} \longrightarrow c_{p0}$ SONO ℓ COEFF

$\longrightarrow c_{0q}$ SONO ℓ COEFF

⇒ HO $(2\ell+1)$ POSSIBILI COEFF

⇒ $(2\ell+1)$ ARMONICHE SFERICHE

$L^2 Y_\ell(\theta,\varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_\ell(\theta,\varphi)$ x 3D AUTOFUNZ di L^2

$\Delta u_\ell(r,\theta,\varphi) = \Delta u_\ell(\eta,\bar\eta,z) = 0$

$u_\ell(\eta,\bar\eta,z) = \sum_{p,q} c_{pq}\, \eta^p \bar\eta^q z^{\ell-p-q}$ $\quad p,q \geq 0 \quad p+q \leq \ell$

sa omog a gr ℓ

$c_{p+1\,q+1} = \dfrac{(\ell-p-q)(\ell-p-q-1)}{4(p+1)(q+1)} c_{pq}$ EQ. RICORSIVA COEFF

$u_\ell = r^\ell Y_\ell^0(\theta,\varphi) \longrightarrow$ CON $c_{00}=1$ UNICO COEFF NON NULLO

$u_\ell = r^\ell Y_\ell^m(\theta,\varphi) \longrightarrow c_{m,0} \neq 0$

$u_\ell = r^\ell Y_\ell^{-m}(\theta,\varphi) \longrightarrow c_{0,m} \neq 0$

STUDIAMO

$r^\ell Y_\ell^{\pm\ell}(\theta,\varphi) = (x \pm iy)^\ell = r^\ell e^{\pm i\varphi\ell} (\operatorname{sen}\theta)^\ell$

IN COORD POLARI

$L^2 = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left[\left(\operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$

$\Rightarrow L^2 e^{\pm i\varphi\ell}(\operatorname{sen}\theta)^\ell = -\dfrac{e^{\pm i\varphi\ell}}{\operatorname{sen}^2\theta}\left[\operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial}{\partial\theta}\ell\cos\theta - \ell^2\right](\operatorname{sen}\theta)^\ell$

$= \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left[-\operatorname{sen}^2\theta\,\ell + \ell^2\cos^2\theta - \ell^2\right](\operatorname{sen}\theta)^\ell e^{\pm i\varphi\ell}$

$= \ell(\ell+1)(\operatorname{sen}\theta)^\ell e^{\pm i\varphi\ell} = \ell(\ell+1) Y_\ell^{\pm\ell}(\theta,\varphi)$

STUDIAMO

$r_0 Y_0^0 = r \cdot \text{cost}$

$r Y_1^0 = z = r\cos\theta$

QUESTE FUNZ POSSONO ESSERE NORMALIZZATE ASS

$$Y_0^0(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

NEL CASO $l=1 \rightarrow$ 3 POSSIBILI SOL: Y_1^0, $Y_0^{\pm 1} = x \pm y = \operatorname{sen}\theta\, e^{\pm i\varphi}$

LE SOL NON SONO ATTO CHE CL DEL VETT POSIZ CHE HANNO LA DIP IN φ DELLA FORMA $e^{\pm i\varphi}$

$$Y_1^0 \longrightarrow \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^{\pm 1} \longrightarrow \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta\, e^{\pm i\varphi}$$

IN GEN

$$r^l Y_l^m(\theta,\varphi) = \sum_k C_{m+k,k}\, \eta^{m+k}\, \bar{\eta}^{k}\, z^{l-m-2k}$$

$$= r^l e^{im\varphi} \sum_k C_{m+k,k} (\operatorname{sen}\theta)^{m+2k} (\cos\theta)^{l-m-2k}$$

NORMALIZZATA: $$Y_l^m = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, e^{im\varphi} P_l^{|m|}(\cos\theta)$$

x m PARI FUNZ DI $\cos\theta$

DOVE P_l^m È DETTO POLINOMIO ASSOCIATO DI LEGENDRE

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^m P_l(x)$$

↳ POLIN DI LEGENDRE DI GR l

I POLIN DI LEGENDRE SONO TC

$$\int_{-1}^{+1} dx\, P_m(x) P_n(x) = \delta_{mn} \frac{2}{2m+1}$$ ORTOGONALI

QUESTO È LEGATO AL FATTO CHE SONO AUTOFUNZ DI OSS CON AUTOVAL DIVERSI (LOVERMATO)

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_k^m P_l^m = \delta_{kl} \frac{2(l-m)!}{(2l+1)(l-m)!}$$

$$\int_{-1}^{+1} dx \, \frac{P_\ell^m(x)\, P_\ell^n(x)}{1-x} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \dfrac{(\ell+m)!}{m\,(\ell-m)!} & \text{se } m = n \neq 0 \\ \infty & \text{se } m = n = 0 \end{cases}$$

APPROCCIO ALGEBRICO ALL'EQ. DI SCHR

ABBIAMO VISTO UN APPROCCIO ANALITICO X DET LE SOL DELL'EQ. DI SCHR TROVANDO LE RADICI ED ALGOLARE

MA $\exists$ ANCHE UN APPROCCIO ALGEBRICO

→ NEL CASO DELLO SPETTRO DI UNA PARTICELLA A POT CENTRALE

$$[H, L_i] = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

ABBIAMO DETTO CHE X STUDIARE UN SIST ⇒ CERCA UN INSIEME COMPLETO DI OSS CHE COMMUTANO

⇒ LO STATO È UNIVOC DET DA TUTTI GLI AUTOVAL DI OSS COMPATIBILI

PRENDIAMO H E LE COMP L_i : C'È UN PROBL LE L_i NON COMMUTANO TRA LORO

$$\left[\frac{L_i}{\hbar}, \frac{L_j}{\hbar}\right] = i\,\varepsilon_{ijk}\frac{L_k}{\hbar}$$

⇒ POSSIAMO PRENDERNE AL + UNA

X CONVENZIONE LA III^a ⇒ $\{H, L_3\}$ È BUONO?

RICORDIAMO CHE L^2 È UNO SCALARE ⇒ COMMUTA CON OGNI COMP

$[L^2, L_i] = 0$ ⇒ COMMUTA ANCHE CON H

→ $\{H, L_3, L^2\}$

C'È UN'ALTRA INFO INTERESSANTE DATA DALL'ALGEBRA DELLE COMMUTAZ

L_1 ED L_2 COMMUTANO CON H MA NON TRA LORO

→ TEOR DI DEGENERAZ: 3 OSS TC LA II E LA III COMMUTANO CON LA I MA NON TRA LORO

⇒ LA I È DEGENERE

⇒ SE NON FISSIAMO IL NOSTRO AUTOVAL DI ENERGIA X UN SIST A SIMM CENTRALE ⇒ IL NOSTRO SPETTRO SARÀ SICURAM DEGENERO

CHE SENSO HA?

ESSENDO IL SIST ISOTROPO POSSO SCEGLIERE QUALSIASI DIREZ X LA DIREZ z ⇒ È CHIARO CHE C'È UNA DEGENERAZ CAUSATA DA QUESTA ARBITRARIETÀ

⇒ SE H, L_z, L^2 FORMANO UN SIST COMPLETO DI OSS (CIOÈ AVERNE FISSATI FISSA LO STATO)

$|E, l_z, \mu^2\rangle$ STATI TC

$$\begin{cases} H|E,l_z,\mu^2\rangle = E|E,l_z,\mu^2\rangle \\ L_z|E,l_z,\mu^2\rangle = l_z|E,l_z,\mu^2\rangle \\ L^2|E,l_z,\mu^2\rangle = \mu^2|E,l_z,\mu^2\rangle \end{cases}$$

X QUANTO NÒ SAPPIAMO l_z E μ^2 SONO NON QUALUNQUE A PARTE IL FATTO CHE μ^2 ESSENDO AUTOVAL DI UN OSS AL QUADRATO È POS

TUTTAVIA SAPPIAMO CHE I L_i SONO I GENERATORI DI ROTAZ IN $\mathcal{H}$

LE ROTAZ SONO RAPPRESENTATE DA $e^{-i\frac{\theta}{\hbar}}$ E QUINDI TRASF UNITARIE

TUTTAVIA LE ROTAZ SONO UNIVOC DET DAI GENERATORI DELLE TRASF INFINITESIME CHE SONO GLI L_i

QUESTO SOPRASSA LE REGOLE DI COMMUTAZ DELL'ALGEBRA DI LIE DEL GRUPPO SO(3)

ESISTE LA ALL'ALGEBRA DI LIE DEL GRUPPO SU(2) CHE È IL RICOPRIM UNIVERSALE DI SO(3)

SE INTRODUCIAMO $L_\pm = L_1 \pm i L_2$

SAPPIAMO CHE $L_i^\dagger = L_i \Rightarrow (L_-)^\dagger = L_+$

NON SONO AUTOAGGIUNTI MA UNO L'HERMITIANO DELL'ALTRO

$$[L_3, L_+] = [L_3, L_1 + i L_2] \underset{\uparrow}{=} i L_2 + L_1 = L_+$$

IN UNITÀ DI $\hbar$

ANALOGO

$$[L_3, L_-] = -L_- \quad (\text{XKÉ } L_- = L_+^\dagger)$$

STESSO REGOLE DI COMMUTAZ DEGLI OPERATORI DI SALITA/DISCESA

X OSCILL ARMONICO

$$L_3 |l_3, \mu^2\rangle = l_3 |l_3, \mu^2\rangle$$

$$L_3 L_+ |l_3, \mu^2\rangle = ([L_3, L_+] + L_+ L_3) |l_3, \mu^2\rangle$$

$$= (l_3 + 1) L_+ |l_3, \mu^2\rangle$$ ANCORA AUTOVETT DI L_3

L_+ ANALOGO ALL'OP DI SALITA

$$L_+ |l_3, \mu^2\rangle = \begin{cases} 0 \\ \text{cost } |l_3+1, \mu^2\rangle \end{cases}$$

SE HO AUTOVAL $l_3 \Rightarrow l_3+1, l_3+2, l_3+3 \ldots l_3+S$

SI STERE DI SALIRE SE $\exists$ AUTOSTATO TC

$$L_+ |l_3+S, \mu^2\rangle = 0$$

VICEVERSA L_- È COME L'OP DI DISCENSIONE

DATO $L_3 |l_3, \mu^2\rangle = l_3 |l_3, \mu^2\rangle$ OTTENGO $l_3-1 \ldots l_3-K$

FINO A CHE $L_- |l_3-K, \mu^2\rangle = 0$

$\Rightarrow$ POSSO USARE $L_\pm$ X CREARE UNA CATENA EQUIDISTANZIATA DI AUTOVAL

$\rightarrow$ È ∞? HA VAL MAX E MIN?

ABBIAMO FISSATO IL VAL DI L^2 E QUINDI È ANCHE UNICO AUTOSTATO

$$L^2 |l_3, \mu^2\rangle = \mu^2 |l_3, \mu^2\rangle$$

MA $L_3^2 = L^2 - L_1^2 - L_2^2$

SE PRENDIAMO IL VALORE DI QUESTA RELAZ SU $|l_3, \mu^2\rangle$

$$l_3^2 = \mu^2 - \underbrace{\langle l_3, \mu^2 | (L_1^2 + L_2^2) | l_3, \mu^2 \rangle}_{\text{SOMMA POSITIVA}}$$

$$\Rightarrow \boxed{l_3 \leq \mu^2}$$

A μ FISSATO $\boxed{-\mu \leq l_3 \leq \mu}$

$\Rightarrow$ LE CATENE DI AUTOVAL SONO LIMITATE SOPRA E SOTTO (AL CONTRARIO CHE NELL'OSCILL ARMONICO)

INFATTI L_3 NON POTRÀ MAI ESSERE MAGGIORE DEL MOMENTO ANGOLARE STESSO SU I DUE I SUOI AUTOVAL

TROVIAMOLI:

$L_+ | m, j^2 \rangle = 0 \Rightarrow$ IL MODULO QUADRO È NULLO

$$0 = \langle m, j^2 | L_- L_+ | m, j^2 \rangle = \langle m, j^2 | (L_1 - iL_2)(L_1 + iL_2) | m, j^2 \rangle$$

$$= \langle m, j^2 | (L_1^2 + L_2^2 + i[L_1, L_2]) | m, j^2 \rangle$$

$$= \langle m, j^2 | (L^2 - L_3^2 - L_3) | m, j^2 \rangle$$

$$= [j^2 - m(m+1)] \langle m, j^2 | m, j^2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{j^2 = m(m+1)}$$

ANALOG $L_- | \bar{m}, j^2 \rangle = 0$

$$0 = \langle \bar{m}, j^2 | L_+ L_- | \bar{m}, j^2 \rangle = \langle \bar{m}, j^2 | (L_1 + iL_2)(L_1 - iL_2) | \bar{m}, j^2 \rangle$$

$$= \langle \bar{m}, j^2 | L^2 - L_3^2 + L_3 | \bar{m}, j^2 \rangle = [j^2 - \bar{m}(\bar{m} - 1)] \langle \bar{m}, j^2 | \bar{m}, j^2 \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{j^2 = \bar{m}(\bar{m} - 1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{m(m+1) = \bar{m}(\bar{m} - 1)} \begin{cases} \bar{m} = -m \\ \bar{m} = m+1 \end{cases}$$

MA $\bar{m}$ È IL VAL + BASSO DELLA CATENA $\Rightarrow \boxed{\bar{m} = -m}$

E $\boxed{j^2 = m(m+1)}$

$\Rightarrow$ LA CATENA DEGLI AUTOVAL DI L_3 È $-m, -m+1, \dots, m-1, m$

CON $j^2 = m(m+1)$

QUESTO È CIÒ CHE SERA SCRITTO NELLE SACRE TAVOLE DELLE REGOLE DI COMPUTAZIONE (GIOITE, CHI POPOLI TUTTI)

$\Rightarrow$ ABBIAMO $2m+1$ AUTOVAL DI L_3

$\Rightarrow$ $2m+1 \in \mathbb{N}$ XKÉ SIA IL NUM DI AUTOVAL POSSIBILI

$\Rightarrow$ m INTERO O SEMI INTERO

QUINDI GUARDANDO LE ROTAZ $\rightarrow$ m INTERO

GUARDANDO L'ALGEBRA $\rightarrow$ m INTERO O SEMIINTERO

m CARATT LA RAPPR IRRIDUCIBILE DELLA NOSTRA ALGEBRA

$m=0 \longrightarrow$ OGGETTO RIMANE INVARIATO

$m=1 \longrightarrow$ ABBIAMO DIM 3 $\Rightarrow$ 3 VAL POSSIBILI DI RAPPR

$m=2 \longrightarrow$ DIM AUTOVAL $= 5$

SE $m = 1/2 \Rightarrow$ RAPPR DI DIM 2

RAPPRESENTAZ DI PESO SEMI INTERO SONO DETTE SPINORIALI

INTERAZIONE TRA 2 CORPI

$$H = \vec{p}_1^{\,2}/2m_1 + \vec{p}_2^{\,2}/2m_2 + V(|\vec{q}_2 - \vec{q}_1|)$$

$m_1 \neq m_2$ LE PARTICELLE NON SONO IDENTICHE

CONVIENE DISTINGUERE IL MOTO DEL SIST COLLETTIVO RISP A QUELLO RELATIVO

$\Rightarrow$ SEMPLIFICHERETTO L'INVARIANZA X TRASF CANONICHE DANDOGLI UNA FORMA + SEMPLICE

$$\vec{q} = \vec{q}_1 - \vec{q}_2 \qquad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

POSIZ RELATIVA IMPULSO TOT

QUESTE VAR NON SONO CONIUG

$\Rightarrow$ INTRODUCO $\vec{p} = \dfrac{m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2}{m_1 + m_2}$ "DIFFERENZA PESATA" xkè $p_j \propto m_j$

CONIUGATE?

$$\{q^i, p^j\} = \left\{q_1^i - q_2^i, \frac{m_2 p_1^j - m_1 p_2^j}{m_1+m_2}\right\}$$

$$= \frac{m_2}{m_1+m_2}\{q_1^i, p_1^j\} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\{q_2^i, p_2^j\} = \delta_{ij} \quad \text{CONIUGATE}$$

DEF UNA VAR $\vec{Q}$ CONIUG A $\vec{P}$

$$\vec{Q} = \frac{m_1 \vec{q}_1 + m_2 \vec{q}_2}{m_1+m_2}$$

VERIF CHE SIANO CONIUG

$$\{Q^i, P^j\} = \left\{\frac{m_1 q_1^i + m_2 q_2^i}{m_1+m_2}, p_1^j + p_2^j\right\} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\{q_1^i, p_1^j\} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\{q_2^j, p_2^j\}$$

$$= \delta_{ij}$$

VOGLIAMO ANCHE CHE LE 2 COPPIE SIANO MA CORD INDIP

È BANALE VERIF $\{Q^i, Q^j\} = \{P^i, P^j\} = 0$

$\{q^i, q^j\} = \{p^i, p^j\} = 0$

MA SE FACCIO $\{q^i, P^j\}$?

$$\{q^i, P^j\} = \{q_1^i - q_2^i, p_1^j + p_2^j\} = \{q_1^i, p_1^j\} - \{q_2^i, p_2^j\} = 0$$

ANALOG $\{Q^i, p^j\} = \left\{\frac{m_1 q_1^i + m_2 q_2^i}{m_1+m_2}, \frac{m_2 p_1^j - m_1 p_2^j}{m_1+m_2}\right\}$

$$= \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\left[\{q_1^i, p_1^j\} - \{q_2^i, p_2^j\}\right] = 0$$

$\Rightarrow$ (q, p) INDIP DA (Q, P)

(POTEVO RICAVARE IMPONENDO LE REL DI COMMUTAZ E L'INDIPA VARIABILI)

DEVO RISCRIVERE L'HAMILTONIANA

$\vec{p}_1 = \vec{p} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{P}$ ANALOG $\vec{p}_2 = \vec{P} - \vec{p}_1 = -\vec{p} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{P}$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2m_1}\left(\vec{p} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{P}\right)^2 + \frac{1}{2m_2}\left(-\vec{p} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{P}\right)^2 + V(|\vec{q}|)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{p}^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{m_1}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_2}{(m_1+m_2)^2}\right]\vec{P}^2 + V(|\vec{q}|)$$

$$= \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(|\vec{q}|) \quad \text{CON } M = m_1 + m_2$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

$\Rightarrow H = H_{CM} + H_{REL}$

CENTRO DI MASSA — MOTO RELATIVO

$$H_{CM} = \frac{\vec{P}^2}{2M} \qquad H_{REL} = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(|\vec{q}|)$$

POSSO SCEGLIERE UN SOL TC SI OSSERVA SOLO IL MOTO REL

ANALOG IN QM UTILIZZO I COMMUTATORI E LE RELAZ RIMANGONO IDENTICHE

→ SCOPRO CHE $[H_{cm}, H_{rel}] = 0$ ⇒ OSS COMPATIBILI

⇒ POSSO SCEGLIERE UNA BASE IN CUI SIANO SIMULT DIAGONALI

⇒ LA FUNZ D'ONDA PER IL SIST (SOL DELL'EQ. DI SCHR x H_{TOT}) SARÀ $E = E_{cm} + E_{rel}$

$$\longrightarrow \quad \varphi_E(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = \varphi_{E_{cm}}(\vec{Q})\, \xi_{E_{rel}}(\vec{q})$$

CIOÈ:

$$H_{cm}\, \varphi_{E_{cm}}(\vec{Q}) = E_{cm}\, \varphi_{E_{cm}}(\vec{Q})$$

$$H_{rel}\, \xi_{E_{rel}}(\vec{q}) = E_{rel}\, \xi_{E_{rel}}(\vec{q})$$

$H_{TOT} = \sum H_i$ ⇒ LO SPETTRO SARÀ LA SOMMA DEGLI SPETTRI

LA PT DI H_{cm} SARÀ COME ABBIAMO GIÀ VISTO, CIOÈ QUELLO DI UNA PART LIBERA

⇒ LO SPETTRO DI H_{TOT} SARÀ CONTINUO X CHE LA PT DI H_{cm} VARIA CON CONTINUITÀ

MA A NOI INTERESSA L'INTERAZIONE ⇒ MOTO RELATIVO

ATOMO DI IDROGENO

IL SIST CHE CI INTERESSA È QUINDI QUELLO RELATIVO

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\mu} - Z\frac{e^2}{r}$$ (POTENZIALE PROTONE-ELETTRONE)

$Z=1 \longrightarrow$ ATOMO IDROGENO

$Z = \#$ DI PROTONI

SE IL NUCLEO È + PESANTE $\Rightarrow \mu \simeq$ LA MASSA + LEGGERA

È CHIARO CHE SOTTO QUESTA HAMILTONIANA STA LA SIMM x ROTAZ

$$[H, L_i] = 0 \quad \Rightarrow [H, L^2] = 0$$

SE PRENDIAMO COME SIST COMPLETO H, L^2, L_3

$\Rightarrow$ UNO STATO SARÀ CARATT DA $|E, l(l+1), m\rangle$

CON L^2 CHE HA AUTOVAL $l(l+1)$ $l \in \mathbb{N}$

L_3 CHE HA AUTOVAL m CHE VARIA DA $-l$ A $+l$

$\varphi_{E,l,m}(r,\theta,\varphi)$ E, l, m PRENDONO VALORI DISCRETI E SONO DETTI NUM. QUANTICI

QUESTO SEGUE DAL FATTO CHE ABBIAMO UN POT CENTRALE

EQ. DI SCHR:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r\right] + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{Ze^2}{r}\right\}\varphi_{Elm}(r,\theta,\varphi) = E\,\varphi_{Elm}(r,\theta,\varphi)$$

MA NOI SAPPIAMO CHE

$$\varphi_{Elm}(r,\theta,\varphi) = R_{El}(r)\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

CON: $L_3 Y_l^m(\theta,\varphi) = m\hbar\, Y_l^m(\theta,\varphi)$

$L^2 Y_l^m(\theta,\varphi) = \hbar\, l(l+1)\, Y_l^m(\theta,\varphi)$

$$\Rightarrow \left\{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r\right] + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} - \frac{Ze^2}{r}\right\} R_{El}(r) = E\, R_{El}(r)$$

CONVENE DEF $u_{El}(r) = r R_{El}(r)$

FISSIAMO UNA VOLTA x TUTTE $E, l \Rightarrow$ SPERIAMO DI SCRIVERE

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} u''(r) + \left[\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + \frac{Z e^2}{r} \right] u(r) = E u(r)$$

IN FORMA È PER TUTTO UGUALE AD UN PROB 1D CON POT EFFICACE

$$V_{eff}(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} - \frac{Z e^2}{r}$$

$\Rightarrow$ CI SIAMO RICONDOTTI AD UN PROB 1D CON VAR r

$\rightarrow$ r È SOLO POSITIVA

INOLTRE LA FUNZ D'ONDA NON È u MA R : $u(r) = r R(r)$

$\Rightarrow$ C'È UNA CONDIZ SUL BORDO: $u(0) = 0$

OSS L'ELEM DI VOLUME $d V = r^2 dr \, d\Omega$

SE VOGLIAMO NORMALIZ LA FUNZ D'ONDA LA DOBBIAMO NORMALIZ IN dV

$$\int |R|^2 |Y|^2 dV = \int |R|^2 r^2 dr = \int_0^\infty |u|^2 dr$$

$\Rightarrow$ u È + NATURALE ANCHE AL FTO DI VISTA DI INTERPRETAZ PROBABIL

(NON È SOLO x COMODITÀ NEL SCRIVERE L'EQ.)

DALLA FORMA DEL POTENZIALE POSSIAMO DISCUTERE LA FORMA DELLE SOL

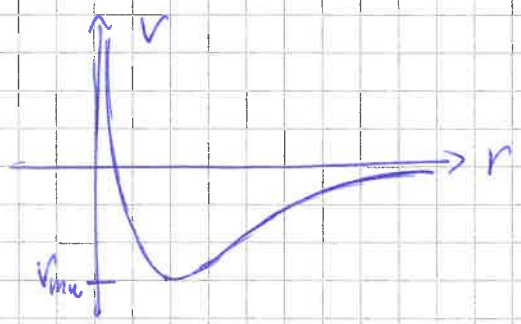
CIOÈ LO SPETTRO DI H

SONO AMMESSE SOL QUANDO $E > V_{min}$

SE SCELGO UN QUALUNQUE $E < 0$

$\Rightarrow$ 2 PTI DI INVERSIONE

$E > 0 \Rightarrow$ 1 PTO DI INV



$E < 0 \longrightarrow$ ORBITA ELLITTICA

$E > 0 \longrightarrow$ ORBITA PARABOLA

CI POSSONO ESSERE STATI LEGATI (Q SOL INTEG AL QUADRATO)

SOLO PER $E < 0$

$\Rightarrow$ EN CONTINUA PER $E > 0$

STATI LEGATI PER $E < 0$

SICCOME L'EQ. DI SCHR È LOCALE POSSIAMO PROVARE A CAPIRE COSA ACCADE IN DETTA REGIONE

x GS $r \to \infty \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu} u'' = E u$ (CON $E<0$)

$\to$ 2 SOL: $u \sim C_1 e^{-kr} + C_2 e^{+kr}$

CON $k = \frac{\sqrt{2\mu|E|}}{\hbar}$

NON STIAMO CERCANDO SOL AL QUADR INTEGR $\Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

$$\Rightarrow u(r) = f(r) e^{-kr}$$

$$u'(r) = f'(r) e^{-kr} - k f(r) e^{-kr}$$

$$u''(r) = f'' e^{-kr} - 2k f' e^{-kr} + k^2 f e^{-kr}$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[f'' - 2k f' + \cancel{k^2 f}\right] + \left[\hbar^2 \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} - \frac{Ze^2}{r}\right] f = \cancel{E} f$$

$\to$ E È SPARITA DALL'EQ.! MA K RIMANE ED È COLLEGATA AD E

$$f'' - 2k f' + \frac{2\mu Z e^2}{\hbar^2 r} f - \frac{l(l+1)}{r^2} f = 0$$

IN LINEA DI PRINCIPIO NON SAPPIAMO RISOLVERLA

SUPP CHE f SIA ESPANDIBILE IN SERIE

$$f(r) = r^s \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^i \qquad a_0 \neq 0$$

$\Rightarrow$ L'EQ. DI SCHR DIVENTA

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \left[(s+i)(s+i-1) r^{s+i-2} - 2k(s+i) r^{s+i-1} + \frac{2\mu Z e^2}{\hbar^2} r^{s+i-1} - l(l+1) r^{s+i-2}\right]$$

IL TERMINE CON $i=0$ LO METTO FUORI SEMPLIFICANDO

$$a_0\left[s(s-1) - l(l+1)\right] + \sum_{i=0}^{\infty}\left[(s+i+1)(s+i)a_{i+1} - 2k(s+i)a_i + \frac{2\mu Z e^2}{\hbar^2} a_i - l(l+1) a_{i+1}\right] = 0$$

$\Rightarrow$ INNANZITUTTO $s(s-1) = \ell(\ell+1) \longrightarrow s = -\ell$

$\longrightarrow s = \ell+1$

$s=-\ell$ NON È POSSIBILE XKÉ LA FUNZ D'ONDA DOVE ANNULLARSI NELL'ORIGINE E NON DIVERGERE

$\Rightarrow s = \ell+1 \Rightarrow u$ DEVE ANDARE A ZERO COME $r^{\ell+1}$

$\Rightarrow R(r)$ DEVE ANDARE A ZERO COME r^{ℓ}

FACCIAMO A ZERO IL II TERMINE

$$\boxed{Q_{i+1} = \frac{2K(\ell+i+1) - \frac{2\mu Z e^2}{\hbar^2}}{(i+\ell+2)(i+\ell+1) - \ell(\ell+1)} Q_i}$$

$\Rightarrow$ HO DOT LA FORMA DELLE FUNZ SOL, QUESTI COEFF CONVERGONO X i GRANDE?

X i GRANDE $Q_{i+1} \simeq \frac{2K}{i} Q_i \simeq \frac{(2K)^i}{i!} Q_0$

$$\sum \frac{Q_{i+1}}{i!} r^i (2K)^i \sim e^{+2Kr}$$

MA COSÌ ESPLODE X r GRANDE!! NON CONVERGE!

$\Rightarrow$ A UN CERTO PT DEVE ESSERE $Q_{i+1} = 0$

$\Rightarrow \exists\, \bar{i}$ TC $Q_{\bar{i}+1} = 0$

$\Rightarrow$ VOGLIO CHE LA NUMERATORE SI ANNULLI

$$\Rightarrow 2K \underbrace{(\ell + \bar{i} + 1)}_{=: n} = \frac{2\mu Z e^2}{\hbar^2} \Rightarrow K = \frac{\mu Z e^2}{\hbar^2 n}$$

$$\Rightarrow K^2 = \frac{2\mu |E|}{\hbar^2} = \frac{\mu^2 Z^2 e^4}{\hbar^4 n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar} \frac{1}{n^2}}$$

AUTOVALORI DELL'HAMILTONIANA X UN IDROGENOIDE

$$E = -c \frac{1}{2n^2}$$

QUINDI PER ESCO POSSIAMO AVERE STATI LEGATI CHE COMPIE

A $E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar} \frac{1}{n^2}$ VANNO A VAL DISCRETI

$\Rightarrow \varphi_{nlm}$ CON n NUM QUANTICO CHE DET ENERGIA

l NUM QUANTICO CHE DET AUTOVAL DI L^2

m NUM QUANTICO CHE DET AUTOVAL DI L_3

$\varphi_{nlm}(r,\theta,\varphi) \sim e^{-kr}$ CON $k = \underbrace{\frac{\mu e^2}{\hbar^2}}_{m^{-1}} \underbrace{\frac{Z}{n}}_{\text{NUM PURO}}$ DIMENSIONALMENTE È L'INVERSO DI UNA LUNGH

$\Rightarrow$ DEF $r_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ RAGGIO DI BOHR

$\Rightarrow \varphi_{nml}(r,\theta,\varphi) \sim e^{-r/r_B \, Z/n}$ LO STATO A EN + BASSA È PER $n=1$

$\Rightarrow$ RAGGIO $r = r_B$

r_B FISSA LA DISTANZA TIPICA CHE SCALA COME $\frac{1}{Z}$ AL CRESCERE DI Z

$$\varphi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = r^l (a_0 + \dots + a_{n-l} r^{n-l-1}) \, e^{-\frac{Z}{n}\frac{r}{r_B}} Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

ESPRESSIONE GENERALE X LA FUNZ D'ONDA

$P = a_0 + \dots + a_{n-l} r^{n-l-1}$ POLIN DI GR $n-l-1$ DATO DA LAGUERRE

$gr P = n-l-1$ SUGGERISCE INFO SUGLI ZERI DI φ_{nlm}

$\rightarrow$ STRETTAMENTE (X LA FORMA DI P) HA $n-l-1$ ZERI

$\Rightarrow$ FISSATO l E SAPENDO CHE LO STATO + BASSO È PER $n=1$

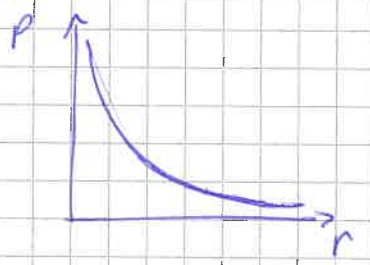
$\Rightarrow$ X AVERE LO STATO FOND (CHE SO NON AVERE ZERI)

DEVO AVERE $l=0$ $\quad \begin{cases} n-l-1=0 \\ n=1 \end{cases} \rightarrow l=0$

POTEVAMO IMMAGINARCELO

PER AVERE UNO STATO CON UN CERTO NUM ANG DEVO AVERE n ABBASTANZA ALTO, INFATTI $\forall$ STATO ECCITATO DELL'ENERGIA COMPARE UN CERTO NUM DI ZERI DI $\varphi \Rightarrow$ UN ORBITA l

$$R_{10}(r) = \left(\frac{Z}{r_B}\right)^{3/2} 2 e^{-\frac{Zr}{r_B}}$$ (NORMALIZZATO)



LA MASSIMA PROBAB X L'ELETTRONE È COLLASSATO NEL NUCLEO

→ ASSURDO!

$$n=2 \longrightarrow R_{20}(r) = \left(\frac{Z}{2r_B}\right)^{3/2}\left(2 - Z\frac{r}{r_B}\right) e^{-\frac{Zr}{2r_B}}$$

QUESTE AL QUADRATO SONO PROBAB 1D

ESSENDO L'ARMONICA SFERICA COST BASTA RUOTARE X OTTENERE LA PROBABILITÀ

LA QUANTITÀ CHE ENTRA NEL POLINOMIO È $n-l-1$

AVEVAMO DEF $n = \bar{i} + l + 1$

⇒ n DIP DA l ⇒ X UNO STATO DI ENERGIA POSSONO COMPARIRE DIVERSI l

QUESTA È DETTA DEGENERAZ ACCIDENTALE (MA NO È X NULLA ACCIDENTALE)

→ IN UN PROB A 2 CORPI C'È UN'ALTRA SIMM OLTRE ALLE ROTAZ: QUELLA ASSOCIATA AL VETTORE DI LENZ

IN TUTTI I PROB A SIMM CENTRALE C'È SIMM X ROTAZ 3D CIOÈ SO(3)

VEDREMO CHE X IL PROB A 2 CORPI C'È SIMM X SO(4)!

DEGENERAZIONE ASSOCIATA AL LIVELLO n-ESIMO:

$$g_n = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n\frac{(n-1)}{2} + n = n^2$$

IL LIVELLO n-ESIMO HA DEGENERAZ n^2

(IL PRIMO È NON DEGENERE X KE $n=1$)

$\boxed{n=1} \Rightarrow \boxed{l=0} \Rightarrow \boxed{m=0} \longrightarrow \varphi_{100}$

$\boxed{n=2} \longrightarrow \boxed{l=0} \longrightarrow \varphi_{200}$

$\boxed{l=1} \longrightarrow \varphi_{21-1}$

φ_{210}

φ_{211}

$\boxed{n=3} \longrightarrow \boxed{l=0} \longrightarrow \boxed{m=0}$

$\boxed{l=1} \longrightarrow \boxed{m=-1}, \boxed{m=0}, \boxed{m=1}$

$\boxed{l=2} \longrightarrow \boxed{m=-2}, \boxed{m=-1}, \boxed{m=0}, \boxed{m=1}, \boxed{m=2}$

9 STATI

ABBIAMO DUE CE ARMONICHE SFERICHE COME FUNZ ORTOGONALE DI gr l SOL DELL'EQ. DI LAPLACE IN x, y, z

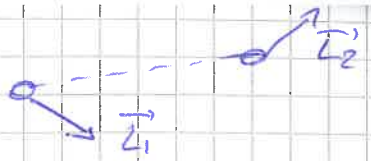
SE TRASF $x, y, z \longrightarrow -x, -y, -z \Rightarrow$ PRENDE UN FATTORE $(-1)^l$

$\longrightarrow$ PARITÀ ARMONICA SF

SICCOME LA PARITÀ COMMUTA CON H $\Rightarrow$

(?)

COMPOSIZIONE DEI MOMENTI ANGOLARI



SIST DI 2 PARTICELLE

VOGLIAMO UTILIZ UN INSIEME DI VAR COMPATIBILI X DESCRIVERE IL SIST

$L_1^2, L_{1z}, L_2^2, L_{2z}$

INFATTI $[L_{1i}, L_{2j}] = 0 \Rightarrow [L_1^2, L_{2z}] = 0$ ecc...

TUTTE COMMUTANO

$\Rightarrow$ POSSIAMO USARE UNA BASE IN CUI TUTTE SONO SIMULT DIAGONALI

IN QUESTA BASE $|l_1, m_1, l_2, m_2\rangle$ AUTOSTATO

SE FISSO l_1 O $l_2 \Rightarrow$ CI SONO $(2l_1+1)(2l_2+1)$ STATI INDIP

$\Rightarrow$ SI GENERA UNO SP DI DIM $(2l_1+1)(2l_2+1)$

DATI $\vec{L}_1$ ED $\vec{L}_2$ È BEN DEF $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ OVVERO $L_k = L_{1k} + L_{2k}$

OSS

$[L_z, L_1^2] = 0$ (SI PUÒ DIM ALGEBRICAM)

$\rightarrow$ C'È UN MODO GEOM: L_1^2 SCALARE, L_z VETTORE $\Rightarrow$ COMMUTAZIONE 0
(SE EFFETTUO UNA ROTAZ L_1^2 NON CAMBIA)

IDEM $[L_z, L^2] = 0$ È VERO $\forall$ COMPONENTE DI L

$\rightarrow [L_k, L_1^2] = [L_k, L_2^2] = 0 \quad \forall k$

$\Rightarrow [L^2, L_1^2] = [L^2, L_2^2] = 0$

$\Rightarrow L^2, L_1^2, L_2^2, L_z$ SONO PURE UN SIST DI OSS COMPATIBILI

CI CHIEDIAMO $[L_{1z}, L^2] \overset{?}{=} 0$

$L^2 = (\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2\vec{L}_1\vec{L}_2 = L_1^2 + L_2^2 + 2(L_{1x}L_{2x} + L_{1y}L_{2y} + L_{1z}L_{2z})$

COMMUTANO CON L_z

NON COMMUTANO CON L_z

$\Rightarrow$ AVENDO IL SIST L_1^2, L_2^2, L^2, L_z

$|l_1, l_2, l, m\rangle$ AUTOVETT SIMULTANEO

FISSATI l_1 ED l_2 STATO NELLO STESSO SP DI PRIMA CON UNA BASE DIVERSA

$L_z = L_{1z} + L_{2z} = m_1 + m_2$

$\hookrightarrow$ NELLA BASE $|l_1, m_1, l_2, m_2\rangle$

QUALI VALORI PUÒ RICOPRIRE?

SUP $m_1 = l_1$ SUP $m_2 = l_2$

$\Rightarrow$ MAX $L_z = l_1 + l_2$

$\Rightarrow |l, m = l_1 + l_2\rangle = |m_1 = l_1, m_2 = l_2\rangle$

QUAL'È IL POSSIBILE VAL DI l?

L'UNICO POSSIBILE È $l = l_1 + l_2$

SE POSSE + GRANDE $l = l_1 + l_2 + 1 \Rightarrow$ ANCHE m POTREBBE RICOPRIRE VAL PIÙ GRANDI

QUINDI

$|l = l_1 + l_2, m = l_1 + l_2\rangle = |m_1 = l_1, m_2 = l_2\rangle$

BASE 2 BASE 1

NUOVO STATO $L_z = l_1 + l_2 - 1$

OGNI PRIMA VALE $L_z = m_1 + m_2 \Rightarrow$ 2 POSSIB

1) $m_1 = l_1$ $m_2 = l_2 - 1$

2) $m_1 = l_1 - 1$ $m_2 = l_2$

$\Rightarrow |l = l_1 + l_2, m = l_1 + l_2 - 1\rangle \rightarrow |m_1 = l_1, m_2 = l_2 - 1\rangle$, $|m_1 = l_1 - 1, m_2 = l_2\rangle$

SECONDO ANCORA: $L_z = l_1 + l_2 - 2$ ecc...

ESEMPIO

$l_1 = 1, \; l_2 = 2 \Rightarrow l = 3$

m	3	2	1	0	-1	-2	-3
$m_1 + m_2$	1+2	1+1 0+2	1+0 0+1 -1+2	1-1 0+0 -1+1	-1+0 0-1 +1-2	-1-1 0-2	-1-2
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	$l=3$	$l=3$ $l=2$	$l=3$ $l=2$ $l=1$	$l=3$ $l=2$ $l=1$	$l=3$ $l=2$ $l=1$	$l=3$ $l=2$	$l=3$

7 STATI $l=3$

5 STATI $l=2$ $\longrightarrow$ 15 STATI POSSIBILI $= (2l_1+1)(2l_2+1)$

3 STATI $l=1$

$\Rightarrow$ QUANDO COMBINO I 2 MOMENTI ANGOLARI l_1, l_2

$l = |l_1 - l_2| \; \dots \; l_1 + l_2$

$$\underset{l_1}{\underline{1}} \otimes \underset{l_2}{\underline{2}} = \underline{1} \oplus \underline{2} \oplus \underline{3}$$

l NON È FISSATO UNA VOLTA FISSATI l_1 ED l_2 MA PRENDE DEI VALORI POSSIBILI

$\Rightarrow$ LO SP È LO STESSO ED UN WS SI DEVE POTER SCRIVERE COME SOMMA DIRETTA DEGLI ALTRI

$$|l_1, l_2, l, m\rangle = \sum_{m_1 m_2} C^{lm}_{l_1 m_1 l_2 m_2} |l_1 m_1 l_2 m_2\rangle$$

$\hookrightarrow$ COEFF DI CLEBSCH GORDAN

$\Rightarrow$ HO 2 BASI EQUIVALENTI

SIMMETRIA AGGIUNTIVA DELL'ATOMO DI IDROGENO

NEL LIVELLO n-ESIMO APPARE UNA DEGENERAZIONE DI n^2 DOVUTA ACCIDENTALMENTE (LA CASSA DOVUTA CONSERVAZIONE DEL VETTORE DI LENZ)

RAPPR DEL PROBL A 2 CORPI A $E<0$ → TRAIETTORIA ELLITTICA (REPLERO)

$$E = \vec{p}^{\,2}/2m - \frac{\alpha}{r} = p_r^2/2m + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \quad \text{IN MC}$$

TRAIETTORIA PER $E<0$? COMUNQUE UTILIZZO LE LEGGI DI CONSERVAZIONE

$$p_r^2 = (m\dot{r})^2 \Rightarrow E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}$$

CON $V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$

CONSERVAZ L: $\varphi = \varphi(r)$

$$L = mr^2\dot{\varphi} = mr^2\frac{d\varphi}{dr}\dot{r} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \frac{L}{mr^2\dot{r}}$$

$$\Rightarrow \varphi = L\int_{r_{min}}^{r} dr \frac{1}{r^2\sqrt{2m(E - V_{eff}(r))}}$$

$$\rho = \frac{1}{r} \quad d\rho = -\frac{1}{r^2}dr$$

$$= L\int_{1/r}^{1/r_{min}} \frac{d\rho}{\sqrt{2m(E - \alpha\rho) - L^2\rho^2}}$$

$$\rho = \bar{\rho} + x = -\frac{m\alpha}{L} + x$$

$$= L\int \frac{dx}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2} - L^2x^2}}$$

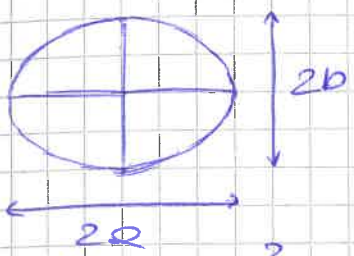
$$\Rightarrow \varphi = \arcsen \frac{\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L}}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2\alpha^2}{L^4}}}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi \sqrt{\frac{2mE}{L^2} - \frac{m^2\alpha^2}{L^4}} = \frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{L^2}{m\alpha}\right)\frac{1}{r} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}\cos\varphi$$ EQ. TRAIETTORIA

$$\frac{P}{r} = 1 + \varepsilon\cos\varphi \quad \text{con } P = \frac{L^2}{m\alpha} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} < 1$$

ELLISSE $\quad r_{min} = \frac{P}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon)$



$$r_{max} = \frac{P}{1-\varepsilon} = a(1+\varepsilon)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow a = \frac{P}{1-\varepsilon^2} \Rightarrow b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

$$a = \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{\frac{2|E|L^2}{m\alpha^2}} = \frac{\alpha}{2|E|} \qquad b = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$$

ABBIAMO OTTENUTO LA TRAIETTORIA, CHE ~~SBATTA~~ PERÒ !

PROVIAMO AD ADOPERARE LA CONSERVAZ. DEL VETTORE DI LENZ

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}$$

$$\vec{A} = \alpha\frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{m}\vec{L}\wedge\vec{p}$$ VETT. DI LENZ $\longrightarrow$ STA NEL PIANO DELL'ORBITA

SE È CONSERVATO $\Rightarrow \{H, A_j\} = 0 \ \forall j$ (VERIFICO PERÒ CHE LO È)

SE È CONSERVATA FACCIAMO $\vec{r}\cdot\vec{A}$

$$\vec{r}\cdot\vec{A} = rA\cos\varphi = \alpha r - \frac{\vec{L}\cdot(\vec{r}\wedge\vec{p})}{m} = \alpha r - \frac{L^2}{m}$$

$$\longrightarrow rA\cos\varphi = \alpha r - \frac{L^2}{m} \Rightarrow \boxed{-\frac{A}{\alpha}\cos\varphi + 1 = \frac{L^2}{m\alpha}\frac{1}{r}}$$ NON È ALTRO CHE L'EQ. DELLA TRAIETTORIA

con $\boxed{P = \frac{L^2}{m\alpha}}$ $\boxed{\varepsilon = A/\alpha}$

$$A^2 = \alpha^2 + \frac{L^2 p^2}{m^2} - \frac{2\alpha L^2}{mr} = \alpha^2 + \frac{2L^2 E}{m}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\alpha^2 - \frac{2L^2 E}{m}} \Rightarrow \frac{A}{\alpha} = \varepsilon$$ IN ACCORDO CON LA FORMULA DI PRIMA

LA TRAIETTORIA SI OTTIENE + FACILMENTE SFRUTTANDO LA CONSERVAZ. DI $\vec{A}$

MA $\vec{A}$ È CONSERVATO? VERIFICHIAMOLO

X SEMPLICITÀ PONIAMO $m = \alpha = 1$

$$\rightarrow H = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{r}$$

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r} + \vec{L} \wedge \vec{p} = \frac{\vec{r}}{r} + (\vec{r} \wedge \vec{p}) \wedge \vec{p} = \frac{\vec{r}}{r} + (\vec{r} \cdot \vec{p})\vec{p} - \vec{p}^2 \vec{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_i = \frac{r_i}{r} + r_k (p_k p_i - \delta_{ik} p^2)}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial r_k} = \frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{r_i r_k}{r^3} = \frac{1}{r^3}(\delta_{ik} r^2 - r_i r_k) + (p_k p_i - \delta_{ik} p^2)$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_k} = \delta_{ik} \vec{r} \cdot \vec{p} + p_i r_k - 2 p_k r_i$$

$$\{H, A_i\} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial r_k} \frac{\partial A_i}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial A_i}{\partial r_k} \right)$$

$$= \frac{r_k}{r^3} \left(\cancel{\delta_{ik} \vec{r} \vec{p}} + \cancel{p_i r_k} - \cancel{2 p_k r_i} \right) - p_k \frac{1}{r^3} \left(\cancel{\delta_{ik} r^2} - \cancel{r_i r_k} \right) + \dots$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \{H, A_i\} = \{H, L_i\} = 0$$ LEGGI DI CONSERVAZIONE

SE A_i E L_i COMMUTANO $\Rightarrow \{A_i, L_j\} = ?$

X IDENTITÀ DI JACOBI È SICURAM. COMMUTANO

SAPPIAMO CHE $\{L_i, L_j\} = i \varepsilon_{ijk} L_k$

E $\{A^2, L_j\} = 0$ X KÉ A^2 SCALARE $\Rightarrow$ INV X ROTAZ. E L_j GEN. DI ROTAZ.

INVECE I VETT. COMMUTANO CON $\{V_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} V_k \quad \forall \underline{V}$

$$\Rightarrow \{A_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k$$

UN'ALTRA COSTANTE DEL MOTO È

$$\{A_i, A_j\} = \sum_k \left[\frac{1}{r^3}(\delta_{ik} r^2 - r_i r_k) + (p_i p_k - \delta_{ik} p^2)\right]\left[\delta_{jk} \vec{r}\vec{p} - p_j r_k - 2 p_k r_j\right] - (i \longleftrightarrow j)$$

$$= \frac{1}{r^3}\left(\cancel{\delta_{ij} r^2 \vec{r}\vec{p}} - \cancel{r^2 p_j r_i} - 2 p_i r_j r^2 - \cancel{r_i p_j \vec{r}\vec{p}} + \cancel{r_i p_j r^2} - \cancel{2 r_i p_j \vec{r}\vec{p}}\right)$$

$$+ \left(\cancel{p_i p_j} - \cancel{\delta_{ij} p^2}\right)\vec{r}\vec{p} - \left(\cancel{p_i p_j \vec{r}\vec{p}} - p^2 p_j r_i\right) - (i \longleftrightarrow j)$$

$$= -\frac{2}{r}(p_i r_j - p_j r_i) - p^2(p_j r_i - p_i r_j)$$

$$= +\left(p^2 - \frac{2}{r}\right)(p_i r_j - p_j r_i) = -2H\,\varepsilon_{ijk} L_k$$

(CI SONO DEI SEGNI SBAGLIATI MA IL RISULTATO È GIUSTO)

$$\Rightarrow \{A_i, A_j\} = -2E\,\varepsilon_{ijk} L_k$$

INTRODUCIAMO QUINDI UN NUOVO VETT $\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\sqrt{-2E}}$ (LO NORMALIZZO)

ABBIAMO CHE

$$\{H, U_i\} = \{H, L_i\} = 0$$

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$\{U_i, U_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$\{U_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} U_k$$

L'ALGEBRA DELLE COSTANTI DEL MOTO ORA È QUESTA

INTRODUCO $\vec{J}_1 = \frac{1}{2}(\vec{L}+\vec{U})$ $\vec{J}_2 = \frac{1}{2}(\vec{L}-\vec{U})$

COMB SIMMETRICA COMB ANTISIMM

ABBIAMO CHE $\{H, \vec{J}_1\} = \{H, \vec{J}_2\} = 0$

$$\{J_{1i}, J_{1j}\} = \frac{1}{4}\{L_i + U_i, L_j + U_j\}$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}[L_k + U_k + U_k + L_k] = \varepsilon_{ijk} J_{1k}$$

LE COMP DI $\vec{J}_1$ SODDISFANO LE STESSE REGOLE DI COMMUTAZ DI $\vec{L}$

$$\{J_{2i}, J_{2j}\} = \frac{1}{4}\{L_i - U_i, L_j - U_j\} = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}[L_k + L_k - U_k - U_k]$$

$$= \varepsilon_{ijk} J_{2k}$$

$\Rightarrow$ IDEM PER J_2

$$\{J_{1i}, J_{2j}\} = \frac{1}{4}\{L_i + U_i, L_j - U_j\} = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}(L_k - L_k - U_k + U_k)$$

$= 0 \Rightarrow J_1$ E J_2 COMMUTANO

INOLTRE RICORDO $\vec{A}$ STANDO NEL PIANO DELL'ORBITA $\vec{L}$ È $\perp$

$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L}\cdot\vec{U} = 0$

$$\Rightarrow J_1^2 = J_2^2 = J^2 = \frac{1}{4}(L^2 + U^2) = \frac{1}{4}\left(L^2 - \frac{A^2}{2E}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(L^2 - \frac{1}{2E} - L^2\right) = -\frac{1}{8E}$$

$$\Rightarrow E = \frac{-1}{8J^2} = -\frac{1}{2(2J)^2}$$

CIOÈ RIPETENDO CHE CHIAMANDO LA SOMM DIRETTA AD $\vec{A}$ E $\vec{L}$ LE REGOLE DIVENTANO + SEMPLICI INTRODUCENDO I MOMENTI ANG SIMM E ANTISIMM $\vec{J}_1$ E $\vec{J}_2$ CON MODULO UGUALE

$\longrightarrow$ QUESTA È TUTTA FISICA CLASSICA

OSS I

AVENDO STUDIATO LA QUANTIZZAZ. DI UN ATOMO DI IDROGENO
EN AVEVA LA FORMA $E = -\frac{1}{2(2n)^2} c$

VUOL DIRE CHE LA SPIEGAZ. STA NELLA SIMMETRIA CHE $\vec{L}$ +
ESISTE DI QUELLA X ROTAZ?

OSS II

NEL OSCILL. ARMONICO ABBIAMO VISTO CHE ω DI COSTANTE E MASSA
CON QUALE VAN ABBIAMO SCRITTO LE REGOLE DI COMMUTAZ.
IN TEORIA TC ABBIAMO DOT. LO SPETTRO SENZA EQ. DI SCHR
→ AVEVALO PUNTATO 2 STRADE: ALGEBRICA
ANALITICA

VEDIAMO COME LA DISCUSSIONE SU $\vec{A}$ IN QTC CI AIUTERÀ
LA STRADA ALGEBRICA E DISCUTIAMO LA VERA STRUTTURA DELL'ATOMO
DI IDROGENO

ATOMO DI IDROGENO: STRADA ALGEBRICA (SIMMETRICO)

$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r} + \vec{L} \wedge \vec{p}$ → C'È UN AMBIGUITÀ X LA QM: PROB DI ORDINAMENTO

$\vec{L} \wedge \vec{p} \neq -\vec{p} \wedge \vec{L}$

LO RISOLVIAMO PRENDENDO $\frac{1}{2}(\vec{L} \wedge \vec{p} - \vec{p} \wedge \vec{L})$

ABBIAMO VISTO CHE SE NON CI SONO PROB DI ORDINAMENTO

$\Rightarrow [\ ,\ ] = +i\hbar \{\ ,\ \}$

$\Rightarrow$ ABBIAMO VISTO

$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{1k}$

$[J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{2k}$

$[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = [\vec{J}_1, H] = [\vec{J}_2, H] = 0$

QUAL'È LA DIF RISPETTO AL CASO CLASSICO?

$J_1^2 = J_2^2 = \hat{J}^2$ HA AUTOVAL $j(j+1)$

RICORDIAMO CHE $\vec{J}_1 = \frac{\vec{L} + \vec{U}}{2}$ $\vec{J}_2 = \frac{\vec{L} - \vec{U}}{2}$

CON $\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\sqrt{-2E}}$

RIMANE ANCORA VERO CHE $\vec{L} \cdot \vec{U} = 0 \Rightarrow J_1^2 = J_2^2$

VEDIAMO CHE $\hat{J}^2 = \frac{1}{4}(\hat{L}^2 + \hat{U}^2) = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2E}\right) = j(j+1)$

$\Rightarrow$ RICAVO CHE $\frac{1}{2E} = -4j(j+1) - 1 = -(2j+1)^2$

$\Rightarrow$ IDENTIF $2j+1 = n$ NUM QUANTICO

$\Rightarrow -(2j+1)^2 = -n^2$

$\Rightarrow \boxed{E = -\frac{1}{2n^2}}$

SENZA RISOLVERE L'EQ. DI SCHR HA SEMPLICEMENTE SFRUTTANDO LA CONSERVAZ DI $\vec{A}$ HO RICAVATO LO SPETTRO DI H

ADESSO POSSO SFRUTTARE IL TEOR DI DEGENERAZ CON $j_1^2, j_2^2, j_{12}, j_{22}$

j_{12} E j_{22} NON ENTRANO NELL'H $\Rightarrow$ C'È DEGEN

DEGENERAZIONE: $(2j_1+1)(2j_1+1) = (2j+1)^2 = n^2$

COME AVEVAMO VISTO

QUESTA DEGENERAZIONE RIFLETTE IL FATTO CHE ABBIAMO 2 MOMENTI ANGOLARI

DOVUTI ALLA COMB SIMM E ANTISIMM DI $\vec{L}$ CON $\vec{A}$ NORMALIZZATO

$\vec{L} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ x DOP $\vec{j}_1$ E $\vec{j}_2$

x REGOLE DI COMPOSIZ MOM ANG $l = 0, \dots, j_1 + j_2 = n-1$

RITROVIAMO LA RELAZ TRA IL NUM QUANTICO ORBITALE l E QUELLO PRINCIPALE n

NON ABBIAMO ANCORA DIM CHE $\hat{j}^2 = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{\alpha^2}{2E}\right)$

DIM

$$A^2 = \underset{\text{MOD } \vec{r}/r}{1} + \frac{1}{4}\left[\vec{L}\wedge\vec{p} - \vec{p}\wedge\vec{L}\right]^2 + \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\overbrace{\frac{\vec{r}}{r}}^{\text{II}}(\vec{L}\wedge\vec{p})}_{\text{I}} - \underbrace{\overbrace{\vec{p}\wedge\vec{L}}^{\text{II}}}_{\text{I}} + \underbrace{(\vec{L}\wedge\vec{p})}_{\text{III}} - \underbrace{\overbrace{(\vec{p}\wedge\vec{L})\frac{\vec{r}}{r}}^{\text{IV}}}_{\text{III}}\Big]$$

I° PEZZO: $\frac{\vec{r}}{r}\,\vec{L}\wedge\vec{p} = \varepsilon_{ijk}\frac{r_i}{r}L_j p_k = \varepsilon_{ijk}L_j\frac{r_i}{r}p_k + \varepsilon_{ijk}\left[\frac{r_i}{r}, L_j\right]p_k$

$$= -\frac{L^2}{r} + i\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijs}\,\frac{r_s}{r}\,p_k = -\frac{L^2}{r} + \frac{2}{r}(\vec{r}\cdot\vec{p})$$

r SCALARE NO PROB

II PEZZO $-\vec{p}\wedge\vec{L}\,\frac{\vec{r}}{r} = -\varepsilon_{ijk}p_j L_k\frac{r_i}{r} = -\varepsilon_{ijk}p_j\frac{r_i}{r}L_k - \varepsilon_{ijk}p_j\left[L_k, \frac{r_i}{r}\right]$

$$= -\frac{L^2}{r} - i\,\varepsilon_{ijk}\,p_k\,\varepsilon_{kis}\,\frac{r_s}{r} = -\frac{L^2}{r} - 2i(\vec{p}\cdot\vec{r})\frac{1}{r}$$

III PEZZO $-\frac{\vec{r}}{r}\,\vec{p}\wedge\vec{L} = -\varepsilon_{ijk}\frac{r_i}{r}p_j L_k = -\frac{L^2}{r}$

IV PEZZO $\vec{L}\wedge\vec{p}\,\frac{\vec{r}}{r} = \varepsilon_{ijk}L_j p_k\frac{r_i}{r} = -\frac{L^2}{r}$

$$\Rightarrow -4\frac{L^2}{r} + 2i\left[\frac{\vec r}{r}, \vec p\right] = -4\frac{L^2}{r} - 2i\frac{\partial}{\partial r_k}\frac{r_k}{r}$$

$$= -4\frac{L^2}{r} - 2\sum_k\left(\frac{1}{r} - \frac{r_k^2}{r^3}\right) = -4(L^2+1)\frac{1}{r}$$

QUANTO IL TERMINE $[(\vec L\wedge\vec p) - (\vec p\wedge\vec L)]^2$

- $(\vec L\wedge\vec p)^2 = \varepsilon_{ijk} L_j p_k \varepsilon_{ilm} L_l p_m = L_j p_k L_j p_k - L_j p_k L_k p_j$

$$= L^2p^2 + L_j[p_k, L_j]p_k$$

$$= L^2p^2 + i L_j \cancel{\varepsilon_{kjs}} p_s p_k = L^2p^2$$

ε simmetrica

- $-(\vec L\wedge\vec p)(\vec p\wedge\vec L) = -L_i p_j p_i L_j + L_i p_j^2 L_i = L^2p^2$
- $+(\vec p\wedge\vec L)(\vec p\wedge\vec L) = p_i L_j p_i L_j - \cancel{p_i L_j p_j} L_i = L^2p^2$
- $-(\vec p\wedge\vec L)(\vec L\wedge\vec p) = -p_i L_j L_i p_j + p_i L_j L_j p_i$

$$= -i p_i L_j \varepsilon_{ijk} p_k + p_i L_j p_i L_j + i\varepsilon_{jik} L_j p_k$$

$$= p^2L^2 + i p_i \varepsilon_{jik} p_k L_j + 2\varepsilon_{ijs} p_s \varepsilon_{ijk} p_k$$

$$= p^2L^2 + 4p^2$$

$\Rightarrow$ INFINE $A^2 = 1 + (L^2+1)p^2 - \frac{1}{r}2(L^2+1)$

$$= 1 + L^2 2E + 2E$$

$$\Rightarrow U^2 = \frac{A^2}{-2E} = \frac{-1}{2E} - L^2 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(L^2+U^2) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2E} - 1\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2E} + 1\right)$$

$\blacksquare$

CHE STRUTTURA EMERGE DA QUESTA ANALISI?

ABBIAMO UNICAMENTE UTILIZZ. UNA STRUTTURA ALG. LEGATA AI COMMUTATORI

→ ABBIAMO USATO 2 ALGEBRE CON STRUTTURA TIPICA DI $\vec{L}$ E $\vec{S}$:

ABBIAMO USATO LE 2 ALGEBRE DI $SU(2)$ SU $\vec{J}_1$ E $\vec{J}_2$

$SU(2) \otimes SU(2)$

$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k$

ABBIAMO VISTO COME L'ALGEBRA DI $SU(2)$ COINCIDE CON QUELLA DI $SO(3)$

$SU(2) \simeq SO(3)$

→ LE 3 DIM STANNO NEL TENSORE ε_{ijk}

VEDIAMO COME LA SITUAZ. DELL'ATOMO DI IDROGENO NON È $SO(3)$ MA $SO(4)$

⇒ DOVREMO CONOSCERE L'ALGEBRA DI LIE × $SO(4)$ O + IN GEN × $SO(n)$

ABBIAMO VISTO CHE LA SIMM DIPENDE DALL'ASSE DI ROTAZ (QUELLO DEL MOM ANG) MA CHE IN GEN È MEGLIO PENSARE AL PIANO DI ROTAZ

ED ABBIAMO INTRODOTTO X QUESTO SCOPO IL TENSORE ANTISIMM DUALE DEL MOMENTO

$J^*_{ij} = \varepsilon_{ijk} J_k$ TENSORE ANTISIMM DI RANGO 2

REGOLE DI COMMUTAZIONE DI J ⇒ REGOLE DI COMMUTAZ. X IL DUALE

$[J_{ij}, J_{mn}] = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnr}[J_k, J_r] = i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnr}\varepsilon_{krs}J_s =$

$= i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnr}J_{kr}$

$= i(\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kr} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kr} - \delta_{im}\delta_{jr}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{ir}\delta_{km} +$
$+ \delta_{in}\delta_{jr}\delta_{km} + \delta_{ir}\delta_{jm}\delta_{kn})J_{kr}$

RICORDIAMO CHE J_{kr} ANTISIMM ⇒ I δ_{kr} NON CONTRIB.

$= i(\delta_{in}J_{mj} + \delta_{jm}J_{ni} - \delta_{im}J_{nj} - \delta_{jn}J_{mi})$

IN QUESTA EXPR. È RIFLESSO IL FATTO CHE GLI INDICI SONO 3, INFATTI QUESTE SONO LE REGOLE DI COMMUTAZ. DI $SO(n)$

x VEDERE CHE LE REGOLE DI COMMUTAZ. ~~SCRITTE~~ A L'INIZIO SONO QUESTE IN SO(4)

INTRODUCIAMO IL TENSORE DI RANGO 4 $J_{\mu\nu}$

DEF $J_{i0} = U_i$

$$J_{ij} \text{ TC } \frac{1}{2}\varepsilon_{0kij} J_{ij} = L_k$$

POSSIAMO VERIF. CHE LE REGOLE DI COMMUTAZ. DI $J_{\mu\nu}$ INDOTTE DA L E U COINCIDONO CON QUELLE DI SO(4)

- $[J_{i0}, J_{j0}] = i J_{ij}$ → REGOLE DI SO(4)

$$i J_{ij} = i\varepsilon_{0ijk} L_k = i\varepsilon_{ijk} L_k = [U_i, U_j]$$

- $\frac{1}{2}\varepsilon_{0irk}[J^{rk}, J^{i0}] = \frac{i}{2}\varepsilon_{0rk}(\delta^{rj}J^{k0} - \delta^{kj}J^{r0})$

$$= \frac{i}{2}(\varepsilon_{0ijk}J^{k0} - \varepsilon_{0irj}J^{r0})$$

$$= i\varepsilon_{0ijk}J^{k0} = i\varepsilon_{ijk}U_k = [L_i, U_j]$$

- $\frac{1}{4}\varepsilon_{0rs}\varepsilon_{0jmn}[J^{rs}, J^{mn}] = i J^{ij} = i\varepsilon_{ijk}L_k = [L_i, L_j]$

⇒ LE REGOLE DI COMMUTAZ TRA L E U POSSONO ESSERE SCRITTE CON REGOLE DI COMMUTAZ TRA GLI TENSORIALI E SPAZIALI DI $J_{\mu\nu}$

⇒ SOMMA SO(4)

⇒ $SU(2) \otimes SU(2) = SO(4)$

(LE ALGEBRE DI LIE SONO UGUALI)

ABBIAMO VISTO CHE LO STATO DELL'ATOMO DI IDROGENO È $|n,l,m\rangle$

CON QUALE STRATEGIA POSSO CALCOLARE IL VALORE DI ASPETTAZ DI r^k?

$\langle n,l,m|r^k|n,l,m\rangle$

IL PROBL È PARENTE DEL PROBL 1D CON $H = p^2/2m + V(x)$

IN CUI SUPPONGO DI CONOSCERE LO SPETTRO DEL SISTT E VALUTARE

CONSTO $\langle E|x^k|E\rangle$ CON $x \in \mathbb{R}^+$

SE $V(x) = \lambda x^k \Rightarrow$ IL TEOR DEL VIRIALE DICE CHE

$$\begin{cases} k\langle E|V|E\rangle = 2\langle E|T|E\rangle \\ \langle E|V|E\rangle + \langle E|T|E\rangle = E \end{cases}$$

VOGLIAMO CALCOLARE IL VAL DI ASPETTAZ DI UNA FUNZ SOLO DELLA

POSIZ $\Rightarrow$ NON CONTA CONOSCERE TUTTA $\varphi(x)$ MA SOLO $|\varphi(x)|^2$

XKÉ $\langle\varphi|f(x)|\varphi\rangle = \int dx\, f(x)\,|\varphi(x)|^2$

φ È DET DA $H|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$

O IN RS $-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' = [E - V(x)]\varphi(x)$

SE φ REALE $\Rightarrow$ LA DISTRIB SARÀ $\rho(x) = \varphi^2(x)$

ANCHE QUESTA SODDISFA UN EQ. DIFF

$$\rho'(x) = 2\varphi'\varphi \longrightarrow \rho''(x) = 2\varphi''\varphi + 2(\varphi')^2$$

MA $\varphi''(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\varphi$

$$\Rightarrow \rho'' = -\frac{4m}{\hbar^2}[E - V(x)]\rho + 2(\varphi')^2$$

$$\rho''' = \frac{4m}{\hbar^2}V'(x)\rho - \frac{4m}{\hbar^2}[E - V(x)]\rho' + 4\varphi'\varphi''$$

$$= \frac{4m}{\hbar^2}V'\rho - \frac{4m}{\hbar^2}[E - V(x)]\rho' - \frac{8m}{\hbar^2}[E - V(x)]\overbrace{\varphi'\varphi}^{\rho'/2}$$

$$\Rightarrow \rho''' = \frac{4m}{\hbar^2}V'(x)\rho - \frac{8m}{\hbar^2}[E - V(x)]\rho'$$

$$\rightarrow \langle x^k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^k \rho(x)$$

$$① \rightarrow \int dx\, x^k \rho''(x) = \frac{4m}{\hbar^2}\int dx\, x^k V'\rho - \frac{8m}{\hbar^2}\int dx\, x^k (E-V)\rho'$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{8m}\int dx\, x^k \rho''(x) = \frac{1}{2}\int dx\, x^k V'\rho - \int dx\, x^k (E-V)\rho'$$

φ DEVE ESSERE AL QUADRATO INTEGR. $\Rightarrow \rho \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ INTEG. X PARTI

$$② \rightarrow \int dx\, x^k \rho''(x) = -k\int dx\, x^{k-1}\rho' = +k(k-1)\int dx\, x^{k-2}\rho$$

$$= -k(k-1)(k-2)\int dx\, x^{k-3}\rho$$

$$① + ② \rightarrow -\frac{\hbar^2}{8m}k(k-1)(k-2)\langle x^{k-3}\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\langle x^k V'\rangle + k\langle (E-V)x^{k-1}\rangle - \langle x^k V'\rangle$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{8m}k(k-1)(k-2)\langle x^{k-3}\rangle = \frac{1}{2}\langle x^k V'\rangle - k\langle (E-V)x^{k-1}\rangle$$

1° OSS:

$\boxed{k=0} \rightarrow \langle V'\rangle = 0$ FORZA MEDIA SUL SIST. NULLA

$\boxed{k=1} \rightarrow \frac{1}{2}\langle x V'\rangle = k\langle E-V\rangle$ TEOR. DEL VIRIALE

NB PER CALCOLARE $\langle |r^k| \rangle$ ANDREBBE DA 0 A ∞

$\longrightarrow$ POTREBBERO ESSERCI EFFETTI DI BORDO

OSS $\rho(0) = \varphi^2(0) = 0$

$$\rho'(0) = 2\varphi'(0)\underbrace{\varphi(0)}_{0} = 0$$

$$\rho''(0) = 2\underbrace{\varphi''(0)}_{0}\underbrace{\varphi(0)}_{0} + 2(\varphi'(0))^2 = 2(\varphi'(0))^2$$

CONTRIBUTO CHE VIENE DAL BORDO!

PRENDIAMO IL CASO $\boxed{k=0}$

$$-\frac{\hbar^2}{8m}\int_0^{+\infty} dx\, \rho''' = -\frac{\hbar^2}{2m}[\varphi'(0)]^2 = \langle V' \rangle$$

ADESSO IL VALOR MEDIO DELLA FORZA È $\neq 0$

XKÉ C'È UN BORDO CHE IMPEDISCE DI ANDARE AI NEGATIVI

CONSIDERIAMO IL CASO DELL'ATOMO DI IDROGENO

$$V = \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} - \frac{1}{r} \qquad (e = m = \hbar = 1)$$

$$\Rightarrow V' = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^3} + \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{1}{8}k(k-1)(k-2)\langle r^{k-3}\rangle = -\frac{\ell(\ell+1)}{2}\langle r^{k-3}\rangle + \frac{1}{2}\langle r^{k-2}\rangle +$$

$$+ k\left[+\frac{\ell(\ell+1)}{2}\langle r^{k-3}\rangle - \langle r^{k-2}\rangle - E\langle r^{k-1}\rangle\right]$$

$$\boxed{\left[\frac{1}{8}k(k-2) - \frac{1}{2}\ell(\ell+1)\right](k-1)\langle r^{k-3}\rangle + \left(k - \frac{1}{2}\right)\langle r^{k-2}\rangle + Ek\langle r^{k-1}\rangle = 0 \quad (*)}$$

SE $\boxed{K=1}$

$$\frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{r}\right\rangle + E = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{1}{r}\right\rangle = -2E = \frac{1}{n^2}$$

QUESTO MOSTRA COME NELLO STATO FONDO ($n=1$) IN UNITÀ NATURALI

($e = \hbar = m = 1 \Rightarrow r_B = 1$) $\langle r\rangle = 1 = r_B$

SE $\boxed{K=2}$

$$-\frac{l(l+1)}{2}\left\langle \frac{1}{r}\right\rangle + \frac{3}{2} + 2E\langle r\rangle = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{l(l+1)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{3}{2} - \frac{\langle r\rangle}{n^2} = 0$$

$$\Rightarrow \langle r\rangle = \frac{3n^2 - l(l+1)}{2}$$ (IN UNITÀ TC $r_B = 1$)

MENTRE $\left\langle \frac{1}{r}\right\rangle$ DIPENDE ESCLUSIVAMENTE DA E E NON DA l

(XKÉ ENTRA NEL POTENZIALE)

IL VALOR MEDIO DI r DIPENDE DA l

SE $\boxed{K=3}$

$$\left[\frac{3}{2} - \frac{l(l+1)}{2}\right]2 + \frac{5}{2}\langle r\rangle + 3E\langle r^2\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle r^2\rangle = \frac{n^2}{2}\left[5n^2 + 1 - 3l(l+1)\right]$$

E COSÌ VIA, POSSO TROVARE TUTTI GLI r^K CON K POSITIVI

$\rightarrow$ RESTA IL PROBL DI TROVARE GLI r^K CON K NEGATIVI

X CALCOLARE $\langle 1/r^2\rangle$ USERÒ UN ALTRO LEMMA

LEMMA

SUPP IL AVERE UN AUTOSTATO DI H

SUPP CHE H DIPENDA DA UN PARAMETRO $\lambda \to H(\lambda)$

$$\to H(\lambda)|\mathcal{E}(\lambda)\rangle = \mathcal{E}(\lambda)|\mathcal{E}(\lambda)\rangle$$

$$\Rightarrow \langle \mathcal{E}(\lambda)| \frac{\partial H}{\partial \lambda} |\mathcal{E}(\lambda)\rangle = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda}(\lambda)$$

DIM

$$[H(\lambda) - \mathcal{E}(\lambda)]\,|\mathcal{E}(\lambda)\rangle = 0$$

DERIV RISP λ

$$\left[\frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda}(\lambda)\right]|\mathcal{E}(\lambda)\rangle + [H - \mathcal{E}]\frac{\partial}{\partial \lambda}|\mathcal{E}(\lambda)\rangle = 0$$

MOLTIP A SX $\langle \mathcal{E}(\lambda)|$

XKÉ AUTOSTATO DI H $\Rightarrow \mathcal{E} - \mathcal{E}$

$$\langle \mathcal{E}(\lambda)| \frac{\partial H}{\partial \lambda} |\mathcal{E}(\lambda)\rangle - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda} + 0 = 0$$

$\blacksquare$

CONSIDERIAMO ADESSO COME PARAMETRO ℓ

$$H(\ell) = p^2/2 + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} - \frac{1}{r}$$

$$\mathcal{E}(\ell) = \frac{1}{2(\bar{i} + \ell + 1)^2} \quad \text{(SOSTITUENDO DEF } n\text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \ell} = \frac{1}{(\bar{i} + \ell + 1)^3} = \frac{1}{n^3} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \ell} \right\rangle = \frac{2\ell + 1}{2}\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{n^3(\ell + 1/2)}$$

ADESSO PRENDENDO $\otimes$ PER $\boxed{R = 0}$

$$\frac{\ell(\ell+1)}{2}\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \frac{1}{\ell(\ell+1)} = \frac{1}{n^3(\ell + \frac{1}{2})\,\ell(\ell+1)}$$

NON È BEN DEF X $\ell = 0$ MA QUESTO XKÉ LA FUNZ D'ONDA VA NELL'ORIGINE COME r^ℓ

$\Rightarrow$ affinché $\langle r^{-k} \rangle$ siano ben def c'è una condiz di convergenza dell'integrale

$\rightarrow$ $\langle r^{-k} \rangle$ è ben def solo se $k < 2l+3$

<u>RECAP</u>

quindi fissato E non importa la q

prendiamo la misura ρ e ricaviamo l'eq. ricorsiva

[...]

ESERCITAZIONE

PROP MOM ANG

$\vec{L} = \vec{q} \wedge \vec{p}$

$[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k$

$|l,m\rangle$ TC $L^2 |l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l,m\rangle$ con $-l \le m \le l$

$L_z |l,m\rangle = \hbar m |l,m\rangle$

8.1) PARTIC 3D → MOSTRARE CHE GLI STATI LA CUI FUNZ D'ONDA DIP SOLO DA r $|S\rangle \xrightarrow{RS} f(r)$ SONO AUTOFUNZ DI TUTTE LE COMP L_k

$\vec{L} \longrightarrow -i\hbar \vec{x} \wedge \vec{\nabla}$

$\vec{L} |S\rangle \longrightarrow -i\hbar \vec{x} \wedge \vec{\nabla} f(r)$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(r) = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial r}$ $\qquad r = \left(\sum x_j^2\right)^{1/2}$

$= \frac{2x_i}{2\sqrt{\sum x_j}} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{x_i}{r} \frac{\partial f}{\partial r}$

$\Rightarrow \vec{\nabla} f = \frac{\vec{x}}{r} \frac{\partial f}{\partial r}$ $\Rightarrow$ IL PROD VETT È NULLO

$\Rightarrow |S\rangle$ AUTOSTATO DI L_k $\forall k$ CON AUTOVAL 0

b) DEF GLI STATI $|P_i\rangle = q_i |S\rangle$

$[L_i, q_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} q_k$

$L_i |P_i\rangle = L_i q_i |S\rangle \underset{i=j \Rightarrow \text{COMMUTA}}{=} q_i \overbrace{L_i |S\rangle}^{0|S\rangle} = 0$

SI PUÒ INTUIRE? CONSID $i=3$ $\quad L_3 |P_3\rangle$

$P_3 = z f(r)$ NON DIP DA x E y QD L_3 RUOTA ATTORNO A z

$\Rightarrow$ INVARIANTE $\Rightarrow$ COMMUTANO

c) $\sum_i [L_i, [L_i, q_j]] = ?$

DOMANDA CHE $L^2|P_i\rangle$ AUTOSTATI DI L^2?

$$\sum_i [L_i, [L_i, q_j]] = \sum_{ik} [L_i, i\hbar \varepsilon_{ijk} q_k]$$
$$= \sum_{i,k} (i\hbar \varepsilon_{ijk})(i\hbar \varepsilon_{ikl}) q_l$$

IN GEN $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{iln} = \delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl}$

NEL NOSTRO CASO

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijm} = \underbrace{\delta_{jj}}_{3}\delta_{km} - \underbrace{\delta_{jm}\delta_{kj}}_{\delta_{km}} = 2\delta_{km}$$

$$\Rightarrow \quad = \hbar^2 \sum_{ik} \underbrace{\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{ikl}}_{2\delta_{jl}} q_l = 2 q_j \hbar^2$$

$$L^2|P_j\rangle = \sum_i L_i L_i q_j |S\rangle = \sum L_i (\cancel{q_j L_i}^{L_i|S\rangle = 0} + [L_i, q_j]) |S\rangle$$
$$= \sum (\cancel{[L_i, q_j] L_i}^{0} + [L_i, [L_i, q_j]]) |S\rangle$$
$$= \hbar^2 2 q_j |S\rangle = 2\hbar^2 |P_j\rangle \quad \text{AUTOSTATO DI } L^2$$

$\longrightarrow L^2|P_j\rangle = 2\hbar^2 |P_j\rangle$ AUTOVAL $l=1$

d) CALCOLARE $[L_z, \overbrace{q_1 \pm i q_2}^{q_\pm}]$ E MOSTRARE CHE $|P_\pm\rangle = q_\pm|S\rangle$ AUTOST DI

$$[L_z, q_\pm] = [L_3, q_1] \pm i[L_3, q_2] = i\hbar q_2 \pm (-i\hbar q_1) i$$
$$= i\hbar q_2 \pm \hbar q_1 = \pm\hbar(q_1 \pm i q_2) = \pm\hbar q_\pm$$

$$\Rightarrow \times \text{DEF } L_z|P_\pm\rangle = L_3 q_\pm |S\rangle = (\cancel{q_\pm L_3}^{0} + [L_3, q_\pm]) |S\rangle$$
$$= \pm\hbar q_\pm |S\rangle = \pm\hbar |P_\pm\rangle$$

$\Rightarrow$ ABBIAMO 3 AUTOST DI L_z

$|P_0\rangle = q_3|S\rangle, |P_\pm\rangle$

$\downarrow$

$L_3|P_0\rangle = 0$

e) DATE SE $|P_i\rangle \xrightarrow{RS} x_i f(r)$ SONO ORTOGONALI

$\langle P_1|P_2\rangle \xrightarrow{RS} \int dV\, \varphi_1^*(x)\, \varphi_2(x) = \int dV\, xy\, f^2(r) = \int dx\,dy\,dz\, xy\, f^2(r)$

$\longrightarrow$ DISPARI IN x E y $\Rightarrow$ TRA $\pm\infty$ L'INTEGRALE È ZERO

$$\langle P_i|P_i\rangle = \int dV\, x^2 f^2(r) = \frac{1}{3}\int dV\, r^2 f^2(r)$$

$$= \int dV\, y^2 f^2(r) = I_y$$

$$= \int dV\, z^2 f^2(r) = I_z$$

$$I_x = I_y = I_z \longrightarrow I_x + I_y + I_z = I_r = 3 I_x$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{1}{3} I_r = \frac{4\pi}{3} \int \underbrace{dr\, r^2}_{dV \text{ IN SFERICHE}}\, r^2 f^2(r)$$

f) NORMALIZZ $|P_\pm\rangle$

$\langle P_\pm|P_\pm\rangle \xrightarrow{RS} \int dV\, \varphi_+^*(\vec{x})\, \varphi_+(\vec{x})$

$\varphi_+ = (x+iy) f(r) \qquad P_+ = q_+|S\rangle = (q_1 + i q_2)|S\rangle$

$$= \int dV (x+iy)(x-iy) f^2(r) = \frac{2}{3}\int dV\, r^2 f^2(r) = 2\langle P_i|P_i\rangle$$

SE LO ASSUMIAMO NORMALIZ $\Rightarrow \langle P_i|P_i\rangle = 1$

$\Rightarrow$ RIMPIAZZANDO $\varphi_\pm(\vec{x}) = \frac{x \pm y}{\sqrt{2}} f(r)$

$\langle P_+|P_-\rangle = 0$

g) SCRIVERE IN SP GEN DA LE FUNZ D'ONDA NORMALIZ DI L_x E L_y

$|P_\pm\rangle$ E $|P_0\rangle$ AUTOST DI $L_z \longrightarrow |P_0\rangle = z f(r) \qquad |P_\pm\rangle = \frac{x \pm iy}{\sqrt{2}} f(r)$

ESSENZIALMENTE DOBBIAMO AVERE UNA PERMUTAZIONE DI INDICI

$x \to y \quad y \to z \quad z \to x$

$\Rightarrow L_x|P_0\rangle = x f(r)$

[...]

$P_\pm = (z \pm i x) f(r)/\sqrt{2}$

8.2 DET MATR CON RAPPR L_x, L_y, L_z SUGLI STATI CON $l=1$ NELLA BASE CARTESIANA $\{|P_i\rangle = q_i|S\rangle\}$

→ SFRUTTIAMO COMMUTAZ L e q

$\langle P_i|L_3|P_j\rangle$

$$\boxed{L_3|P_j\rangle} = L_3 q_j|S\rangle = q_j \cancel{L_3|S\rangle}^{\,0} + [L_3, q_j]|S\rangle$$

$$= i\hbar\,\varepsilon_{3jk}\underbrace{q_k|S\rangle}_{|P_k\rangle} = \boxed{i\hbar\,\varepsilon_{3jk}|P_k\rangle}$$

$$\Rightarrow \langle P_i|L_3|P_j\rangle = i\hbar\,\varepsilon_{3ji}\langle P_i|P_j\rangle$$ → STATI ORTONORMALI

(i RIGA, j COLONNA)

$$(L_3)_{ij} = -i\hbar\,\varepsilon_{ij3}$$

$$\Rightarrow \quad L_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ +i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\hbar$$ HERMITIANA

ANALOG

$$(L_1)_{ij} = -i\hbar\,\varepsilon_{ij1} \qquad (L_2)_{ij} = -i\hbar\,\varepsilon_{ij2}$$

$$\Rightarrow L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & +i & 0 \end{bmatrix}\hbar \qquad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}\hbar$$

LA RAPPR DI L DIPENDE DA $f(r)$? NO, LE REGOLE DERIVANO DAI COMMUTATORI SU STATI NORMALIZZATI

c) BASE SFERICA

$$|m=\pm1\rangle \equiv e^{i\alpha_\pm}|P_\pm\rangle = e^{i\alpha_\pm} q_\pm|S\rangle$$

$$|m=0\rangle \equiv |P_0\rangle = q_3|S\rangle$$

DET LA RAPPR DELLE L_k IN QUESTA BASE SE $\{|m=0\rangle, |m=\pm1\rangle\}$

$L_3|m\rangle = \hbar m|m\rangle \Rightarrow$ RAPPR DIAG

$$\langle m|L_3|m'\rangle = \hbar m\,\delta_{mm'} \qquad L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\hbar m$$

$\langle m'|L_1|m\rangle$

$$\rightarrow L_1|m=1\rangle = L_1 e^{i\alpha_+}\frac{q_1+iq_2}{\sqrt{2}}|S\rangle = \frac{e^{i\alpha_+}}{\sqrt{2}}\left(\cancel{q_1L_1}^{\,0} + \cancel{iq_2L_1}^{\,0} + i\underbrace{[L_1,q_2]}_{i\hbar q_3}\right)$$

$$= -\frac{\hbar}{\sqrt{2}}e^{i\alpha_+}q_3|S\rangle = -\hbar/\sqrt{2}\,e^{i\alpha_+}|m=0\rangle$$

ANALOG $L_1|m=-1\rangle = +\frac{\hbar}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_-}|m=0\rangle$

$$\langle m'|L_1|m\rangle = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & -e^{-i\alpha_+} & 0 \\ -e^{i\alpha_+} & 0 & e^{i\alpha_-} \\ 0 & +e^{-i\alpha_-} & 0 \end{bmatrix} \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \\ \begin{array}{ccc} m=1 & m=0 & m=-1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} m'=1 \\ m'=0 \\ m'=-1 \end{array}$$

$[L_3, L_1] = i\hbar L_2 \Rightarrow L_2 = \frac{1}{i\hbar}[L_3, L_1]$

$L_\pm = L_1 \pm i L_2$ $\quad |l,m\rangle$ NORMALIZ

$L_+|m\rangle = |m+1\rangle \longrightarrow$ CALCOLARE $|l, m\pm1\rangle$ NORMALIZ

$(L_+)^+ = L_-$

$\Rightarrow \langle lm|L_+^+ L_+|lm\rangle = \langle lm|L_- L_+|lm\rangle = \langle lm|(L_1^2+L_2^2+i[L_1,L_2]-L_2L_1)|lm\rangle$

$(L^2 = L_1^2+L_2^2+L_3^2 \Rightarrow L_1^2+L_2^2 = L^2-L_3^2)$

$= \langle lm|(L^2-L_3^2-\hbar L_3)|lm\rangle = \hbar^2[l(l+1)-m^2-m]\underbrace{\langle lm|lm\rangle}_{1}$

$\Rightarrow \|L_+|lm\rangle\|^2 = \hbar^2[l(l+1)-m(m+1)]$ SE $|lm\rangle$ NORMALIZ

$L_+|lm\rangle = c_+|l,m+1\rangle$ CON $|l,m+1\rangle$ NORM

$\Rightarrow |c_+|^2 = \hbar^2[l(l+1)-m(m+1)]$

$c_+ = \hbar[l(l+1)-m(m+1)]^{1/2}$

$\Rightarrow L_+|lm\rangle = \hbar[l(l+1)-m(m+1)]^{1/2}|l,m+1\rangle$

ANALOGAMENTE PER L_- OTTENIAMO

$L_-|lm\rangle = \hbar[l(l+1)-m(m-1)]^{1/2}|l,m-1\rangle$

ULTIMO PTO: $\exists$ MATR 3×3 H CHE COMMUTA CON L_k $\forall k$ SU STATI $l=1$ E $H \neq \lambda \mathbb{1}_3$?

$\longrightarrow [H, L_3] = 0$ SU STATI $l=1 \Rightarrow \exists$ BASE DI AUTOVETT SIMULT

L_3 NON DEG CON AUTOVETT $|1,1\rangle$ $|1,0\rangle$ $|1,-1\rangle$

$\Rightarrow$ TUTTI GLI AUTOVETT DI L_3 SONO AUTOV DI H

$\longrightarrow H|0\rangle = \mu|0\rangle$

$[H, L_k] = 0 \ \forall k \Rightarrow [H, L_\pm] = 0$

$H L_+ |0\rangle = H|1\rangle$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow H|1\rangle = \mu|1\rangle$

$\shortparallel$

$L_+ H|0\rangle = L_+ \mu|0\rangle = \mu|1\rangle$

IDEM CON L_- $\Rightarrow H|-1\rangle = \mu|-1\rangle$

$\Rightarrow H|m\rangle = \mu|m\rangle \Rightarrow \boxed{H = \cancel{\lambda}\mu \mathbb{1}_3}$

SE H COMMUTA CON $L_k \ \forall k \Rightarrow H = \lambda \mathbb{1}_3$

<u>IN GEN</u> SE $[H, L_k] = 0 \ \forall k \Rightarrow$ È A BLOCCHI, K È PIÙ ATTO È DIAGONALE

METODI APPROSSIMATI : TEORIA DELLE PERTURBAZIONI

DOBBIAMO INTRODURRE METODI X TROVARE RISULTATI APPROSSIMATI

DI $H = H_0 + H'$

↳ DI QUI STA IMMAGINARE DI POTER TROVARE ESATTAMENTE LO SPETTRO

$H_0 |E_n^0\rangle = E_n^0 |E_n^0\rangle$ $\{|E_n^0\rangle\}$ LO CONOSCIAMO

IL PROBL NON CONSISTE SE $[H', H_0] = 0$

XKÉ CONOSCENDO LO SPETTRO DI H_0 CONOSCIAMO QUELLO DI H'

$\Rightarrow [H_0, H'] \neq 0$

IL PROBL DI QUESTA NATURA GIÀ SI PRESENTA IN TEC

X ES IL PROBL A 3 CORPI NON È ESATTAM RISOLUBILE

(ESISTONO METODI APPROSSIMATI)

QUANDO SI TRATTANO METODI APPROSSIM SAREBBE IDEALE AVERE UN PARAM PICCOLO X ES SVILUPPO IN SERIE

GIÀ X LA MC COMPARENDO NELLA H PERTURBATIVA UN PARAM PICCOLO QUESTO È MOLTIP A UN POTENZIALE CHE PUÒ ESSERE DIVERGENTE

BISOGNA ESSERE PRECISI CON LE GRANDEZZE IN GIOCO

SPESSO NON SI RIESCONO AD UTILIZZ TEOR GEN X OTTENERE RISULTATI SIGNIFICATIVI (VALIDI)

X LA QM LA QUESTIONE È ANCORA + DELICATA XKÉ SI TRATTANO OPERATORI

IN CHE SENSO UN OP È GRANDE RISP AD UN ALTRO?

UN OP PUÒ ESSERE STUDIATO ALMENO SU UNO SP DI DIM FINITA

POSSIAMO CONSIDERARE X ES UN CASO IN CUI $\mathcal{H}$ SIA APPROSSIMABILE A UNO SP DI DIM 2

⇒ CONVIENE RAPPR GLI OP COME MATRICI SCELTA UNA BASE

→ LA BASE NATURALE È QUELLA DI AUTOVETT DI H_0

⇒ H_0 È DIAGONALE IN QUESTA BASE

$$H_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^0 \end{bmatrix}$$

IN GEN $\quad H' = \begin{bmatrix} H_{11}' & H_{12}' \\ H_{21}' & H_{22}' \end{bmatrix}$ HERMITIANA (XKÉ OSS)

$\Rightarrow H_{11}', H_{22}' \in \mathbb{R}$ E $H_{21}' = H_{12}'^*$

$$\Rightarrow H = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 + H_{11}' & H_{12}' \\ (H_{12}')^* & \varepsilon_2^0 + H_{22}' \end{bmatrix}$$

X FORTUNA IN SP VETT DI DIM FINITA POSSIAMO DIST LO SPETTRO CON L'EQ. SECOLARE

$\rightarrow \det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0 \rightarrow P(\lambda)$ DI III gr RICAVA GLI AUTOVAL DI H

$$\rightarrow (\varepsilon_1^0 + H_{11}' - \lambda)(\varepsilon_2^0 + H_{22}' - \lambda) - |H_{12}'|^2 + (\varepsilon_1^0 + H_{11}')(\varepsilon_2^0 + H_{22}') = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(\varepsilon_1^0 + H_{11}' + \varepsilon_2^0 + H_{22}') - |H_{12}'|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{(\varepsilon_1^0 + H_{11}' + \varepsilon_2^0 + H_{22}') \mp \sqrt{(\varepsilon_1^0 + H_{11}' + \varepsilon_2^0 + H_{22}')^2 - 4|H_{12}'|^2 + 4(\varepsilon_1^0 + H_{11}')(\varepsilon_2^0 + H_{22}')}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon_1^0 + H_{11}' + \varepsilon_2^0 + H_{22}' \pm \sqrt{(\varepsilon_1^0 + H_{11}' - \varepsilon_2^0 - H_{22}')^2 - 4|H_{12}'|^2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\varepsilon_1^0 + H_{11}' + \varepsilon_2^0 + H_{22}') \pm (\varepsilon_1^0 + H_{11}' - \varepsilon_2^0 - H_{22}')\right]\sqrt{1 - \frac{4|H_{12}'|^2}{(\varepsilon_1^0 + H_{11}' - \varepsilon_2^0 - H_{22}')^2}}$$

SE SVILUPPO IN SERIE CONSIDERO GLI ELEM DI H' PICCOLI

$$\lambda_{12} = \begin{cases} \varepsilon_1^0 + H_{11}' \\ \varepsilon_2^0 + H_{22}' \end{cases} + o((H')^2)$$

CIOÈ STIAMO SOSTENENDO

$$\boxed{|H_{12}'| \ll \varepsilon_2^0 - \varepsilon_1^0 + H_{22}' - H_{11}' \simeq \varepsilon_2^0 - \varepsilon_1^0}$$

X POTER FARE LO SVILUPPO

QUANTITATIVAMENTE STIAMO DICENDO CHE SE GLI ELEM DI H' FUORI DALLA DIAGONALE SONO MOLTO + PICCOLI DELLA DIFF DI ENERGIA TRA I 2 LIVELLI

$\Rightarrow [H', H_0]$ COMMUTANO

$\Rightarrow$ BASTA CALCOLARE I VAL MEDI DI H' IN AUTOSTATI DI H_0

QUESTO ESERCIZIO SERVE PER INTUIRE CIÒ CHE ACCADE

$\Rightarrow$ POSSIAMO FARE UNA DISCUSSIONE + FORMALE

$$H = H_0 + \varepsilon V$$

ε NON DEVE ESSERE NEC PICCOLO MA SERVE AD ESPLICITARE CHI SIA PERTURBATIVO

<u>2 CASI</u>: • V INDIPENDENTE DAL TEMPO

• V DIPENDENTE ESPLICITAMENTE DAL TEMPO

TRATTIAMO IL CASO <u>V INDIPENDENTE DAL TEMPO</u>

SUPPONGO CONOSCERE LO SPETTRO $H_0 |\varepsilon_n^0\rangle = \varepsilon_n^0 |\varepsilon_n^0\rangle$

VOGLIAMO RISOLVERE $H|\varepsilon_n\rangle = \varepsilon_n |\varepsilon_n\rangle$

$\rightarrow (H_0 + \varepsilon V)|\varepsilon_n\rangle = \varepsilon_n |\varepsilon_n\rangle \Rightarrow H_0 |\varepsilon_n\rangle = (\varepsilon_n - \varepsilon V)|\varepsilon_n\rangle$

$$\Rightarrow \boxed{(H_0 - \varepsilon_n^0)|\varepsilon_n\rangle = (\varepsilon_n - \varepsilon_n^0 - \varepsilon V)|\varepsilon_n\rangle}$$ EQ. DA RISOLVERE

ANDIAMO A PROIETTARE LA SINGOLA COMP. NELLO SP. DEGLI AUTOVETT. DI H_0

COSA SIGNIFICA RISOLVERE L'EQ. PERTURBATIVAMENTE?

DOBBIAMO ESPANDERE FORMALMENTE ε_n IN ε

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(0)} + \varepsilon \varepsilon_n^{(1)} + \dots \varepsilon^k \varepsilon_n^{(k)} \qquad (\varepsilon_n^{(0)} = \varepsilon_n^0 \text{ (SPETTRO } H_0))$$

$$|\varepsilon_n\rangle = |\varepsilon_n^{(0)}\rangle + \varepsilon |\varepsilon_n^{(1)}\rangle + \dots + \varepsilon^k |\varepsilon_n^{(k)}\rangle$$

X POI RISOLVERLA ORDINE X ORDINE

$$0 = (\varepsilon_n - \varepsilon_n^0)\langle \varepsilon_n^{(0)} | \varepsilon_n\rangle - \varepsilon \langle \varepsilon_n^{(0)} | V | \varepsilon_n\rangle$$

DEVO DEF UN AUTOSTATO $\Rightarrow$ SONO LIBERO DI SCEGLIERE LA NORMALIZ.

LA SCELGO TC $\langle \varepsilon_n^0 | \varepsilon_n\rangle = 1$

$$\Rightarrow \varepsilon_n = \varepsilon_n^0 + \varepsilon \langle \varepsilon_n^0 | V | \varepsilon_n\rangle$$

POSSO RISOLVERLA RICORSIVAM.

$$\varepsilon_n^{(k)} = \langle \varepsilon_n^0 | V | \varepsilon_n^{(k-1)}\rangle$$

$$\varepsilon_n^{(1)} = \langle \varepsilon_n^0 | V | \varepsilon_n^0\rangle$$

CIOÈ LA FORMULA RICAVATA PRIMA X CASI 2x2 MA IN QUESTO CASO VALE X OGNI DIM

QUESTA FORMULA FORNISCE LA K-ESIMA CORREZIONE ALL'AUTOVAL CON VETT DOT L'AUTOFUNZ AL ORDINE K-1

→ INTRODUCIAMO IL RISOLVENTE

$$R_0(\varepsilon) = \frac{1}{H_0 - \varepsilon \mathbb{1}}$$ NON È DEF OVUNQUE

X ES NON È DEF SUGLI AUTOSTATI DI H_0

CIOÈ SUGLI AUTOSP GEN DA $|\varepsilon_n^0\rangle$

⇒ LA SOL GEN DELL'EQ. LA POSSIAMO SCRIVERE COME

$$|\varepsilon_n\rangle = |\varepsilon_n^0\rangle + R_0(\varepsilon_n^0)(\varepsilon_n - \varepsilon_n^0 - \varepsilon V)|\varepsilon_n\rangle \quad (*)$$

DOBBIAMO FARE UNO SVILUPPO IN ε

OGNI VETT DEVE ESSERE ESPANDIBILE IN BASE, IN PARTIC NOI SCEGLIAMO LA BASE $|\varepsilon_n^0\rangle$

$$\Rightarrow |\varepsilon_n^K\rangle = \sum_m C_{nm}^{(K)} |\varepsilon_m^0\rangle$$

$$(*) \xrightarrow[\text{SVILUPP IN } \varepsilon]{} |\varepsilon_n^K\rangle = R_0(\varepsilon_n^0)\left[\sum_{j=1}^{K-1} \varepsilon_n^j |\varepsilon_n^{K-j}\rangle - V|\varepsilon_n^{K-1}\rangle\right]$$

X ES $|\varepsilon_n^1\rangle = -R_0(\varepsilon_n^0) V |\varepsilon_n^0\rangle$

$$= -\sum_{m \neq n} R_0(\varepsilon_n^0) |\varepsilon_m^0\rangle \langle \varepsilon_m^0 | V | \varepsilon_n^0\rangle$$

NON CI PUÒ ESSERE $m=n$ X VÉ GIÀ FISSATO PRIMA È $R_0(\varepsilon_n^0)$ INVERSE

$$|\varepsilon_n^1\rangle = -\sum_{m \neq n} \frac{1}{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_n^0} \langle \varepsilon_m^0 | V | \varepsilon_n^0\rangle |\varepsilon_m^0\rangle$$

ABBIAMO DOT AL 1° ORDINE COME SI MODIFICA L'AUTOSTATO N-ESIMO A SEGUITO DELLA PERTURBAZ

$$C_{nm}^{(1)} = -\frac{\langle \varepsilon_m^0 | V | \varepsilon_n^0\rangle}{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_n^0}$$ ⇒ L'AUTOSTATO CORRISP ALL'N-ESIMO AUTOVAL NON È + QUELLO NON PERTURBATO MA C'È UN CONTR DI MESCOLAMENTO DATO DA $C_{nm}^{(K)}$

CORRISP ALL'ELEM FUORI DALLA DIAGONALE

QUESTA PERTURBAZ È PICCOLA SE È GRANDE LA DIF TRA I 2 LIV CONVOLG

$$C_{nm}^{(1)} = -\frac{\langle \varepsilon_m^0 | V | \varepsilon_n^0 \rangle}{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_n^0} = -\frac{V_{mn}}{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_n^0}$$

LA PERTURBAZ DELL'AUTOVAL EQUIVALE DELL'AUTOSTATO DIPENDONO DALLA ELEM DI MATRICE DI V

$$\varepsilon_n^2 = \langle \varepsilon_n^0 | V | \varepsilon_n^1 \rangle = \sum_m C_{nm}^{(1)} \langle \varepsilon_n^0 | V | \varepsilon_m^0 \rangle = -\sum_m \frac{V_{nm}}{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_n^0} V_{mn}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ V \text{ HERMITIANA}}}{=} -\sum_m \frac{|V_{nm}|^2}{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_n^0}$$

SE PRENDIAMO LA CORREZIONE ALLO STATO FONDO È SEMPRE POSITIVA

$\Rightarrow$ LA CORREZ AL II ORDINE DELL'EN ALLO STATO FOND È SEMPRE NEGATIVA

$$|\varepsilon_n^2\rangle = R_0(\varepsilon_n^0)\left[\varepsilon_n^1 |\varepsilon_n^1\rangle - V|\varepsilon_n^1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{H - \varepsilon_n^0}\left\{\varepsilon_n^1 \sum_{m \neq n} C_{nm}^{(1)} |\varepsilon_m^0\rangle - \langle \varepsilon_m^0 | V | \varepsilon_n^1 \rangle |\varepsilon_m^0\rangle\right\}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_n^0}\left\{\varepsilon_n^1 \sum_{m \neq n} C_{nm}^{(1)} - \sum_{s \neq n} V_{ms} C_{ns}^{(1)}\right\} |\varepsilon_n^0\rangle$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_n^0}\left[-\frac{V_{nm} V_{mn}}{\varepsilon_m^0 - \varepsilon_n^0} + \sum_{s \neq n} \frac{V_{ms} V_{sn}}{\varepsilon_s^0 - \varepsilon_n^0}\right]}_{C_{nm}^{(2)}} |\varepsilon_n^0\rangle$$

$$\langle \varepsilon_n^0 + \varepsilon \varepsilon_n^1 + \varepsilon^2 \varepsilon_n^2 | \varepsilon_n^0 + \varepsilon \varepsilon_n^1 + \varepsilon^2 \varepsilon_n^2 \rangle = 1$$

$$\langle \varepsilon_n^0 | \varepsilon_n^0 \rangle = 1 \qquad \langle \varepsilon_n^0 | \varepsilon_n^1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \varepsilon_n^1 | \varepsilon_n^1 \rangle + \langle \varepsilon_n^2 | \varepsilon_n^0 \rangle + \langle \varepsilon_n^0 | \varepsilon_n^2 \rangle = 0$$

$$C_{nm}^{(2)} = -\frac{1}{2} \sum_{k \neq m} \frac{|V_{nk}|^2}{[\varepsilon_k^0 - \varepsilon_n^0]^2}$$

QUESTO NON ESAURISCE LA DISCUSSIONE, INFATTI USANDO $R_0(E)$ ABBIAMO SUPPOSTO CHE IL SEP CHE STIAMO PERTURBANDO SIA NON DEGENERE

RICAPITOLANDO

$$\langle \varepsilon_n^1 | \varepsilon_n^1 \rangle + \langle \varepsilon_n^2 | \varepsilon_n^0 \rangle + \langle \varepsilon_n^0 | \varepsilon_n^2 \rangle = 0$$

$$|\varepsilon_n^k\rangle = \sum_m C_{nm}^k \, |\varepsilon_m^0\rangle$$ ESPANS SU BASE DI H_0

$$\sum_{s,t} C_{ns}^1 C_{nt}^1 \langle \varepsilon_s^0 | \varepsilon_t^0 \rangle + \sum_s C_{ns}^2 \langle \varepsilon_s^0 | \varepsilon_n^0 \rangle + cc \Big] = 0$$

COMPL CONJUG

$$\sum_s (C_{ns}^1)^2 + 2 C_{nn}^2 = 0$$

$$C_{nn}^2 = -\frac{1}{2} \sum_s (C_{ns}^1)^2 = -\frac{1}{2} \sum_s \frac{|V_{ns}|^2}{(\varepsilon_n^0 - \varepsilon_s^0)^2}$$

<u>AUTOVALORI DEGENERI DI H_0</u>

$$|\varepsilon_n\rangle = \sum_\alpha |\varepsilon_n^0, \alpha\rangle C_\alpha + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k |\varepsilon_n^k\rangle$$

Eq. FOND: $(H_0 - \varepsilon_n^0) |\varepsilon_n\rangle = (\varepsilon_n - \varepsilon_n^0 - \varepsilon V) |\varepsilon_n\rangle$

FACCIAMO IL PROD SCALARE CON UN CONTO $|\varepsilon_n^0, \beta\rangle$

$$0 = (\varepsilon_n - \varepsilon_n^0) \langle \varepsilon_n^0, \beta | \varepsilon_n \rangle - \varepsilon \langle \varepsilon_n^0, \beta | \varepsilon_n \rangle$$

SOSTITUIAMO $|\varepsilon_n\rangle$ E SVILUPP AL ORDINE ε

$$\boxed{0 = \underbrace{(\varepsilon_n - \varepsilon_n^0)}_{\varepsilon_n^1} C_\beta - \varepsilon \underbrace{\sum_\alpha \langle \varepsilon_n, \beta | V | \varepsilon_n, \alpha \rangle C_\alpha}_{\text{EQ. AGLI AUTOVAL DELLA MATR } V}}$$

QUESTO PUÒ FARSI CHE LA DEGENERAZ DEL LIVELLO INDISTURBATO VENGA RIMOSSA SPLITTANDO I LIVELLI DEGENERI

→ <u>EFFETTO STARK</u>

SUPP DI AVERE UN CAMPO ELETTRICO EXT COST E UN ATOMO DI IDROGENO

$$H = H_0 + e\vec{\mathcal{E}}\vec{x}$$

H_0: HAMILTONIANA ATOMO ISOLATO; $\vec{\mathcal{E}}$: CAMPO ELETTRICO; $\vec{x}$: POSIZ $\bar{e}$

→ SPETTRO? COME SI TROVA I LIVELLI DI ENERGIA?

$[H_0, \vec{x}] \neq 0$

LA BASE DI AUTOST DI H_0 L'ABBIAMO CATALOGATA IN TERMINI DI NUM QUANTICI $|n, l, m\rangle$

MA L'ASSE Z È ARBITRARIO ⇒ CONVIENE SCEGLIERLO NELLA DIREZ DI $\vec{\mathcal{E}}$

(IL SIST È ANCORA INVARIANTE X ROTAZ ATTORNO QUELL'ASSE)

$$\Rightarrow H = H_0 + e\mathcal{E}z$$

NON POSSIAMO RISOLVERLO ESATTAMENTE

⇒ HA SENSO USARE LA TEORIA DELLE PERTURBAZIONI?

DIPENDE DAL VALORE DI $\mathcal{E}$ → X QUALI HA SENSO?

IDEA ABBIAMO INTRODOTTO UN CRITERIO DI BONTÀ X LA TEORIA DELLE PERTURBAZ

QUANDO L'ELEM DI MATRICE DELLA PERTURBAZ TRA 2 AUTOSTATI DELL'HAMILTONIANA IMPERTURBATA IN MODO È NOTEVOLMENTE SULLA DIFF IN ENERGIA DEI CORRISP AUTOVALORI DELL'HAMILTONIANA IMPERTURBATA

$$|\langle n, l, m | e\mathcal{E}z | n', l', m'\rangle| \ll \underbrace{E_n - E_{n'}}_{\text{DIPENDE SOLO DA } n \text{ E } n'}$$

$$\langle n | e\mathcal{E}z | n'\rangle$$

È CHIARO CHE LA DIFF DI ENERGIA CRESCE QUANDO n ED n' SONO DISTANTI TRA LORO, LA SITUAZ PEGGIORA È n ED $n+1$

$\langle n | e\mathcal{E}z | n+1\rangle$ CHIARAM PER n ABBASTANZA GRANDI $n+1 \sim n$

$$\Rightarrow \langle n | e\mathcal{E}z | n+1\rangle \sim e\mathcal{E}\langle n | z | n\rangle \simeq e\mathcal{E} r_B n^2$$

→ L'ELEM DI MATRICE CRESCE CON n^2

QUINDI AL CRESCERE DI n LA DIFF DIVENTA TROPPO PICCOLA PER L'ELEM DI MATRICE CRESCE

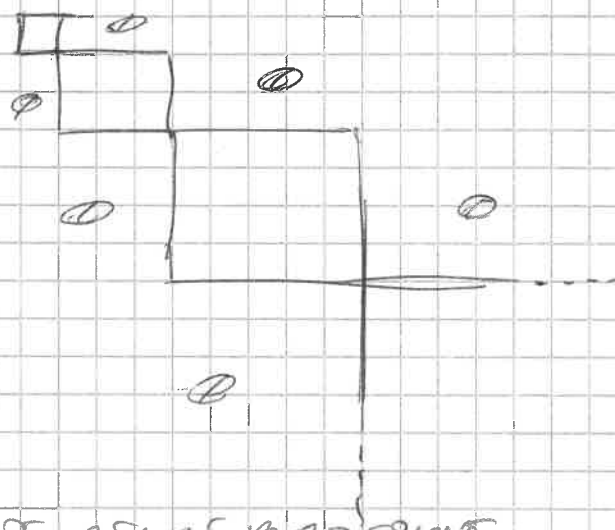
$\Rightarrow$ LA TEORIA DELLE PERTURBAZ NON SARÀ + VALIDA

TUTTAVIA X I PRIMI LIVELLI CI CONSENTE DI APPLICARE LA TEORIA DELLE PERTURBAZ X DEI VALORI DI $\mathcal{E}$

X LO STATO FONDO $n=1$ $\exists!$ STATO

X IL 1° LIVELLO ECCITATO $n=2$ CI SONO 4 STATI ($g_1=4$)

AL SALIRE DI n RIMANE UN MATRICIONE ∞ DIM A CUI LA TEORIA DELLE PERTURBAZ NON SI APPLICA



$e\mathcal{E}\langle 1,0,0|z|1,0,0\rangle$ MI DICE DI QUANTO SI SPOSTA LO STATO FONDO QUANDO ACCENDO IL CAMPO ELETTRICO

$\longrightarrow$ QUESTO ELEM DI MATRICE VALE 0!

KKS?

CI SONO ALTRE RAGIONI DI SELEZIONE CHIAMATE REGOLE DI SELEZIONE

I LIV ENERGETICI SI OSSERVANO SPERIMENTALMENTE OSSERVANDO LA FREQ EMESSA/ASSORBITA DALL'ATOMO CHE DIPENDE DALLA DIFF DI LIVELLI ENERGETICI (RIGHE SPETTRALI) MA TALVOLTA LE RIGHE SPETTRALI NON SI OSSERVANO A CAUSA DELLA SELEZ DEL PROB

$e\mathcal{E}\langle 1,0,0|z|1,0,0\rangle$

TEOR

TUTTI GLI ELEM DI MATRICE DI x, y, z TRA STATI CON $l=0$ SONO NULLI

$\langle \ldots l=0 \ldots | \vec{x} | \ldots l=0 \ldots \rangle = 0$

($l=0 \Rightarrow$ ANCHE TUTTE LE COMP DEL MOM ANG SONO NULLE)

DIM

$\ldots x | \ldots l=0 \ldots \rangle$ AUTOSTATO DI L^2?

SÌ, CON $l=1$ x È COMBINAZ DI ARMONICHE SF CON $l=1$

$\Rightarrow \langle \ldots l=0 \ldots | x | \ldots l=0 \ldots \rangle$ È PROD SCALARE TRA 2 AUTOSTATI DIVERSI

$\Rightarrow$ ORTOGONALI ■

ABBIAMO VISTO CHE $\vec{L}$ È LEGATO AD UN'ALTRA SIMM:

UN ARMONICA SF DI GR l È AUTOSTATO DELLA PARITÀ

TEOR

TUTTI GLI ELEM DI x, y, z TRA AUTOSTATI DI I (PARITÀ) CON LO STESSO VALORE SONO NULLI $\langle \ldots \omega \ldots | x | \ldots \omega \ldots \rangle = 0$

DIM

$I^+ = I \qquad I I^+ = 1 \longrightarrow$ AUTOVAL DI $I = \pm 1$

$\langle \omega | \vec{x} | \omega \rangle = \langle \omega | I^2 \vec{x} I^2 | \omega \rangle = \langle \omega | I I \vec{x} I I | \omega \rangle$

$= \omega^2 \langle \omega | I \vec{x} I | \omega \rangle = - \langle \omega | \vec{x} | \omega \rangle$

$\longrightarrow \langle \vec{x} \rangle = - \langle \vec{x} \rangle \Rightarrow \langle \vec{x} \rangle = 0$ ■

ABBIAMO 2 BUONE RAGIONI X CUI IL CAMPO ELETTRICO NON ALTERA L'AUTOVAL DELL'ENERGIA NELLO STATO FONDAM

IN LINEA DI PRINCIPIO SAREBBE VERO $\forall$ STATO

$\Rightarrow$ SE H FOSSE NON PERTURBATO AL CONTORNO NON CI SAREBBERO PERTURBAZIONI

MA SAPENDO CHE È DEGENERE NON SARÀ COSÌ

→ SE LO FACESSI AL II ORDINE TROVERÒ UN VAL DI ENERGIA + ALTO O + BASSO?

LA CORREZ AL II ORDINE RISP LO STATO FONDO ABBIAMO VISTO CHE È SEMPRE NEGATIVA

ANDIAMO AL 1° LIV ENERGETICO

$|2,0,0\rangle$ $|2,1,0\rangle$ $|2\,1\,1\rangle$ $|2\,1\,-1\rangle$

ABBIAMO 4 STATI → ANDIAMO A CALCOLARE GLI ELEM DELLA MATRICE DI PERTURBAZ

	$\|200\rangle$	$\|210\rangle$	$\|211\rangle$	$\|21-1\rangle$
$\langle 200\|$	$\emptyset$		$\emptyset$	$\emptyset$
$\langle 210\|$		$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\langle 211\|$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\langle 21-1\|$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

SULLA DIAGONALE HO PARITÀ UGUALI ⇒ VALE IL TEOR DEL x GLI STATI CON STESSO l

REGOLA DI SELEZ SU L_z

TEOR $[L_z, z] = 0 \longrightarrow \langle m|z|m'\rangle = ?$

$0 = \langle m|[L_z, z]|m'\rangle = \langle m|L_z z|m'\rangle - \langle m|z L_z|m'\rangle$

$= (m-m')\langle m|z|m'\rangle = 0$

SE $m \neq m' \Rightarrow \langle m|z|m'\rangle = 0$

$\Rightarrow$ GLI ELEM FUORI DALLA DIAGONALE DI z IN BASE $|m\rangle$ SONO NULLI

SI PUÒ VEDERE ANCHE DIVERSAMENTE

$|m\rangle \simeq e^{im\varphi}$ E z NON DIPENDE DA φ $(z = r\cos\theta)$

$\Rightarrow \langle m|z|m'\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \, e^{i(m'-m)\varphi} = 0$ SE $m \neq m'$

ANCHE X GLI ELEM CON m DIVERSI LE ENERGIE SONO UGUALI

$\Rightarrow$ CI RIMANGONO

$\langle 200|z|210\rangle$ E $\langle 210|z|200\rangle$

$\langle 200|z|210\rangle = 3r_B$ CALCOLANDO L'INTEGRALE

$\Rightarrow$ OTTENIAMO UNA MATRICE

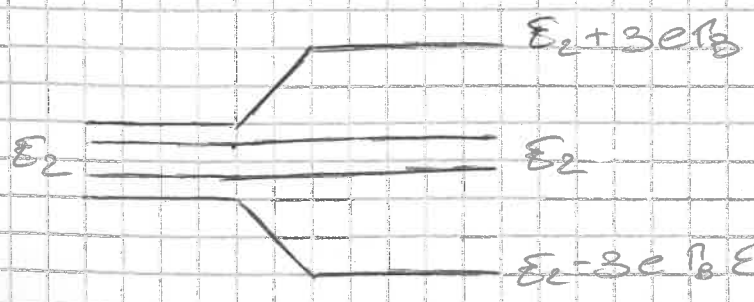
$$\begin{array}{cc|cc} 0 & 3e\mathcal{E}r_B & 0 & 0 \\ 3e\mathcal{E}r_B & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

HA $Tr = 0$

$\det = -(3er_B)^2$

$\Rightarrow$ 2 POSSIBILI AUTOVAL

QUINDI X L'ENERGIA E_2 C'ERANO 4 POSSIBILI LIVELLI QUANDO ACCENDIAMO $\mathcal{E}$ 2 DI QUESTI LIVELLI PRENDONO L'ENERGIA $E_2 \pm 3r_B e\mathcal{E}$ E DUE RIMANGONO A E_2



LA PERTURBAZIONE NON HA ROTTO COMPLETAMENTE LA DEGENERAZIONE

LO STATO CHE PRENDE EN + ALTA È $\frac{|200\rangle + |210\rangle}{\sqrt{2}}$

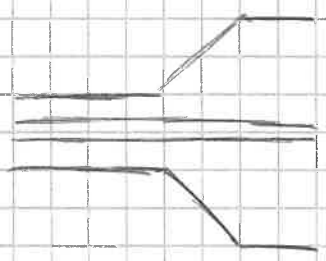
QUELLO CHE PRENDE EN + BASSA $\frac{|200\rangle - |210\rangle}{\sqrt{2}}$

QUELLI CHE MANTENGONO LA STESSA $\{|211\rangle, |21-1\rangle\}$

RAPPR CONF COORD RISP AGLI STATI DI PARTENZA:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}}_{\text{DIM } 1} \qquad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}}_{\text{DIM } 1} \qquad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\begin{bmatrix}0\\0\\\alpha\\\beta\end{bmatrix}}_{\text{DIM } 2}$$

$\downarrow$ COMB SIMM $\qquad$ $\downarrow$ COMB ANTISIMM



$3r_B e \mathcal{E}$

PRENDERE $\mathcal{E}$ PICCOLO SIGNIFICA

$3r_B e \mathcal{E} \ll E_2 - E_0$

(?)

[...]

PERTURBAZIONI DIPENDENTI DAL TEMPO

$H = H_0 + H'(t)$

QUANDO AVEVAMO H' INDIP DA t ABBIAMO CERCATO LO SPETTRO DI AUTOVAL ED AUTOVETT, ORA AFFRONTIAMO INVECE L'EVOLUZ TEMPORALE

DI H_0 CONOSCIAMO LO SPETTRO ED IMMAGINIAMO CHE IL TERMINE DI PERTURBAZ AGISCA IN UN Δt FINITO

$H'(t) \neq 0$ PER $t \in [0, T]$

SENZA $H'(t)$ GLI AUTOSTATI DI H SONO STATI STAZIONARI (NA COMPATI NON TEMP)

CI CHIEDIAMO QUALE SIA LA PROBAB DI TRANSIZIONE

$P_{fi} = |\langle \xi_f^0 | \xi_i^0, t \rangle|^2$ CON $t > T$

OPERATORE EVOLUZ TEMPORALE:

$U(t, t_0)$ UNITARIO (XKÉ NELL'EVOLUZ TEMP VANNO CONSERVATI I PROD SCALARI)

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} H(t) U(t, t_0)$$

$$\frac{d}{dt} U_0(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} H_0 U_0(t, t_0) \quad \times \; H_0 \text{ INDIP DA } t$$

$$\Rightarrow U_0(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 (t - t_0)}$$

MENTRE $[H_0, U_0] = 0$ IN GEN $[H(t), U(t)] \neq 0$

$\Rightarrow$ LA 1° EQ. HA SOL POCO CHIARA

INOLTRE $\frac{d}{dt} U_0^\dagger(t, t_0) = +\frac{i}{\hbar} H_0 U_0^\dagger(t, t_0) \Rightarrow U_0^\dagger(t, t_0) = e^{+\frac{i}{\hbar} H_0 (t - t_0)}$

$$P_{fi} = |\langle \xi_f^0 | U(t, t_0) | \xi_i^0 \rangle|^2$$

CI INTERESSA IL MODULO QUADRO $\Rightarrow$ SI PUÒ INTRODURRE UN FATTORE DI FASE CHE NON MODIFICA IL RISULTATO

$$\Rightarrow P_{fi} = |\langle \xi_f^0 | U(t, t_0) | \xi_i^0 \rangle|^2 = |\langle \xi_f^0 | \underbrace{U_0^\dagger(t, t_0)}_{\text{È UN FATTORE DI FASE}} U(t, t_0) | \xi_i^0 \rangle|^2$$

DEF $\tilde{U}(t, t_0) = U_0^\dagger(t, t_0) U(t, t_0)$

$\Rightarrow P_{fi} = |\langle \xi_f^0 | \tilde{U}(t,t_0) | \xi_i^0 \rangle|^2$

AVER RIMPIAZZATO U CON $\tilde{U}$ SIGNIFICA FAR EVOLVERE IL SIST CON U E POI TORNARE INDIETRO CON $U_0^\dagger$

CHIARAMENTE SE $U(t,t_0) = U_0(t,t_0) \Rightarrow \tilde{U}(t,t_0) = \mathbb{1}$

$\Rightarrow$ PROBAB NULLA $P_{fi} = |\langle \xi_f^0 | \xi_i^0 \rangle|^2 = 0$

DATA UN'OSS CHE AL TEMPO t ξ_t

$$\bar{\xi}_t = \langle A,t | \xi | A,t \rangle$$
$$= \langle A,t_0 | U^\dagger(t_0,t)\, \xi\, U(t_0,t) | A,t_0 \rangle$$

CON $|A,t\rangle = U(t,t_0)|A,t_0\rangle$ SCHEMA DI SCHR (OSS RISS, STATI EVOLVONO)

OPPURE SCHEMA DI HEISENBERG: $\xi(t) = U^\dagger(t,t_0)\, \xi_{t_0}\, U(t_0,t)$

MA NON SONO LE UNICHE 2 POSSIBILITÀ, VEDIAMONE UNA 3ª

NASCE DALL'IDEA DI RIMPIAZZ U CON $\tilde{U}$:

$$U(t,t_0) = U_0(t,t_0)\, \tilde{U}(t,t_0)$$

$$\Rightarrow \bar{\xi}_t = \underbrace{\langle A,t_0 | \tilde{U}^\dagger(t_0,t)\, U_0^\dagger(t_0,t)}_{\mathbb{1}}\, \xi\, \underbrace{U_0(t_0,t)\, \tilde{U}(t_0,t) | A,t_0 \rangle}_{\mathbb{1}}$$

$\exists$ UNO SCHEMA INTERMEDIO IN CUI EVOLVONO LE OSS CON L'HAMILTONIANA IMPERTURBATA H_0 E GLI STATI CON $\tilde{U}$

$\rightarrow$ <u>SCHEMA DELLE INTERAZIONI</u>

UTILE X DISCUTERE IL MOD DELLE PERTURBAZIONI ESPLICITAM DIP DA $\tilde{U}$

OVVIAMENTE SE $H'(t) = 0 \Rightarrow U(t,t_0) = U_0(t,t_0) \Rightarrow \tilde{U}(t,t_0) = \mathbb{1}$

$\Rightarrow$ SI RITORNA ALLO SCHEMA DI HEISENBERG

$\rightarrow$ VOGLIAMO RICAVARE LA FORMA ESP DI $\tilde{U}$

$$\frac{d}{dt}\tilde{U}(t,t_0) = \frac{d}{dt}\left(U_0^\dagger(t,t_0)\, U(t,t_0)\right)$$
$$= \frac{dU_0^\dagger(t,t_0)}{dt}\, U(t,t_0) + U_0^\dagger(t,t_0)\, \frac{dU}{dt}(t,t_0)$$
$$= \frac{i}{\hbar}\underbrace{H_0\, U_0^\dagger}_{\text{COMMUTANO}}\, U(t,t_0) - U_0^\dagger(t,t_0)\, \frac{i}{\hbar} H(t,t_0)\, U(t,t_0)$$

$$= \frac{i}{\hbar} U_0^\dagger(t,t_0)\underbrace{\left[H_0 - H(t,t_0)\right]}_{-H'(t,t_0)} U(t,t_0)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} U_0^\dagger(t,t_0)\, H'(t)\, \underbrace{U(t,t_0)}_{U_0\tilde{U}} = -\frac{i}{\hbar} U_0^\dagger(t,t_0)\, H'(t)\, U_0(t,t_0)\, \tilde{U}(t,t_0)$$

DEF $\tilde{H}'(t) = U_0^\dagger(t,t_0)\, H'(t)\, U_0(t,t_0)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\tilde{U}(t,t_0) = -\frac{i}{\hbar}\tilde{H}'(t)\,\tilde{U}(t,t_0)$$

$\Rightarrow \tilde{U}(t,t_0)$ SOMMISFA UN EQ. ALLA STESSA FORMA DELL'H_0 (FORMULA ESATTA)

VOGLIAMO ADESSO STUDIARE PERTURBATIVAMENTE QUELL'EQ. IN H' FACENDONE UNO SVILUPPO IN ε $\quad H_0 + \varepsilon H'(t)$

ORDINE ZERO IN H':

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{U}(t,t_0) = 0 \\ \tilde{U}(t_0,t_0) = \mathbb{1} \end{cases} \Rightarrow \tilde{U}(t,t_0) \text{ NON DIP DA } t$$

$\Rightarrow$ AL ORDINE ZERO $\tilde{U}^{(0)}(t,t_0) = \mathbb{1}$

AL PRIMO ORDINE

$$\frac{d}{dt}\tilde{U}^{(1)}(t,t_0) = -\frac{i}{\hbar}\tilde{H}'(t)\,\tilde{U}^{(0)}$$

K-ESIMO ORDINE

$$\frac{d}{dt}\tilde{U}^{(k)}(t,t_0) = -\frac{i}{\hbar}\tilde{H}'\,U^{(k-1)}(t,t_0)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\tilde{U}^{(1)}(t,t_0) = -\frac{i}{\hbar}\tilde{H}'(t) \longrightarrow \tilde{U}^{(1)}(t,t_0) = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\tilde{H}'(t')\,dt'$$

$\Rightarrow$ AL PRIMO ORDINE $\quad \tilde{U}(t,t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\tilde{H}'(t')\,dt'$

$$\Rightarrow P_{fi} = \left| \langle E_f^0 | \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} \tilde{H}'(t')\,dt' | E_i^0 \rangle \right|^2$$

NEL CASO $\boxed{f \neq i}$

$$= \left| S_{fi} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} dt' \langle E_f^0 | \tilde{H}'(t') | E_i^0 \rangle \right|^2$$

$$U_0^{+} H' U_0$$

$$= \left| S_{fi} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} dt'\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_f^0 - E_i^0)(t'-t_0)} \langle E_f^0 | H'(t) | E_i^0 \rangle \right|^2$$

FREQ. TIPICA $\omega_{fi} := \frac{E_f^0 - E_i^0}{\hbar} \Rightarrow e^{i\omega_{fi}(t'-t_0)}$

AL II ORDINE

$$\frac{d}{dt} \tilde{U}^{(2)}(t,t_0) = -\frac{i}{\hbar} \tilde{H}'(t') \tilde{U}^{(1)}(t',t_0)$$

$$= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \tilde{H}'(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' \tilde{H}'(t'')$$

$$\Rightarrow \tilde{U}^{(2)}(t,t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} dt' \tilde{H}'(t') \int_{t_0}^{t} dt'' \tilde{H}'(t'')$$

DOVE $t'' \in [t_0, t']$

$t' \in [t_0, t]$

SEGUE IBRIDO

$$\tilde{U}^{(k)}(t,t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^k \int_{t_0}^{t} dt_k \cdots \int_{t_0}^{t_2} dt_1\, \tilde{H}'(t_k) \cdots \tilde{H}'(t_1)$$

SE $\tilde{H}'$ DIPENDE DA $t \Rightarrow$ NON C'È PIÙ DI ORDINAMENTO

$\Rightarrow$ HO $k!$ ... COSE SU IPERCUBI (?)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{U}^{(k)}(t,t_0) = T\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt\, \tilde{H}'(t')} = \tilde{U}(t,t_0)$$

T ORDINATO O PRODOTTO DI DYSON

X I NOSTRI SCOPI CI MUOVIAMO A STUDIARE IL I TERMINE DOVUTO ALLA PERTURBAZIONE

CONVIENE ESAMINARE IL CASO IN CUI $H'(t)$ SIA UNA FUNZIONE ARMONICA

CIOÈ L'ELEMENTO DI UN'ANALISI DI FOURIER X UNA FREQ. FOND

CIOÈ $H'(t) = B e^{-i\omega t} + B^{+} e^{+i\omega t}$ PERTURBAZ ARMONICA

SE ABBIAMO UNA PERTURBAZ REALE LA POSSIAMO STUDIARE COME LA SERIE DI FOURIER DI PERTURBAZ ARMONICHE

→ SI PUÒ VEDERE CHE IN CORRISP DI FREQ. PARTICOLARI ACCADONO COSE MEGAFICHE

NEL CASO $\boxed{F \neq i}$

$$P_{Fi} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^{t} dt' \, e^{i\omega_{Fi}(t'-t_0)} \langle \varepsilon_F^0 | B e^{-i\omega(t'-t_0)} + B^{+} e^{i\omega(t'-t_0)} | \varepsilon_i^0 \rangle \right|^2$$

MA $H'(t) \neq 0$ SOLO IN $[0,T]$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^T dt' \, e^{i\omega_{Fi} t'} \langle \varepsilon_F^0 | B e^{-i\omega t'} + B^{+} e^{+i\omega t'} | \varepsilon_i^0 \rangle \right|^2$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \left| \frac{e^{i(\omega_{Fi}-\omega)T} - 1}{i(\omega_{Fi}-\omega)} \langle \varepsilon_F^0 | B | \varepsilon_i^0 \rangle + \frac{e^{i(\omega_{Fi}+\omega)T} - 1}{i(\omega_{Fi}+\omega)} \langle \varepsilon_F^0 | B^{+} | \varepsilon_i^0 \rangle \right|^2$$

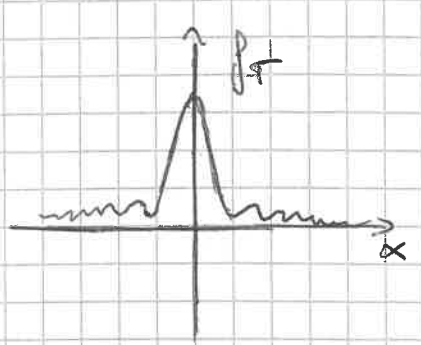
QUANDO $\omega_{Fi} = \pm\omega$ DIVERGE UN TERMINE O L'ALTRO

QUESTO DIPENDE DAL FATTO CHE L'ON SIA + GRANDE O + PICCOLA DELL'ON INIZIALE

SUPPONIAMO UN CONTRIBUTO SOLO DEL 1° TERMINE: CIOÈ $\varepsilon_F^0 > \varepsilon_i^0$

$$\Rightarrow P_{Fi}(T) = \frac{|\langle \varepsilon_F^0 | B | \varepsilon_i^0 \rangle|^2}{\hbar^2} f_T(\omega_{Fi} - \omega)$$

DOVE $f_T(x) = \left| \sin\left(\frac{xT}{2}\right) \frac{2}{x} \right|^2$



SE T GRANDE $f_T(x) \simeq 2\pi T \delta(x)$

CIOÈ $\lim_{T \to \infty} \frac{f_T(x)}{T} = 2\pi \delta(x)$

QUESTO VUOL DIRE CHE

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{P_{fi}(T)}{T} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle \varepsilon_f^0 | B | \varepsilon_i^0 \rangle\right|^2 \delta(\varepsilon_f^0 - \varepsilon_i^0 - \hbar\omega)}$$

<u>REGOLA AUREA DI FERMI</u>

SE $\varepsilon_f^0 > \varepsilon_i^0$ CIOÈ LO STATO TRANSITA DA UN LIVELLO + BASSO AD UNO + ALTO LA PERTURBAZ. ESTERNA DI FREQ ω GLI CEDE ENERGIA SOLO SE $\omega = \frac{(\varepsilon_f^0 - \varepsilon_i^0)}{\hbar}$

AL CONTRARIO SE $\varepsilon_i^0 > \varepsilon_f^0$ LO STATO CEDE ENERGIA ALLA PERTURBAZIONE DI FREQ. ω SOLO SE $\omega = \frac{\varepsilon_f^0 - \varepsilon_i^0}{\hbar}$

PARTICELLA IN CAMPO EM

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - q\varphi}$$ LAGRANGIANA

POT VETTORE POT SCALARE

PERCHÉ UN TERMINE HA SGN + E L'ALTRO − ?

QUESTO PERCHÉ LE EQ. DI MAXWELL SONO INVARIANTI X TRASF RELATIVISTICHE E I SGN DERIVANO DA PT SPAZIALE E DA PT TEMPORALE

$$A_\mu = (\vec{A}, q)$$

$$A_\mu \frac{dx^\mu}{dt} = A\vec{v} - \varphi$$

QUESTA È LA FORMA + GENERALE CHE POSSIAMO FARE ALLA LAGRANGIANA CON TERMINE LINEARE

(NON È L'UNICA MA È LA + SEMPLICE)

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m v_i + \frac{q}{c} A_i$$

NON È + VERO CHE $p_i = m v_i$ PERCHÉ C'È UNA CORR DATA DAL CAMPO SUPP $\vec{A}$ SIA FUNZ GEN DI $\vec{x}$ E t

RELAZ INVERSA? $v_i = \frac{1}{m}\left(p_i - \frac{q}{c} A_i\right)$

$\Rightarrow$ POSSIAMO DEF L'HAMILTONIANA

$$\boxed{\mathcal{H}} = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \left(m v_i + \frac{q}{c} A_i\right) v_i - \mathcal{L}$$

$$= m v^2 + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - \frac{1}{2} m v^2 - \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} + q\varphi = \frac{1}{2} m v^2 + q\varphi$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\varphi}$$

FORMA LINEARE LAGRANGIANA $\Rightarrow$ FORMA QUADRATICA ALL'HAMILTONIANA

EQ. DEL MOTO: FORMALISMO LAGRANGIANO

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{q}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \cdot v_j - q\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \nabla_i L$$

$$\left[\vec{v}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\right]_i = \varepsilon_{ijk}\, v_j (\vec{\nabla}\wedge\vec{A})_k = \varepsilon_{ijk}\, v_j \varepsilon_{klm} \nabla_l A_m$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) v_j \nabla_l A_m = v_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - v_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}$$

$$\Rightarrow \nabla_i L = \frac{q}{c}\left[\vec{v}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\right]_i + \frac{q}{c}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})A_i - q\nabla_i\varphi$$

$$\frac{d}{dt}p_i = \frac{d}{dt}\left(m v_i + \frac{q}{c}A_i\right) = m\frac{dv_i}{dt} + \frac{q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}v_j + \frac{q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}$$

$$m\frac{dv_i}{dt} = \frac{q}{c}\left[\vec{v}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\right]_i - q\nabla_i\varphi - \frac{q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}$$

$$= qE_i + \frac{q}{c}(\vec{v}\wedge\vec{B})_i$$

$$\begin{cases} E_i = -\nabla_i\varphi - \frac{q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} \\ B_i = (\vec{\nabla}\wedge\vec{A})_i \end{cases}$$

OSS

ABBIAMO MODO L DI UNA PARTICELLA LIBERA DI UN TERMINE

$$\frac{1}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - \varphi$$

SE INTRODUCIAMO DI NUOVO $\vec{A}$ E φ

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f \qquad \varphi \longrightarrow \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c}\vec{A}\vec{v} - \varphi \longrightarrow \frac{1}{c}\vec{A}\vec{v} - \varphi + \frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{\nabla} f + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} f$$

$$= \frac{1}{c}\vec{A}\vec{v} - \varphi + \frac{1}{c}\frac{d}{dt} f(x,t)$$

SE VARIAMO LA LAGRANGIANA DI UNA MISURA AZIONE RISPETTO AL TEMPO QUESTA NON CAMBIA $\Rightarrow$ LE LEGGI DEL MOTO SONO INVARIANTI

$\Rightarrow$ INVARIANZA DI GAUGE

OSS

FISSATI $\vec{E}$ e $\vec{B}$ $\Rightarrow$ $\vec{A}$ e φ NON SONO UNIVOC DET A CAUSA DELLE TRASF DI GAUGE

SE $\vec{E}=0$ $\quad \vec{B}=\text{cost}$

$\varphi=0 \qquad \vec{A}=-\frac{1}{2}\vec{x}\wedge\vec{B}$

$$B_i=\varepsilon_{ijk}\nabla_j A_k=-\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\nabla_j\varepsilon_{klm}x_l B_m$$

$$=-\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}B_m=B_i$$

ABBIAMO FATTO UNA BUONA SCELTA DI $\vec{A}$ XKÉ OTTENGO $\vec{B}$ COSÌ

(FACILE DA VERIF ANALOG. CON φ ED $\vec{E}$)

$$\vec{\nabla}\vec{A}=-\frac{1}{2}\nabla_i\varepsilon_{ijk}x_j B_k=-\frac{1}{2}\varepsilon_{iik}B_k=0$$

SODDISFATTA $\vec{\nabla}\vec{A}=0$

$$L=\frac{1}{2}mv^2-\frac{q}{c}(\vec{x}\wedge\vec{B})\vec{v}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{q}{2cm}(\vec{x}\wedge m\vec{v})\vec{B}$$

LAGRANGIANA IN $\vec{B}$ COST

X QUANTO RIGUARDA L'HAMILTONIANA:

$$H=\frac{1}{2m}\left(\vec{p}+\frac{q}{2c}\vec{x}\wedge\vec{B}\right)^2=\frac{\vec{p}^2}{2m}+\frac{q}{2mc}\vec{p}(\vec{x}\wedge\vec{B})+\frac{q^2}{8mc^2}(\vec{x}\wedge\vec{B})^2$$

$$=\frac{\vec{p}^2}{2m}+\frac{q}{2mc}\underbrace{(\vec{x}\wedge\vec{p})}_{\text{MOMENTO ANGOLARE}}\vec{B}+\frac{q^2}{8mc^2}(\vec{x}\wedge\vec{B})^2$$

$\vec{B}$ È LUNGO z $\Rightarrow$ USIAMO COORD CILINDRICHE

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\dot{x}=\dot{\rho}\cos\theta-\rho\dot{\theta}\sin\theta\\ \dot{y}=\dot{\rho}\sin\theta+\rho\dot{\theta}\cos\theta\\ \dot{z}=\dot{z}\end{cases}$$

$$\Rightarrow v^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2$$

$$\vec{v}\cdot\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{B}(\vec{x}\wedge\vec{v})=-\frac{1}{2}B(x\dot{y}-\dot{x}y)=\frac{1}{2}B\rho^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{q}{c}B\rho^2\dot{\theta} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 - 2\omega_L\dot{\theta}\right)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} - \frac{q}{c}B\rho^2 = m\rho^2\left(\dot{\theta} - \frac{qB}{2mc}\right)$$

siccome $L \neq L(\theta) \Rightarrow p_\theta = \text{cost}$

$\Rightarrow \frac{qB}{2mc} = \omega_L$ FREQ. DI LARMOR

$\theta' = \theta - \frac{qB}{2mc}t$ cioè $\dot{\theta}' = \dot{\theta} - \omega_L$

CIOÈ INTRODUCIAMO UN SIST CHE ROTA CON ω_L ATTORNO ALL'ASSE z

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2\left(\dot{\theta}' - \omega_L\right)^2\right) - \rho^2\left(\dot{\theta}' + \omega_L\right)$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2\dot{\theta}'^2\right) + \frac{1}{2}m\rho^2\omega_L^2$$

NEL SDR ROTANTE A MENO DI UN OSCILLATORE QUADRATICO IN ω_L HO L DI UNA PARTE LIBERA $\longrightarrow$ TEOR DI LARMOR

LA STESSA COSA SI PUÒ VEDERE NEL FORMALISMO HAMILTONIANO

CONSIDERIAMO IL PROB IN QM $\longrightarrow q = -e$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - e\varphi$$

$$= \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + \frac{e}{2mc}\left(\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p}\right) + \frac{e^2}{2mc^2}A^2 - e\varphi$$

$\vec{A} = \vec{A}(x,t) \Rightarrow [\vec{A}, \vec{p}] \neq 0$

$[\vec{p}, \vec{A}] = -i\hbar\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

$\Rightarrow$ UN MODO X RISOLVERE IL PROB È SCEGLIERE LA GAUGE TC $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$

$$\Rightarrow H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{e}{mc}\vec{p}\vec{A} + \frac{e^2}{2mc^2}A^2 - e\varphi$$

X LA TEORIA DELLE PERTURBAZ CONSIDERIAMO PICCOLO $\frac{e}{mc}\vec{A} \Rightarrow$ TRASCURIAMO TERMINE QUADRATICO

CI METTIAMO NEL CASO $\varphi = 0$ (IL CASO $\varphi \neq 0$ È BANALE)

$$H = H_0 - \frac{e}{mc}\vec{p}\vec{A}$$

$$P_{fi} = \left(\frac{e}{mc\hbar}\right)^2 \left| \int_{t_0}^{t} dt' \langle \varepsilon_f^0 | \vec{p}\vec{A}(\vec{x},t) | \varepsilon_i^0 \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_f^0 - \varepsilon_i^0)(t'-t_0)} \right|^2$$

IN PARTIC ABBIAMO VISTO IL CASO DI PERTURBAZIONI ARMONICHE IN CUI LA DIPENDENZA DA t ERA ASSOCIATA AD UN'UNICA FREQ. ω

$\Rightarrow$ SCRIVIAMO

$$\vec{A} = \underbrace{\frac{A}{2}}_{\text{AMPIEZZA}}\left[\underbrace{\vec{e}}_{\text{VETT DI POLARIZ}} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} + \vec{e}^{\,*} e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}\right]$$

X REGOLA AUREA DI FERMI, DEF ω_{fi}, L'ASSORBIMENTO O L'EMISSIONE AVVENIVA $\Leftrightarrow$ LA FREQ. ERA ω_{fi}

$$\lim_{T\to\infty} \frac{P_{fi}}{T} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle \varepsilon_f^0 | B | \varepsilon_i^0 \rangle\right|^2 \delta(\omega_{fi} - \omega)$$

NEL NOSTRO CASO $B = \frac{eA}{2mc}\vec{p}\cdot\vec{e}\, e^{i\vec{k}\vec{x}}$

$\vec{k}$ È LEGATO AD ω

NEGLI ESPERIMENTI LE LUNGHE D'ONDA SONO + GRANDI DELLE ATOMI $\Rightarrow \vec{k}\vec{x}$ È MOLTO PICCOLO

$\Rightarrow$ HA SENSO SVILUPPARLO IN SERIE

$$e^{i\vec{k}\vec{x}} \simeq \mathbb{1} + i\vec{k}\vec{x} - \frac{(\vec{k}\vec{x})^2}{2} + \dots$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = \frac{i\omega A}{2c}\vec{e}\,(1 + i\vec{k}\vec{x})\, e^{-i\omega(t-t_0)} + cc$$

TRASCURERÒ LA DIP DA x PER APPROSSIMAZ DI DIPOLO $\Rightarrow \frac{eA}{2mc}\vec{p}\cdot\vec{e}$

$$\langle E_f^0 | \frac{eA}{2mc}\vec{p}\vec{e} | E_i^0 \rangle = \frac{eA}{2mc}\frac{i}{\hbar}\langle E_f^0 | [H_0, \vec{x}] | E_i^0 \rangle \cdot \vec{e}$$

$$= \frac{eA}{2mc}\frac{i}{\hbar}(E_f^0 - E_i^0)\langle E_f^0 | \vec{x}\cdot\vec{e} | E_i^0 \rangle$$

DIPOLO NUCLEO-e^- $\Rightarrow$ DIPOLO $\vec{D} = e\vec{x}$

$$= -\frac{iA}{2mc}(E_f^0 - E_i^0)\langle E_f^0 | \vec{D}\cdot\vec{e} | E_i^0 \rangle$$

QUINDI:

$$P_{fi} = \text{cost} \cdot |\langle E_f^0 | \vec{D}\vec{e} | E_i^0 \rangle|^2$$

CI SONO DEI CASI IN CUI L'ELEM DI MATRICE È NULLO RICAVATI IN APPROSSIMAZIONE AL 1° ORDINE

VOGLIAMO DISCUTERE IN APPROSSIMAZ DI DIPOLO QUANDO NON È NULLO

OSS CHE $I\vec{D}I^{-1} = -\vec{D}$ DISPARI SOTTO OPERAZ DI INVERSIONE

IN LINEA DI PRINCIPIO NON SIAMO IN GRADO DI DIAGONALIZZ H_0 E QUINDI DET GLI E_0 PER UN ATOMO QUALUNQUE

MA ESSENDO UN SIST ISOLATO VALGONO I PRINCIPI DI CONSERVAZIONE CHE ABBIAMO VISTO: $[H_0, \vec{L}] = 0 \Rightarrow$ POSSIAMO UTILIZ UNA BASE

$$|E, L, M, \omega\rangle$$

L^2 L_z I

1) ω AUTOVAL DI I

AFFINCHÉ $\langle \omega' | \vec{D} | \omega \rangle \neq 0 \Rightarrow \omega\omega' = -1$

CIOÈ LA PARITÀ DELLO STATO INIZIALE E FINALE DEVONO ESSERE OPPOSTE

DIM

$$\langle \omega' | I^{-1} I D I^{-1} I | \omega \rangle = \langle \omega' | D | \omega \rangle$$

$$= \omega\omega' \langle \omega' | I \vec{D} I^{-1} | \omega \rangle = \omega'\omega \langle \omega' | -\vec{D} | \omega \rangle$$

$$\Rightarrow (1 + \omega'\omega) \langle \omega' | \vec{D} | \omega \rangle = 0$$

XKÉ $\langle \omega' | \vec{D} | \omega \rangle \neq 0 \Rightarrow \boxed{\omega'\omega = -1}$ ■

2) M AUTOVAL DI L_z

$D_\pm = D_1 \pm i D_2$

$[L_i, D_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} D_k \Rightarrow [L_z, D_\pm] = \pm \hbar D_\pm$

ANALOGA A OPERATORE DI SALITA/DISCESA

$D_+ \longrightarrow$ AUTOSTATO CON AUTOVAL $L_z + 1$

$D_- \longrightarrow$ " " " $L_z - 1$

$$\langle M'' | [L_z, D_\pm] | M' \rangle = \pm \hbar \langle M'' | D_\pm | M' \rangle$$

$$\hbar (M'' - M') \langle M'' | D_\pm | M' \rangle$$

$$\Rightarrow (\Delta M \pm 1) \langle M'' | D_\pm | M' \rangle = 0$$

XKÉ $\langle M'' | D_\pm | M' \rangle \neq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta M = \pm 1}$

QUESTO VALE ANCHE X LE COMP X ED Y

$\langle M'' | D_x | M' \rangle \neq 0 \Rightarrow \Delta M = \pm 1$

$\langle M'' | D_y | M' \rangle \neq 0 \Rightarrow \Delta M = \pm 1$

L_z GEN ROTAZ ATTORNO Z $\Rightarrow D_z$ INVARIATO $\Rightarrow [L_z, D_z] = 0$

$\Rightarrow \langle M'' | [L_z, D_z] | M' \rangle = 0 \Rightarrow \Delta M \langle M'' | D_z | M' \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle M'' | D_z | M' \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{\Delta M = 0}$

SAPPIAMO CHE IN UN SIST A SIMM CENTRALE C'È DEGENERAZ LEGATA A L_z, QUESTO IN ASSENZA DI UN CAMPO EXT

$\longrightarrow$ VEDREMO CHE IN PRESENZA DI UN CAMPO EXT NON È COSÌ

3) L

$\langle L'' | \vec{D} | L' \rangle$

$\vec{D} = \vec{x} \cdot \cos\vartheta \Rightarrow$ A MOMENTO SP CON $L=1$ A MOLTIPLIC UN ANG SP CON MOMENTO L'

COMBINAZ MOM ANG L' E 1 $\rightarrow$ PUÒ ESSERE ESPANSO

$\langle L'' | \vec{D} | L' \rangle \neq 0 \Rightarrow \Delta L = L'' - L' = \pm 1, 0$

XKÉ $\vec{D}$ HA MOM 1 $\Rightarrow$ USIAMO REGOLA DI COMPOSIZ

ORMAI SIAMO STO ABBIAZ $L' \neq 0$

SE $L' = 0 \Rightarrow L'' = 1$

OVVERO NON È PERMESSA LA TRANSIZ $\Delta L = 0 \rightarrow L' = L'' = 0$

CIOÈ NON CI SONO STATI INVAR SOTTO ROTAZ IN STATI INVAR SOTTO ROTAZ

QUESTO RISULTATO HA VALIDITÀ + GEN DELL'INTERAZ DI DIPOLO

FORMA + GEN DELL'INTERAZ ORA DEL TIPO

$\vec{p} \vec{A} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$ X INTERAZ DI TIPO ARMONICO CON ω FISSATA

XKÉ NON È POSSIBILE?

SE $L' = 0 \Rightarrow M' = 0 \Rightarrow$ ABBIAMO UN VETT APPLICATO A STATO CON $L = 0$

SE MANTENIAMO LA CONDIZ CHE $\nexists \Delta L = 0$

QUESTA È CONDIZ DELLA TRASVERSALITÀ DELL'ONDA

SE QUESTA PROPAGA LUNGO Z $\Rightarrow$ $\vec{E}$ E $\vec{B}$ OSCILLANO SU x-y

$(p_x A_x + p_y A_y) e^{i(kz - \omega t)} |M=0\rangle$

MA $p_x A_x$ E $p_y A_y$ NON HANNO AUTOST CON $M=0$ CHE È INDOTTA DA $p_z A_z$

POSSIAMO SCEGLIERE DI INTERAGIRE IL NOSTRO ATOMO IN UNA MANIERA CON UNA CERTA POLARIZZAZ $\vec{e}$

PUÒ X ES ESSERE CIRCOLARE $\vec{e}_c = (1, i, 0)$

$\Rightarrow \vec{D}\vec{e}_c = D_1 + i D_2 = D_+$

$\Rightarrow$ ENTRA SOLO LA PARTICOLARE COMBINAZ D_+ CHE INDUCE SOLO TRANSIZ CON $\Delta M = +1$

SE SCEGLIESSIMO L'ALTRA POLARIZ $\Rightarrow$ AVREMMO D_- CHE INTRODUCE SOL $\Delta M = -1$

(RIGHE SIGMA)

D_z INDUCE SOLO $\Delta M = 0$

QUESTO È VERO X ATOMI CON

X IDROGENOIDI C'È UN SOLO e^-

IN QUESTO CASO I ED L NON SONO INDIP $\rightarrow \omega = (-1)^l$

$\Rightarrow$ REGOLE DI PARITÀ INDICANO REGOLE SU l

X ES $\Delta l \neq 0$ XKÉ VIOLA REG DI SOLO SOLA PARITÀ

OLTRE ALL'ETÀ STAZ (INTERAGIAMO ATOMO IN $\vec{E}$ COST E VEDIAMO SOMMARGLI)

$\exists$ ETÀ ZEITMANN $\rightarrow$ INTERAGIAMO ATOMO IN $\vec{B}$ COST

EFFETTO ZEEMAN CLASSICO

FINO AD ORA ABBIAMO QUANTIZZATO SOLO L'ATOMO E NON LA PERTURBAZ

NON LO FACCIAMO MAI ~~...~~ L'ELETTROMAGNETISMO HA INVARIANZA RELATIVISTICA

LA FORZA EM È TRATTATA COME UN CAMPO, CHE HA DEGLI DI LIBERTÀ

ANCHE LO SPIN È ENTRA IN MODO NATURALE CON L'INTRODUZ DELLA NOZIONE DI CAMPO

→ X CAMPI INVAR X TRASF RELATIVISTICHE SENZA LA NOZIONE DELLO SPIN

⇒ TRATTERIAMO IL TUTTO IN QUESTA TRATTAZ SEMI CLASSICA

ATOMO IN CAMPO MAGN EST COST

$$H = H_0 + \frac{e}{2mc}\vec{L}\cdot\vec{B} + \frac{e^2}{8mc^2}\sum_{i=1}^{Z}(\vec{r}^{(i)}\wedge\vec{B})$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{Z}\vec{L}_i \quad \times Z \text{ ELETTRONI}$$

IL II TERMINE DARÀ DELLA FORMA $\frac{e\hbar}{2mc}B$

$\frac{e\hbar}{2mc}$ È DETTO MAGNETONE DI BOHR

DET IL VALORE DI B X CUI VALE IL TEOR PERTURBAZ

⇒ IL II TERMINE È TRASCURABILE QUANDO VALE (??)

$$\vec{\mu}_L = -\frac{e\vec{L}}{2mc} \qquad H = H_0 - \vec{\mu}_L\vec{B}$$

↳ MOM MAGN ORBITALE

IN QUESTO CASO NON ABBIAMO BISOGNO DI OTTENERE LA TEORIA DELLE PERTURBAZ

LA PT PERTURBATIVA DIP DA $\vec{L}$ ATTRAVERSO UNA COST

E $[H_0, \vec{L}] = 0$

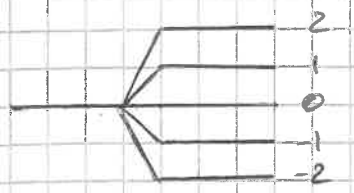
⇒ POSSIAMO SCEGLIERE UN INS COMPL DI OSS

CONVIENE ROTARE $\vec{B} \parallel \hat{z}$ COSÌ DA PRENDERE L^2 ED L_z

$$\Rightarrow H = H_0 - \frac{eB}{2mc}L_z = H_0 - \mu_0\frac{BL_z}{\hbar}$$

$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$ MAGNETONE DI BOHR

$H|E,L,M\rangle = (E - \mu_0 B M)|E,L,M\rangle \qquad -L \le M \le L$



$2L+1$ LIVELLI

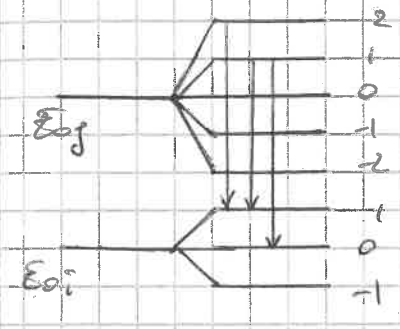
LA PRESENZA DI B RIMUOVE COMPLETAM LA DEGENERAZ SU L.

(QUELLA ACCIDENTALE ERA STATA RIMOSSA DAGLI $2e^-$)

QUESTI LIVELLI SONO MA COME EQUIDIST $\mu_0 B$

SE VOGLIAMO MISURARE I LIVELLI DOBBIAMO IRRADIARLI CON EMR

$\Rightarrow$ APPROSSIMAZ DI DIPOLO



SI POSSONO ESSERE TRANSIZ TRA STATI CON LA STESSA LUNGHEZZA

SE ACCENDO IL CAMPO B ALLORA B RICHIEDE SPOSTAMENTI DOVUTI PER I POSSIBILI ΔM

$$\nu_0 + \underbrace{\frac{\mu_0 B}{h}}_{} \Delta M$$

$\longrightarrow$ FREQ. DI LARMOR

ABBIAMO RICONOSCIUTO COME LE TRANSIZ CON ΔM POSSONO ESSERE SELEZIONATE SEGUENDO LA POLARITÀ DELLA LUCE

$\Delta M = 0 \longrightarrow$ POLARIZ PIAN

$\Delta M = \pm 1 \longrightarrow$ POLARIZ CIRC

QUESTO È IL COSIDDETTO EFF ZEEMAN CLASSICO

ACCENDENDO B CIASCUNA RIGA È SPLITTATA IN 3 SECONDO LA POLARIZ

$\nu_0 + \frac{\mu_0 B}{h} \Delta M$ X ALCUNI ATOMI CIÒ NON ACCADE

$\longrightarrow$ EFF ZEEMAN ANOMALO

ATOMO GENERICO

Z ELETTRONI

I RUOLI PER QM NON CAMBIANO

x L'ATOMO DI IDROGENO ABBIAMO IDENTIFICATO $\mathcal{H}$ CON LO SP DEGLI STATI POSSIBILI DI UN SINGOLO e^-

x DESCRIVERE Z ELETTRONI

$$\underbrace{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_{Z \text{ VOLTE}} = \mathcal{H}^{\otimes Z}$$

$\otimes$ PRODOTTO TENSORIALE

$\varphi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_Z)$ HO Z VETT POSIZ ($\forall e^-$ UNA COORDINATA)

CASO $\boxed{Z=2}$

$$\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \sum_{m,n} C_{mn}\, \varphi_m^{(1)}(\vec{x}_1)\, \varphi_n^{(2)}(\vec{x}_2)$$

$$\rightarrow |\vec{e}_1 \dots \vec{e}_Z\rangle = |\vec{e}_1\rangle |\vec{e}_2\rangle \dots |\vec{e}_Z\rangle$$

OTTENIAMO UNA BASE FATTORIZZANDO LE BASI DEI SSP

IN REALTÀ x DEF COMPLETAMENTE $\mathcal{H}^{\otimes Z}$ BISOGNA DEF I PROD SCALARI

$$\langle \vec{e}_1 \dots \vec{e}_Z| = \langle \vec{e}_Z| \dots \langle \vec{e}_2| \langle \vec{e}_1|$$

$$\langle \vec{e}_1' \dots \vec{e}_Z' | \vec{e}_1 \dots \vec{e}_Z\rangle = \langle \vec{e}_1' | \vec{e}_1\rangle \dots \langle \vec{e}_Z' | \vec{e}_Z\rangle$$

TRA I VARI C_{nm} $\exists$ COEFF SCRIVIBILI COME $C_{nm} = a_n b_m$

$$\Rightarrow \sum C_{nm}\, \varphi_m(x_1)\, \varphi_n(x_2) = \sum_n a_n \varphi_n(x_2) \sum_m b_m \varphi_m(x_1)$$

$= |A\rangle |B\rangle$ STATO FATTORIZZATO

NOTIAMO CHE GLI ELEM DELLA BASE SONO SEMPRE FATTORIZZATI

MA GLI STATI GENERICI NO

STATI TC $C_{nm} \neq a_n b_m$ (NON FATTORIZZATI) SONO DETTI "ENTANGLED" ($\simeq$ INTRECCIATI)

LA LORO $\exists$ È UNA CARATT PECULIARE DELLA QM CHE DÀ LUOGO AD ASPETTI INTERESSANTI

A QUESTO PTO IL SIST AVRÀ UN HAMILTONIANA

$$H = \sum_{i=1}^{Z} \left[\frac{[\vec{p}^{(i)}]^2}{2m} - \frac{Z e^2}{r^{(i)}} \right] + \underbrace{\sum_{\substack{i>j \\ i=1 \\ j=1}}^{Z} \frac{e^2}{r^{(i,j)}}}_{\text{TERMINE DI REPULSIONE TRA GLI ELETTRONI}}$$

$r^{(i,j)} \rightarrow$ DIST TRA ELETTRONI

DAL PTO DI VISTA CLASSICO GLI e^- SONO IN MOVIMENTO

$\Rightarrow$ CARICHE EM CHE INTERAGISCONO

$\Rightarrow$ BISOGNA AGGIUNGERE ALTRI TERMINI DI NATURA RELATIVISTICA CHE NON CONOSCIAMO

1) PASSANDO GIÀ ALL'ELIO CON 2 e^- NON CONOSCO NEANCHE BENE L'HAMILTONIANA

2) AMMESSO CHE H SIA COME L'ABBIAMO SCRITTA

$\rightarrow$ QUI ESISTE UN'ERRORE NON ANALITICAMENTE RISOLUBILE X L'ATOMO DI ELIO

$\rightarrow$ ECCO PERÒ ABBIAMO INTRODOTTO LA TEORIA DELLE PERTURBAZIONI

$$H = \sum_{i=1}^{Z} H_i + V$$

H_i: INTERAZ NUCLEO E SINGOLO e^-

V: NEL MIGLIORE DEI CASI POSSIAMO TRATTARLO COME PERTURBAZIONE

SE PRENDIAMO QUESTO PTO DI VISTA IL 1° PASSO È DISCUTERE L'HAMILTONIANA IMPERTURBATA $H_0 = \sum H_i$

$[H_i, H_j] = 0$ PERÒ LE p^i COMMUTANO CON LE q^j E p^j

$\Rightarrow$ POSSIAMO CERCARE LO SPETTRO IN MANIERA SEMPLICE

I LIVELLI ENERGETICI NON SONO ALTRO CHE LA SOMMA DELLE ENERGIE E_{ni}

$$E = \sum_{i=1}^{Z} E_{ni} \quad \text{CON} \quad E_n = -\frac{Z^2 e^2}{2 n^2 r_B}$$

$$\varphi^{(0)}_{n_1 \dots n_Z}(x_1 \dots x_Z) = \varphi^{(0)}_{n_1}(x_1) \dots \varphi^{(0)}_{n_Z}(x_Z)$$

I SINGOLI ELETTRONI IN QUESTA APPROSSIMAZ SI COMPORTANO IN MODO INDIP L'UNO DALL'ALTRO

→ "APPROSSIMAZ ELETTRONI INDIPENDENTI"

CIASCUN e^- È CARATT DA n, l, m

$|(n_1, l_1, m_1), (n_2, l_2, m_2), \dots (n_Z, l_Z, m_Z)\rangle$

AUTOSTATO DI H_0 IN APPROSSIMAZ ELETTRONI INDIP

SAPPIAMO CHE C'È UNA DEGENERAZ SU m

E CONSIDERANDO LE IMPERTURBATE, CHE SONO COME L'IDROGENO,

⇒ CI SAREBBERO ANCHE DEGENERAZIONI ACCIDENTALI SU l

→ MA ACCESA LA PERTURBAZ LA DEGENERAZ SU l SCOMPARE COME VISTO LA VOLTA SCORSA

⇒ ESSENDOCI + e^-, QUESTA SCOMPARE

NOTAZ SPETTROSCOPICA

n	1	2	3	... n
	s	p	d	f
l	0	1	2	3

ES LO STATO FOND:

H	$1s$	IDROGENO
He	$(1s)^2$	ELIO
Li	$(1s)^2 2s$	LITIO ($Z=3$)

PRINCIPIO DI PAULI: SI POTREBBE PENSARE CHE NEL LITIO ESCLUE NELLO STATO FOND STANDO IN $1s$ MA "CI POSSONO ESSERE AL + 2 ELETTRONI NELLO STESSO STATO"

Be $(1s)^2(2s)^2$ BERILLIO

Bo $(1s)^2(2s)^2 2p$ BORO

C $(1s)^2(2s)^2 2p^2$ CARBONIO

XKÉ NON SI METTE LA PARENTESI? QUANDO $l=1$ (p) HO DEGEN 3 di m

$\Rightarrow$ POSSO INSERIRE 6 e^-

QUANDO È COMPLETO LO METTO TRA PARENTESI

Ne $(1s)^2(2s)^2(2p)^6$ NEON ($Z=10$)

GLI ELEM TRA PARENTESI SONO DETTI GUSCIO COMPLETO

Ne HA TUTTI GUSCI COMPLETI

ATOMI CON TUTTI GUSCI COMPLETI SONO DETTI GAS RARI ED HANNO PROP SIMILI XKÉ HANNO POCA DISPONIBILITÀ AD INTERAGIRE CON ALTRI e^-

QUELLI CON UN e^- IN + SONO DETTI ALCALINI

UNO POTREBBE PENSARE CHE PER IL FISCATO SI RIEMPIANO I GUSCI AL CRESCERE DI l

$\rightarrow$ NON ESATTAMENTE

IL POTASSIO K HA $Z=19$

K $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6 4s$

INVECE CHE ANDARE NEL 3d VA NEL 4s

QUESTO XKÉ HA ENERGIA + BASSA A CAUSA DEI TERMINI DI REPULSIONE

L'APPROSSIMAZ X ELETTRONI INDIP È MEGLIO DI QUANTO SI POSSA SPERARE

SPIN DELL'ELETTRONE

Il TERZO EVENTO CHE HA INDOTTO A PENSARE LO SPIN IN MC IN UNA FORMULAZIONE RELATIVISTICA, A CAUSA DEL FATTO CHE I CAMPI CON CUI RAPPR LE PARTICELLE DEVONO AVERE RAPPR IRRIDUCIBILI DEL GRUPPO DI LORENTZ, SI INTRODUCE UN NUOVO gdl DI LIBERTÀ DETTO SPIN

UNO DEI MOTIVI È L'ESP ZEEMAN X CON SENSO CHE CONTRIB AL MOMENTO MAGN

LO SPIN VIENE IMMAGINATO COME UNA VAR DI TIPO MOMENTO ANGOLARE

$$[S_i, S_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} S_k$$

LA RAPPR ASSOCIATA A QUESTE REGOLE DI COMMUTAZ NON IMPLICA CHE SIA UN NUM INTERO, POTREBBE ESSERE SEMI-INTERO

ALLO SPIN $S^2 = s(s+1) \longrightarrow s = 0, 1/2, 1, \dots$

QUINDI PARTICELLE CON SPIN INTERO BOSONI
SPIN SEMIINTERO FERMIONI

X ELETTRONI (E NON SOLO) $s = 1/2$

$\Rightarrow$ LA MATR HA DIM $2s+1 = 2 \Rightarrow$ 2 POSSIBILI VAL DI S_z

$S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$ AUTOVAL POSSIBILI DI UNA MISURA DI S_z + UP
− DOWN

L'OPERATORE S_z SARÀ UNA MATR CHE AGISCE SU SP BIDIM

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ NELLA BASE IN CUI È DIAGONALE

$$[S_i, p_j] = [S_i, q_j] = 0$$ IMP DALLE VAR p E q

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

GLI OPER. DELLO SPIN SU CUI AGISCE LO SPIN SONO DEGLI SPINORI

$$S^2 = \frac{3}{4}\mathbb{1}\hbar^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\hbar^2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4}\hbar^2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow S_x^2 = S_z^2 = S_y^2 = \frac{\hbar^2}{4}\mathbb{1}$$

$$S_x = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$$

$$0 = [S_y^2, S_z] = S_y \underbrace{[S_y, S_z]}_{i\hbar S_x} + \underbrace{[S_y, S_z]}_{i\hbar S_x} S_y$$

MUTIPLICO $\mathbb{1}$ $\Downarrow$ CONMUTA

$$= i\hbar(S_y S_x + S_x S_y)$$

$$\Longrightarrow 0 = \{S_x, S_y\} = S_x S_y + S_y S_x$$ ANTICONMUTA TRANS.

ANALOGO

$$0 = \{S_x, S_z\} = \{S_y, S_z\}$$

$$0 = \{S_x, S_z\} = \frac{\hbar}{2}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left[\begin{pmatrix} a & -b \\ b^* & -c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & -c \end{pmatrix}\right] = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2c \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = c = 0}$$

$$\Longrightarrow S_x = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix} \quad \text{TC} \quad S_x^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$S_x^2 = \begin{pmatrix} |b|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar^2/4 & 0 \\ 0 & \hbar^2/4 \end{pmatrix} \Longrightarrow b = \frac{\hbar}{2} e^{i\varphi}$$

$$\longrightarrow S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

IL FATTO CHE φ NON SIA UNICO DIPENDE DAL FATTO CHE GLI AUTOSTATI SONO DEF A MENO DI UNA COST ARBITRARIA

$\longrightarrow$ POSSIAMO ELIMINARLA: $\varphi = 0 \Longrightarrow S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

A QUESTO PUNTO S_y È DEF. DALLE REGOLE DI COMMUTAZ.

MA SE OSS CHE $S_z = \sigma_z \frac{\hbar}{2}$

MATRICI DI PAULI

$$S_x = \sigma_x \frac{\hbar}{2}$$

$$\Rightarrow S_y = \sigma_y \frac{\hbar}{2}$$

$\Rightarrow$ NELLA BASE IN CUI S_z È DIAGONALE LE MISURE DI SPIN SONO $\hbar/2$ LE MATRICI DI PAULI

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

ALLORA DATO $|\varphi\rangle$

$$\langle x+|\varphi\rangle = \varphi_+(x) = \varphi_{\hbar/2}(x)$$

$$\langle x-|\varphi\rangle = \varphi_-(x) = \varphi_{-\hbar/2}(x)$$

$$\varphi_x(\vec{x}') = \begin{bmatrix} \varphi_+(\vec{x}') \\ \varphi_-(\vec{x}') \end{bmatrix}$$

INDISTINGUIBILITÀ

PARTICELLE ELEMENTARI VENGONO CONSIDERATE INDISTINGUIBILI, CIOÈ ∄ NESSUN ATTRIBUTO DA ASSOCIARE AD UNO CHE NON SIA CONDIVISO ANCHE DALL'ALTRO

QUESTA NOZIONE ∃ ANCHE MC MA SI BASA COMPLESSI TRAJETTORIE ∃ DIFFERENZE (XES GRAFICI ECC) MA RIMANGONO INDISTINGUIBILI X APPROSSIMAZ MENTRE XES SU PARTICELLE FONDAM SONO MENO CARATT

MA XES LA POSIZ AL TEMPO $t=0$ È UNA DISTINZIONE

→ SICCOME IN MC HA SENSO LA TRAIETTORIA POSSO DISTINGUERLO SEMPRE

SE HO 2 e^- q_1, p_1, s_1 E q_2, p_2, s_2

POSSO PENSARE DI DISTINGUERLI XKÉ CLASSICAM STANNO IN STATI DIVERSI

⇒ ASSEGNANDO LO STATO IN $t=0$ SONO CLASSIC DISTINGUIB $\forall t$

DAL PTO DI VISTA QUANTICO ANCHE MISURANDO LA POSIZ QUANDO IL SIST EVOLVE HO SOLO PROBAB ⇒ NON SO DOVE STANNO

SE ANCHE MISURO UN e^- ALLA POSIZ q QUALCOSA SARÀ?

COSA CI PERMETTE DI DISTINGUERLI? NULLA

LA NOZIONE CHE ∃ L'ELETTRONE 1 O 2 NON HA ALCUN SENSO, NON SO DIRE CHI È CHI

SE HO UN SIST DI N ELETTRONI NON HA SENSO PARLARE DI SOTTOINS DI N-1 ELETTRONI XKÉ NON POSSO DISTINGUERLI

MA → DOBBIAMO SEMPRE PARLARE DI TUTTO CIÒ CHE È DELL'UNIVERSO?

E QUANDO PARLIAMO DELL'ATOMO DI IDROGENO CON 1 e^-?

È UNA MODELLIZZAZ IN CUI C'È UN UNIVERSO CON 1 e^-

XES

NELL'ATOMO He CHE HA 2 e^- NON HA SENSO DISTINGUERLI

$\Rightarrow \nexists$ OSSERVAZIONE PER 1° o 2° e^- MA OSS DEL SIST COMPOSTO APPARTENENTE A $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ SP DELLE STATI

MA LE OSS NON POTRANNO ESSERE COMPLETI OPERATORI AUTOAGGIUNTI SU $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ MA ESSERE TC SE SCAMBIO GLI OGGETTI PARTICOLARI ① E ② ATTRAVERSO L'OPERATORE DI SCAMBIO

$\Pi q_1 \Pi^+ = q_2 \qquad \Pi q_2 \Pi^+ = q_1$

$\Pi p_1 \Pi^+ = p_2 \qquad \Pi p_2 \Pi^+ = p_1$

$\Pi S_1 \Pi^+ = S_2 \qquad \Pi S_2 \Pi^+ = S_1$

$\Rightarrow$ LE OSS POSSIBILI DEVONO ESSERE TC NON DISTINGUENDO TRA ① DA ②

$\Rightarrow \Pi \mathcal{E} \Pi^+ = \mathcal{E}$

(OVVIO CHE Π AUTOAGGIUNTO: $\Pi = \Pi^+$ E $\Pi^2 = \mathbb{1}$)

HAMILTONIANA:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}$$

INVAR PER SCAMBIO TRA 1 E 2

XKÉ LE MASSE SONO UGUALI E IL TERMINE DI INTERAZ È DEF SULLA COPPIA

L'INDISTINGUIBILITÀ DELLA PARTIC DICE CHE $\nexists$ ALTRE OSS SE NON QUELLE INVAR PER Π

$\Rightarrow$ LE OSS POSSIBILI NON SONO TUTTE I POSSIBILI DI AUTOAGG

SE PRENDO 2 ELETTRONI $\Rightarrow$ CONSIDERO LO SCAMBIO TRA 2 QUALUNQUE PARTICELLE $\Rightarrow$ GENERA UN GRUPPO DI PERMUTAZIONI SU 2 OGGETTI

$\Rightarrow$ ASSOCIERÒ OPERAZIONI A PERMUTAZIONI QUALUNQUE DI PARTIC

$\longrightarrow$ INVAR $\forall$ PERMUTAZ

IN UN SIST COMPOSTO LO SP DELLE STATI È IN GENE $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$

POTREMMO AVERE IL 1° e^- IN $|A\rangle$ E IL II° IN $|B\rangle$

$|A\rangle|B\rangle = |A,B\rangle$ (STIAMO APPLICANDO LA PONDERATURA DI ~~APPL~~ TENSORE IL 1° IN $|A\rangle$ E IL II IN $|B\rangle$ ANCHE SE SONO INDISTING.)

QUESTO È UNO STATO PRODOTTO IN CUI NON C'È ENTANGLEMENT

$\pi|A,B\rangle = |B,A\rangle$ POICHÉ $\pi^2 = \mathbb{1}$ ED È AUTOAGG $\Rightarrow$ AUTOVAL ± 1

$\rightarrow$ STATI A COMB SIMM DI B ED A = AUTOSTATI CON AUTOVAL $+1$

$\pi(|A,B\rangle + |B,A\rangle) = |A,B\rangle + |B,A\rangle$

$\rightarrow$ STATI ANTISIMM = AUTOSTATI CON AUTOVAL -1

$\pi(|A,B\rangle - |B,A\rangle) = -(|A,B\rangle - |B,A\rangle)$

$\Rightarrow$ LO SP DI HILBERT SI PUÒ SCOMPORRE IN SP SIMM + ANTISIMM

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_A$$

OVVIAMENTE OGNI FUNZ

$$f(x_1,x_2) = \underbrace{\frac{f(x_1,x_2)+f(x_2,x_1)}{2}}_{\text{COMB SIMM}} + \underbrace{\frac{f(x_1,x_2)-f(x_2,x_1)}{2}}_{\text{COMB ANTISIMM}}$$

ABBIAMO DETTO CHE H DEVE ESSERE INVARIANTE

$\pi H \pi^{\dagger} = H \Rightarrow [\pi, H] = 0$ COMPATIBILI

$\Rightarrow$ AGENDO SU UN AUTOSTATO DELL'ALTRA OTTENIAMO AUTOSTATO CON STESSO AUTOVAL

$\Rightarrow$ SE IN $t=0$ SONO IN UNO STATO SIMM A $t \neq 0$ SONO ANCORA IN STATO SIMM

IDEM CON STATI ANTISIMM

IN TEORIA DI GRUPPI C'È IL TEOR DI SPIN E STATISTICA CHE DICE CHE SE UNA PART È UN BOSONE (SPIN INTERO) ~~SE~~ IN $t=0$ È IN UNO STATO SIMM $\Rightarrow$ SI TROVERÀ SEMPRE IN STATO SIMM

SE È UN FERMIONE STATO ANTISIMM A $t=0 \Rightarrow$ SEMPRE ANTISIMM

ALLORA GLI ELETTRONI NON SONO DESCRITTI DA TUTTO LO SP DI HILBERT MA SOLO NELLA COMP ANTISIMMETRICA

$\Rightarrow$ NON SONO TUTTI STATI FATTORIZZABILI MA ENTRAMBI CI DEVE DA ESSERE ANTISIMM + SCAMBIO

IL PRINCIPIO DI PAULI SEGUE DA QUESTE REGOLE

- SONO INDISTINGUIBILI
- GLI e^- SONO FERMIONI $\Rightarrow$ ANTISIMM

SE 2 PARTI SONO IN STATI ANTISIMM

$$\Rightarrow |AB\rangle - |BA\rangle = 0$$

SE $|B\rangle = |A\rangle$

$\Rightarrow$ I 2 e^- NON POSSONO STARE NELLO STESSO STATO

SE FOSSERO BOSONI POTREBBERO

QUINDI IL FATTO CHE 2 e^- NON POSSANO STARE NELLO STESSO STATO SEGUE DALL'ANTISIMMETRIA

IN REALTÀ IL PRINCIPIO DI PAULI DICE CHE CI STANNO AL + 2 e^- NELLO STESSO STATO, XKÉ LO STATO NON È CARATT DALLO SPIN

$\Rightarrow$ UNO PUÒ AVERE SPIN UP E UNO SPIN DOWN

AVRÒ GUARDANDO LO SPIN

$|+,-\rangle - |-,+\rangle$ CONTO ANTISIMM INFATTI UN e^- È IN + E UNO IN − NON SO QUALE DEI DUE È IN COSA, MA SE UNO È IN +, L'ALTRO SARÀ IN −

SE HO 2 e^- UNO CON SPIN + E UNO CON −, PER ASPETTO DEL TEMPO E UNO VA SUPER LONTANO, MISURANDO LO SPIN DI QUELLO CHE È RIMASTO QUA L'ALTRO AVRÀ SPIN OPPOSTO

IO LO SO ISTANTANEAMENTE, NON DEVE ARRIVARE UN SEGNALE.

QUESTO PONE DEI PROBL: IN UN CERTO SENSO L'INFO VIAGGIA + VELOCE DELLA LUCE

"VABBÈ" ~ SERGIO CANAGUERO 23/11/21 ~

QUESTO NON HA RISCONTRO CON IL SENSO COMUNE E DÀ LUOGO A COSE CONTROINTUITIVE, POTREMMO PENSARE DI RIVEDERE TUTTA LA DESCRIZIONE FISICA

x ES A SEMPRE ISOLATO DI UN SIST

MA QUESTA DI AVERE INFO + VELOCI DELLA LUCE È VANA x QUANTO IL SIST SIA PARTO DI ENTANGLED

DATA OSS. ξ E STATO $|A,B\rangle \longrightarrow \langle AB|\xi|A,B\rangle$

MA LO STATO IN CUI CI TROVIAMO NON È QUESTO BENSÌ

$$\frac{|A,B\rangle \pm |B,A\rangle}{\sqrt{2}} \begin{array}{l} \longrightarrow + \text{ BOSONE} \\ \longrightarrow - \text{ FERMIONE} \end{array}$$

$$\frac{\langle B,A| \pm \langle A,B|}{\sqrt{2}}\,\xi\,\frac{|A,B\rangle \pm |B,A\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\langle BA|\xi|AB\rangle + \langle AB|\xi|BA\rangle \pm \langle BA|\xi|BA\rangle \pm \langle AB|\xi|AB\rangle\right]$$

MA ξ COMMUTA CON π

$$\Rightarrow \langle AB|\xi|BA\rangle = \langle AB|\pi^{\dagger}\xi\pi|BA\rangle = \langle BA|\xi|AB\rangle$$

$$\langle BA|\xi|BA\rangle = \langle BA|\pi^{\dagger}\xi\pi|BA\rangle = \langle AB|\xi|AB\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\xi\rangle = \langle BA|\xi|AB\rangle \pm \langle BA|\xi|BA\rangle$$

$$\langle\xi\rangle = \langle BA|\xi|AB\rangle \pm \underbrace{\langle AB|\xi|AB\rangle}_{\text{CHE SIGNIFICA È?}}$$

IMPONIAMO XES CHE ξ SIA FUNZ SOLO DI q

$$\langle AB|\xi|AB\rangle = \int d\vec{x}_2\, d\vec{x}_1\, \varphi_A^*(x_2)\,\varphi_B^*(x_1)\, f(x_1,x_2)\,\varphi_A(x_1)\,\varphi_B(x_2)$$

INTEGRALE DI SCAMBIO

SUPPONIAMO DI UNA FUNZ. DOVE LA FUNZ È $\neq 0$

QUANDO DICIAMO CHE UN È SI TROVA IN UN PTO

$\Rightarrow$ LA FUNZ D'ONDA È $\neq 0$ SOLO IN UN INTORNO DI QUELLA POSIZ

DIRE CHE UN È STA QUI È UNO STATO UNA SEMPLICE CHE I SUOI SUPPORTI SONO DISGIUNTI

SE I SUPPORTI SONO DISGIUNTI $\Rightarrow \varphi_B^*(x_1)\,\varphi_A(x_1) = 0$

$\Rightarrow$ L'INTEGRALE DI SCAMBIO NON DÀ CONTRIBUTO

QUESTO È ESTENDIBILE DICENDO CHE A FUNZ DELLE POSIZ A FUNZ INTERNI NON IMPOSTO (ANCHE LÌ È $\neq 0$ SOLO NELL'INTORNO)

QUANDO HO LOCALIZZAZIONE DELLA FUNZ D'ONDA NON HO STRETTI DAL TERMINE DI SCAMBIO

$\Rightarrow$ NO EFF FISICI RILEVANTI DELL'ANTISIMMETRIA

C'È UN ATTRO OS SEMPLICE

$$\xi = \sum \xi_i$$

$$\langle A,B | \xi_1 | A,B \rangle = \langle B | \xi_1 | A \rangle \langle A | B \rangle$$

L'INTEGRALE IN x_2 SI FATTORIZZA

SE $|A\rangle$ E $|B\rangle$ SONO IN POSIZ DIVERSE $\Rightarrow$ ORTOG $\Rightarrow \langle A | B \rangle = 0$

ATOMO DI ELIO

$Z = 2 \Rightarrow H = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}$

TRASCURANDO DEI TERMINI DI CORREZIONE RELATIVISTICA

QUESTO È POSSIBILE ~~[illegible]~~ XKÉ x Z PICCOLI $v_{MEDIA} << c$ PER GLI ELETTRONI

ABBIAMO VISTO CHE LO STATO FOND È $(1S)^2$

IN CUI ENTRAMBI GLI e^- STANNO NELLO STATO FOND

SI PASSA ATTRAVERSO TRANSIZ EM A $(1S)(nl)$

OSS: IN H NON COMPARE ESPLICITAM LO SPIN

$\Rightarrow$ POSSIAMO INTRODURRE L'OPERATORE DI SCAMBIO SOLO AGLI ELEMENTI ORBITALI

Π_0 TC $\quad \Pi_0 q_{12} \Pi_0 = q_{21}$

$\Pi_0 p_{12} \Pi_0 = p_{21}$

$\Pi_0 S_{12} \Pi_0 = S_{12}$ LA SCIA NON VARIA LO SPIN

ANALOG Π_S TC

$\Pi_S q_{12} \Pi_S = q_{12}$ INV

$\Pi_S p_{12} \Pi_S = p_{12}$ INV

$\Pi_S S_{12} \Pi_S = S_{21}$ VARIATO

È CHIARO CHE $\Pi = \Pi_S \Pi_0 = \Pi_0 \Pi_S$ (AGISCONO IN SP DIVERSI $\Rightarrow$ COMMUTA

H DIPENDE SOLO DA VAR ORBITALI MA $[H, \Pi_0] = 0$ COMMUTANO

AUTOVAL $\Pi_0 = \pm 1 \Rightarrow$ POSSIAMO ASSOCIARE AD AUTOST DI H SIMM/ANTISIMM

È CHIARO CHE SI LEGGE DA UN PTO DI VISTA ORBITALE DALLA FUNZ D'ONDA

LO SPETTRO DEVE COMPIERE SP A STATI SIMM/ANTISIMM È

DA PAULI SAPPIAMO CHE LO STATO DEVE ESSERE ANTISIMM

$\Rightarrow$ X LA PT DI SPIN

SE $\Pi_0 = +1 \Rightarrow \Pi_S = -1$ XKÉ $\Pi = -1$

VICEVERSA SE $\Pi_0 = -1 \Rightarrow \Pi_S = +1$

$\Rightarrow$ SE LA PT ORB È PARI QUELLA DI SPIN È DISPARI E VICEVERSA

POSSIAMO METTERCI NELLA BASE IN CUI S_{1z} E S_{2z} SIANO DIAG

$\Rightarrow$ ABBIAMO 4 STATI

$|++\rangle \quad |+-\rangle \quad |-+\rangle \quad |--\rangle \qquad |S_{1z}, S_{2z}\rangle$

POSSIAMO USARE LA COMPOSIZ DEI MOMENTI ANG.

CIOÈ LA BASE DEL MOM ANG TOT

$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \longrightarrow |\vec{S}, S_z\rangle$

$\underset{\vec{S}_1}{\frac{1}{2}} \otimes \underset{\vec{S}_2}{\frac{1}{2}} = \underset{\vec{S}}{0} \oplus 1$ ABBIAMO 2 POSSIBILI RAPPR DI $\vec{S}$

$\Rightarrow |0,0\rangle \quad |1,1\rangle \quad |1,0\rangle \quad |1,-1\rangle$

SAPPIAMO CHE POSSIAMO RAPPR UNA BASE RISP AD UNA BASE NUOVA

$|1,1\rangle$ ESSENDO L'UNICO STATO INCUI $S_z = 1$ (MASSIMO) È $|+,+\rangle$

QUESTO È TC $\pi_S |+,+\rangle = |+,+\rangle$

SAPPIAMO CHE $\pi_S |+,-\rangle = |-,+\rangle$

$\pi_S |-,+\rangle = |+,-\rangle$

$\pi_S |-,-\rangle = |-,-\rangle$

$\Rightarrow |1,1\rangle = |+,+\rangle \Rightarrow \pi_S |1,1\rangle = |1,1\rangle$ STATO SIMM DAL PTO DI VISTA DELLA FUNZ D'ONDA DI SPIN

POSSIAMO PASSARE DA $|1,1\rangle$ A $|1,0\rangle$ APPLICANDO L'OP DI DISCESA

$S_- = S_x - iS_y = S_{1x} + S_{2x} - i(S_{1y} + S_{2y})$

È TC $S_- |1,1\rangle \propto |1,0\rangle$

HA ANCHE S_- È INVAR NULLO SCAMBIO DI S_1 O S_2 NELLA VAR DI SPIN

$\Rightarrow$ PASSO DA SIMM A SIMM $\Rightarrow |1,0\rangle$ SIMM

$\Rightarrow |1,0\rangle = \dfrac{|+,-\rangle + |-+\rangle}{2}$ COMB SIMM DI 2 STATI

ANALOGO $|1,-1\rangle = |--\rangle$ ANCH'ESSA COMB SIMM

TUTTI E 3 GLI STATI SE IL + ALTO È SIMM SONO NECESS SIMM

$\longrightarrow$ GLI STATI $S=1$ SONO SIMM SOTTO π_S

⇒ lo stato che rimane $|0,0\rangle$ che ha $S_z = 0$ ⊥ agli stati di prima

$$|0,0\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$$ comb antisim

consideriamo lo stato fondo $(1s)^2$

questo dal pto di vista orbitale deve essere sim $\pi_0 = +1$

è chiaro che la pt antisim deve essere 0

non c'è la fase antisim se 2 e⁻ stanno nello stesso stato

xké corrisponderebbe a $|1s,1s\rangle - |1s,1s\rangle = 0$

⇒ la pt di spin sarà $\pi_s = -1$

xké $S = 0$ ⇒ $\frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$

quando uno è up l'altro è down

⇒ lo stato fondo He tutti 2 e⁻ nello stato fondo ma cui spin sono uno up ed uno down xké la pt di spin deve essere nel antisim

Discutiamo il 1° livello eccitato

1s 2s configurazione elettronica

dal pto di vista degli stati significa che ∃ 2 stati possibili

uno in cui il 1° e⁻ ha $n=1$ e il 2° con $n=2$

uno in cui il 1° e⁻ ha $n=2$ e il 2° con $n=1$

chiaramente questi 2 stati sono tra loro degeneri xké H conserva con l'op di scambio

questi sono eccitati autostati di H contrassegnati i termini di correzione

se accendiamo l'interaz dobbiamo calcolare gli elem di matrice di perturbazione 2x2

$\langle 2S\,1S | \frac{e^2}{r_{12}} | 1S, 2S \rangle \qquad \langle 1S\,2S | \frac{e^2}{r_{12}} | 1S\,2S \rangle$

$\langle 2S\,1S | \frac{e^2}{r_{12}} | 2S\,1S \rangle \qquad \langle 1S\,2S | \frac{e^2}{r_{12}} | 2S\,1S \rangle$

SAPPIAMO CHE SOLO DIAG. GLI ELEM SONO UGUALI XKE

APPLICANDO Π_S OTTENGO L'ALTRO

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ a VALOR MEDIO TERMINE DI REPULSIONE

$$b = \langle 1S\,2S | \frac{e^2}{r_{12}} | 1S, 2S \rangle = \int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2\, \varphi_{1S}^*(x_2)\varphi_{2S}^*(\vec{x}_1) \frac{e^2}{r_{12}} \varphi_{1S}(x_1)\varphi_{2S}(x_2)$$

$$= \int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2\, \Phi^*(x_2) \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \Phi(x_1)$$

CON $\Phi(x_1) = \varphi_{1S}(x_1)\varphi_{2S}^*(x_1)$

b È ESATTAMENTE LA REPULSIONE ELETTROSTATICA DI UNA DISTRIB DI CARICA COMPLESSA φ

POSSIAMO SEPARARLA IN PT REALE, IMMAGINARIA E TERMINE MISTO (CHE SI ANNULLA NELL'INTEGRALE) DATA QUALSIASI FUNZ D'ONDA

$b > 0$

HO MATR REALE SIMM MAGNALIZ

AUTOVAL $a \pm b \longrightarrow +$ COMB SIMM

$\searrow -$ COMB ANTISIM

SE $b > 0 \Rightarrow$ TERMINE DI EN + BASSA $a - b$

E HA $\Pi_0 = -1 \Rightarrow \Pi_S = +1$

$\Rightarrow$ STATO AD ENERGIA + BASSA È ANTISIMM

SI CAPISCE XKÉ SE LA FUNZ D'ONDA COMPLESSIVA

$\varphi(x_1, x_2) = -\varphi(x_2, x_1)$ ANTISIMM

E IL POT DI REPULSIONE È $\frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$ È TANTO + FORTE QUANTO SONO + VICINI GLI e^-

MA LA FT ANTISIMM $\varphi(x_1, x_1) = -\varphi(x_1, x_1) = 0$

PROBAB NULLA CHE SI AVVICININO FINDA COINCIDENTE

$\Rightarrow$ NELLA FT ANTISIMM IL CONTRIBUTO DI REPULSIONE PESA MENO

ERA NOTA COME REGOLA DI KUNT:

NEI 2 STATI $(1S)2p$ LO STATO AD EN + BASSA È QUELLO ANTISIMM

$(1S)^2$ STATO CON $S=0$ (A EN + BASSA)

X REGIONI IMPERTURBATI

$(1S)(2S)$ $\quad \overline{S=0} \quad \overline{S=1}$

ABBIAMO LIV EN ABBASTANZA SIMILI X STATI CON $S=0$ O $S=1$

IL FATTO CHE NON SIANO POSSIBILI TRANSIZ EM TRA $S=0$ E $S=1$ È DATO DAL FATTO CHE

$\vec{p}\,\vec{A} =$ (??)

È VERO CHE LO SPIN NON ENTRA IN H MA DET SIMMANTISIMM DELLA FUNZ D'ONDA ATTRAVERSO AMMUCCHIO DI PAULI

$\Rightarrow$ DET I VALORI DELLE ENERGIE

ATOMO GENERICO

$$H = \sum_{i=1}^{Z} \left(\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} - \frac{Z e^2}{r_i} \right) + \sum_{i>j} \frac{e^2}{r_{ij}} = H_0 + V$$

NELL'APPROSSIMAZ DI e^- INDIP POTREMMO CONSIDERARE OGNI e^- COME IDROGENOIDE IN POT CENTRALE CON CARICA Ze

ABBIAMO VISTO COME SIA + UTILE SOSTITUIRE IL NUM QUANTICO X OGNI e^- CON LA CONFIG ELETTRONICA E STATI FATTORIZZATI

$\Rightarrow$ X QUANTO RIGUARDA H_0 SAPPIAMO COME CLASSIFICARE GLI STATI

CONVIENE CLASSIFICARE GLI STATI CON LE COSE DEL MOTO DI TUTTA L'HAMILTONIANA CIÒ CI PERMETTERÀ DI AVERE DEI BLOCCHI NELLA MATR DELLE PERTURBAZ

MENTRE $[H_0, \vec{L}_i] = 0 \ \forall i$ $\quad \vec{L}_i$ MOMENTO ANG DEL SINGOLO e^-

QUESTO NON È + VERO X IL TERMINE DI REPULSIONE XKÉ COMPARE r_{ij}

È SCALARE SE RUOTIAMO CONTEMP TUTTE LE PARTIC MA L_i NE RUOTA 1 SOLA

INTRODUCENDO $\vec{L} = \sum_{i=1}^{Z} \vec{L}_i$ MOM ANG TOT

$\Rightarrow$ TUTTA H È INVAR PER ROTAZ

$\Rightarrow$ CONVIENE CLASSIFICARLA CON L^2 E L_z

UN ALTRO BUON NUM QUANTICO È LA PARITÀ I

$\longrightarrow$ SE INVERTO TUTTE LE POSIZ $\Rightarrow$ H INVARIATA

ANALOGAM SARANNO CONSERVATE LO SPIN TOT S^2 E S_z

NON SOLO S MA CIASCUN S_i CONTRIBUISCE CON H

CI DOVREBBE ESSERE UNA DEGENERAZIONE X LO SPIN MA X IL PRINCIPIO DI PAULI LA PT DI SPIN SARÀ FISSATA

$\Rightarrow$ CI ASPETTIAMO E CON DEGEN ASSOCIATA A L_z E S_z

$(2l+1)(2S+1)$

SAPPIAMO CHE IN H C'È UNA DEGENERAZ ACCIDENTALE CHE VIENE SUBITO RISOLTA DALL'INTERAZ

TRACCIA

LE CONSIDERAZ FATTE CI DICONO CHE AVRANNO ALMENO QUESTI DEGENERI
POTREBBERO ESSERCI ALTRE SPIN NASCOSTE (COME X L'IDROGENO)
MA QUI NON CE NE SARANNO

ABBIAMO VISTO X H2 CHE X QUANTO LO SPIN NON ENTRI IN H
LE COMB DI SPIN E LA SPIN DIANO ENERGIA DIFFERENTE
O ALMENO LA STESSA COSA

$S=1 \rightarrow$ STATI ANTISIMM $\longrightarrow$ EN + BASSA $\Rightarrow E_{es}$

ABBIAMO VISTO NELLA COMBINAZ DI MOM ANGOLARI CHE LA BASE
L^2, S^2, L_z, S_z PUÒ ESSERE SOSTITUITA DA UN'ALTRA BASE

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ MOM ANG TOT (CONTRIBUTO ORBITALE E SPIN)

$\vec{L}$ E $\vec{S}$ SOMMSPAZIO LE STESSE REGOLE DI COMPLETAZ
NON ESISTE $\vec{S}$ CORRELATIONE DELLE ROTAZ NELLO SP, SONO ROTAZ DIVERSE
S GENERA ROTAZ NELLO SP INTERNO IN CUI VIVE E' XRÒ LA
FUNZ D'ONDA E' UNO SPINORE
SKUS SKUS COME AGISCE SO(2)

L^2, S^2, J^2, J_z
A l ED S FISSATO $\Rightarrow \sum_{j=|l-s|}^{l+s} (2j+1) = (2l+1)(2s+1)$ STATI

J SARÀ PIÙ NATURALE X INTRODURRE CORREZIONI RELATIVISTICHE

ABBIAMO VISTO CHE NELLA CONFIG A E' INVP NELL'ATOMO HE ABBIAMO
CONSIDERATO $(1S)^2$
E VISTO CHE LO STATO FOND SI PUÒ CARATT CON L_{TOT}
$(1S)^2 \rightarrow$ DEGEN DA SPIN
$\hookrightarrow l=0$
SI PUÒ RISCRIVERE $(1S)^2$ CON $^1S \rightarrow$ SPIN TOT $=1$

1S 2S $\quad {}^1S,\ {}^3S \rightarrow$ TRIPLETTO

$\hookrightarrow$ SINGOLETTO

1S 2p $\quad {}^1P^0\ {}^3P^0 \rightarrow$ DISPARI RISP ALLA PARITÀ $= 0$

$\rightarrow l=1$

NELL'APPROSSIMAZ DI È INDIP LA PARITÀ DI OGNI SINGOLO È È $(-1)^{l_i}$

$\Rightarrow$ QUELLA TOT $\quad (-1)^{l_1+l_2+\dots+l_n\ (\neq l)} = I$

COME FACCIAMO A SAPERE CHE LA PARITÀ È QUELLA ANCHE QUANDO SI ACCENDE LA PERTURBAZ?

$H(\lambda) = H_0 + \lambda V$

$[I, H(\lambda)] = 0 \Rightarrow I$ VARIA CON CONTINUITÀ AL VARI DI λ

PER $\lambda = 0 \quad I = -1$

PER $\lambda = 1$ L'UNICO MODO X CUI VARI CON CONTINUITÀ È CHE RIMANGA COST

$(1S)^2$ È UN GUSCIO COMPLETO CHE HA TUTTI GLI È POSSIBILI

$(2p)^6$ XKÉ ESSENDO UNO STATO $p \rightarrow l=1 \Rightarrow 3$ POSSIBILI L_z

$\Rightarrow \underset{\uparrow\ l_z}{3} \times \underset{\uparrow\ S}{2} = 6$

PER $(1S)^2 \quad l=0 \quad S=0$ INV SIA X ROTAZ ORBITALE TOT CHE X ROTAZ DI SPIN TOT

QUESTO È VERO $\forall$ ~~COMPL~~ GUSCIO COMPLETO

$\Rightarrow$ ANCHE X $(2p)^6 \quad L=0 \quad S=0$

ABBIAMO TANTI SPIN UP QUANTI SPIN DOWN

NEI 6 STATI AVRÒ SIA $m=+1$ CHE 0 CHE -1 LO STESSO NUM DI VOLTE: 2

$\Rightarrow L=0 \ \forall$ CASO

⇒ OGNI GUSCIO CONTENTO È INVAR. SIA X ROTAZ. ORBITALI CHE DI SPIN

QUESTO RAGIONAMENTO SI PUÒ RENDERE + SEMPLICE CHIEDENDOSI:

ABBIAMO 6 STATI: $\varphi_1 \dots \varphi_6$ FUNZ D'ONDA $\forall$ SINGOLO È X STATI POSSIBILI

$\Rightarrow \varphi_1(x_i) \dots \varphi_6(x_i)$ x_i POSIZ i-ESIMO È

ALLORA ANCHE 6 FUNZ X IL Π È ECC...

DEVO FORMARE UNO STATO TOTALMENTE ANTISIMM X LO SCAMBIO DI È $\Rightarrow$ FORMO LA MATRICE

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_6(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(x_6) & \dots & \varphi_6(x_6) \end{pmatrix}$$

IL det È LA FUNZ TOT ANTISIMM È DIVENTA LA NOSTRA FUNZ D'ONDA DEL GUSCIO

→ det DI SLATER

X VEDERE CHE SIA INVARIANTE X ROTAZ BASTA APPL LA MATRICE DI ROTAZ E FARE IL det MA $\det AB = \det A \det B$ E LE ROTAZ HANNO $\det = 1$

BORO $Z=5$ $(1S)^2(2S)^2\ 2p$

CARBONIO $Z=6$ $(1S)^2(2S)^2\ 2p^2$

AZOTO $Z=7$ $(1S)^2(2S)^2\ 2p^3$

OSSIGENO $Z=8$ $(1S)^2(2S)^2\ 2p^4$

FLUORO $Z=9$ $(1S)^2(2S)^2\ 2p^5$

NEON $Z=10$ $(1S)^2(2S)^2\ (2p)^6$

L, S, J, J_z x CLASSIFICAZIONE

CON $J = L+S$

I CONTRIBUTI DI L E S SUI GUSCI TOTALI SONO UGUALI A ZERO

$\Rightarrow$ VANNO SOLO NEGLI ORBITALI 2p

DEGEN $(2l+1) \times 2$

BORO: 6 STATI POSSIBILI $\binom{6}{1} = 6$

1 e^- CON $L=1$ E SPIN 1/2 $\longrightarrow {}^2P$

CARBONIO: $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$ STATI POSSIBILI

2 e^- CON $L_i = 1 \Rightarrow L = 0, 1, 2$

$L=0$: 1 STATO, $L=1$: 3 STATI, $L=2$: 5 STATI

SPIN POSSIBILE $\pm 1/2 \Rightarrow S = 0, 1$

CONVIENE CONSIDERARE IL MAX VALORE L_z

SE $J=2 \Rightarrow$ $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ $\longrightarrow |M_1=1, M_2=2\rangle$ SIMMETRICO x SCAMBIO DI e^-

$L=2$ È SIMM NELLA PT ORBITALE $\Rightarrow$ ANTISIMM NELLA PT DI SPIN

$\Rightarrow$ LO STATO ${}^1D$ HA DEGEN 1 x KÈ ANTISIMM NELLA PT DI SPIN

$\Rightarrow S = 0 \longrightarrow 5$ STATI POSSIBILI

$|m_1=1, m_2=0\rangle$ $|m_1=0, m_2=1\rangle$

→ 2 COMB: SIMM & ANTISIMM

L_z ANTISIMM IN PT ORBITALE ⇒ SIMM NELLA PT DI SPIN

⇒ $3p$ 3×3 STATI POSS

CONSIDERIAMO UNA STATO CON $L_z=0$

$|m_1=+1, m_2=-1\rangle$ $|m_1=-1, m_2=+1\rangle$ $|m_1=0, m_2=0\rangle$

^1S 1 STATO POSSIBILE SIMM IN PT ORBITALE

ANTISIMM IN PT DI SPIN

RIMANE UN SOLO STATO POSSIBILE: $S=0$

C'È UNA RELAZ TRA STATI DEL CARBONIO E STATI DELL'OSSIGENO E TRA BORO E FLUORO x PRODOTTO DEL COEFF BINOMIALE

$$\binom{6}{x} = \binom{6}{6-x}$$

MA GLI STATI DEVONO ESSERE TRA ANTISIMMETRICI E SE NE NEON TOLGO UN e^- DAI 6 CHE CI SONO

⇒ ...

I LIVELLI DEL CARBONIO NON SONO DEGENERI A CAUSA DELLA REPULSIONE TRA e^-

→ QUALE CI ASPETTIAMO SIA LO STATO FOND?

ABBIAMO GIÀ VISTO x He CHE IL LIVELLO + BASSO DEVE ESSERE ANTISIMM IN PT ORBITALE x CHE CIÒ IMPLICHE CHE GLI e^- VADANO TROPPO VICINO TRA LORO CAUSANDO MAX REPULSIONE

⇒ IL LIVELLO + BASSO DEVE ESSERE ^1D SEGUITO DA ^1S

IN TUTTO QUESTO DISCORSO ABBIAMO CONSIDERATO STABILITÀ L'INTERAZ TRA e^- E NUCLEO ED e^- TRA LORO

LA PT DI SPIN CONTRIBUISCE AL MOM MAGN DI e^-

SE UN e^- CLASSICAM SI MUOVE RUOTANDO ATTORNO AL NUCLEO NEL SUO SPIN SARÀ IL NUCLEO A RUOTARE ATTORNO A LUI

$\Rightarrow$ PT DOVUTA A CARICA IN MOVIMENTO $\Rightarrow$ CAMPO MAGN

A RIGORE NON SAPPIAMO CALCOLARE QUESTA INTERAZIONE KE DOVREMMO CONOSCERE IL MOM MAGN ASSOCIATO ALLA PT DI SPIN (SIGNIFICANTE DI PENDE DALLO SPIN CON UN COEFF G CHE DIFFERISCE DI POCO DA 2)

L'e^- NON SI MUOVE DI MRU (CLASSIC) MA DI MOTO ACCELERATO

$\longrightarrow$ NON POSSIAMO DIST QUESTI 2 FATTORI SULLA BASE DELLE NOSTRE CONSIDERAZIONI

DA UN PTO DI VISTA CLASSICO IL NUCLEO INDUCE

$$\vec{B} = -\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{E} = +\frac{\vec{v}}{c} \wedge \frac{\vec{r}}{r}\frac{d\varphi}{dr} \qquad \text{con } \varphi(r) = \frac{e}{r}$$

VELOCITÀ e^-

$$= \frac{m\vec{v} \wedge \vec{r}}{mcr}\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{mc}\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\vec{L}$$

SICCOME $\vec{B}$ SI ACCOPPIANO ANCHE ALLA PT DI SPIN CI SARÀ UN CONTRIBUTO

$$\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = \left(g \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)\vec{L}\cdot\vec{S}$$

FATTORE MOLTIPLICATIVO

ACCOPPIAMENTO PT ORBITALE E PT DI SPIN

QUESTO VALE X IL SINGOLO e^- MA C'È ANCHE UNA COMP PER L'INTERAZ TRA ELETTRONI DIVERSI

TRA LE CONNESSIONI + IMPORTANTE È QUELLA DI SPIN-ORBITA

$$\sum_{i=1}^{Z} \xi(r_i)\, \vec{L}^{(i)} \cdot \vec{S}^{(i)}$$

PRIMA UTILIZZAVAMO LA BASE $|L, S, L_z, S_z\rangle$

ORA QUANDO ACCENDIAMO IL TERMINE DI SPIN-ORBITA CONVIENE $|L, S, J, J_z\rangle$ XKÉ L TOTALE NON COMMUTA + CON IL NUOVO TERMINE XKÉ DOVRÒ RUOTARE CONTEMPORANEAMENTE LO PT ORBITALE E DI SPIN $\Rightarrow$ CONVIENE UTILIZZ J XKÉ COMMUTA CON H_{TOT}

$\Rightarrow$ SI PUÒ PARTIRE DALLE ENERGIE E_{LS} E CALCOLARE GLI ELEM DI MATRICE DELLA PT DI SPIN-ORBITA NELLA BASE CON J E J_z

IL FATTO CHE J E J_z SIANO BUONI NUM QUANTICI CI DICE CHE GLI ELEM DELLA BASE SARANNO A BLOCCHI

$\Rightarrow$ CONSIDEREREMO STATI CON J E J_z FISSI

$\Rightarrow$ CI ASPETTIAMO CORREZIONI AL 1° ORDINE FUNZIONI DI J

$\Rightarrow$ LA PRESENZA DELL' INTERAZ SPIN-ORBITA RIMUOVE LA DEGENERAZ DI PRIMA

VOGLIAMO CALCOLARE GLI ELEMENTI DI MATRICE DELLO SPIN ORBITA NELLE 2 BASI $|L, S, L_z, S_z\rangle$ E $|L, S, J, J_z\rangle$

$$\sum_{i=1}^{Z} \langle E_{LS}, L, S, M'', S_z'' | \xi(r_i)\, \vec{L}^{(i)} \vec{S}^{(i)} | E_{LS}, L, S, M', S_z' \rangle$$

USIAMO UN TRUCCO: TEOR DI WIGNER-ECKART

$\rightarrow$ SE ABBIAMO UNA DISTRIB DI PROBAB PERFETTAMENTE ISOTROPA E VOGLIAMO CALCOLARE IL VALOR MEDIO DI UN VETT QUESTO È 0 XKÉ $\nexists$ DIREZ PRIVILEGIATE

STESSA COSA X UN VETT $\perp$ AD UN ALTRO PIANO

$\xi(r_i)$ COMPLETAMENTE SCALARE

FARÒ UNA MEDIA NULLA NOLLA PT ANGOLARE RISENTE DEL FATTO CHE HO UN VETT COSTANTE

CIOÈ $\xi(r_i)\vec{L}^{(i)}$ QUANDO È FISSATO NOLLA PT ANGOLARE

POSSO SOSTITUIRE $\vec{L}^{(i)}$ CON $\vec{L}$:

$$\xi(r_i)\frac{\vec{L}^{(i)}\cdot\vec{L}}{L^2}\vec{L}$$ CHE HA LO STESSO VALOR MEDIO

IDEM PER $\vec{S}^{(i)} \longrightarrow \frac{\vec{S}^{(i)}\cdot\vec{S}}{S^2}\vec{S}$

$\Rightarrow$ IL VALORE DI ASPETTAZIONE SARÀ

$$\Lambda\,\vec{L}\cdot\vec{S} \quad \text{DOVE} \quad \Lambda = \sum_i \xi(r_i)\frac{\vec{L}^{(i)}\cdot\vec{L}}{L^2}\frac{\vec{S}^{(i)}\cdot\vec{S}}{S^2}$$

QUESTA È UN'IDENTITÀ SUI TUTTO IL MIO SESP

$\Rightarrow$ SE È SU TUTTO IL SESP POSSO TORNARE ALLA BASE CHE MI INTERESSA

$$\langle \mathcal{E}_{LS}, L, S, J, J_z | \Lambda\,\vec{L}\cdot\vec{S} | \mathcal{E}_{LS}\, L\, S\, J\, J_z\rangle = \Delta\mathcal{E}_{LSJ}$$

MA $J = L + S$ E $[\vec{L},\vec{S}] = 0 \Rightarrow J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L}\vec{S}$

$$\Rightarrow \vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

$$\Rightarrow \Delta\mathcal{E}_{LSJ} = \underbrace{\langle \mathcal{E}_{LS}\, L\, S\, J\, J_z | \Lambda | \mathcal{E}_{LS}\, L\, S\, J\, J_z\rangle}_{A_{LS}\ \text{COST}}\,\hbar^2\,\frac{J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta\mathcal{E}_{LSJ} = \frac{\hbar^2}{2}A_{LS}\left[J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\right]$$

CONOSCIAMO TUTTO TRANNE A_{LS}

SE $A_{LS} > 0 \Rightarrow$ LIVELLI + ALTI DI ENERGIA $\longrightarrow$ J + ALTO
+ BASSI $\longrightarrow$ J + BASSO

SE $A_{LS} < 0 \Rightarrow$ VICEVERSA

A PARTIRE DA QUESTA FORMULA POSSO CONFRONTARE LIVELLI ENERGETICI CON j DIVERSI

$$\boxed{E_{LSj} - E_{LS(j-1)} = \hbar^2 A_{LS}\, j}$$

$\Rightarrow$ I LIVELLI ENERGETICI CONTINUI AL VARIARE DI j NON SONO EQUISPAZIATI

$\rightarrow$ I LIVELLI + ALTI SONO QUELLI CON j MAGGIORE

$\exists$ UN'ALTRA CONSEGUENZA INTERESSANTE:

$$\sum_{j=|L-S|}^{L+S} \underbrace{(2j+1)}_{\text{DEGENERAZIONE LIVELLO } j\text{-ESIMO}} \Delta E_{LSj} = 0$$

CIOÈ IL BARICENTRO DI QUESTI LIVELLI RIMANE AL LIVELLO DELLO STATO IMPERTURBATO QUANDO ACCENDO L'INTERAZIONE

$\exists$ UNA SOMMA <u>DI</u>

SICCOME LA DEGENERAZ È $2j+1$ È COME FARE LA TRACCIA DELLA MATRICE X VEDERE QUANTI SONO I j_z POSSIBILI CHE FORNANO $2j+1$ DI DEGENERAZ

MA LA TRACCIA NON CAMBIA SE CAMBIO LA BASE $\Rightarrow$ POSSO USARE LA SOLITA

$$\Rightarrow \sum \langle E_{LS} L S L_z S_z | \Lambda \vec{L}\cdot\vec{S} | E_{LS} L S L_z S_z \rangle$$

IL VAL MEDIO DI $\vec{L}$ È NULLA FORMULA MA POSSO SOSTITUIRE A L_x E L_y I $L_\pm$ $\Rightarrow$ OTTENGO L_+ E L_- A L_z FISSATO CHE HANNO VAL DI ASPETTAZIONE 0

$$\Rightarrow \sum_{L_z S_z} \langle E_{LS} L S L_z S_z | \Lambda L_z S_z | E_{LS} L S L_z S_z \rangle$$

I VALORI DI L_z VANNO DA $-L$ A $+L$ $\Rightarrow$ SOMMA NULLA

$$\sum \ldots = 0$$

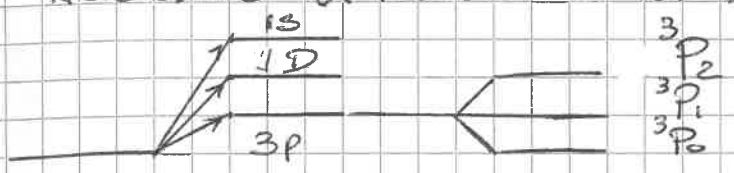
MENTIAMOCI NEL CASO DELL'ATOMO DI CARBONIO

IL LIVELLO FONDO È ^3P $L=1$ $S=1 \Rightarrow J=0,1,2$

$^3P_0$ $^3P_1$ $^3P_2$ → SITA A NAPPE QUASI SEMPRE I LIVELLI DI STRUTTURA FINE CIOÈ LA RIMOZ DI DEGENERAZ DOVUTA AI LIVELLI DI SPIN-ORBITA

$$E(^3P_2) - E(^3P_0) = 3\,[E(^3P_1) - E(^3P_0)]$$

ALLENTANDO LA REPULSIONE HA DATO LUOGO A 3 LIVELLI DISTINTI



REPULSIONE SPIN-ORBITA

ABBIAMO VISTO COME LA PRESENZA DELLO SPIN SUPPLISCA SULLA STRUTTURA FINE DEI LIVELLI ATOMICI

EFFETTO ZEEMAN ANOMALO

$$H = H_0 + \frac{e}{2mc}\vec{L}\cdot\vec{B} + \frac{e}{2mc} g \vec{S}\cdot\vec{B}$$ HAMILTONIANA DI UN ATOMO IN UN CAMPO $\vec{B}$ EXT

CON $\vec{L} = \sum_{i=1}^{Z} \vec{L}^{(i)}$ E $\vec{S} = \sum_{i=1}^{Z} \vec{S}^{(i)}$

$$\rightarrow H = H_0 + \frac{e}{2mc}(\vec{L} + g\vec{S})\cdot\vec{B}$$ QUESTO H_0 NON SIAMO INGRADO NEANCHE DI PRECISARLO

SE $\boxed{g=1}$ $\Rightarrow \vec{L}+\vec{S} = \vec{J}$

$\Rightarrow$ POICHÉ H_0 HAMILTONIANA ATOMO ISOLATO $[H_0, \vec{J}] = 0$

$\Rightarrow$ PT DI ATOMO ISOLATO E INTERAZ CON $\vec{B}$ COMMUTANO

$\Rightarrow$ AUTOSTATI COMUNI $|E_j, j, j_z\rangle$

IN QUESTO CASO I LIVELLI ENERGETICI SONO

$$H|E_j, j, j_z\rangle = E_j + \frac{e\hbar}{2mc}B j_z = E_j + \mu B j_z$$

C'È UNA DIFFERENZA CON L'EFF ZEEMAN NORMALE, C'È LA COMPONENTE DI SPIN

A CAUSA DEL FATTO CHE C'È UNA REGOLA DI SELEZIONE SUL MOMENTO

$\Rightarrow$ OGNI LINEA VENE SPLITTATA IN 3 COME NEL EFF ZEEMAN NORMALE

MA CIÒ NON ACCADE $\Rightarrow$ ESCLUDIAMO IL CASO $g=1$

SE $\boxed{g=2}$ $\Rightarrow H = H_0 + \frac{e}{2mc}B(j_z + S_z)$

$[j_z, H_0] = 0$ MA IN GEN $[S_z, H_0] \neq 0$

S_z E H_0 COMMUTANO SE TRASCURIAMO LE CORREZIONI RELATIVISTICHE

MA A PARTIRE DAL TERMINE DI SPIN-ORBITA NON COMMUTANO PIÙ

$\Rightarrow$ LA PT DI INTERAZ CON B NON COMMUTA CON H_0

$\Rightarrow$ NON È UN PROB ESATTAMENTE RISOLUBILE

È CHIARO CHE SE B È TALMENTE GRANDE CHE LA SPAZIATURA DEI LIVELLI È DELL'ORDINE $\frac{e\hbar}{2mc}B = \boxed{\mu B \gg \Delta E_{LSJ}}$ (DIFF DOVUTA ALLA STRUTTURA FINE)

$\Rightarrow$ AL LIVELLO A CUI POSSIAMO TRASCURARE LA PT DI SPIN-ORBITA

POSSIAMO TRASCURARE LA STRUTTURA FINE (LIMITE DEL CAMPO FORTE)

$\Rightarrow$ POSSIAMO DI AVERE AUTOSTATI SIMULTANEI (XKÉ TRASCURIAMO IL TERMINE DI SPIN-ORBITA)

$\Rightarrow |E_{LS}, L, S, L_z, S_z\rangle$

$E_{LS} + \mu B(L_z + 2S_z)$ LIVELLI ENERGETICI NEL lim DI CAMPO FORTE

$\mu B \gg \Delta E_{LSJ}$

AL VARIARE DI L_z C'È UNO SPLITTING DI LIVELLI SEMPRE PARI A μB

AL VARIARE DI S_z C'È UNO SPLITTING DI LIVELLI DI $2\mu B$

MA LE TRANSIZ DEVONO RISPETTARE LA REGOLA $[\ldots]$??

$\Rightarrow$ VEDREMO IL SOLITO SPLITTING DI LINEE MACROSCOPICHE CHE DA UNA DIVENTANO 3

NEL lim OPPOSTO DI CAMPO DEBOLE CIOÈ $\boxed{\mu B \ll \Delta E_{LSJ}}$

DOBBIAMO CONSIDERARE IL TERMINE DI SPIN-ORBITA

$\Rightarrow$ H SARÀ QUELLA IN ASSENZA DI CAMPO B

$\Rightarrow$ LIVELLI $|E_J, J, J_z\rangle$

DOVREMO CALCOLARE DA QUESTI L'INTERAZ CON B

J_z È GIÀ DIAGONALE $\Rightarrow$ CI INTERESSA S_z

$\langle E_J, J_z, J_z | S_z | E_J J J_z\rangle$ X CALCOLARE QUESTI STATI DOVREMO ADOP IL TEOR DI WIGNER-ECKART XKÉ S SI COMPORTA COME UN VETT X TRASF GENERATO DA J

$$\Rightarrow \langle E_J J J_z | S_z | E_J J J_z\rangle = \langle E_J J J_z | \frac{\vec{S}\cdot\vec{J}}{J^2} J_z | E_J J J_z\rangle = \gamma_J J_z$$

DOVE $\gamma_J = \frac{1}{J(J+1)} \langle E_J J J_z | \vec{S}\cdot\vec{J} | E_J J J_z\rangle$

$$\Rightarrow E_J + \mu B(1+\gamma_J) J_z$$

XKÉ γ_J E NON γ_{J_z} ?

$\vec{S} \cdot \vec{J}$ DAL PUNTO DI VISTA DELLE ROTAZIONI TOTALI È UNO SCALARE

$\Rightarrow$ NON DIPENDE DALLA DIREZIONE MA SOLO DAL VETT J

$$\Rightarrow E_J + \mu B (1 + \gamma_J) J_z = E_J + \mu B g_J J_z$$

$g_J = 1 + \gamma_J$ FATTORE DI LANDÉ

NELLE FORMULE PRECEDENTI NON C'ERA DIPENDENZA DA J NELLO SPLITTING DEI LIVELLI

?

POSSIAMO IMMAGINARE DI CALCOLARE g_J IN STATI IN CUI ABBIAMO FISSATO L, S, J E ABBIAMO VISTO IL RISULTATO DELLA PERTURBAZ AL 1° ORDINE NELLA INT DI SPIN ORBITA

FISSATI $L\ S\ J\ J_z$ VOGLIAMO TROVARE γ_J

OSS CHE $\vec{L} = \vec{J} - \vec{S} \Rightarrow L^2 = J^2 + S^2 - 2\vec{J}\cdot\vec{S}$

$$\Rightarrow \vec{J}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}\left(J^2 + S^2 - L^2\right) \longrightarrow \gamma_J = \langle\ |\vec{S}\vec{J}|\ \rangle$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ g_{LSJ}}}{g_J} = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

IN QUESTA APPROSSIMAZ I LIVELLI ENERGETICI PRENDONO LA FORMA

$$E_{LS} + \mu B\, g_{LSJ}\, J_z$$

<u>ESEMPIO</u>

CONSIDERIAMO IL SODIO Na ($Z = 11$) $\Rightarrow$ CONFIG ELETTRONICA:

$$(1S)^2 (2S)^2 (2p)^6 \underbrace{3S}$$ $\longrightarrow$ RIMANE FUORI DAI GUSCI UN È IN ONDA S

$\Rightarrow$ STATO FOND $^2S_{1/2}$

1° STATO ECCITATO $^2P_{1/2}$ $^2P_{3/2}$