目 次

1 周波数領域の構造

1.1 代数学から見たフーリエ変換

ウィキペディアの説明によると、フーリエ変換とは「函数を振動函数に分解する」変換である。まずは、この記述の本質について代数学的な知見から説明する。　工学の世界では時系列は離散であるため、物理学以外では以下の様な「離散フーリエ変換」が用いられる。

$$f(k) = \sum_{m=0}^{T-1} \hat{f}(m) \exp\left(-\frac{2\pi imk}{T}\right), \qquad k = 0, ..., T-1 \tag{1.1}$$

ベクトルの形に書き直すと、この計算は $[f1, ..., f(T-1)]$ という ベクトル表現の

$$\left\{ e_k = [0, ..., \underbrace{1}_{k\text{th entry}}, ..., 0] \quad k = 0, ..., T-1 \right\} \tag{1.2}$$

から

$$\left\{ \hat{e}_m = [1, w^m, w^{2m}, ..., w^{(T-1)m}], \qquad w = \exp\left(-\frac{2\pi i}{T}\right) \quad m = 0, ..., T-1 \right\} \tag{1.3}$$

への基底変換以外の何物でもない。元の基底は通常「標準基底」、そして変換後の基底は「フーリエ基底」と呼ばれる。教科書的な説明では、フーリエ変換の恩恵は以下のように説明されることが多い。

1. 振動関数 $\hat{e}_m$ が直行基底である
2. 振動関数一つ一つが波形を表すため、基底がグローバルな特徴量を捉えている

しかし、よくよく考えてみると、上記の条件を満たすような基底は他にも存在しうる。実際、正規直行行列をフーリエ基底に作用させても、上記の条件は満たされる。実は、フーリエ基底にはもう一つ、ユニークかつ極めて便利な特徴がある。まずベクトル $[f1, ..., f(T-1)]$ がある時、　シフト演算子 σ（回転因子とも呼ばれる）を

$$\sigma f(k) = f((k+1)_{\mathrm{mod}T})$$

と定義したい。これは文字通りベクトルを一つ巡回させる演算子であり、標準基底 (std と記す) では行列として以下のように書き表せる。

$$D_{std}(\sigma) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

代数学においては、写像 $\sigma \longrightarrow D_{std}(\sigma)$ を σ の「表現」と呼ぶ。$D_{std}(\sigma^m) = D^m_{std}(\sigma)$ であることは容易に確認できる。シフト演算子が、リピートをもつ波形に対して非常に親密性の高い演算子であることは想像に難くない。たとえば、T が偶数であるときにフーリエ基底の一つである

$$[1, -1, 1, -1, ..., 1] \quad (m = T/2)$$

は σ^2 に対して不偏なベクトルである。話のミソは実はここにある。

例として、$T = 4$ のケースを考えてみたい。この時、フーリエ基底は、以下の４つのベクトルからなる。

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix}, \right\} \tag{1.5}$$

すると、以下のことに気づく。

$$\sigma e_0 = e_0, \quad \sigma e_1 = -we_1, \quad \sigma e_2 = -e_2 \quad \sigma e_3 = we_3 \tag{1.6}$$

これがどういうことかというと、フーリエ基底下では σ の演算子は

$$D_{FT}(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

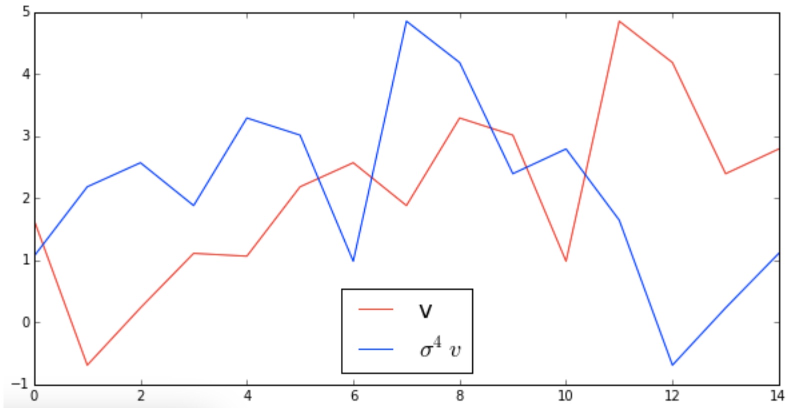

図 1: シフト演算子

と対角化できるということであり、$D_{FT}(\sigma^m) = D_{FT}^m(\sigma)$ であることを鑑みると、フーリエ基底は全ての $m = 0, 1, 2, 3$ についてシフト演算子を同時対角化できる、ということが言える。固有値は表 2 のように要約できる。

基底 \ 演算子	σ^0	σ^1	σ^2	σ^3
$\hat{e}_0$	1	$-w$	-1	w
$\hat{e}_1$	1	-1	1	-1
$\hat{e}_2$	1	w	-1	$-w$
$\hat{e}_3$	1	1	1	1

図 2: 演算子に対応する固有値

実のところ、フーリエ基底は、スケーリングを無視した場合、定義 1.1を満たす唯一の基底である。

定義 1.1. フーリエ基底 $\{\hat{e}_m\}$ は、演算子

$$\sigma^0, \sigma, ..., \sigma^{T-1}, \sigma^T$$

を同時対角化できる唯一の基底である。

1.2 C_n の既約表現分解

1.2.1 周波数の再定義

図 2 は表現論では「指標表」と呼ばれる。この指標表を眺めてみよう。すると、とあることに気づく。まず、アホでもわかるが、空間全体は σ^0 に対し

て不変である。次に、σ^0, σ^2 に対しての固有値のみで、２つの空間

$$\mathcal{I}_0^{\mathbb{Z}_2} := \mathrm{span}\{\hat{e}_1, \hat{e}_3\}, \ \ \mathcal{I}_1^{\mathbb{Z}_2} := \mathrm{span}\{\hat{e}_0, \hat{e}_2\}$$

が分別できることがわかる。$\mathcal{I}_1^{\mathbb{Z}_2}$ は σ^0, σ^2 に対して不変であるが、$\mathcal{I}_1^{\mathbb{Z}_2}$ は σ^2 の作用で符号が変わってしまう。逆に言うと、σ^0, σ^2 のみでは全ての基底を分別することはできない。ちなみに、ここで $\{\sigma^0, \sigma^2\}$ のような「集合」を考えているのには意味がある:

定義 1.2. G という集合が以下のような条件を満たすとき、G を「群」と呼ぶ。

1. $x, y \in G$ の時、x と y の間に演算子が定義されており、$x \cdot y \in G$ である。
2. $x, y, z \in G$ の時、$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
3. $x \cdot e = x$ となるような e が G 内に存在する。
4. $x \cdot x^{-1} = e$ となるような x^{-1} が G 内に存在する。

つまるところ、σ^0, σ^2 は単純な「合成」という演算子の元で「群」になり、$\mathbb{Z}_2$ と全く同じ構造をもつ。　話を戻すと、全ての $\hat{e}_i$ を分別できる最小の群は σ^0, 　$\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ ということがわかる。　これらの事実を鑑みた上で、一歩戻って「周波数とは何か」という事を今一度考えてみよう。wikipedia によると、「周波数」とは「振動が単位時間あたりに繰り返される回数」とされる。この定義では、

$$\hat{e}_0, \ \ \hat{e}_1, \ \ \hat{e}_2, \ \ \hat{e}_3$$

はそれぞれ周波数 $0, 1, 2, 3$ に相当する。「指標表」は周波数の概念を固有値のスペクトラムを用いて再定義できること示している。すなわち、

$\hat{e}_2$ は $\mathbb{Z}_4$ の循環に対して $[1, -1, 1, -1]$ の「周波数」をもつ「波形」
$\hat{e}_1$ は $\mathbb{Z}_4$ の循環に対して $[1, -w, -1, w]$ の「周波数」をもつ「波形」

という風に、スペクトラム自体を周波数と定義して $\hat{e}_i$ を特定できるということである。つまり２つの２次元空間

$$\mathcal{I}_0^{\mathbb{Z}_2} := \mathrm{span}\{\hat{e}_1, \hat{e}_3\}, \ \ \mathcal{I}_1^{\mathbb{Z}_2} := \mathrm{span}\{\hat{e}_0, \hat{e}_2\}$$

は $\mathbb{Z}_2$ に対する２つの周波数に対応しており、４つの１次元空間

$$\mathcal{I}_k^{\mathbb{Z}_4} := \mathrm{span}\{\hat{e}_k\}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

は $\mathbb{Z}_4$ に対する４つの周波数を対応している。これからは、$\mathcal{I}_k^{\mathbb{Z}_n}$ を $\mathbb{Z}_n$ に対する k 番目の「周波」というように定義したい。自明であるが、これらの周波は $\mathbb{Z}_n$ のスペクトラムで更に分解することは不可能なので、「**既約表現**」とも呼ばれる。

1.2.2 既約表現分解

ここで重要なことに注目を向けたい。それは

$\mathcal{I}_k^{\mathbb{Z}_4}$ のフーリエ基底は $\mathcal{I}_k^{\mathbb{Z}_4}$ の基底にそのまま使える

ということである。すなわち、$\mathbb{Z}_4$ の周波から $\mathbb{Z}_2$ の周波が直接空間の自有積によって構築でき、$\mathbb{Z}_4$ の周波には自然なグループ分けが存在する。ベクトルで表せば、

$$\mathcal{I}_0^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathcal{I}_0^{\mathbb{Z}_4} \oplus \mathcal{I}_2^{\mathbb{Z}_4}$$

$$\mathcal{I}_1^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathcal{I}_1^{\mathbb{Z}_4} \oplus \mathcal{I}_3^{\mathbb{Z}_4}$$

であるが、このようなことが高次の循環群についても言える。例えば、w を $\exp{(2\pi i/8)}$ としたとき、8 次元のベクトル空間 $\mathbb{C}^8$ におけるフーリエ基底は

$$\hat{e}_k = [1, w^k, w^{2k}, ..., w^{7k}]$$

によって与えられる。この時、$\mathcal{I}_0^{\mathbb{Z}_4}$ とは

$$\{1, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^6\}$$

に対して不変な空間であるが、　これは

$$\mathcal{I}_0^{\mathbb{Z}_4} \cong span\{\hat{e}_0, \hat{e}_4\}$$

であることは自明である。　同じように、

$$\mathcal{I}_k^{\mathbb{Z}_4} \cong span\{\hat{e}_k, \hat{e}_{(k+4)_{\mathrm{mod}} 8}\}$$

である。　これは以下の強力な定理で一般化される。

定理 1.1. 既約表現分解
n が m の倍数であるとき、全ての $\mathbb{Z}_m$ の周波は $\mathbb{Z}_n$ の周波の自由積によって与えられ、$\mathbb{Z}_n$ についてのフーリエ基底の部分集合で貼ることができる。正確には

$$\mathcal{I}_k^{\mathbb{Z}_m} \cong \bigoplus_{\ell=0}^{m/n-1} \mathcal{I}^n_{(k+\ell m)_{mod} n}$$

である。

1.3 高速フーリエ変換

前項では、フーリエ変換とは標準基底から 1.1を満たすユニークな「フーリエ基底」への変換であることを述べた。この行列演算とはどのようなものであろうか。フーリエ基底は標準基底においても正規直行であるから、$T=4$ の時、基底変換行列 P_{FT} は

$$P_{FT}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{bmatrix}\tag{1.8}$$

とかける。高速フーリエ変換とはこの行列をスパース行列に分解することである。その中でも、(1.9) の様な分解が最速とされ、数学的にもこの分解よりも高速な分解は存在していない、ということが証明されている [?].

$$P_{FT}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&w\\1&0&-1&0\\0&1&0&w^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\tag{1.9}$$

これは一体何を意味するものであろうか。基底変換行列の分解するという事は、中間基底をなる基底を設け、段階をおって基底を変えていくことと同値である。この分解では、中間基底として

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\right\}\tag{1.10}$$

という基底を用いている。基本的な工学の教科書では、これら中間基底の選択の理由ついて深く書かれてはいない。だが、少し観察してみると、0 番目の基底と 2 番めの基底が $\mathcal{I}_0^{\mathbb{Z}_2}$ に属しており、1 番目の基底と 3 番めの基底が $\mathcal{I}_1^{\mathbb{Z}_2}$ に属していることがすぐわかる。高速フーリエ変換は、徐々に高次な n についての $\mathcal{I}_k^{\mathbb{Z}_n}$ へ元のベクトルを逐次的に射影していく手法である。この議論では未だ重要と認識していないが、上の基底は元の標準ベクトルに対してスパースな表現であることも述べておく。これは、周波数領域の構造だけでなく時間領域の構造も取り入れることで達成される。$\mathcal{I}_0^{\mathbb{Z}_2}$ は $\mathbb{C}^4$ において 2 次元の空間であるため、$\mathcal{I}_0^{\mathbb{Z}_2}$ の基底には無限の選択があるところを、あえて基底 1.10を用いて変換を高速化する手法を周波数間引き高速フーリエ変換という。「周波数間引き」というアルゴリズムは基本的な工学の教科書にも書いてある

`https://www.onosokki.co.jp/HP-WK/eMM_back/emm140.pdf`

これらの代数学的説明を次の節で後述する.

2　作用群 G によって定義される周波数

自分が理解するに，統計学の目的とはデータの集まりから有用な要約としての「統計量」，ないし「特徴量」を抽出することである．そして，抽出するにあたっての最大の課題は，抽出しやすいようにデータにどういう風な変換を行うかという判断をすることである．変換でも扱いやすいのは「線形変換」であるが，極めて高次元のデータを扱うにあたって，線形の作用素の空間というのは膨大であり，それらの全てを検討するというのは現実的でない．使う側としては，線形変換のなかでも実際の応用で意味のありそうなファミリー (族) を扱いたい．さらに，データに噛ませたい変換の族を検討しだすと，変換と変換の合成を考えなければならないが，高次元の線形変換の合成には極めて大きな計算コストがかかる．

応用において，数学の中の**表現論**と呼ばれる理論は，線形の変換（行列代数）の集まりの中でも群 (定義 1.2.1) と全く同じ構造を持つ（同型）集合，特に人間に取って直感的な集合に焦点を絞り，コストの高い行列演算を群の構造を使って効率化する事を目的とする．

定義 2.1. 群 G の表現:
データが d 次元のベクトル空間 V に介在するとする．この時，群 G の V における表現 D_V とは

$$D_V : G \to \mathbb{R}^{d\times d}$$

への準同型写像，即ち

1. $x, y \in G$ の時、$D(x)D(y) = D(x \cdot y)$
2. $D(e) = I_d$

を満たす物を言う．ここで，基底の変換を考慮すると表現は一意でないことに注意されたい．

また，群には生成元という規定に似たような概念があり，これが表現の定義に役立つ．

定義 2.2. 生成元:
$A = \{g_1, ...g_m\} \subset G$ という G の部分集合で，全ての $g \in G$ が何らかの

A の部分集合で書ける時，即ち，

$$g = \prod_k g_{n_k}$$

のような表現があるとき，A を G の生成元といい，$G = \langle A \rangle$ と書く．

つまり，以下の事が言える

生成元 A の表現 $\{D(\sigma) : \sigma \in A\}$ は群の表現は一意に定める

2.0.1　既約分解とウェダーバーンの定理

2 次元空間における回転群 $\mathbb{R}_{\mathrm{mod}[\pi,-\pi]}$ の表現の一つ が

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

である．$\mathbb{R}_{\mathrm{mod}[\pi,-\pi]}$ における掛け算は可換であるように，これらの行列が可換であることに注目しよう．さて，上のように定義された表現だが，基底の選択で無限の書き方がある事を注目しよう．ちなみに，基底の変換で同値である表現の対を同型という．D という表現が与えられた時，D が対角化可能，ないしブロック対角化可能だとすると... 例えば全ての g に対して

$$D(g) = \begin{bmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{bmatrix} := D_1(g) \oplus D_2(g)$$

と書くことが出来るとすると，それは何を意味するだろうか．筆者としては以下の 2 つの点に注目してほしい．

1. ベクトル空間 V は，全ての g に対し $D(g)$ に不変な 2 つの空間 V_1, V_2 に分解できる．
2. 簡単なチェックによって，$D_1(g)$, $D_2(g)$ がそれぞれ V_1, V_2 における表現になっていることが確認できる

このような事ができるとき，表現は分解可能であるという．応用する側としては，いかなる表現を扱うに当たっても，限界までに分解を施し，計算量を減らしたい．

定義 2.3. 既約表現:
ベクトル空間 V における表現 D があるとする．この時，いかなる基底を用いても

$$D(g) = D_1(g) \oplus D_2(g)$$

と書く事が出来ない場合，D の事を既約表現といい，V は G の作用に

対して規約であるという．

問題によっては，データ点に作用する何らかの作用素の集まりとして，ユーザの定める異なった G が導入される．例えば，上におけるように，8 次元の時系列に対するシフト演算子として C_8 が導入されたが，$3D$ 画像では 3 次元における回転群，リー群が使用されたり，ランキングデータなどでは置換群，そして紐の結び目，液体混合，そして暗号理論などではブレイド群と呼ばれるものが使われる．さて，ここで心配になるのは「表現」のタイプの数である．応用するにあたり，できれば我々としては表現のタイプをカタログしておきたい．この情報がどこから得られるか示してくれるのが，以下の重要な定義と定理である．

定理 2.1. 複素群環 *:*
群 G が与えられているとき，g を基底するベクトル空間，つまり

$$\sum_{g \in G} a_g g \qquad a_g \in \mathbb{C}$$

と書ける集合の中でも，群の作用がそのまま通じる空間，つまり $h \in G$ なら

$$h\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) = \sum_{g \in G} a_g h \cdot g = \sum_{g \in G} a_{h^{-1} \cdot g} g$$

が成り立つ作用が定義出来るものを複素群環という．

前節の時系列データ空間は複素群環の形をとっている．例えば，

$$[1, 2, 4, 6, 6, -1, 1, 0]$$

という時系列データは

$$11 + 2\sigma + 4\sigma^2 + 6\sigma^3 + 6\sigma^4 - 1\sigma^5 + 1\sigma^6 + 0\sigma^7$$

と書き直すことができ，シフト演算子はこれらに対する自然な群の作用として書き表す事が出来る．

$$\sigma^2 \cdot \left(11 + 2\sigma + 4\sigma^2 + 6\sigma^3 + 6\sigma^4 - 1\sigma^5 + 1\sigma^6 + 0\sigma^7\right) \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} &= 1(\sigma^2 \cdot 1) + 2(\sigma^2 \cdot \sigma) + 4(\sigma^2 \cdot \sigma^2) + 6(\sigma^2 \cdot \sigma^3) + \\ &\qquad 6(\sigma^2 \cdot \sigma^4) - 1(\sigma^2 \cdot \sigma^5) + 1(\sigma^2 \cdot \sigma^6) + 0(\sigma^2 \cdot \sigma^7) \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$= 1\sigma^2 + 2\sigma^3 + 4\sigma^4 + 6\sigma^5 + 6\sigma^6 - 1\sigma^7 + 11 + 0\sigma \tag{2.4}$$

定理 2.2. ウェダーバーンの定理:
$\mathcal{I}$ を G の全ての既約表現のカタログだとする．基底の変換を入れると，G の $\mathbb{C}G$ における正規表現 D は一意に決まり，さらにその既約表現への分解は

$$D = \bigoplus_{k \in \mathcal{I}} \left(\bigoplus_{m=1}^{\boldsymbol{dim} D_k} D_{km} \right)$$

と書け，つまり,「全ての」既約表現が「その次元の数」回だけ出現する．これは，定理 (1.2.2) の一般バージョンである．

最後に，最も重要な定義を述べる．

定義 2.4. 周波数:
V というベクトル空間における G の表現 D があり，その既約表現 $D = \bigoplus_k D_k$，そして V の既約分解 $V = \oplus_k V_k$ があるとき，V_k の基底の事を G の D_k に対する周波数という．また，V_k の集まりのことを周波数領域という．

上に見た C_n の場合，V_k が全て 1 次元であり，それらは全て

$$D(\sigma) = \bigoplus_{m \in [0,..n-1]} D_m \sigma = \bigoplus_{m \in [0,..n-1]} [w^m] = \mathrm{diag}[w^0, ...w^{n-1}]$$

の k 番目の固有値と固有ベクトルによって特徴づけられていることに注目したい．歴史的には，固有ベクトルではなく，この固有値のことを周波「数」と言ってきたわけである．ここから，以下の定義が導かれる．

定義 2.5. $\mathcal{I}$ を G の全ての既約表現のカタログだとし，

$$\mathbf{a} = [a_{g_1}, ..., a_{g_{|G|}}]$$

というベクトルが与えられているとする．このとき，表現

$$F_G = \bigoplus_{D \in \mathcal{I}} D\left(\sum a_g g\right)$$

の要素で作られるベクトル f の要素の事を $\mathbf{a}$ のフーリエ級数といい，a から f への変換に対応する基底の事をフーリエ基底という．

なぜ行列の要素を周波数として扱うか，という所にのカギがまさにウェダーバーンの定理である．ウェダーバーンでの同じ既約表現の集まり

$$\bigoplus_{m=1}^{\mathbf{dim} D_k} D_{km}$$

に対応するベクトル空間

$$V_{k1}, V_{k2}, ...V_{k\mathbf{dim}D_k}$$

を考えてみよう．G はこれらの空間の直積に作用するわけだが，その作用の仕方を見ると...

$$\begin{bmatrix} D_{k1}(g) & & & \\ & D_{k2}(g) & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_{k\mathbf{dim}D_k}(g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \\ \vdots \\ v_{k\mathbf{dim}D_k} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

$$= \begin{bmatrix} D_k(g) & & & \\ & D_k(g) & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_k(g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \\ \vdots \\ v_{k\mathbf{dim}D_k} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$$\tag{2.7}$$

であるが，この計算はもっと簡単に

$$[D_k(g)]\,[v_{k1}, v_{k2}, \cdots, v_{k\mathbf{dim}D_k}]$$

と行うことが出来る．つまり $a = \sum a_g g$ というシグナルがあった場合，$F_G(a)$ の要素，その中でも $D_k(a)$ の ij 番目の要素を求めることはまさに k 番目の既約表現のタイプに対応する i 番目の不変ベクトル空間の j 番目の要素を求めることに相当している．

3　クーリー・テューキー型逐次型離散フーリエ変換

それでは高速フーリエ変換について説明しよう．幾つかの手法があるが，全周波数にまたがる変換は理論的に最速な漸近オーダー Baum. et al によって証明されており，任意の可換な群 G においての漸近理論最速度は

$$O(|G| \log |G|)$$

である．C_{2n} における クーリー・テューキー型逐次型離散フーリエ変換と任意の自然数 q に対しての C_q における クーリー・テューキー型の派生，レイダー型逐次型離散フーリエ変換はこの下界を達成する．工学の世界の多くではこれは単なる「演算の工夫」として処理され，とくに「バタフライ演算」と呼ばれるアルゴリズムの可視化が用いられる．だがここでは，アルゴリズムの構築のためにも，群の木構造を用いた説明を行いたい．

定義 3.1. 群の剰余類分解 (木構造):
群 G の部分集合 H 自身が群の構造を持つ時，H を G の部分群といい，$H \leq G$ と書く.. ここで，H に含まれず，何らかの h について $g_k = g_j h$ と書くことの出来ない剰余元

$$g_1, \dots g_{|G|/|H|}$$

について， G は以下の剰余類分解を許す.

$$G = \biguplus_{k \in} g_k H$$

例えば，C_8 には $C_4 = \{1, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^6\}$ が入っており，

$$C_8 = 1\{1, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^6\} \biguplus \sigma\{1, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^6\} \tag{3.1}$$

$$= 1C_4 \uplus \sigma C_4 \tag{3.2}$$

という分解が成り立つ．さらに，この C_4 はそれぞれ

$$C_4 = 1\{1, \sigma^4\} \biguplus \sigma^2\{1, \sigma^4\} \tag{3.3}$$

$$= 1C_2 \uplus \sigma^2 C_2 \tag{3.4}$$

という分解がある．これが C_8 の木構造をなしている．

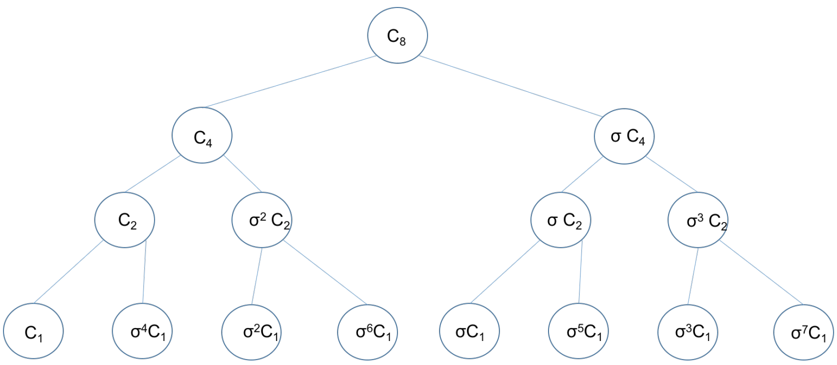

図 3: 剰余類の木構造.

ここで，重要なリマークをしたい.

命題 3.1. $H \leq G$ であるとし，V における G の表現 D があるとする．このとき，

1. D は H の表現でもある．
2. G に対して不変な空間は H に対しても不変な空間である
3. H に対して不変な空間は G に対して不変な空間に分解できる

特に事実 (3) は重要で，既約表現にも木構造を見出す為のカギとなる．例えば $\mathbb{C}C_4$ における「フーリエ基底」

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} = [v_0, v_1, v_2, v_3] \tag{3.5}$$

について考えてみよう．これらはそれぞれ

$$D_0^{(4)}(\sigma) = [1], \quad D_1^{(4)}(\sigma) = [i] \quad D_2^{(4)}(\sigma) = [-1], \quad D_3^{(4)}(\sigma) = [-i]$$

という C_4 の既約表現に対応する一次元不変空間を貼っている．ウェダーバーンの定理により，C_4 の表現はこれら以外にない．ここで，σ は C_4 の生成元であるので，σ の表現だけで表現そのものが特定出来るということをリマインドしておく．
次に，$C_2 = \{0, \sigma^2\}$ という C_4 の部分群の D の写像について考えると，

$$D_0^{(4)}[\sigma^2] = [1], \quad D_1^{(4)}[\sigma^2] = [-1] \quad D_2^{(4)}[\sigma^2] = [-1], \quad D_3^{(4)}[\sigma^2] = [-1]$$

となる．ここで，C_2 にとっては「$D_0^{(4)}$ と $D_2^{(4)}$」，「$D_1^{(4)}$ と $D_3^{(4)}$」はそれぞれ区別が付かないどころか同じ表現であるということに気付いて貰いたい．実際これらは

$$D_0^{(2)} : C_2 \to \mathbb{C}^{1\times 1} \quad D_0^{(2)}(\sigma^2) = D_2^{(4)}(\sigma^2) = D_2^{(4)}(\sigma^2) = 1 \tag{3.6}$$

$$D_1^{(2)} : C_2 \to \mathbb{C}^{1\times 1} \quad D_1^{(2)}(\sigma^2) = D_2^{(4)}(\sigma^2) = D_2^{(4)}(\sigma^2) = -1 \tag{3.7}$$

という C_2 の 2 つの既約表現, $D_0^{(2)}$ と $D_1^{(2)}$ を示している．ここから木構造が生じる．すなわち，

$$\{D_0^{(4)}, D_2^{(4)}\} \prec D_0^{(2)} \qquad \{D_1^{(4)}, D_3^{(4)}\} \prec D_1^{(2)}$$

という構造である． これは剰余類分解と全く逆の木構造を与える．ちょっと形式的にしてみよう．

定理 3.2. ***Multiplicity Free* な表現分解**:
$D^{(G)}$ という G の既約表現があり，D に対応するベクトル空間を W_D と記す．さらに，$\mathcal{I}_H = \{D_k^{(H)} : k = 1, ...|\mathcal{I}_H|\}$ が $H \leq G$ の全ての既約表現だとする．この時，入力を H に制限すると $D^{(G)}$ と全く同じ値を取る，すなわち

$$D^{(G)} \prec D_k^{(H)}$$

な k が存在し，$D_k^{(H)}$ に対応するベクトル空間 V_k は

$$V_k \quad := \bigoplus_{D^{(G)} \prec D_k^{(H)}} W_D$$

のように分解される．さらに，任意の k について $D^{(G)} \prec D_k^{(H)}$ を満たす G の既約表現の中に同じものは 2 つない．

C_8 ではこのルールによって与えられる木構造は以下のようになり，ブラテッリの木構造とよばれる．つまり，部分群鎖

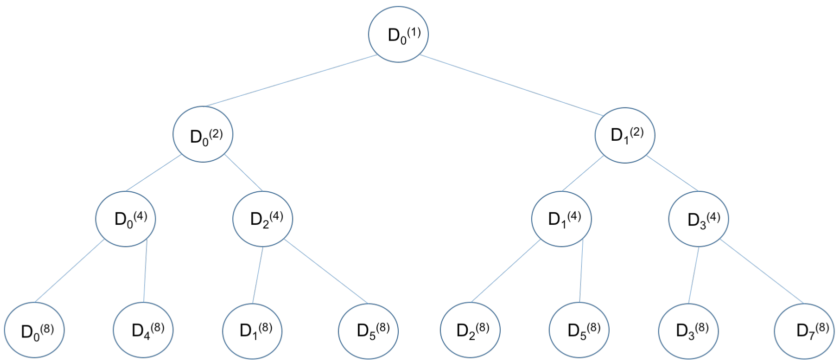

図 4: ブラテッリの木構造．剰余類の木構造とは上と下が逆になっている．

$$G \geq H_1 \geq H_2 \geq \cdot \geq H_M$$

にはそれに対応する 2 つの木構造，部分群の木構造とブラテッリの木構造が存在する．

前者をメインに利用する高速フーリエ変換のアルゴリズムがクーリー・トゥーキー型と呼ばれ，後者をメインに利用するアルゴリズムは周波数間引き型と呼ばれる．ここで怖い部分がある．今まで見た例では部分群鎖は一意だった．しかし，部分群鎖は一般的に一意に決定しないので，この部分もアルゴリズムに取り入れる必要が発生する．ウェダーバーンの定理 (2.0.1) とブラテッリ

の木構造を用いると，とても面白いことが言える．ブラテッリの木構造は，正規表現 D_G の対角化を逐次的に行うことが出来ることを示唆している．

4 クーリー・テューキー型 FFT

定義 (2.0.1) の中の表現 F を考えよう．このアルゴリズムは

$$F_G\left(\sum_g a_g g\right) = F_G\left(\sum_{k=1}^{|G|/|H|} g_k \sum_h a_{g_k h} h\right) \tag{4.1}$$

$$= \sum_{k=1}^{|G|/|H|} F_G\left(g_k \sum_h a_{g_k h} h\right) \tag{4.2}$$

$$= \sum_{k=1}^{|G|/|H|} F_G\left(g_k\right) F_G\left(\sum_h a_{g_k h} h\right) \tag{4.3}$$

という分解をまず行い，F_G の入力を H に制限した時の値が F_H から計算できることを利用して再帰的に F_G を求める手法である．ここで，部分群鎖

$$G = H_M \geq H_{M-1} \geq \cdots H_0 = (1)$$

が与えられているとし，H_m の正規表現を F_m と置く．クーリー・テューキー型 FFT は部分群の木構造を使い，以下の様な再帰的な手続きを行う．

Algorithm 1: クーリー・テューキー FFT

Input: $\mathbf{a_M} = [a_{g_1}, ...a_{g_{|H_M|}}]$
Output: $\mathbf{f_M} = [\hat{f}_1, ..., \hat{f}_{g_{|H_M|}}]$

FFT(M, $\mathbf{a_M}$) :
  if $M = 0$**:**
    return a_M
  else:
    for g_k **in 剰余元の集合** $\{g_1, ...g_{|H_M|/|H_{M-1}|}\}$
      $\mathbf{w_k} \leftarrow \left[a_{g_k h_1}, ...a_{g_k h_{|H_{M-1}|}}\right]$
      v_k **= FFT(M-1, $\mathbf{w_k}$)**
      (1) ブラテッリの木構造に従い，v_k **を**
        $|H_M|$ **次元空間に埋め込み**
        $F_M^k = F_M\left(\sum_m a_{g_k h_m} h_m\right)$ **を得る．**
      (2) $\tilde{F}_M^k \leftarrow F_M(g_k) F_M^k$
      (3) $\tilde{F}_M^k$ **をベクトルに書き換えて** f_M^k **を得る**
  return $\sum_k f_M^k$

とりあえず C_4 に対して クーリー・テューキーを行ってみよう．まず

$$\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, a_3]$$

としよう． ここから C_2 と σC_2 に関わる部分，$[a_0, a_2]$, $[a_1, a_3]$ をそれぞれ抜き出し，$FFT(C_2)$ を行う．$FFT(C_2)$ は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

で与えられるため，この計算は以下のように行われる．

$$\begin{bmatrix} L_0 \\ H_0 \\ L_1 \\ H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

ここで L_k と H_k はそれぞれ k 番目の C_2 の剰余類から生じた C_2 に対する”low frequency”と”high frequency”であることを強調したいがために使っている表記で，$D_0^{(2)}$ と $D_1^{(2)}$ に対応している出力である．ここで，ブラテッリの木構造を鑑みると，L の空間と H の空間はそれぞれ $D_0^{(4)}, D_2^{(4)}$ の表現に対応する空間の 2 つと $D_1^{(4)}, D_3^{(4)}$ の表現に対応する空間の 2 つに分解され，

$$D_0^{(4)}(\sigma^2) = D_2^{(4)}(\sigma^2) = D_0^2(\sigma^2) = 1$$
$$D_1^{(4)}(\sigma^2) = D_3^{(4)}(\sigma^2) = D_1^2(\sigma^2) = -1$$

である，さらに，

$$D_0^{(4)}(\sigma) = [1], \quad D_1^{(4)}(\sigma) = [i] \quad D_2^{(4)}(\sigma) = [-1], \quad D_3^{(4)}(\sigma) = [-i]$$

であり，剰余類 σC_2 に対応する部分にはこれらを作用させせなければ行けないのであった．つまり $D_0^{(4)}, D_2^{(4)}$ に当たる出力をそれぞれ LL, LH とし，$D_1^{(4)}, D_3^{(4)}$ に当たる出力をそれぞれ HL, HH とおくと，

$$LL = L_0 + D_0^{(4)}(\sigma)L_0 = L_0 + L_0 \tag{4.6}$$
$$HL = H_0 + D_1^{(4)}(\sigma)H_0 = H_0 + iH_0 \tag{4.7}$$
$$LH = L_1 + D_2^{(4)}(\sigma)L_1 = L_0 + (-1)L_0 \tag{4.8}$$
$$HH = H_1 + D_3^{(4)}(\sigma)H_1 = H_1 + (-i)H_1 \tag{4.9}$$

となる. これを行列で書くと

$$\begin{bmatrix} LL \\ HL \\ LH \\ HH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ H_0 \\ L_1 \\ H_1 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

これが前節で見た (1.9) の導出となる．つまり，クーリー・テューキーとは，剰余類の木構造を用いて空間を分解し，ブラテッリの木構造を用いて空間を再構成していく手法と言える．