



TRAVAIL D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

Modélisation de la remontée des bulles dans les boissons effervescentes.

Auteurs :

Thomas MAITRE
Baptiste RAVE
Etienne GRIVEAUD
Emile LAROCHE
Alexis CAS
Gabriel ROLAND

Encadrants :

Mathieu COQUERELLE
Annabelle COLLIN

Table des matières

1	Introduction	2
2	État de l'art	3
2.1	Théorie de remontée de la bulle	3
2.2	Vitesse de remontée d'une bulle	3
2.2.1	Hypothèses simplificatrices	3
2.2.2	Résolution par le principe fondamental de la dynamique	4
2.3	Modélisation du rayon	5
2.4	Fin de vie d'une bulle	6
3	Partie Expérimentale	7
3.1	Présentation de la manipulation	7
3.2	Résultats et problèmes	8
4	Étude numérique	10
4.1	Résolution numérique des équations	10
4.1.1	Rayon	10
4.1.2	Vitesse	10
4.2	Exploitation des vidéos obtenues expérimentalement	12
4.2.1	Méthode de Shi-Tomasi	13
4.2.2	Méthode de Lucas-Kanade	14
4.2.3	Utilisation du code de tracking	14
4.3	Estimation des paramètres	15
4.3.1	Un problème de minimisation	16
4.3.2	Analyse des résultats	16
4.4	Modélisation sous Fluent	19
4.4.1	Mise en évidence du phénomène d'aspiration dans un train de bulles	19
4.4.2	Phénomène de recirculation du liquide après un passage de bulles	21
5	Conclusion	25
6	Bibliographie	26

1 Introduction

Le cidre est une boisson effervescente française confectionnée à base de pommes et protégée par une appellation d'origine contrôlée. Il est très largement associé à des occasions festives, comme l'épiphanie ou la chandeleur notamment dans ses régions de production, la Normandie et la Bretagne. Bien que sa consommation reste occasionnelle, cette boisson commence à se faire une place dans la gastronomie. On dit que la clé d'un bon cidre réside dans son effervescence. De leur naissance à leur éclatement à la surface, en passant par leur ascension dans le verre, toutes les phases de vie d'une bulle sont présentes dans un verre. Il est donc intéressant d'étudier ces phases pour découvrir les mécanismes complexes qui impactent aussi bien le goût que la texture.

La création de la bulle au fond du verre remonte au processus d'élaboration du cidre. En effet, lors de la fermentation du sucre présent dans les pommes pour former l'alcool, il y a une production de dioxyde de carbone CO_2 . La mise en bouteille immédiate permet de garder le gaz dans la bouteille et sa dissolution dans le liquide. Lorsqu'on ouvre la bouteille de cidre, le gaz peut s'échapper sous forme de bulles. Les bulles qu'on voit dans le verre se forment grâce à la présence d'impuretés dans le verre.

L'objectif de cette étude est de modéliser la remontée des bulles d'une boisson effervescente dans un verre. Ce phénomène a priori compréhensible par tous nécessite néanmoins une étude approfondie de mécanique des fluides et notamment d'un milieu diphasique composé d'un liquide et d'un gaz.

Tout d'abord, nous avons voulu observer expérimentalement la remontée des bulles dans différents verres afin de voir les sites de nucléation (sites de naissance des bulles), la différence de vitesse des train de bulles, et leur éclatement à la surface libre afin de s'imprégnner du sujet. Dès ces premières observations, des idées d'approches ont émergées et nous ont permis de diriger nos recherches rapidement. Après une partie théorique qui consistait à étudier en 2D la remontée des bulles dans un verre avec des hypothèses simplificatrices, nous avons résolu numériquement les équations régissant le mouvement. Ensuite nous avons pris des vidéos de la remontée des bulles dans le cidre, puis avons traité nos données vidéos avec un code de tracking Python. Ces résultats ont été par la suite utilisés dans un deuxième code Python, permettant cette fois ci l'estimation des paramètres qui nous intéressent. Puis, nous avons décidé de modéliser l'ascension d'un train de bulles avec le logiciel Fluent pour observer le phénomène d'aspiration des bulles dans leur remontée. De plus, nous avons étudié la recirculation du fluide suite aux passages des bulles dans différents types de verre sous Fluent ainsi que l'influence de ces recirculations sur la température du fluide.

2 État de l'art

2.1 Théorie de remontée de la bulle

Les recherches bibliographiques nous ont permis de comprendre que la formation des bulles dans le verre provient d'impuretés : les fibres de cellulose. La naissance d'une bulle s'appelle la nucléation. Ces fibres sont initialement creuses, et emprisonnent donc une petite poche d'air. Lorsque le champagne entoure la fibre, le gaz carbonique est attiré par la poche d'air et y pénètre en la faisant grossir. Quand la poche chargée de CO_2 atteint une certaine taille critique, une bulle se détache et monte dans le verre.

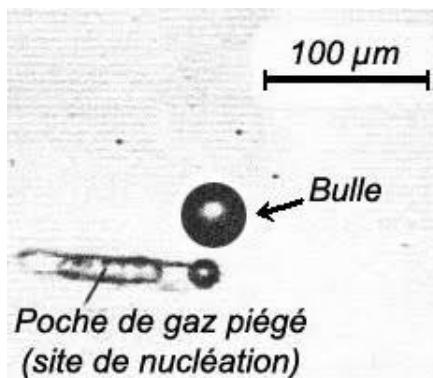


FIGURE 1 – Site de nucléation d'une bulle

A la sortie de ces sites de nucléation, la vitesse de remontée évolue jusqu'à la surface libre du liquide. Cette évolution est régie par trois nombres adimensionnels :

$$\text{Reynolds} : Re = \frac{\rho_L v_b d_e}{\mu_L}$$

$$\text{Morton} : Mo = \frac{g \mu_L^4}{\rho_L \sigma_L^3}$$

$$\text{Eötvös} : Eo = \frac{g \rho_L^4 d_e^2}{\sigma_L}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_b: \text{vitesse finale de la bulle en } m.s^{-1} \\ \rho_L: \text{masse volumique du liquide en } kg.m^{-3} \\ d_e: \text{diamètre de la bulle en } m \\ \sigma_L: \text{tension superficielle en surface de la bulle } N.m^{-1} \\ \mu_L: \text{viscosité du liquide en } kg.m^{-1}.s^{-1} \end{array} \right.$$

Ces nombres adimensionnels sont caractéristiques d'un rapport entre deux forces. Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Le nombre de Morton décrit les écoulements à phase dispersée, en particulier les déformations des bulles dans un fluide. Pour finir, le nombre d'Eötvös correspond au rapport entre la force de poussée d'Archimède et la tension superficielle.

2.2 Vitesse de remontée d'une bulle

2.2.1 Hypothèses simplificatrices

On étudie pour le moment une bulle dans un verre en 2D. La bulle est considérée comme circulaire de rayon R constant. On suppose qu'on est à bas nombre de Reynolds (dans le cas d'un obstacle circulaire : $Re \ll 1$). Le fluide est du cidre, supposé à température et pression constantes.

Dans ce cas là, la force de tension superficielle est négligée. En effet, la bulle étant considérée

sphérique, les forces liées à la tension superficielle se compensent.

Néanmoins, dans le cas d'une bulle non sphérique, négliger la tension superficielle n'est pas une hypothèse valide. En effet, par analyse d'ordre de grandeur du nombre d'Eötvös, on obtient que $Eo \ll 1$ donc le dénominateur correspondant à la tension superficielle est prépondérant par rapport à la force d'Archimète.

2.2.2 Résolution par le principe fondamental de la dynamique

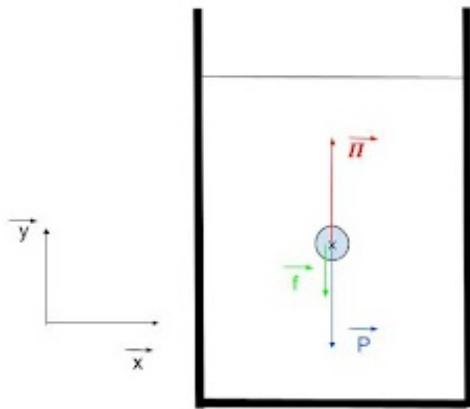


FIGURE 2 – Schéma de la remontée d'une bulle dans un verre

La bulle est soumise à son poids $\vec{P} = m_b \vec{g}$ et à la poussée d'Archimète $\vec{\Pi} = -\rho_L V_b \vec{g}$. Elle est aussi soumise à la force de frottement visqueux exercée par le liquide de viscosité η . Cette force est donnée par la formule de Stokes : $\vec{f} = -6\pi\eta R \vec{v}(t)$. La viscosité d'un fluide caractérise la résistance du milieu à un écoulement uniforme sans turbulence.

On applique le principe fondamental de la dynamique qu'on projette sur l'axe vertical afin d'obtenir l'équation différentielle qui régit l'évolution de la vitesse de la bulle :

$$\begin{aligned} \rho_b V_b \frac{dv(t)}{dt} &= -6\pi\eta r v(t) + (\rho_L - \rho_b) V_b g \quad \text{avec } V_b = \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \iff \left\{ \frac{dv(t)}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_b r(t)^2} v(t) \right\} &= \left(\frac{\rho_L}{\rho_b} - 1 \right) g \end{aligned} \quad (1)$$

On obtient une équation différentielle du premier ordre, qu'on peut résoudre facilement analytiquement :

$$v(t) = (v_{init} - \frac{2(\rho_L - \rho_b)gr^2}{9\eta}) \exp\left(-\frac{9\eta}{2\rho_b r^2} t\right) + \frac{(\rho_L - \rho_b)gr^2}{9\eta}$$

On trace l'évolution de la vitesse avec l'aide de Gnuplot sur la Figure 3 avec les valeurs définies dans la table 1. Nous avons choisi de prendre un rayon égal au rayon de sortie du site de nucléation car on considère que le rayon n'évolue pas durant la remontée.

v_{init} ($m.s^{-1}$)	ρ_L ($kg.m^{-3}$)	ρ_b (kgm^{-3})	r (m)	η ($kg.m^{-1}.s^{-1}$)
50e-6	1000	1.87	25e-6	10e-3

TABLE 1 – Valeurs choisie pour les constantes du système, correspondant au cidre (liquide) et à du CO_2 (bulle)

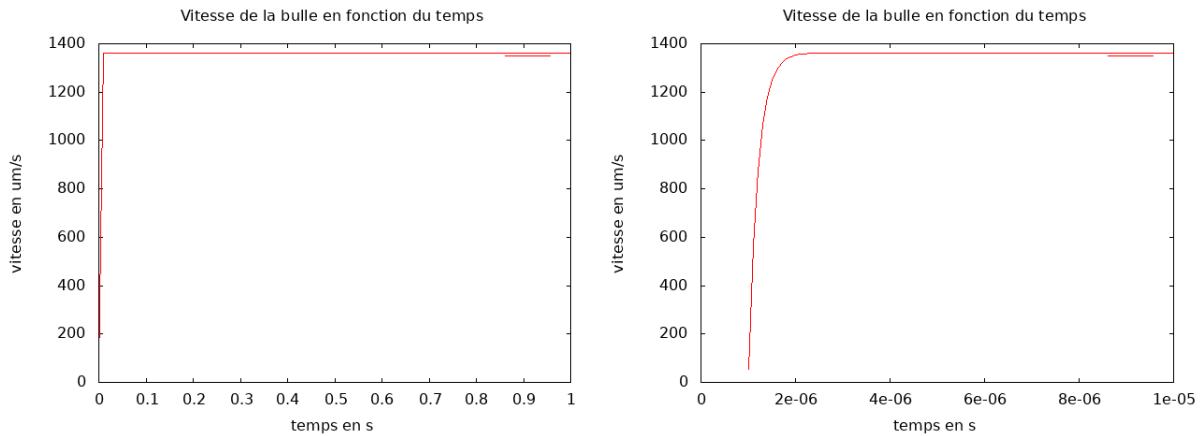


FIGURE 3 – Evolution de la vitesse de la bulle dans un verre

On remarque que la constante de temps τ est très faible, de l'ordre de $10^{-6}s$. On en déduit que la bulle atteint sa vitesse finale très vite. On peut donc négliger le régime transitoire, et faire l'hypothèse qu'on se place en régime stationnaire directement. La vitesse est alors quasi constante au cours du temps. Ainsi, on peut calculer la valeur de la vitesse finale :

$$v_f = \frac{2(\rho_L - \rho_b)gr^2}{9\eta} = 1,35 \cdot 10^{-3} m.s^{-1}$$

On vient à présent valider notre hypothèse de départ. A-t-on bien fait de se placer à bas nombre de Reynolds ?

$$Re = \frac{\rho_L v_f d}{\eta} = 0.0675 \ll 1$$

Donc l'hypothèse est validée. Pourtant la valeur de la vitesse n'est pas réaliste, elle paraît trop faible par rapport à nos premières observations lors des expériences. Ainsi, il convient de changer nos hypothèses de départ pour étudier un modèle plus réaliste. Nous allons donc jouer sur le caractère constant du rayon de la bulle.

2.3 Modélisation du rayon

Pour obtenir une modélisation fidèle de la remontée des bulles, il est nécessaire de s'intéresser à l'évolution de son rayon. Il semble tout d'abord important de constater que le rayon est croissant lors de l'ascension.

Nous avons considéré deux approches différentes, la première étant de considérer un modèle d'évolution linéaire du rayon et la deuxième de se baser sur l'équation d'Epstein-Plessset.

Equation d'Epstein-Plesset:

$$\left\{ \frac{dR}{dt} = D\Lambda\xi \left(\frac{1}{R(t)} + \frac{1}{\sqrt{D\pi t}} \right) \right. \quad (2)$$

Avec Λ la constante d'Ostwald égale à 1 (on se place dans le cas du CO_2 à 12°), D un coefficient de diffusion ayant une valeur de $2.10^{-9}m^2.s^{-1}$ et ξ le taux de saturation valant entre 5 et 7.

Cette équation non linéaire est tirée de la loi de Fick (diffusion), elle est valable lorsque la bulle est parfaitement sphérique et que l'on néglige la tension superficielle avec le rayon $R \gg 1\mu m$.

Equation linéaire:

$$\left\{ R = R_0 + k * t \right. \quad (3)$$

Cette équation ainsi que les constantes présentes à l'intérieur de celle-ci ont été trouvées expérimentalement, une équipe de recherche a aboutie à cette conclusion en mesurant la vitesse d'une bulle à l'aide de matériels adaptés.

Finalement, nous retiendrons le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dR(t)}{dt} = D\Lambda\xi \left(\frac{1}{R(t)} + \frac{1}{\sqrt{D\pi t}} \right) \\ \frac{dv(t)}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_b R(t)^2} v(t) = \left(\frac{\rho_L}{\rho_b} - 1 \right) g \end{array} \right. \quad (4)$$

2.4 Fin de vie d'une bulle

A la naissance d'une bulle, nous avons vu qu'elle se formait dans les sites de nucléation pour remonter à la surface. La dernière partie de sa vie est sa disparition ou sa division en bulles filles lorsque la bulle mère rencontre la surface [3].

Après avoir poussé l'interface cidre/air au maximum, la bulle finira par la percer, ce qui provoquera son éclatement. Toutefois, la façon dont la bulle se comporte en fin de vie peut être différente suivant les conditions de l'expérience *i.e* suivant le nombre de capillarité Ca ($Ca = \frac{U\mu}{\sigma}$) et le nombre de Reynolds Re [3]. La caractérisation de la fin de vie d'une bulle peut se modéliser suivant la Figure 4.

On peut d'abord séparer le type d'éclatement de la bulle en deux cas selon la valeur de Re . Pour un Re inférieur à 1, la bulle ne produira pas de bulles filles. En effet, la frontière de la bulle se replie sur elle-même, ne capturant ainsi aucune des bulles.

Dans le deuxième cas (pour un $Re > 1$), les forces d'inertie sont plus importantes, ainsi la frontière de la bulle se replie vers l'extérieur et forme de nouvelles bulles filles. Plus précisément, il y a l'apparition de soit un anneau de bulles filles ($Ca > 1$), soit deux anneaux concentriques de bulles filles ($Ca < 1$) lorsque la bulle mère éclate à la surface. Si $Ca > 1$, alors les forces visqueuses sont dominantes par rapport à la tension superficielle ce qui résulte en un repliement des bords de la bulle sur elle-même vers l'extérieur lors de sa rupture, emprisonnant ainsi une deuxième couche d'air autour de sa base (voir Figure 5.b). En revanche, si $Ca < 1$ alors ce sont les forces de tension superficielle qui dominent et ce repliement supplémentaire n'a pas lieu (cf Figure 5.c).

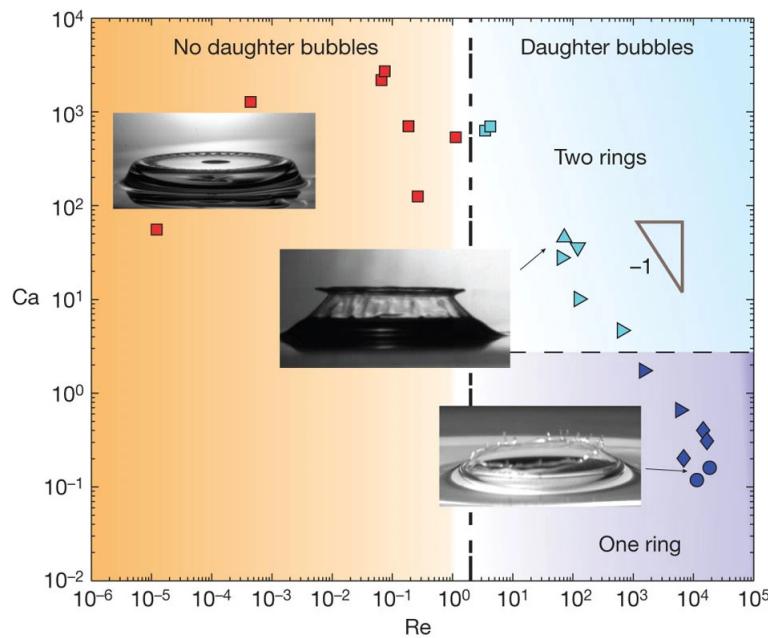
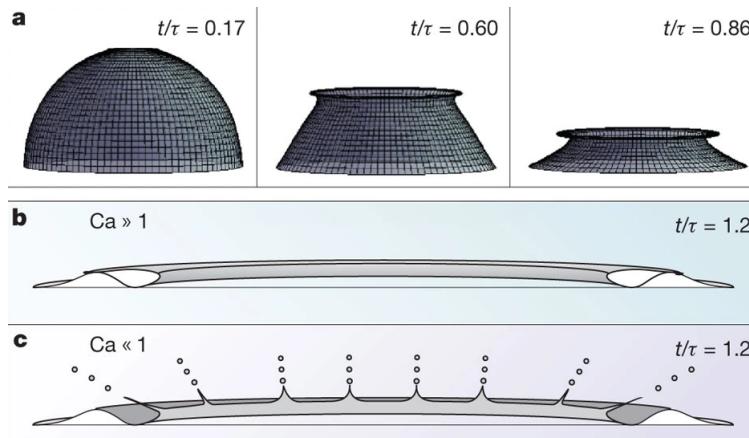


FIGURE 4 – Graphique des domaines des différentes fins de vie d'une bulle

FIGURE 5 – Repliement d'une bulle en fonction du nombre Ca

3 Partie Expérimentale

En parallèle de la théorie, il est primordial de réaliser une expérience afin de vérifier le modèle théorique et numérique. L'objectif de cette expérience est de filmer la remontée de bulles pour pouvoir extraire leurs vitesses et rayons et donc ainsi les comparer à la théorie dans un premier temps, puis d'appréhender le phénomène de l'explosion des bulles dans un deuxième temps. L'expérience consiste donc à filmer une boisson gazeuse dans un verre.

3.1 Présentation de la manipulation

En amont de l'expérience, il a fallu décider quels paramètres de l'expérience nous voulions modifier et aussi quels étaient les meilleurs choix pour avoir une bonne qualité vidéo et ainsi avoir un bon traitement par la suite.

Nous choisissons donc plusieurs paramètres. Pour les verres, notre choix se porte sur 2 verres

à vin, 2 verres avec des formes différentes et une choppe. Pour la boisson : du cidre et du Sprite, toutes deux translucides (pour avoir une meilleure reconnaissance lors de l'acquisition). Pour l'endroit de la prise de la vidéo, on choisit un espace sombre pour avoir le moins de reflet possible avec le verre (cf Figure 7).

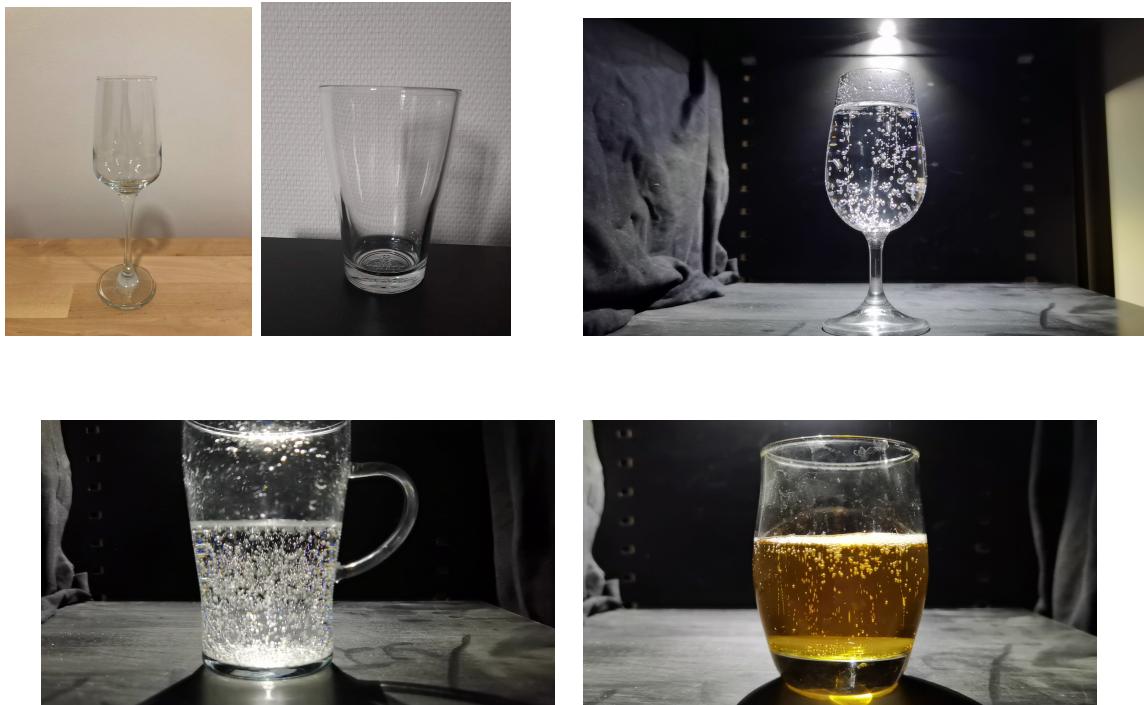


FIGURE 6 – Différents types de verres



FIGURE 7 – Lieu de l'expérience

3.2 Résultats et problèmes

Après une première série de vidéos, on a fait face à plusieurs problèmes. Le plus important était celui des bulles collées sur la paroi (cf Figure 8), que l'on a essayé d'enlever dans un premier

temps à l'aide d'un stylo. On a ensuite choisi la forme de verre la moins propice à la formation de bulles sur la paroi : le verre à vin. En effet, d'un point de vu qualitatif du fait de l'angle du ballon du verre, la tension superficielle, responsable de ce phénomène, est plus ou moins importante. Après avoir une première fois traité la vidéo, nous nous sommes rendu compte que les bulles n'étaient pas identifiables. Il a donc fallu opter pour un cadrage beaucoup plus rapproché du verre et avec de possible zoom. D'autres complications, mineures, ont été rencontrées. Ces problèmes et leurs solutions, en plus des précédents sont résumés dans la Table 2.



FIGURE 8 – Problème de bulles collées sur la paroi

Problème → Solution
Bulles collées sur la paroi → Enlevées avec un stylo / Changement de verre
Problèmes d'éclairage pour identifier les bulles → Eclairage d'en haut
Pas assez de précision → Cadrage plus rapproché / Zoom
Pauvre qualité de bulles → Changement fluide

TABLE 2 – Problèmes rencontrés lors de l'expérience

Finalement, on décide de s'orienter vers un verre à vin, avec du cidre comme boisson. On effectue donc plusieurs vidéos dans lesquelles on extrait les passages où on peut identifier un train de bulles. On aboutit ainsi à une base de données importante (28 vidéos) pour avoir une bonne prédiction des paramètres.



FIGURE 9 – Exemple de vidéo finale

4 Étude numérique

4.1 Résolution numérique des équations

4.1.1 Rayon

Le système d'équations obtenu à partir du PFD ne peut être résolu analytiquement que pour le cas où le rayon est constant. Pour les deux autres modèles de rayon, l'utilisation de méthodes numériques est nécessaire. Comme cela reste des équations différentielles ordinaires nous pouvons utiliser le schéma de Runge Kutta 4. Cette méthode a été implémentée en C++.

Nous allons d'abord nous intéresser à la résolution de l'équation d'Epstein-Plesset uniquement. Les courbes ci-dessous sont obtenues pour différents jeux de paramètres. Premièrement, on voit sur les Figures 10 et 11 qu'après un régime transitoire (environ 0.3s), l'évolution du rayon est proche d'être linéaire. Le modèle d'évolution linéaire du rayon trouvé expérimentalement peut donc être une bonne approximation. Par ailleurs, il y a clairement une dépendance des paramètres utilisés. C'est pourquoi il sera indispensable d'essayer d'estimer ces paramètres grâce à nos résultats expérimentaux (voir partie 4.3 Estimation des paramètres).

4.1.2 Vitesse

La résolution de l'équation (1) nous donne les Figures 12 et 13. Comme précédemment, les résultats sont dépendants des paramètres utilisés. Néanmoins, cela nous donne une bonne idée de l'ordre de grandeur de la vitesse d'une bulle quand son rayon augmente. Cette vitesse est bien plus grande que celle obtenue théoriquement pour un rayon constant, ce qui montre que le modèle utilisé précédemment n'était pas viable.

Cependant, même s'il ne nous donnait pas de bons ordres de grandeur, nous avons quand même appris que le régime transitoire de la vitesse était extrêmement faible ($\sim 10^{-6}s$). Cela peut nous aider à résoudre le système d'équations plus facilement. Effectivement dans le cas où l'on néglige le régime transitoire de la vitesse, pour le schéma d'Euler explicite, le système à résoudre à chaque pas de temps est :

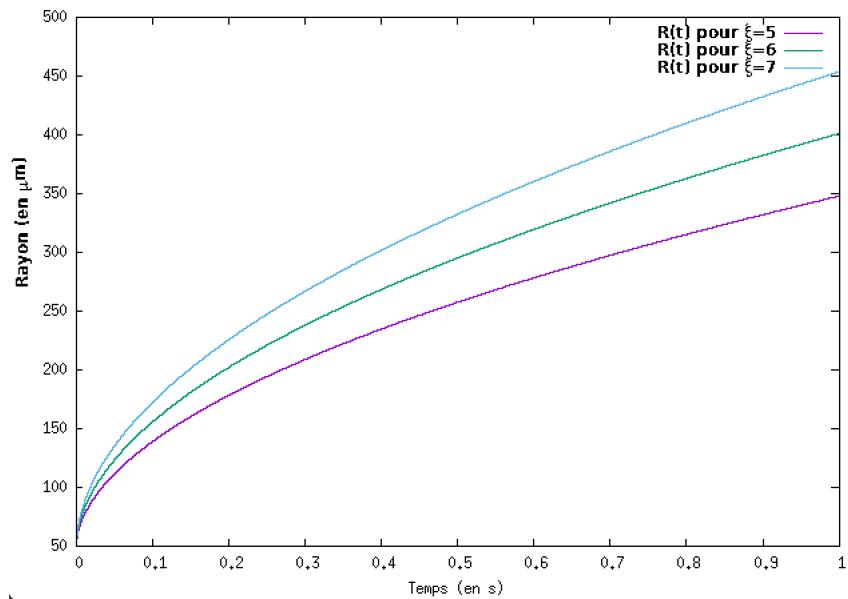


FIGURE 10 – Évolution du rayon en fonction du temps pour différentes valeurs de ξ

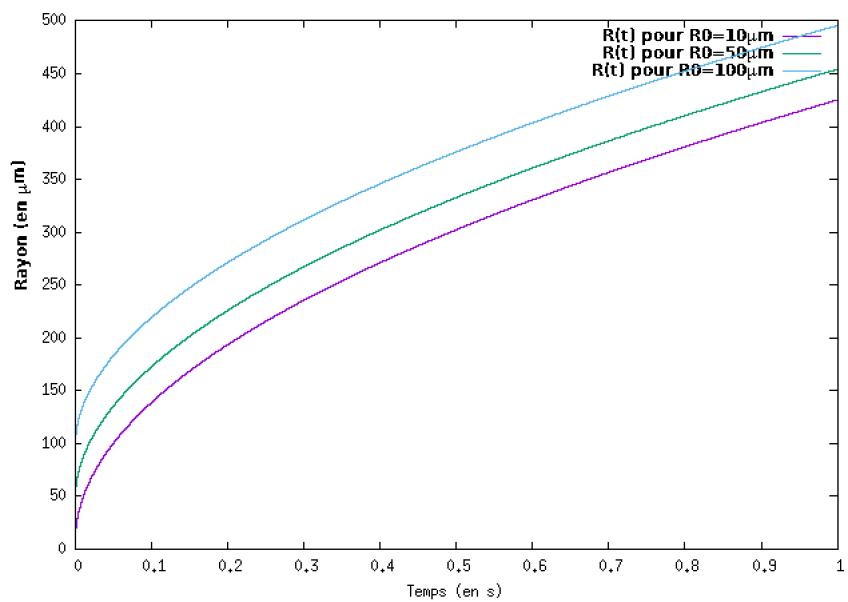
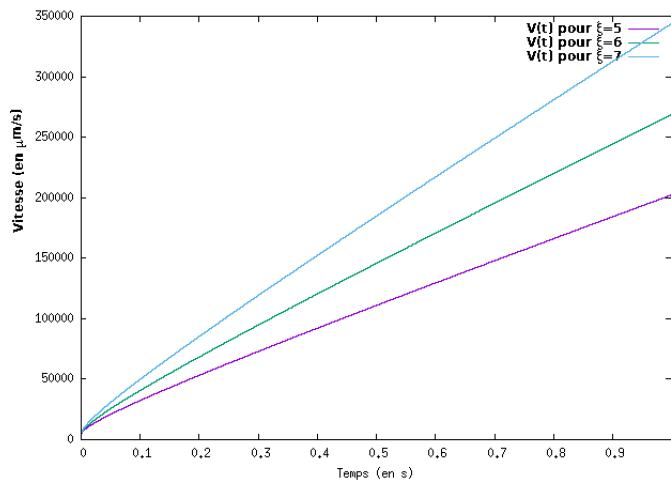
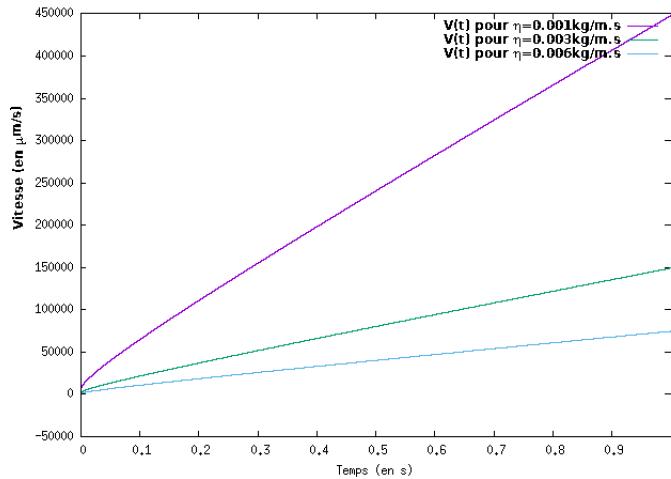


FIGURE 11 – Évolution du rayon en fonction du temps pour différentes valeurs de R_0

FIGURE 12 – Évolution de la vitesse en fonction du temps pour différentes valeurs de ξ FIGURE 13 – Évolution de la vitesse en fonction du temps pour différentes valeurs de η

$$\begin{cases} R(t_{i+1}) = R(t_i) + \Delta t D \Lambda \xi \left(\frac{1}{R(t_i)} + \frac{1}{\sqrt{D \pi t_i}} \right) \\ V(t_{i+1}) = \frac{2(\rho_L - \rho_b) g R(t_{i+1})^2}{9\eta} \end{cases} \quad (5)$$

La Figure 14 montre bien que l'approximation de la vitesse par la vitesse terminale est bonne car les deux courbes sont quasi confondues. Cette approximation allège beaucoup le temps de calcul car la résolution des équations couplées nous imposait un pas de temps très petit ($\sim 10^{-6}s$) sinon la vitesse divergeait. Avec les équations découplées nous pouvons utiliser un pas de temps bien plus grand ($\sim 10^{-3}s$) et obtenir semblablement le même résultat sur la vitesse car le résultat sur le rayon converge assez rapidement.

4.2 Exploitation des vidéos obtenues expérimentalement

Comme nous l'avons vu précédemment, nous avons pu acquérir expérimentalement une série de vidéos mettant en scène la remontée de bulles dans un verre rempli de cidre. Il s'agit à présent de les analyser afin de quantifier les paramètres mis en jeu dans ces expériences. Pour cela, nous

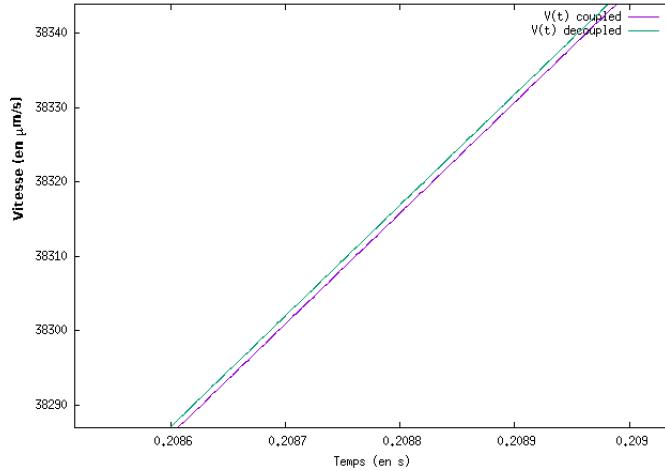


FIGURE 14 – Comparaison des différentes vitesses obtenues avec le système couplé et le système découpqué

avons utilisé un code de tracking Python reposant principalement sur les méthodes de Shi-Tomasi [4] et de Lucas-Kanade [5]. Avant de décrire le fonctionnement du code plus en détail, rappelons rapidement le fonctionnement de ces deux méthodes.

4.2.1 Méthode de Shi-Tomasi

La méthode de Shi-Tomasi permet d'identifier les coins d'une image en repérant les changements d'intensité entre ces coins et les points aux alentours dans toutes les directions. On pose alors la fonction :

$$S(x, y) = \sum_u \sum_v w(u, v)(I(u + x, v + y) - I(u, v))^2$$

où w est une fonction de masse. Bien que cette fonction permette de différencier le changement d'intensité entre deux pixels, la calculer pour tout u, v, x et y prendrait énormément de temps. On utilise alors le développement de Taylor :

$$I(u + x, v + y) \approx I(u, v) + I_u(u, v)x + I_v(u, v)y$$

avec I_u et I_v les dérivées partielles de I par rapport à u et v . On a alors

$$S(x, y) \approx \sum_u \sum_v w(u, v)(I_u(u, v)x + I_v(u, v)y)^2$$

On peut l'écrire sous forme matricielle :

$$S(x, y) \approx \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où A est la matrice définie par :

$$A = \sum_u \sum_v w(u, v) \begin{pmatrix} I_u(u, v)^2 & I_u(u, v)I_v(u, v) \\ I_u(u, v)I_v(u, v) & I_v(u, v)^2 \end{pmatrix}$$

Un coin est caractérisé par une grande variation de la fonction S dans toutes les directions $(x \ y)$. On peut alors conclure que le point considéré est un coin dès lors que les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A sont "grandes".

En pratique, la fonction `goodFeaturesToTrack` d'OpenCV prend en argument une valeur seuil appelée `qualityLevel` qui permet de décider à partir de quel niveau l'on considère qu'un point est un coin ou pas. En effet, on ajoute un point à la liste des coins que si $R = \min(\lambda_1, \lambda_2) > qualityLevel$.

4.2.2 Méthode de Lucas-Kanade

On se donne à présent deux frames voisines et une liste de points intéressants appartenant à la première frame. La méthode de Lucas-Kanade détermine les positions de ces points matériels sur la deuxième frame, et relie les points d'une frame à l'autre de façon à tracer le flux optique.

Cette méthode repose sur le fait que l'intensité d'un point matériel d'un objet reste la même au cours du temps. Mathématiquement, on peut donc écrire :

$$I(x, y, t) = I(x + dx, y + dy, t + dt)$$

De la même façon que dans la section précédente, on va utiliser le développement de Taylor du terme de droite :

$$I(x + dx, y + dy, t + dt) \approx I(x, y, t) + I_x(x, y, t)dx + I_y(x, y, t)dy + I_t(x, y, t)dt$$

d'où, en posant $u = \frac{dx}{dt}$ et $v = \frac{dy}{dt}$, on obtient :

$$I_x u + I_y v + I_t = 0 \quad (6)$$

Cette équation, appelée équation du flot optique, possède deux inconnues u et v : il n'est donc pas possible de la résoudre directement. Il est vraisemblablement temps d'utiliser la deuxième hypothèse de la méthode de Lucas-Kanade, à savoir que le flot optique est le même pour des pixels voisins. Cela nous permet de considérer l'équation précédente sur l'ensemble des pixels voisins, ce qui nous ramène à un système surdéterminé (et donc résoluble) pour peu que le pixel en question possède plus de deux voisins.

4.2.3 Utilisation du code de tracking

Pour une vidéo donnée, l'utilisation du code de tracking s'effectue en deux temps.

Etape 1: Tout d'abord, on récupère les positions des bulles dans l'ensemble du verre. Pour cela, on commence par distinguer les bulles du liquide grâce à la méthode de Shi-Tomasi. Ensuite, on itère sur les frames de la vidéo et on applique la méthode de Lucas-Kanade afin de déterminer la distribution des bulles dans le verre pour chaque frame. Attention cependant, l'échelle donnée par l'algorithme est arbitraire. Connaissant les dimensions des verres filmés, il convient alors de faire un produit en croix de façon à se ramener à des positions en centimètres. A chaque itération, on enregistre ainsi tous les points bulles dans un fichier texte. On en profite pour enregistrer dans ce même fichier le temps de pointage de la bulle ainsi que la vitesse que possède la bulle. Après avoir remarqué que le déplacement horizontal d'une bulle était très petit devant son déplacement vertical, le calcul de la vitesse est approché par celui de la vitesse verticale de la bulle :

$$V = \frac{y_1 - y_0}{dt} \quad (7)$$

On affiche les résultats obtenus sur Gnuplot.

Etape 2: On observe sur la Figure 15 la remontée de plusieurs bulles jusqu'à la surface, située sur le plan $y = 0$. On repère alors les positions approximatives des trains de bulles qui nous intéressent, puis on lance le code une seconde fois pour isoler la remontée d'une seule bulle à l'aide de boucles if (voir Figure 16). Ceci nous permet d'avoir un fichier texte avec les positions, les temps de capture et les vitesses d'une seule bulle.

On peut noter que ce travail est assez fastidieux. On a pu tirer des résultats exploitables de seulement 8 de nos 28 vidéos. Sur certaines de ces vidéos, on a pu isoler des informations sur la remontée de plusieurs bulles, ce qui nous amène à un total de 11 fichiers textes. Il s'agit maintenant d'exploiter ces résultats grâce à un code d'estimation des paramètres.

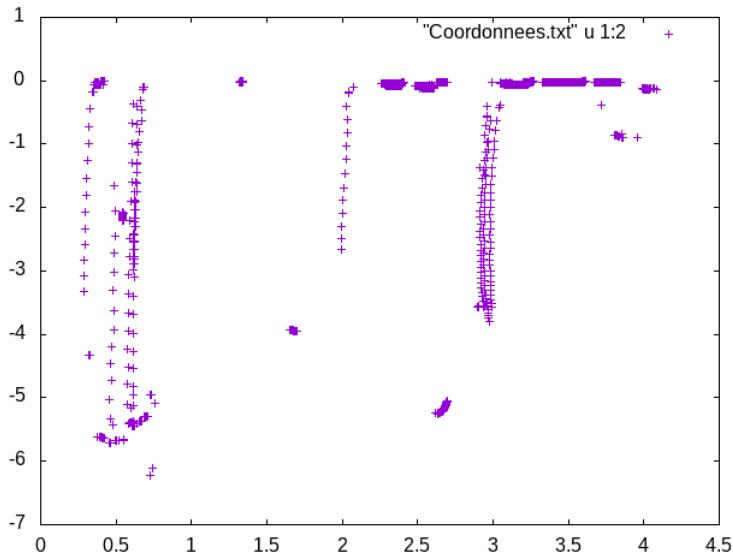


FIGURE 15 – Positions des bulles dans un verre tout au long de l'expérience

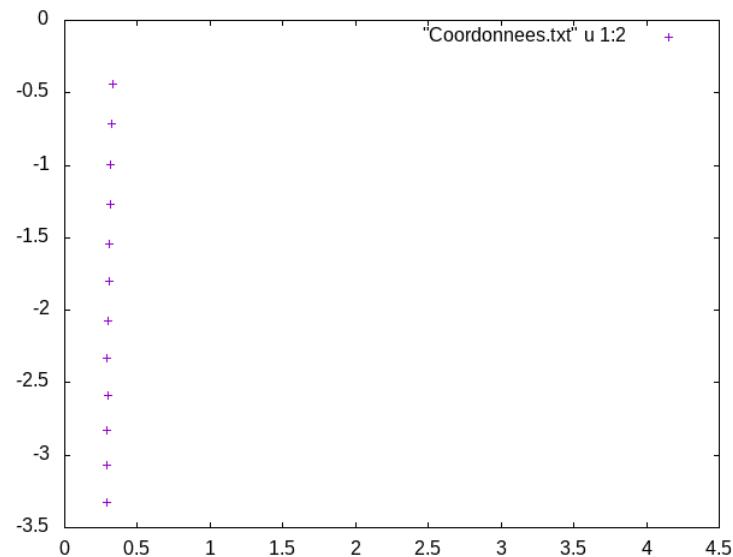


FIGURE 16 – Positions d'une bulle au cours du temps dans le même verre qu'en figure 15

4.3 Estimation des paramètres

Le code d'estimation des paramètres permet, comme son nom l'indique, de prévoir les valeurs de certains paramètres de notre problème à partir d'un jeu d'observations expérimentales et du système d'équations régissant le phénomène étudié. On rappelle le système considéré :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = -\frac{9\eta}{2\rho_b} \frac{V(t)}{R(t)^2} + \left(\frac{\rho_l}{\rho_b} - 1\right)g \\ \frac{dR}{dt} = D\Lambda\xi \left(\frac{1}{R(t)} + \frac{1}{\sqrt{D\pi t}}\right) \end{cases} \quad (8)$$

On considère ici que le coefficient de diffusion D , la constante d'Ostwald Λ et les masses volumiques ρ_b et ρ_l sont connues. On cherche alors à estimer la viscosité η et le taux de saturation ξ

avec des méthodes de gradient.

4.3.1 Un problème de minimisation

On dispose d'un jeu d'observations $(y_i^n)_{i,n}$ où y_i^n représente l'observation de l'expérience i prise au temps t_n . Pour chaque observation, on va chercher à réduire l'écart entre y_i^n et la solution exacte φ^n calculée avec (8) afin de déterminer cette solution exacte φ sur l'ensemble du domaine. On est donc ramené à un problème de minimisation.

On utilise une méthode à région de confiance appelée Trust-Region-Reflective [6] en anglais pour résoudre ce problème. Cette méthode est basée sur le principe suivant : supposons qu'on ait une fonction $f(x)$ à minimiser (par exemple $f = y - \varphi$), alors on approche f par une fonction q plus simple qui reflète suffisamment bien le comportement de f dans un voisinage V de x qu'on appelle région de confiance. On minimise ensuite q sur cette région de confiance, c'est à dire qu'on résout :

$$\min_s(q(s); x + s \in V) \quad (9)$$

Si $f(x + s) < f(x)$, alors $x = x + s$. Si ce n'est pas le cas, x reste inchangé mais on réduit la région V et on recommence l'itération.

Des questions se posent quant aux façons de choisir q , de choisir et modifier V et de résoudre (9). De manière standard, on définit q comme les deux premiers termes de la formule de Taylor en x et on prend V elliptique. On doit alors trouver la solution de

$$\min_s\left(\frac{1}{2}s^T H s + s^T \nabla f(x); \|Ds\|_2 \leq \Delta\right) \quad (10)$$

où H est la Hessienne de f en x , D est une matrice diagonale et Δ un réel positif. En pratique, des algorithmes pour résoudre (10) existent mais sont peuvent être coûteux car nécessitent le calcul des valeurs propres de H . On peut alors décider de restreindre le problème (10) à un sous espace bidimensionnel $S = \text{Vect}(s_1, s_2)$ afin de faciliter la recherche des valeurs propres de H , quitte à avoir un résultat un peu moins précis. On détermine ensuite S à l'aide du gradient conjugué préconditionné où s_1 est la direction de descente et $H.s_2 = -\nabla f(x)$ afin de forcer la convergence.

On a choisi d'utiliser un algorithme Trust-Region-Reflective plutôt qu'un classique Levenberg-Marquardt [7]. Ce choix est justifié dans la mesure où cela nous permettait d'éviter les problèmes de minima locaux en imposant des bornes sur les paramètres qu'on cherchait à estimer.

4.3.2 Analyse des résultats

Les bulles ayant été capturées par le code de tracking à différents instants, nous avons été obligés d'effectuer une translation des temps de pointage de telle façon que l'origine en temps de chaque mesure soit bien à zéro. Cependant, parce que la première prise de mesure de chaque vidéo n'est pas effectuée au moment t_0 où la bulle est éjectée de la fibre de cellulose mais à un instant $t_{init} > t_0$, il faudra s'attendre à un léger problème au niveau des fits. Ceci sera d'autant plus valable quand on se rapprochera de $t = 0$.

Nous avons d'abord considéré les vitesses obtenues à l'étape précédente comme jeu d'observations. Cependant, ce choix était malheureux car le bruit résultant de la formule d'Euler vue précédemment était bien trop grand et rendait le fit sur les courbes des vitesses aberrant. En effet, nous pouvons le voir en Figure 17 où l'on obtient un fit en forme de U alors que nous savons qu'il devrait avoir l'allure observé sur les Figures 12 et 13.

Dans le but de limiter ce bruit, nous avons donc choisi d'utiliser directement les coordonnées de position verticale des bulles. Aussi, nous considérons maintenant le modèle (8) auquel

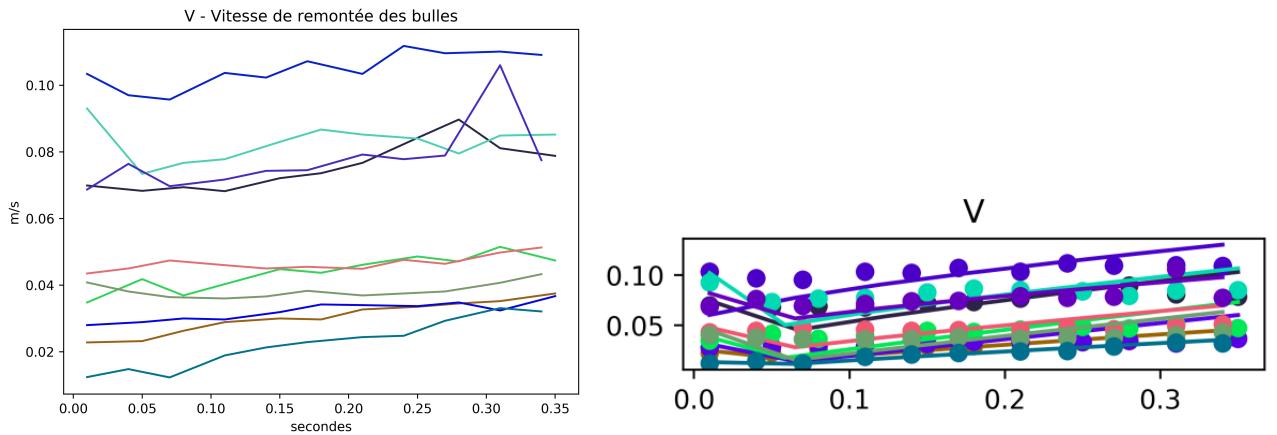


FIGURE 17 – Mise en évidence du mauvais fit sur les courbes de vitesses (à gauche) lorsqu'on choisit un jeu d'observations de vitesses (à droite) bruité

on ajoute l'équation $\frac{dy}{dt} = V(t)$. On décide également d'imposer une variation de vitesse de 0.1 lorsque cette dernière devient négative au cours de l'algorithme pour lutter contre la diminution absurde de la vitesse entre $t = 0$ et $t = 0.1$ s. Avec le jeu d'observations tracé en Figure 18, l'algorithme Trust-Region-Reflective nous permet alors d'avoir les résultats de la Figure 19 ainsi que ceux de la Table 3.

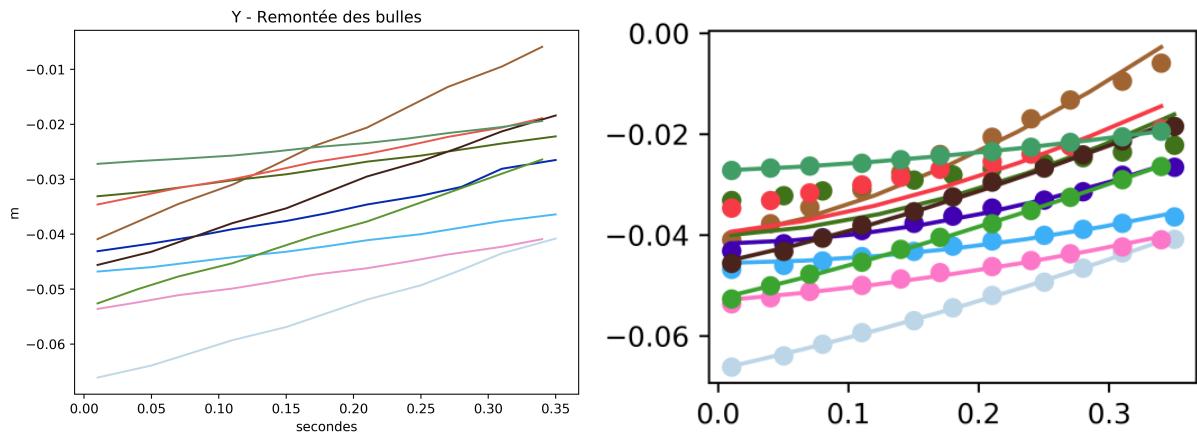


FIGURE 18 – Positions verticales des bulles observées à l'aide du code de tracking en fonction du temps (à gauche) et fit de ces positions à l'aide du code d'estimation (à droite)

Sur la partie droite de la Figure 18, on voit que les points de mesures de nos expériences sont fittés de manière très convenable pour la majorité. On pourrait remettre en question ce fit sur une poignée de points pour $t \in [0, 0.1]$ pour les expériences rouges et vertes, mais on s'attendait à perdre un peu en précision sur le fit à cause du forçage de la variation de vitesse à 0.1 lorsqu'elle est en réalité négative.

Sur la Figure 19, on a représenté les fits de l'évolution du rayon et de la vitesse des bulles considérées dans nos expériences en fonction de temps. On observe des allures similaires aux résultats théoriques des Figures 10 et 11. Les Figures 10, 11, 12 et 13 expliquent les différences observées entre chaque expérience de la Figure 19, elles sont en partie dues à des valeurs de ξ , η

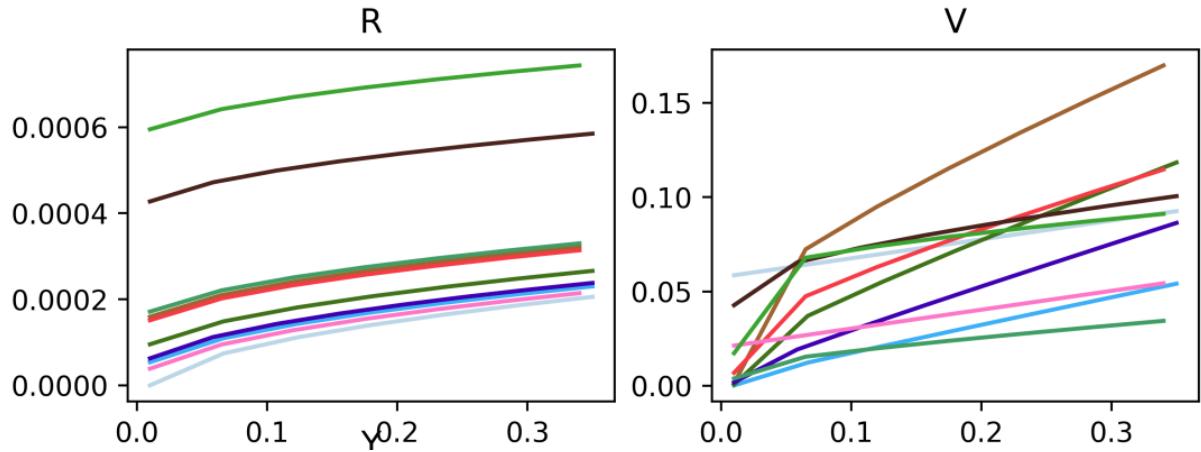


FIGURE 19 – Fit des rayons (à gauche) et vitesses (à droite) d'une bulle en fonction du temps pour chaque expérience grâce au code d'estimation

et R_0 différentes (voir Table 3).

numéro de l'expérience	ξ	η ($kgm^{-1}s^{-1}$)	R_0 (m)	V_0 (ms^{-1})	Y_0 (m)
1	6.281e+00	4.479e-03	8.592e-08	5.859e-02	-6.601e-02
2	6.000e+00	1.324e-03	1.594e-04	1.379e-03	-3.999e-02
3	5.977e+00	2.129e-03	5.383e-05	2.258e-04	-4.551e-02
4	6.000e+00	1.301e-03	9.550e-05	6.550e-04	-3.999e-02
5	6.000e+00	1.427e-03	6.279e-05	1.863e-03	-4.164e-02
6	6.001e+00	1.870e-03	1.514e-04	6.878e-03	-3.933e-02
7	6.035e+00	7.404e-03	4.274e-04	4.272e-02	-4.498e-02
8	5.936e+00	3.009e-03	3.886e-05	2.133e-02	-5.279e-02
9	5.856e+00	1.320e-02	5.950e-04	1.727e-02	-5.198e-02
10	5.894e+00	6.884e-03	1.714e-04	3.875e-03	-2.712e-02

TABLE 3 – Estimation avec l'algorithme Trust-Region-Reflective, dans l'ordre, du taux de saturation, de la viscosité, du rayon initial, de la vitesse initiale et de la position initiale de la bulle pour différentes expériences

La Table 3 donne les paramètres qui nous intéressent pour chaque expérience. Le taux de saturation moyen de nos expériences vaut $\xi_{moy} = 6$ et la viscosité moyenne $\eta_{moy} = 4.3027 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Ces valeurs sont bien en accord avec la littérature où ξ est généralement compris entre 5 et 7 et η est de l'ordre de 10^{-3} . On peut aussi relever une valeur moyenne de R_0 à 1.755×10^{-4} m. Attention cependant, du fait qu'on commence à répéter les bulles à un instant $t_{ini} > t_0$, les valeurs de R_0 , V_0 et Y_0 ne correspondent pas aux valeurs des rayons, vitesses et positions à la sortie de la fibre de cellulose.

Pour finir, on a relancé une simulation numérique avec le code en C++ en utilisant ξ_{moy} et η_{moy} . On prend également $R_0 = 100 < 175 \mu\text{m}$ de par la remarque précédente. On obtient les Figures 20 et 21 qui ont une allure similaire à nos expériences en Figure 19. Sur la Figure 20, on voit alors qu'au bout de 0.3 secondes le rayon atteint une valeur d'environ $275 \mu\text{m}$, ce qui est raisonnable en comparant avec la Figure 19. De la même façon, on voit sur la Figure 21 que la vitesse de la bulle au bout de 0.3 secondes est d'environ 6 cm s^{-1} , une valeur bien représentative de notre jeu d'observations. Cette comparaison des simulations théoriques et expérimentales est donc plutôt satisfaisante et nous permet de valider nos résultats.

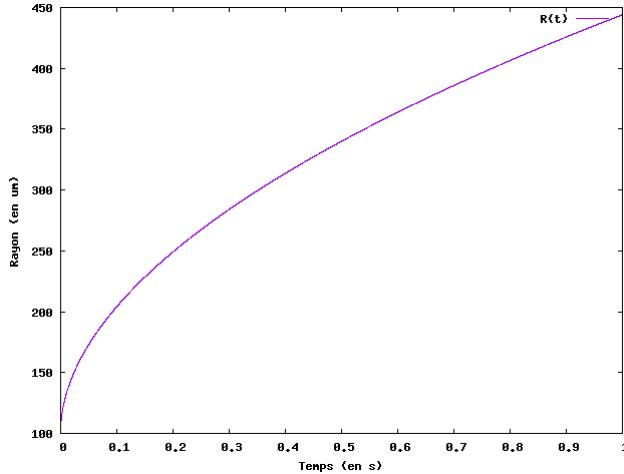


FIGURE 20 – Evolution du rayon d'une bulle en fonction du temps pour $\xi = \xi_{moy}$, $\eta = \eta_{moy}$ et $R_0 = 100 \mu m$

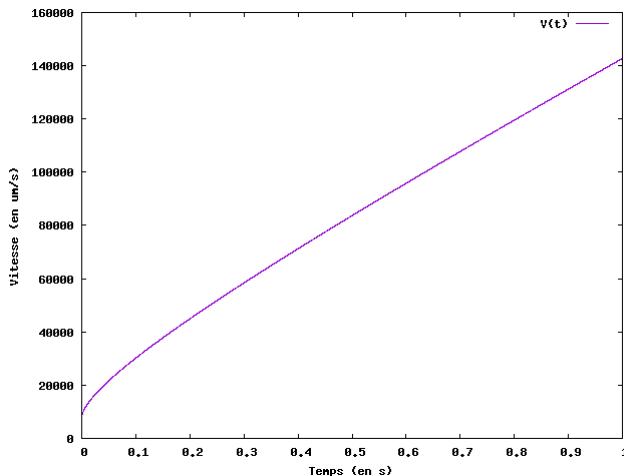


FIGURE 21 – Evolution de la vitesse d'une bulle en fonction du temps pour $\xi = \xi_{moy}$, $\eta = \eta_{moy}$ et $R_0 = 100 \mu m$

De plus, grâce à cette estimation des paramètres nous pouvons désormais deviner dans quel cas de fin de vie de bulle nous sommes lors de nos expériences. Nous avons donc les valeurs de η et nous aboutissons à $Re \approx 10^{-2}$. Il n'y a donc aucune bulles filles observables, qu'importe la valeur du nombre Ca .

4.4 Modélisation sous Fluent

4.4.1 Mise en évidence du phénomène d'aspiration dans un train de bulle

Nous allons à présent modéliser sous Fluent la remontée d'un train de bulle dans un verre pour mettre en évidence un phénomène d'aspiration. Pour cela, nous allons créer une géométrie avec un verre et onze bulles dans un liquide dont les propriétés sont celle du cidre. Comme il y a une symétrie axiale au problème, on se contentera de représenter la partie supérieure du verre.

On opte pour un maillage cartésien dans la partie supérieure du fluide et jusqu'à la paroi du haut. Pour mailler autour des bulles, on raffine la taille des mailles sur l'axe de symétrie et

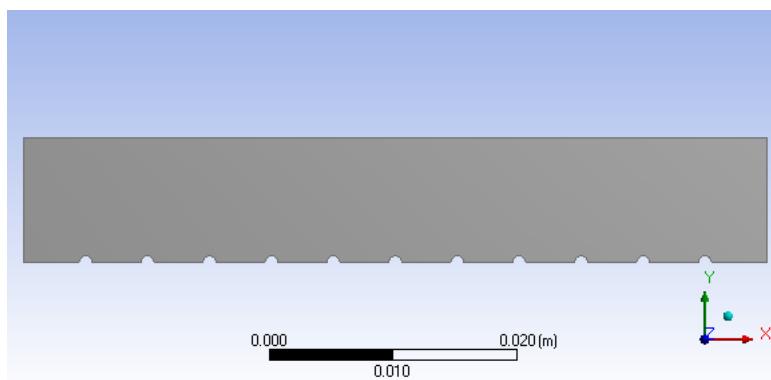


FIGURE 22 – Géométrie d'un train de bulles dans un verre

la surface des bulles. De plus, on applique une méthode d'inflation à la surface des bulles, pour avoir un maillage plus précis autour de ces obstacles.

On importe cette géométrie maillée sur Fluent afin de visualiser les différences de pression dans l'écoulement du fluide. Pour cela, on impose au côté gauche une condition d'entrée en vitesse de $0.02m.s^{-1}$ qui correspond à nos estimations de vitesse calculé à la Figure 19. Le bord droit est la sortie du fluide, on lui impose une condition de "pressure outlet". Le bord du haut est considéré comme un "wall" sans contraintes de cisaillement. Pour le bord de bas, c'est un axe de symétrie, et les bulles sont ici considérée comme des "wall".

On affiche grâce au solveur Fluent la pression dynamique dans tout le domaine, ce qui va nous permettre d'étudier les variations de pression autour des bulles. De plus, on affiche comme paramètres de sortie la force de trainée \vec{T} derrière chaque bulle pour voir son ordre de grandeur et son évolution dans le fluide.

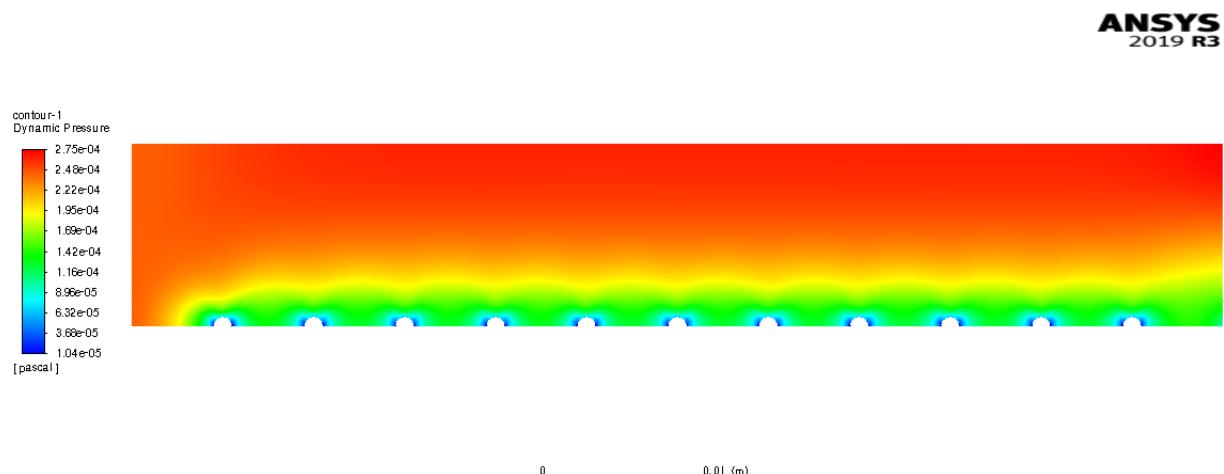


FIGURE 23 – Variation de la pression dynamique à l'intérieur du verre

La taille des bulles est prise égale à $R = 5.10^{-4}m$ car cela correspond aux valeurs trouvées dans la littérature et à nos estimations paramétriques de R_0 dans la table 19. On remarque que sur le résultat donné par Fluent il y a une différence de pression entre l'avant et l'arrière des bulles. Cela permet de mettre en évidence un phénomène d'aspiration que nous allons tenter de

prouver en affichant les valeurs des trainées derrières chaque bulle.

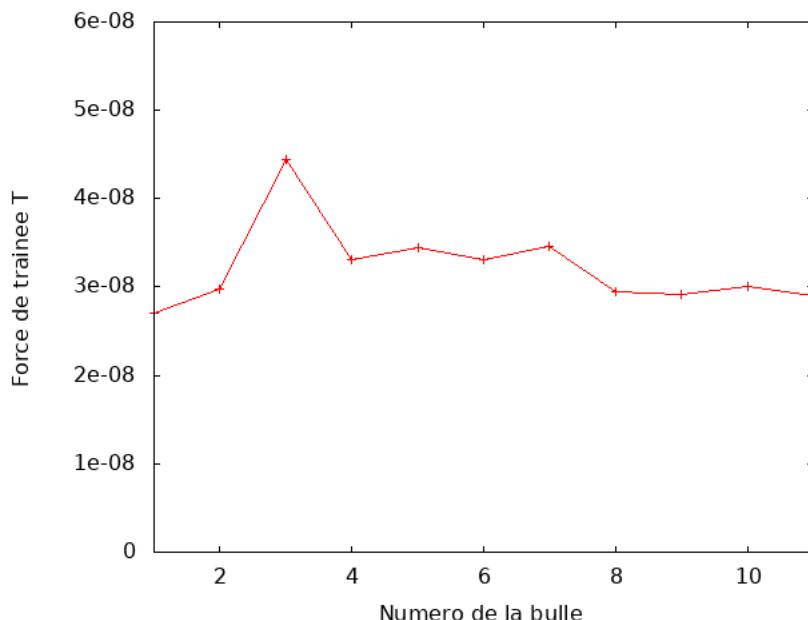


FIGURE 24 – Evolution de la force de trainée T en Newton derrière chaque bulle

On remarque que la force de trainée varie entre $2,7 \cdot 10^{-8} N$ et $4,5 \cdot 10^{-8} N$, sans tendance particulière. On en déduit donc qu'elle est relativement constante.

Normalement, nous aurions dû avoir une force de trainée qui diminue nettement pour mettre en évidence un réel phénomène d'aspiration. Pour autant, l'ordre de grandeur de la trainée est le même que la force de la poussée d'Archimède. On en déduit que le phénomène d'aspiration n'est pas négligeable par rapport aux autres forces mises en jeu dans notre système.

4.4.2 Phénomène de recirculation du liquide après un passage de bulles

Le but de cette partie est d'essayer de retrouver à travers une modélisation numérique, le phénomène de recirculation du fluide à l'intérieur de différents types de verre (cf. Figure 25).

Lors de notre première modélisation nous avons choisi de modéliser une moitié de verre coupé



FIGURE 25 – Exemple de recirculation de bulles dans un verre

selon son axe de révolution, le train de bulles remontant au centre du verre a été modélisé par un moving wall à la vitesse terminale d'une bulle. Pour utiliser l'outil moving wall nous avons fait l'approximation que la vitesse des bulles est la même sur toute la hauteur du verre. La vitesse des bulles choisie est de 0.1 m/s . Egalement la modélisation de l'interface liquide gaz (champagne/air) a été simulée par un wall sans glissement car nous voulions que les frottements et le cisaillement au niveau de l'air soit très faible, dans le but de se rapprocher de la réalité. Le maillage utilisé lors de cette simulation est un simple maillage cartésien légèrement raffiné au niveau du contact air-liquide. Les premiers résultats obtenus nous permettent d'observer des recirculations sous forme de tourbillons dans les différents verres (cf. Figures 26 et 27)

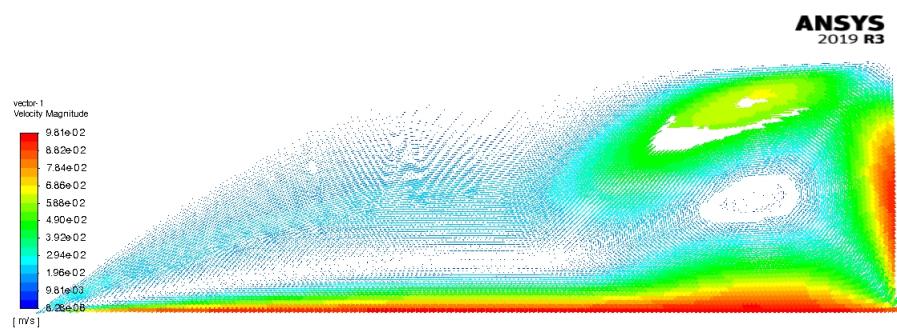


FIGURE 26 – Modélisation de la vitesse du fluide à l'intérieur d'une flûte

On peut clairement voir apparaître des recirculations similaires à celles de la Figure 25. Il y a également la présence de zones où la vitesse du fluide est nulle (dead zone). Nous verrons dans les modélisations suivantes que ces zones ont un intérêt certain, notamment dans le cas de l'évolution de la température du fluide (cf. Figures 29 et 31). De plus les résidus obtenus pour cette modélisation sont corrects de l'ordre de 10^{-4} ce qui en fait une simulation acceptable dans la limite de nos hypothèses.

Dans un second temps nous avons considérés une modélisation diphasique liquide/gaz. De

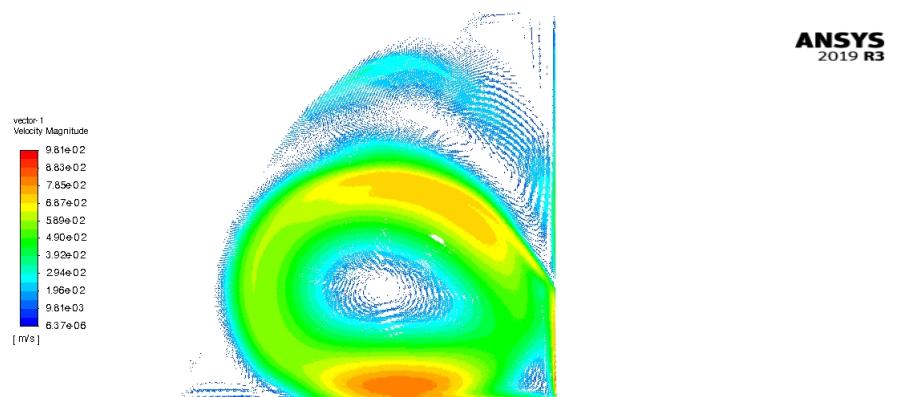


FIGURE 27 – Modélisation de la vitesse du fluide à l'intérieur d'une coupe

cette manière le cisaillement au contact de l'air est modélisé de la façon la plus optimale. Le maillage choisi est plus raffiné pour le liquide que pour le gaz, de plus au contact liquide/gaz nous avons utilisé une méthode d'inflation pour avoir un raffinement plus précis au niveau de cette zone. Pour être plus précis, nous avons utilisés la fonction $\log(1 + x)$ pour créer le bord du verre. Mais également à l'aide de la fonction dimensionnement de design modeler nous avons mis le verre à la bonne échelle et différentes géométrie de verre ont été créés (coupe, flûte).

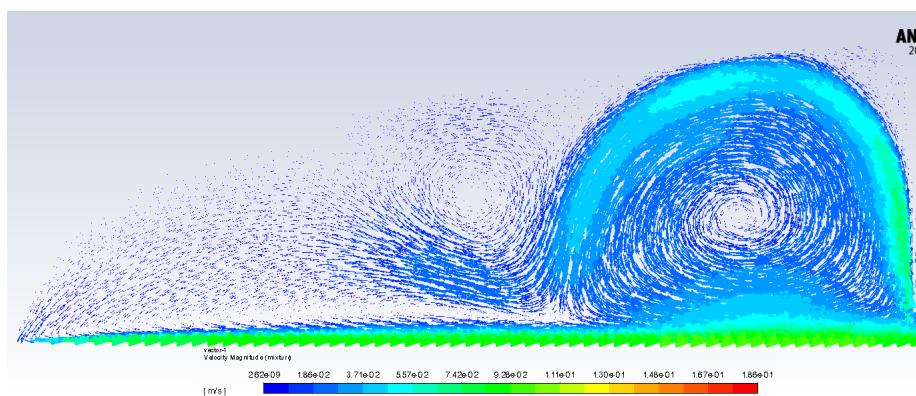


FIGURE 28 – Vitesse du liquide au bout de 10s

Cette nouvelle simulation nous permet,似ilairement à la première, d'observer des recirculations dans le fluide sous forme de vortex, et de la même façon que précédemment des deads zones apparaissent au niveau des bords inférieurs sur la flûte. Lors de cette seconde simulation nous nous sommes demandés si ces recirculations avaient une influence quelconque sur la température du fluide. Pour cela nous prenons une température extérieure de 25° Celsius et une température de liquide de 5° Celsius. Nous avons lancé le calcul en transient car étudier ce phénomène en steady ne serait pas intéressant car tout le système serait équilibré à la même température. Nous observons alors que le liquide se réchauffe plus vite dans les deads zones et qu'à l'inverse le liquide dans les zones de recirculation reste plus froid (cf. Figures 28, 29, 30 et 31). Les résidus obtenus lors de cette simulation sont d'environ 10^{-3} ce qui est correct.

Les résultats obtenus sont satisfaisants, néanmoins notre modélisation comporte quelques limites. En effet, nous avons considéré un seul train de bulles au centre du verre ce qui n'est pas le cas dans la réalité car les trains de bulles peuvent naître sur toute la surface du verre. De plus les bulles ne sont pas réellement modélisées, c'est plutôt l'inertie d'un train de bulles qui est modélisée.

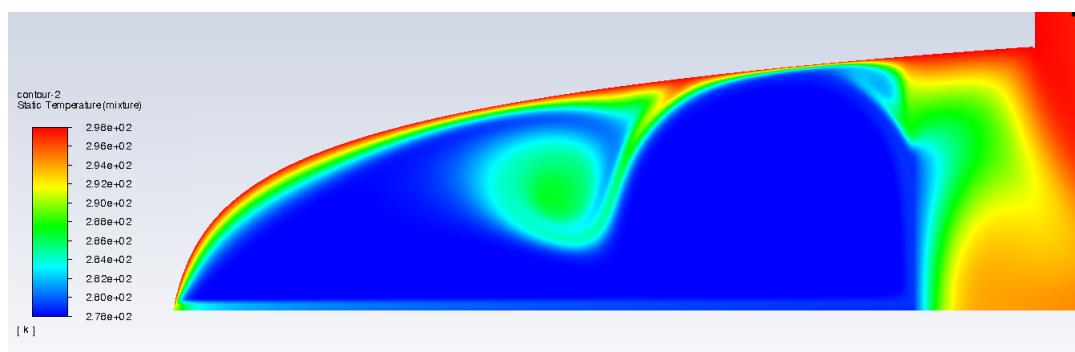


FIGURE 29 – Température du liquide au bout de 10s

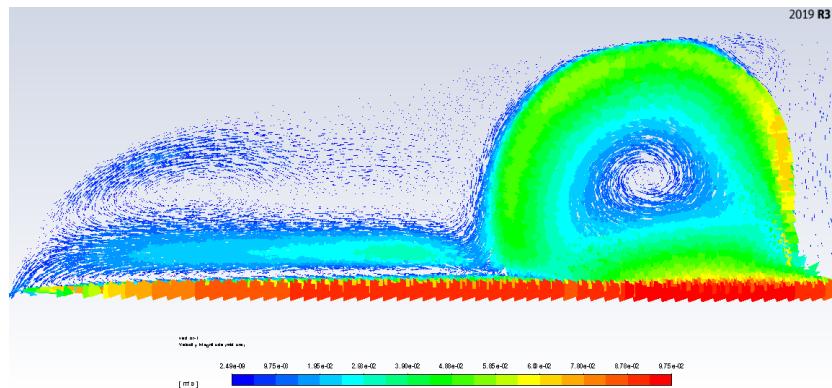


FIGURE 30 – Vitesse du liquide au bout de 1 minute dans une flûte

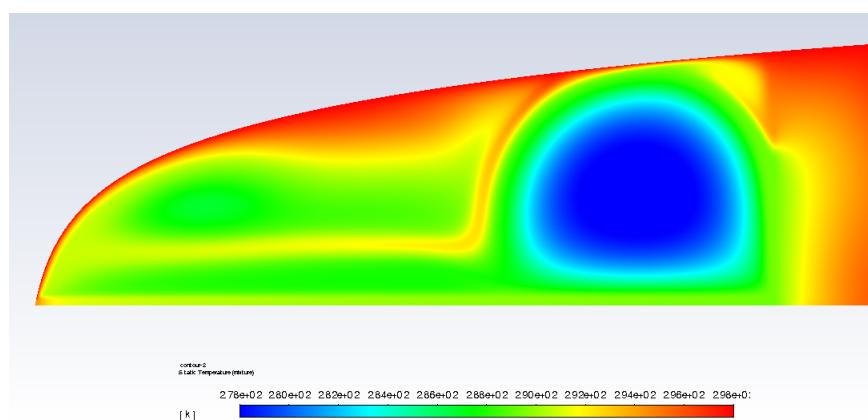


FIGURE 31 – Température du liquide au bout de 1 minute dans une flûte

5 Conclusion

À travers nos travaux de recherche nous avons pu identifier les principales problématiques autour des bulles dans une boisson effervescente.

Tout d'abord, nous avons exposé les mécanismes causant la formation d'une bulle. Puis, avec une rapide mise en équation du problème, il a été possible d'extraire l'évolution de la vitesse d'une bulle dans un train de bulle. Cela a abouti à une première conclusion : le régime transitoire étant rapide, pour la suite de la modélisation, la vitesse peut être approchée par sa valeur finale. Nous avons ensuite trouvé numériquement l'évolution du rayon de la bulle.

Aux cours de la vie d'une bulle, de nombreux phénomènes peuvent être étudiés. Nous avons choisi de nous concentrer sur l'aspiration dans un train de bulles et les recirculations lors de la remontée des bulles dans le verre. Ces deux phénomènes ont été étudiés grâce à la solution ANSYS Fluent. Pour le premier phénomène, nos résultats ont été contraires à ce que nous nous attendions : nous avons trouvé une force de trainée relativement constante. Pour le deuxième phénomène, cela a été plus concluant : nous avons mis en évidence la présence de dead zones (au niveau des bords inférieurs) qui, comme leurs noms l'indiquent, correspondent à des endroits où il n'y a pas de recirculation.

En parallèle, pour comparer qualitativement avec nos modèles, une étude expérimentale a été menée. Le but était de réaliser une série de vidéos capturant la remontée de bulles dans un verre. Grâce à une acquisition vidéo, avec l'aide de méthodes de détection vidéo (Shi-Tomasi et Lucas-Kanade) et d'un code de tracking nous avons trouvé une évolution expérimentale de la vitesse de la bulle. Pour finir l'étude expérimentale, nous avons estimé des paramètres de l'expérience tels que la viscosité η , le taux de saturation ξ ou encore le rayon de la bulle R_0 en se ramenant à un problème de minimisation et avec l'aide de la méthode Trust-Region-Reflective.

Finalement, pour compléter l'étude nous nous sommes intéressés à la fin de vie d'une bulle. Après la remontée de la bulle dans le verre, son éclatement est inéluctable. Suivant deux nombre sans dimensions, représentant le rapport des forces d'inertie et de tension superficielle (Ca) et le rapport des forces d'inertie et de viscosité (Re), sa fin de vie est sensiblement différente. Il peut y avoir une production de bulles filles et donc une réaction en cascade ($Re \gg 1$) ou pas de production du tout ($Re \ll 1$). Le nombre Ca est quant à lui utile pour connaître le nombre d'anneaux concentriques que l'éclatement de la bulle va créer, lors de la production de bulles filles.

Pour résumer, notre étude nous a donc permis de mieux comprendre les phénomènes régissant la naissance, la remontée et la fin de vie des bulles dans une boisson gazeuse. Nous avons pu observer à la fois expérimentalement et numériquement l'ascension de ces bulles dans un verre de cidre.

6 Bibliographie

- [1] *D'où viennent les bulles de champagne ?*, Science étonnante, 23 Décembre 2013
- [2] *Recent advances in the science of Champagne bubbles*, Gérard Liger-Belair et Philippe Jeandet, Décembre 2008
- [3] *Daughter bubble cascades produced by folding of ruptured thin films*, Bird, J., de Ruiter, R., Courbin, L. et al., Nature 465, 759–762, 2010.
- [4] *Good Features to Track*, Jianbo Shi et Carlo Tomasi, Juin 1994
- [5] *Lucas-Kanade in a Nutshell*, Prof. Dr. Raúl Rojas
- [6] *Least-Squares (Model Fitting) Algorithms*, <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/least-squares-model-fitting-algorithms.html>
- [7] *The Levenberg-Marquardt Algorithm*, Ananth Ranganathan, 8 Juin 2004
- [8] *The fluid mechanics of bubbly drinks*, Roberto Zenit et Javier Rodriguez-Rodriguez, 12 Octobre 2018
- [9] *A Simple Parameterization for the Rising Velocity of Bubbles in a Liquid Pool.*, Sung Hoon Park, Changhwan Park, JinYong Lee, Byungchul Lee. 2017