

Trajectoire d'un boomerang

Maitre Thomas, Griveaud Etienne,
Clavier Paul, Potin Marc-Olivier

Encadré par Beaugendre Héloïse et Lubin Pierre



2020-2021

Trajectoire d'un boomerang

**Maitre Thomas, Griveaud Etienne, Clavier Paul, Potin
Marc-Olivier**

Résumé

Le boomerang est un objet à l'allure singulière utilisé pour le loisir, ou plus intensément comme activité sportive, généralement dans le cadre de compétition à haut niveau. Il possède la remarquable aptitude à revenir vers le lanceur en tournant sur lui-même, ceci grâce aux forces aérodynamiques que produisent les pales à savoir la Portance et la Traînée. Pour comprendre pleinement ce phénomène et par curiosité, nous avons donc décidé de mener une étude sur la trajectoire d'un boomerang. Au cours de notre projet, nous avons réussi à expliciter les équations qui régissent ce mouvement. Nous les avons ensuite résolues numériquement pour obtenir diverses simulations numériques du vol. Enfin, nous avons pu créer des boomerangs par impression 3D en se basant sur ces simulations.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Equation de la trajectoire du boomerang	4
2.1	Définition des repères de l'étude	4
2.2	Etude du mouvement : Equation de la dynamique	5
2.2.1	Résultante cinétique	6
2.2.2	Matrice d'inertie	6
2.2.3	Moment cinétique	8
2.2.4	Equations du mouvement	9
2.3	Calcul des forces - Modèle continu	10
3	Résolution numérique du problème	12
3.1	Premiers résultats	13
3.2	Optimisation du vol	14
3.2.1	Un lancer optimal	15
3.2.2	Le boomerang optimal	15
3.3	Convergence numérique	16
4	Approche expérimentale	16
4.1	Modélisation 3D	17
4.2	Impression 3D	17
4.3	Résultats	18
5	Limites du modèle	19

1 Introduction

Le but de ce projet est d'étudier la "Naissance de la portance aérodynamique / hydrodynamique". Cela implique de concevoir un système expérimental permettant de générer et de comprendre le phénomène de portance. Pour mener à bien ce projet, une modélisation physique et une résolution numérique sont attendues.

Le sujet choisi pour répondre aux besoins de ce thème est le boomerang et plus précisément l'étude de la trajectoire d'un boomerang à 4 pales. Pour comprendre pourquoi le boomerang correspond parfaitement au sujet, le vol de ce dernier doit être le centre de l'étude. Pendant son vol, le boomerang est soumis à deux types de forces, la force de gravité et les forces aérodynamiques (portance et traînée). Ce sont donc ces dernières qui sont à l'origine du mouvement si particulier du boomerang.

L'aile d'avion représentée sur la figure 1 ci-dessous peut être utilisée comme exemple pour comprendre comment ces forces aérodynamiques sont créées et comment elles agissent sur le boomerang :

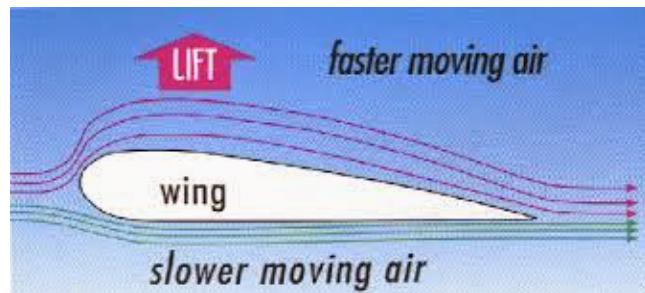


FIGURE 1 – Forces aérodynamiques s'exerçant sur une aile

Le profil asymétrique de l'aile fait que les lignes de champ de vitesse se resserrent sur la surface supérieure, c'est-à-dire que la vitesse est plus élevée sur la surface supérieure que sur la surface inférieure. Dans le cas d'une aile profilée, il existe une dépression qui se crée entre la face supérieure et la face inférieure qui tend à faire remonter l'aile (dans le cas d'un avion). Dans le cas du boomerang, le même principe est utilisé, mais le boomerang étant tenu verticalement, au lieu de monter, il revient vers sa position initiale.

Après avoir trouvé les équations de son mouvement grâce à une étude théorique de sa trajectoire et après une résolution numérique de ces équations, toutes les attentes du projet seront satisfaites.

2 Equation de la trajectoire du boomerang

2.1 Définition des repères de l'étude

Le système étudié est un boomerang quelconque et le référentiel galiléen choisi est le référentiel terrestre.

Afin de définir pleinement le mouvement de notre système, nous avons décidé d'utiliser le paramétrage par les angles d'Euler. Son usage est intéressant ici car il permet d'écrire l'orientation complète dans l'espace d'un solide (ici notre boomerang) par rapport à un repère (par exemple un repère lié au sol). Les angles d'Euler sont aux nombres de trois dont :

- θ : l'angle de nutation.
- ψ : l'angle de précession.
- φ : l'angle de rotation propre.

On peut observer sur la figure 2 une représentation de ce paramétrage, où le repère $R'(O, \vec{e}'_X, \vec{e}'_Y, \vec{e}'_Z)$ est orienté par rapport à $R(O, \vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$:

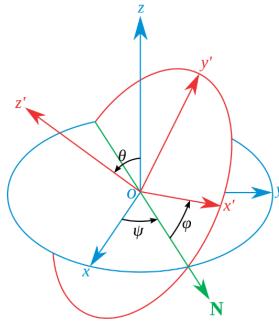


FIGURE 2 – Représentation des angles d'Euler.

Désormais, définissons les repères utiles de notre étude :

- $R_0(O, \vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$, le repère fixe lié au sol.
- Le repère $R_1(C, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ possédant les 3 propriétés suivantes :

1. La vitesse du boomerang est nulle selon \vec{e}_y : $V_y = 0$
2. La vitesse du boomerang est négative selon \vec{e}_x : $V_x < 0$
3. \vec{e}_z est orientée selon la normale au plan du boomerang dirigée vers la trajectoire.

Ce repère est alors paramétré par les angles d'Euler.

- Le repère $R_2(C, \vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$ complètement lié au boomerang. Il se déduit d'une rotation ϕ par rapport à R_1 , autour de l'axe \vec{e}_z .

Afin d'exprimer les vecteurs dans chaque repère, on détermine les matrices de passage.

Dans un premier temps, déterminons P_{01} , la matrice permettant de passer de R_0 à R_1 .

Pour ce faire, deux repères ,que l'on peut qualifier d'intermédiaires, doivent être posés. On pose donc :

1. $R_i(C, \vec{e}_m, \vec{e}_n, \vec{e}_Z)$ défini par une rotation de l'angle de précession ψ autour de \vec{e}_Z , par rapport à $R_0(O, \vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$
 2. $R_{ii}(C, \vec{e}_m, \vec{e}_o, \vec{e}_z)$ défini par une rotation de l'angle de nutation θ autour de \vec{e}_m , par rapport à $R_i(C, \vec{e}_m, \vec{e}_n, \vec{e}_Z)$
- $R_{ii}(C, \vec{e}_m, \vec{e}_o, \vec{e}_z)$ est transféré à $R_1(C, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ par la rotation propre φ , autour de l'axe e_z .

On peut donc en déduire les matrices de passage de ces différents repères.

$$P_i \text{ la matrice permettant de passer de } R_0 \text{ à } R_i \text{ s'écrit : } P_i = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{ii} \text{ la matrice permettant de passer de } R_i \text{ à } R_{ii} \text{ s'écrit : } P_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$P_{iii} \text{ la matrice permettant de passer de } R_{ii} \text{ à } R_1 \text{ s'écrit : } P_{iii} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P_{01} la matrice de passage de $R_0(O, \vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$ à $R_1(C, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est égale au produit des ces trois matrices. Ce qui vient à écrire :

$P_{01} = P_i P_{ii} P_{iii}$. Soit :

$$P_{01} = \begin{pmatrix} P_i & & \\ & P_{ii} & \\ & & P_{iii} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\psi) \cos(\varphi) - \sin(\psi) \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\cos(\psi) \sin(\varphi) - \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\varphi) & \sin(\psi) \sin(\theta) \\ \sin(\psi) \cos(\varphi) + \cos(\psi) \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\sin(\psi) \sin(\varphi) + \cos(\psi) \cos(\theta) \cos(\varphi) & -\cos(\psi) \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \sin(\theta) \cos(\varphi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Dans un second temps, on détermine P_{12} la matrice permettant de passer de R_1 à R_2 . Puisqu'il s'agit simplement d'une rotation ϕ autour de \vec{e}_z , on peut écrire alors :

$$P_{12} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Etude du mouvement : Equation de la dynamique

Afin de mettre en équation le mouvement du boomerang, nous utilisons une loi essentielle de la physique : le Principe Fondamental de la Dynamique. On utilisera précisément les deux théorèmes généraux qui en découlent : le Théorème de la Résultante cinétique et le Théorème du Moment Cinétique.

Mais avant de continuer, nous tenons à rappeler les deux vecteurs utiles dans la suite des calculs :

Les propriétés de notre repère R_1 impliquent que la vitesse du centre d'inertie du boomerang (noté C) s'écrit dans R_1 : $\vec{V}_C = V_x \vec{e}_x + V_z \vec{e}_z$

Le vecteur $\vec{\Omega}_{01}$ caractérisant la rotation de R_1 par rapport à R_0 s'écrit :

$$\vec{\Omega}_{01} = \dot{\psi} \vec{e}_Z + \dot{\theta} \vec{e}_m + \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

$$\text{En projetant sur } R_1 \text{ on obtient alors : } \vec{\Omega}_{01} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

2.2.1 Résultante cinétique

Le premier théorème permet d'établir que dans un référentiel galiléen la somme des forces extérieures sur un système est égale à la masse de ce système multipliée par l'accélération au centre d'inertie (ici noté C). Soit :

$$m \vec{a}_C = \sum \vec{F}_{ext}$$

Par application de la formule de la base mobile, l'accélération peut se calculer de la manière suivante dans R_1 : $\vec{a}_C = \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \dot{V}_x \vec{e}_x + \dot{V}_z \vec{e}_z + \vec{\Omega}_{01} \wedge \vec{V}_C$. Soit :

$$\vec{a}_C = \begin{pmatrix} \dot{V}_x + V_z (\sin \theta \dot{\psi} \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \\ V_x (\cos \theta \dot{\psi} - \dot{\varphi}) - V_z (\sin \theta \dot{\psi} \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi) \\ \dot{V}_z + V_x (\sin \theta \dot{\psi} \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \end{pmatrix}$$

Puisque que la somme des forces extérieures exercées sur le système est un vecteur de \mathbb{R}^3 , on pose comme notation : $\sum \vec{F}_{ext} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ dans R_1 .

Ceci permet d'établir le premier système d'équations du mouvement de notre boomerang :

$$m \begin{pmatrix} \dot{V}_x + V_z (\sin \theta \dot{\psi} \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \\ V_x (\cos \theta \dot{\psi} - \dot{\varphi}) - V_z (\sin \theta \dot{\psi} \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi) \\ \dot{V}_z + V_x (\sin \theta \dot{\psi} \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

2.2.2 Matrice d'inertie

Pour avoir d'autres équations, cette fois sur les moments M_x , M_y et M_z , il a fallu calculer la matrice d'inertie du boomerang en son centre de masse (qui est aussi son centre de symétrie). Pour rappel, la forme générale de la matrice d'inertie du boomerang au point G est :

$$I_G = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{xy} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Avec les I_{ii} pour $i \in \{x, y, z\}$ les moments d'inertie et les I_{ij} pour $(i, j) \in \{x, y, z\}, i \neq j$ les produits d'inertie.

Les moments d'inertie sont égaux à :

$$I_{xx} = \int \int \int (y^2 + z^2) dm; I_{yy} = \int \int \int (x^2 + z^2) dm; I_{zz} = \int \int \int (x^2 + y^2) dm$$

La matrice d'inertie étant symétrique, pour tout $(i, j) \in x, y, z, I_{ij} = I_{ji}$. Les produits d'inertie sont alors égaux à :

$$I_{xy} = I_{yx} = \int \int \int xy dm; I_{xz} = I_{zx} = \int \int \int xz dm; I_{yz} = I_{zy} = \int \int \int yz dm$$

Cependant, en considérant un boomerang avec 4 pales identiques avec la même distribution de masse toutes espacées du même angle (soit 90°), tous les produits d'inertie sont égaux à zéro. En effet, ces dernières correspondent à une asymétrie dans la répartition des masses mais ici, avec les hypothèses formulées juste avant, il y a une symétrie parfaite des masses. Par conséquent, tous les produits d'inertie sont égaux à zéro. La matrice d'inertie au point G devient ainsi (dans le référentiel R_1) :

$$I_G = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Pour terminer le calcul de cette matrice, il reste encore à calculer les moments d'inertie par rapport aux axes x, y et z . Pour cela, nous allons utiliser le schéma d'un boomerang simplifié qui est illustré à la Figure 3 :

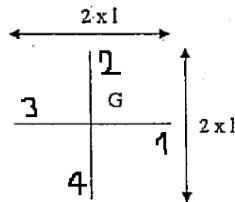


FIGURE 3 – Simplified boomerang diagram

Ici, l'épaisseur et la largeur ont été négligées par rapport à la longueur des pales et une distribution linéaire de la masse constante égale à λ est supposée. En considérant l'axe x horizontal le long de la première pale à droite et l'axe y vertical le long de la deuxième pale, les moments d'inertie peuvent être facilement calculés.

Les moments d'inertie du boomerang sont la somme des moments d'inertie de chaque pale.

$$\begin{cases} I_{xxTotal} = I_{xpale1} + I_{xpale2} + I_{xpale3} + I_{xpale4} \\ I_{yyTotal} = I_{ypale1} + I_{ypale2} + I_{ypale3} + I_{ypale4} \\ I_{zzTotal} = I_{zpale1} + I_{zpale2} + I_{zpale3} + I_{zpale4} \end{cases}$$

Mais comme l'épaisseur est négligée : $z = 0$, et pour les pales 1 et 3, $y = 0$ donc $I_{xpale1} = I_{xpale3} = 0$ pour les pales 2 et 4, $x = 0$ donc $I_{ypale2} = I_{ypale4} = 0$:

$$\begin{cases} I_{xxTotal} = I_{xpale2} + I_{xpale4} = 2 \int \int \int y^2 dm = 2 \int_0^1 \lambda r^2 dr = 2\lambda l^3/3 \\ I_{yyTotal} = I_{ypale1} + I_{ypale3} = 2 \int \int \int x^2 dm = 2 \int_0^1 \lambda r^2 dr = 2\lambda l^3/3 \\ I_{zzTotal} = I_{zpale1} + I_{zpale2} + I_{zpale3} + I_{zpale4} = 2 \int \int \int x^2 dm + 2 \int \int \int y^2 dm \\ \quad = 4 \int_0^1 \lambda r^2 dr = 4\lambda l^3/3 \end{cases}$$

Mais $\lambda = \frac{m}{4l}$ donc les moments d'inertie peuvent s'écrire différemment ce qui donne la matrice d'inertie suivante du boomerang dans R_1 ou R_2 au point G :

$$I_G = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix}$$

2.2.3 Moment cinétique

Le théorème du moment cinétique au point G nous donne :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt})_{R_0} = M_x \cdot \vec{x} + M_y \cdot \vec{y} + M_z \cdot \vec{z} \quad (1)$$

Mais on sait que $\vec{\sigma}_G = I_G \cdot \vec{\Omega}_{2/0}$

Avec $\vec{\Omega}_{2/0} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos(\varphi) + \dot{\psi} \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ -\dot{\theta} \sin(\varphi) + \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$

En notant $I_{xx} = I_{yy} = I_1$ and $I_{zz} = I_3$: $\vec{\sigma}_G = \begin{pmatrix} I_1 \omega_x \\ I_1 \omega_y \\ I_3 \omega_z \end{pmatrix}$ ($\vec{\sigma}_G$ est exprimé

dans R_1 ici)

En utilisant la formule de changement de base de dérivation on a :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt})_{R_1} = \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt})_{R_0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{\sigma}_G \quad (2)$$

Quelques simplifications sont nécessaires pour pouvoir continuer ce calcul. On suppose que la valeur de $\dot{\phi}$ est très grande devant la valeur de $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ et $\dot{\varphi}$ car $\dot{\phi}$ correspond à la vitesse de rotation qui fait avancer le boomerang (rotation sur lui-même). Cette vitesse de rotation est beaucoup plus grande que celle correspondant au retour du boomerang ou à celle permettant au boomerang de se coucher. Après quelques étapes de calcul, on a obtenu :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt})_{R_0} = \begin{pmatrix} I_3 \omega_y \omega_z \\ -I_3 \omega_x \omega_z \\ I_3 \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \begin{matrix} (D) \\ (E) \\ (F) \end{matrix}$$

2.2.4 Equations du mouvement

Maintenant que toutes les équations ont été trouvées, le but est de les réécrire afin de pouvoir les utiliser. Avec α l'angle d'incidence avec lequel le boomerang est lancé et V le module de la vitesse, V_x et V_z peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} V_x = -V \cos \alpha \\ V_z = -V \sin \alpha \end{cases}$$

Les équations (A), (B) et (C) deviennent alors :

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}V \sin(\alpha) - \dot{V} \cos \alpha + V \sin \alpha (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \\ -V \cos \alpha (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) + V \sin \alpha (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) \\ -\dot{\alpha}V \cos \alpha - \dot{V} \sin \alpha + V \cos \alpha (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x/m \\ F_y/m \\ F_z/m \end{pmatrix} \begin{array}{l} (A) \\ (B) \\ (C) \end{array}$$

En faisant les opérations suivantes, $\begin{cases} (A) = (A) \cos \alpha + (C) \sin \alpha \\ (B) = (A) \sin \alpha - (C) \cos \alpha \\ (C) = (B) \end{cases}$

elles deviennent :

$$\begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{\alpha}V - V(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(F_x \cos \alpha + F_z \sin \alpha)/m \\ (F_x \sin \alpha - F_z \cos \alpha)/m \\ -\frac{F_y}{mV \cos \alpha} + \tan \alpha (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) - \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}$$

Mais on a $\begin{cases} -\dot{\theta} \sin(\varphi) + \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\varphi) = \omega_y \\ \dot{\theta} \cos(\varphi) + \dot{\psi} \sin(\theta) \sin(\varphi) = \omega_x \end{cases}$

Et grâce aux équations (D) et (E) : $\begin{cases} \omega_y = \frac{M_x}{\omega_z I_3} \\ \omega_x = -\frac{M_y}{\omega_z I_3} \end{cases}$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(F_x \cos \alpha + F_z \sin \alpha)/m \\ (F_x \sin \alpha - F_z \cos \alpha)/mV + M_x/(I_3 \omega_z) \\ -\frac{F_y}{mV \cos \alpha} - \frac{M_y \tan \alpha}{I_3 \omega_z} - \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}$$

En réécrivant ω_x , ω_y par leur expressions et en faisant les opérations suivantes :

$$\begin{cases} (D) = (E) \sin \varphi + (E) \cos \varphi \\ (E) = (E) \sin \varphi - (D) \cos \varphi \\ (E) = (E) \end{cases}$$

Les équations (D), (E) et (F) deviennent :

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M_x \sin \varphi + M_y \cos \varphi)/(-I_3 \omega_z) \\ (M_x \cos \varphi - M_y \sin \varphi)/(I_3 \omega_z \sin \theta) \\ M_z/I_3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (IV) \\ (V) \\ (VI) \end{array}$$

Pour avoir les vitesses du boomerang dans R_0 , il suffit d'utiliser la matrice de changement de base :

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = P_{01} \begin{pmatrix} -V \cos \alpha \\ 0 \\ -V \sin \alpha \end{pmatrix}$$

i.e

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V(\cos \alpha(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) + \sin \alpha \sin \psi \sin \theta) \\ -V(\cos \alpha(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta) - \sin \alpha \cos \psi \sin \theta) \\ -V(\cos \alpha \sin \varphi \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} (VII) \\ (VIII) \\ (IX) \end{array}$$

Les 9 équations du mouvement ((I), (II), (III), (IV), (V), (VI), (VII), (VIII) and (IX)) sont désormais à notre disposition. Il ne reste plus qu'à déterminer les forces et le moment qui s'appliquent au boomerang et à les résoudre numériquement.

2.3 Calcul des forces - Modèle continu

Afin de déterminer les forces s'appliquant sur le boomerang, il est nécessaire de faire certaines hypothèses :

- On peut considérer un boomerang rigide dont la masse volumique constante sur tout le système. Ces hypothèses sont très proches de la réalité car en général un boomerang est homogène, symétrique et fait avec une matière de sorte qu'on puisse le considérer comme rigide.
- La deuxième hypothèse est de considérer l'air comme un fluide newtonien incompressible (nombre de mach étant faible). Cette hypothèse est valide dans les conditions de lancer «normales» : À pression atmosphérique et avec un vent faible.

Comme stipulé précédemment au début de notre rapport, les forces exercées sur le système sont les forces de pesanteur et aérodynamique. En soit, au centre des masses C du boomerang, nous avons :

$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F_a} \\ \sum \overrightarrow{M_{ext}} = \overrightarrow{M_a} \end{cases}$$

On peut déterminer dans un premier temps les forces de gravitation. En effet nous avons : $\overrightarrow{F_g} = m \overrightarrow{g} = mg \overrightarrow{e_Z}$

$$\text{En projetant sur } R_1 \text{ nous obtenons : } \overrightarrow{F_{g/R1}} = P_{01} \overrightarrow{F_{g/R0}} = \begin{pmatrix} -mg \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ -mg \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ -mg \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Les forces aérodynamiques sont quant à elles beaucoup plus dures à déterminer car elles peuvent dépendre de plein de choses différentes comme la forme du boomerang, les propriétés de l'air ou encore les turbulences créées par le boomerang lui-même.

Le projet scientifique de notre bibliographie propose d'appliquer un modèle continu afin de déterminer les forces aérodynamiques en présence.

Dans ce modèle, on fait les hypothèses acceptables suivantes :

1. Le boomerang tourne très vite pendant son vol. De ce fait, les variables $V, \alpha, \psi, \varphi, \theta, \omega_z$ restent quasiment constantes sur un tour. Ceci nous permet donc de considérer les valeurs moyennes des forces aérodynamiques sur un tour.
2. On considère que la pale est une plaque plane infinie. Cette hypothèse est cruciale car elle permet de ne pas prendre en compte les effets de bords et surtout cela permet d'utiliser la mécanique des fluides afin d'avoir une expression du coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence. Cette hypothèse n'est cependant valable que pour un angle d'incidence compris entre -10° et 10° .
3. La forme du boomerang est caractérisée par le rayon l du boomerang, sa corde c et son épaisseur e .

En posant V_{eh} et V_{ev} respectivement les vitesses horizontale et verticale de l'écoulement, nous avons ici : $\begin{cases} V_{ev} = r\omega_z - V_x \sin(\phi) = r\omega_z + V \cos(\alpha) \sin(\phi) \\ V_{eh} = -V_z = V \sin(\alpha) \end{cases}$ où r est une variable qui varie de 0 à l , soit le rayon.

On peut calculer l'angle d'incidence α_i sur la pale quand la vitesse horizontale est positive par la formule : $\tan(\alpha_i) = \frac{V_{ev}}{V_{eh}}$

$$\text{Soit : } \tan(\alpha_i) = \frac{V_{ev}}{V_{eh}} = \frac{r\omega_z + V \cos(\alpha) \sin(\phi)}{V \sin(\alpha)}$$

D'après l'étude menée lors de ce projet scientifique, nous avons une expression simplifiée pour le coefficient de portance de la pale, pour la force linéaire de portance et pour le moment de portance :

$$\begin{cases} C_z = 2\pi\alpha_i \\ dF_z = 0,5C_z\rho V_{eh}^2 cdrd\phi \\ dM_x = 0,5C_z\rho V_{eh}^2 crdrd\phi \end{cases}$$

On propose alors d'après l'étude que la vitesse d'écoulement verticale est très petite devant la vitesse d'écoulement horizontale ce qui nous permet de faire comme approximation que $\tan(\alpha_i) \approx \alpha_i$.

Les nouvelles expressions de la force et du moment de portance sont alors :

$$\begin{cases} dF_z = \pi\rho V \sin(\alpha) (r\omega_z + V \cos(\alpha) \sin(\phi)) cdrd\phi \\ dM_x = \pi\rho V \sin(\alpha) (r\omega_z + V \cos(\alpha) \sin(\phi)) crdrd\phi \end{cases}$$

Soit sous forme intégrale :

$$F_z = \pi\rho V \sin(\alpha) c \int_0^{2\pi} \int_0^l (r\omega_z + V \cos(\alpha) \sin(\phi)) dr d\phi$$

$$M_x = \pi \rho V \sin(\alpha) c \int_0^{2\pi} \int_0^l (r\omega_z + V \cos(\alpha) \sin(\phi)) r dr d\phi$$

$$\text{On obtient alors : } \begin{cases} F_z = \pi \rho V \sin(\alpha) c \frac{l^2 \omega_z}{2} \\ M_x = \pi \rho V \sin(\alpha) c \frac{l^3 \omega_z}{3} \end{cases}$$

Afin de nous rapprocher au maximum du cas réel, on décide de prendre en compte la traînée. On a alors les expressions différentielles suivantes pour la force (en projetant sur O_x et O_y) et le moment de la traînée :

$$\begin{cases} dF_x = 0,5 C_x \rho V_{eh}^2 e \sin(\phi) dr d\phi \\ dM_z = -0,5 C_x \rho V_{eh}^2 e r dr d\phi \\ dF_y = -0,5 C_x \rho V_{eh}^2 e \cos(\phi) dr d\phi \end{cases}$$

L'intégration nous donne donc :

$$\begin{cases} F_x = 0,5 \pi C_x \rho V e \cos(\alpha) l^2 \omega_z \\ M_z = -0,25 \pi C_x \rho e (\omega_z^2 l^4 + V^2 l^2 \cos(\alpha)^2) \\ F_y = 0 \end{cases}$$

Pour des raisons de symétrie nous avons $M_y = 0$

Comme énoncé précédemment, on peut se contenter de la valeur moyenne des forces sur un tour. Pour les obtenir il suffit de diviser les valeurs déterminées précédemment par 2π . Finalement nous avons déterminé les valeurs de la force et du moment aérodynamique de notre système :

$$\vec{F}_a = \begin{pmatrix} F_x = C_x \rho V e \cos(\alpha) l^2 \omega_z \frac{1}{4} \\ F_y = 0 \\ F_z = \rho V \sin(\alpha) c \frac{l^2 \omega_z}{4} \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_a = \begin{pmatrix} M_x = \rho V \sin(\alpha) c \frac{l^3 \omega_z}{6} \\ M_y = 0 \\ M_z = -C_x \rho e (\omega_z^2 l^4 + V^2 l^2 \cos(\alpha)^2) \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Remarque : Par abus de notation, on note de la même manière les valeurs et leur moyennes.

3 Résolution numérique du problème

On considère le système composé des équations (I) à (VI). Avec six inconnues pour six équations, il admet une unique solution d'après le théorème de Cauchy. Dans cette section, on résout le problème numériquement en utilisant Fortran 90.

Le schéma d'Euler explicite a été le premier considéré afin de déterminer la

vitesse du boomerang. Il a ensuite été réutilisé afin d'obtenir la position à partir des équations

$$V_i = \frac{d\vec{OM}}{dt} \cdot \vec{i}; i \in \{x, y, z\} \quad (3)$$

Toutefois, ce schéma fut vite remplacé par le schéma de Runge-Kutta 4 dans le but d'améliorer l'ordre de convergence.

3.1 Premiers résultats

Dans un premier temps, les conditions initiales du lancer ainsi que les caractéristiques physiques du boomerang prises sont celles du document [3]. Ces paramètres seront remplacés en fonction des boomerangs utilisés par la suite. Le vol du boomerang a été tracé dans le référentiel terrestre en utilisant la version 5.2 de Gnuplot (voir Figure 4).

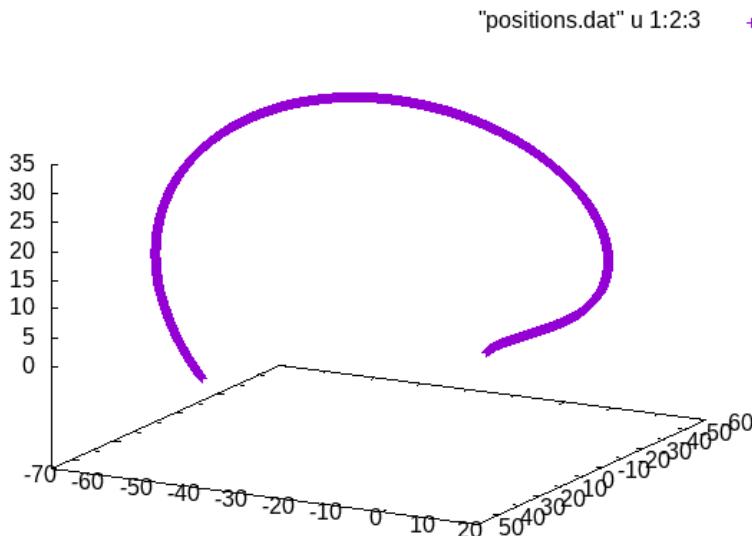


FIGURE 4 – Trajectoire du boomerang

On peut immédiatement remarquer que la trajectoire du boomerang ressemble à une goutte. De plus, il tend à revenir à sa position initiale au point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.8 \end{pmatrix}$.

Mais en réalité, le vol du boomerang s'est terminé avant de revenir à sa position initiale. Etudions plus en détail les caractéristiques de son vol avec les deux Figures qui suivent.

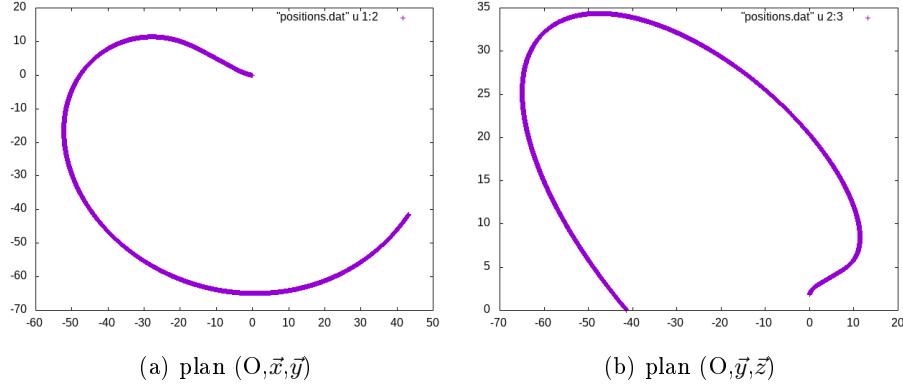


FIGURE 5

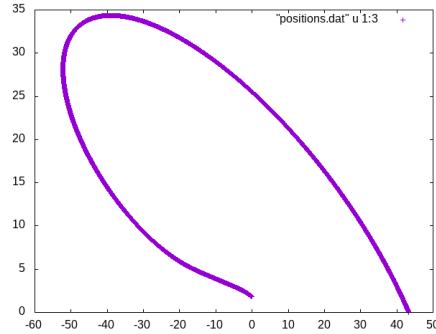


FIGURE 6 – plan (O, \vec{x}, \vec{z})

Ces figures représentent la projection sur les trois plans usuels de \mathbb{R}^3 du vol du boomerang. On peut voir par exemple sur les Figures 5b et 6 que le point culminant du vol se situe aux alentours de 35 mètres d'altitude. Toutefois, le paramètre qui nous intéresse pendant cette étude est la distance séparant le point de lancer et le point de chute. En utilisant la projection sur (O, \vec{x}, \vec{y}) (Figure 5a), on voit que le boomerang a atterri à plus de $\sqrt{40^2 + 40^2} \approx 56$ mètres de sa position initiale.

3.2 Optimisation du vol

Dans cette partie, le programme fut utilisé dans le but de minimiser la distance entre la position initiale et finale du boomerang. Pour cela, une étude

sur les conditions initiales de lancer ainsi que sur les paramètres physiques du boomerang a été menée.

3.2.1 Un lancer optimal

Les paramètres $V_0, \alpha_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0$ n'ont pas pu être modifiés de manière à réduire significativement la distance considérée, notée d à partir de maintenant, tout en conservant la trajectoire elliptique du boomerang. En fait, seule l'augmentation de ω_{z0} a permis de diminuer d . La Figure 7 montre le vol du boomerang quand $\omega_{z0} = 93,5 \text{ tr/s}$ (tours par seconde). Sur cette Figure, d vaut à peine 5 mètres. Malheureusement, de telles valeurs de ω_{z0} sont bien supérieures à la norme. Pour un boomerang classique, on devrait avoir ω_{z0} entre 10 et 30 tr/s.

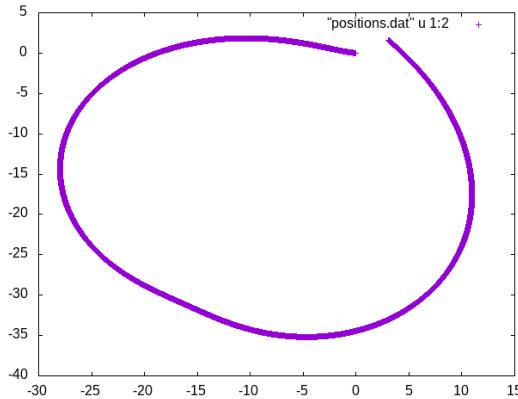


FIGURE 7 – Vol du boomerang projeté sur (O, \vec{x}, \vec{y}) avec $\omega_{z0} = 93,5 \text{ tr/s}$

3.2.2 Le boomerang optimal

Les paramètres physiques du boomerang sur lesquels jouer sont la masse m , la longueur l , la corde c ainsi que l'épaisseur e . On veut pouvoir imprimer nos boomerangs, cela impose des conditions sur l . On le choisit le plus grand possible pour que les forces de portance soient maximales.

De plus, à e , l et c fixés, on voit grâce au tableau ci-dessous que plus la masse est faible, et meilleure est la trajectoire.

m (g)	34	50	100
d (m)	31,8	47,3	95,8

TABLE 1 – Distance d obtenue pour différentes masses m

Toutefois, si la masse est trop faible, la forme de goutte de la trajectoire est perdue et le boomerang se met à faire plusieurs tours dans les airs. Ainsi, la Figure 8 obtenue avec des valeurs raisonnables $m = 34 \text{ g}$, $l = 0.1 \text{ m}$, $c = 3.8 \text{ cm}$, $e = 2.7 \text{ mm}$ donne une distance $d = 31 \text{ m}$.

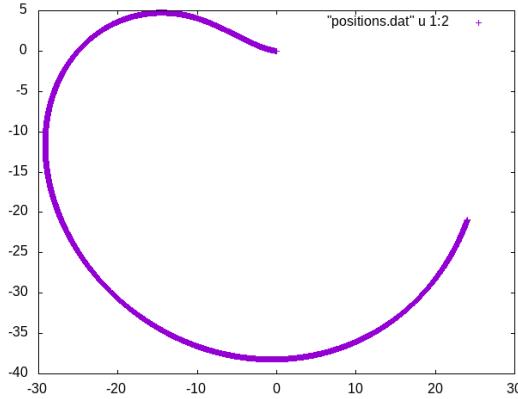


FIGURE 8 – Vol du boomerang projeté sur (O, \vec{x}, \vec{y}) pour $m = 34 \text{ g}$, $l = 0.1 \text{ m}$, $c = 3.8 \text{ cm}$, $e = 2.7 \text{ mm}$

3.3 Convergence numérique

La Figure 8 précédente a été obtenue pour un pas de temps $h = 10^{-3} \text{ s}$. En étudiant la table 2, on voit que le schéma est consistant.

$h \text{ (s)}$	5.10^{-3}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$d \text{ (m)}$	31,883	31,850	31,824	31,822

TABLE 2 – Distance d obtenue pour différents pas de temps h

4 Approche expérimentale

Une façon de valider la modélisation du problème ainsi que sa résolution numérique est de comparer les trajectoires obtenues aux trajectoires réelles. Effectivement les ordres de grandeur et les allures des trajectoires peuvent donner des indications sur la véracité du travail effectué.

Pour comparer au mieux les résultats numériques et expérimentaux, il faut connaître les caractéristiques du boomerang qui va être utilisé. Pour cela la meilleure option est l'impression 3D. Le fait de créer le boomerang nous permet de connaître ses caractéristiques intrinsèques telles que son poids, sa longueur, sa corde, etc.

4.1 Modélisation 3D

La modélisation 3D des différents boomerangs a été faite sur le logiciel Sketchup. Tout d'abord nous pensions utiliser des fichiers de profil d'aile NACA pour faire notre boomerang mais au vu de la précision de l'impression, un simple profil « grossier » suffisait. Nous avons donc fait deux quarts de cercle de rayons différents pour le bord d'attaque et un simple biseau droit pour le bord de fuite (voir Figure 9).



FIGURE 9 – Profil de la pale du boomerang. A gauche, on voit le biseau grossier et à droite le profil en arc de cercle.

Pour prendre en main le logiciel, notre première modélisation s'est appuyé sur la référence [4], nous avons donc commencé par faire un boomerang de type KZ avec un anneau centrale plein (voir Figure 10).

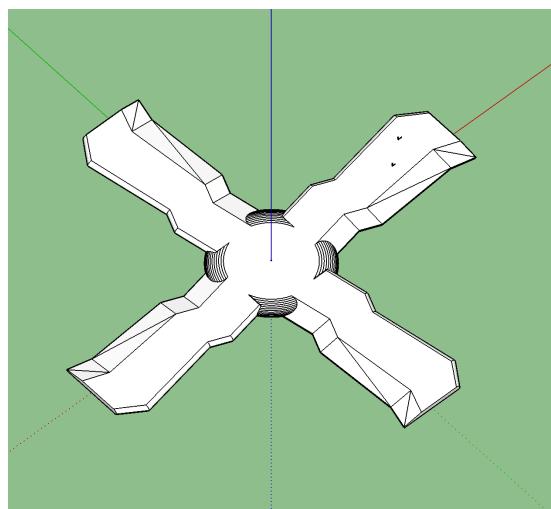


FIGURE 10 – Modélisation 3D du boomerang de type KZ

Ensuite pour adhérer au mieux aux conditions du code de calcul nous avons élaboré un boomerang à 4 pales de type équerre (Figure 11).

4.2 Impression 3D

Après avoir suivi une formation au Fablab, nous avons pu utiliser leurs imprimantes Ultimaker 2. La première impression a été celle du boomerang KZ. Grâce au logiciel d'impression 3D Cura nous avons fait en sorte d'obtenir les mêmes caractéristiques que le boomerang optimal obtenu dans la partie 3.2.2.

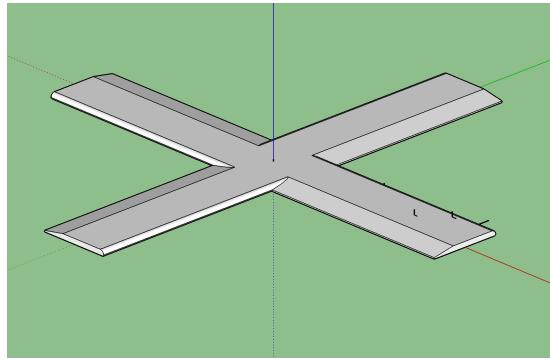


FIGURE 11 – Modélisation 3D du boomerang de type équerre

L'impression a été faite avec du PLA (acide polylactique qui est un polymère) une buse de 0.25 mm (précise) et une densité de 100%.

A posteriori, pour vérifier l'influence de la masse sur la trajectoire nous avons imprimé le même boomerang mais en augmentant l'épaisseur. Nous avons donc produit un boomerang de caractéristiques $m = 83$ g, $l = 0.1$ m, $c = 3.8$ cm, $e = 4$ mm (voir Figure 12)



FIGURE 12 – Boomerang KZ épais

4.3 Résultats

Malgré le fait que nous ne pouvions pas lancer les boomerangs avec les mêmes conditions initiales que celles utilisées dans le programme, la trajectoire du boomerang optimal est plutôt convaincante. En effet, l'allure de sa trajectoire correspondait environ à celle du code et le boomerang revenait vers le lanceur. Pour illustrer cette trajectoire nous avons utilisé le logiciel Tracker, cependant il y a eu plusieurs problèmes à cette utilisation : l'angle de la caméra n'était pas

bon pour visualiser la trajectoire du boomerang et la caméra n'était pas fixe pendant la vidéo. Néanmoins nous avons obtenu des résultats encourageants (voir Figure 13).

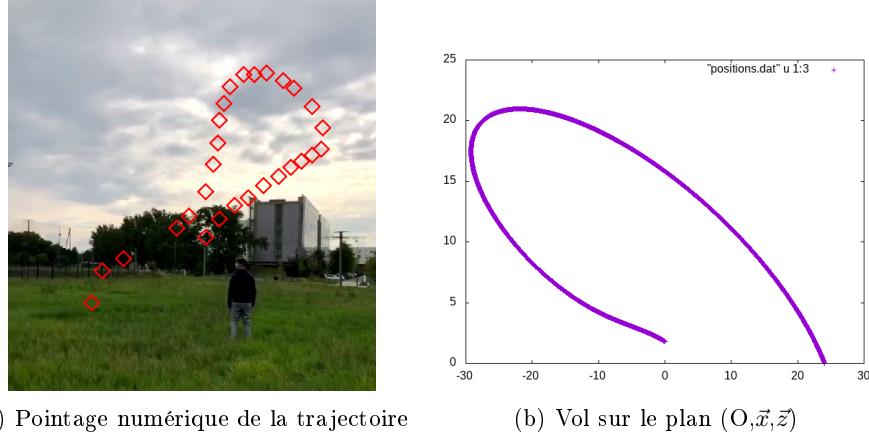


FIGURE 13 – Comparaison des vols expérimentaux et numériques

Le lancer du boomerang épais était aussi conforme aux résultats du programme car il revenait moins bien et donc atterrissait plus loin que le boomerang optimal.

5 Limites du modèle

Pour une première approche, nous avons seulement considéré le modèle continu. Cependant, ce modèle comporte plusieurs défauts :

- Même si cela est cohérent avec la théorie, si on prend $\alpha_0 = 0$ et $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ le boomerang vole en ligne droite sans revenir vers le lanceur.
- Que se passe-t-il lorsque $V_{eh} = 0$?
- Et lorsque $V_{eh} < 0$? Une portance négative devrait apparaître mais est-ce vraiment le cas ? Le document bibliographique [3] propose au lecteur intéressé un enrichissement du modèle.

De plus, on constate un décalage important entre les vols numériques et expérimentaux. Ces derniers peuvent être expliqués par la géométrie du modèle expérimental qui diffère légèrement de celle du modèle informatique. Nous avons modélisé un boomerang aux pales droites pour réduire cet écart mais n'avons pas eu le temps de l'imprimer. D'autre part, le modèle ne prend pas en compte l'effet du vent qui est d'autant plus grand que la masse est faible.

Références

- [1] HESS F., Boomerangs aerodynamics and motion, Université de Groningen, 1975
- [2] JUILLET F., LEJOSNE S., MOREL F., MOUSSA Y., PRACHAY J., ROGER P., Etude du vol d'un boomerang et des paramètres caractérisant sa trajectoire, X, 2008
- [3] Un groupe anonyme d'élèves, projet scientifique boomerang, X, 2004
- [4] ILTIS R., Imprimer et faire voler un Boomerang en 3D : Ma méthode complète, TamTam3D - CncFab, 2020