Algoritmos y Estructuras de Datos

Repaso de Lógica Proposicional

2024

Bibliografía

- Michael Huth y Mark Ryan, Logic in computer science. Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge University Press, 2004.
- Dirk Van Dalen, Logic and Structure, Series Universitext, Springer, 4th edition, 2008.
- Steve Reeves y Michael Clarke, Logic for computer science, Addison-Wesley, 1990.
- Michael Genesereth y Eric Kao (Synthesis Lectures on Computer Science), Introduction to Logic, Morgan & Claypool Publishers, 2012.

Por qué estudiar lógica

- Queremos usar lógica en nuestras especificaciones
- usamos lógica en nuestros programas
- Queremos lenguajes para modelar situaciones
- Queremos poder razonar y argumentar
- Queremos poder hacer esto formalmente
- y vamos a entender más sobre la computación y sus raíces

Lógica proposicional (PROP) - sintaxis

- símbolos

$$\neg \; , \; \wedge \; , \; \vee \; , \; \rightarrow \; , \; \leftrightarrow \; , \; (, \;)$$

- variables proposicionales (infinitas)

$$p \; , \; q \; , \; r \; , \; \ldots$$

- fórmulas
  - combinaciones apropiadas de símbolos y variables proposicionales
  - Ejemplo de combinación inapropiada: $(\wedge p(($

Lógica proposicional (PROP) - sintaxis

Fórmulas

1. cualquier variable proposicional es una fórmula
2. si ϕ es una fórmula, $(\neg\phi)$ es una fórmula
3. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \wedge \psi)$ es una fórmula
4. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \vee \psi)$ es una fórmula
5. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \to \psi)$ es una fórmula
6. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \leftrightarrow \psi)$ es una fórmula

- Muy entre paréntesis: Las fórmulas son un ejemplo de un conjunto inductivo
- Vienen provistos de
  - Esquema de prueba para probar propiedades sobre ellos (inducción estructural)
  - Esquema de recursión para definir funciones sobre el conjunto (recursión estructural)
- No es tema primario del curso, quizás lo veremos de pasada, pero quería que lo supieran

Lógica proposicional - sintaxis

Ejemplos

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \quad (p \vee p)$$

- ¿Y estas expresiones son fórmulas?

$$p(\wedge q),\ \neg p$$

- Convenciones de notación
  - Precedencia: $\wedge$ y $\vee$ ligan más fuerte que $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$, $\neg$ liga más fuerte que los demás
  - Omisión de paréntesis más externos y los de negaciones
  - Asociatividad de $\wedge$ y $\vee$

Semántica clásica

- Consiste en asignarle valores de verdad a las fórmulas
- El conjunto de valores de verdad es

$$\{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$$

- Dos enfoques para darle semántica a las fórmulas de PROP
  1. Tablas de verdad
  2. Valuaciones
- Son equivalentes

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	F
F	T

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ϕ	ψ	$(\phi \to \psi)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ϕ	ψ	$(\phi \leftrightarrow \psi)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Ejemplo: tabla de verdad para $((p \wedge q) \rightarrow r)$

p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

Ejemplo

Escribir la siguiente frase como una fórmula de lógica proposicional.

"Si Juan está cursando y no conoce a nadie entonces Juan todavía no tiene grupo"

Solución 1:

p = Juan está cursando
q= Juan no conoce a nadie
r= Juan no tiene grupo

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Solución 2:

p = Juan está cursando
q= Juan conoce a alguien
r= Juan tiene grupo

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$$

Valuaciones

- Una valuación es una función $v : \mathcal{V} \to \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales
- Una valuación satisface una proposición ϕ si $v \models \phi$ donde:

$$
\begin{array}{rcl}
v \models p & \textit{sii} & v(p) = \mathrm{T} \\
v \models \neg\phi & \textit{sii} & v \not\models \phi \ (\textit{i.e.}\ \text{no}\ v \models \phi) \\
v \models \phi \vee \psi & \textit{sii} & v \models \phi \ \text{o}\ v \models \psi \\
v \models \phi \wedge \psi & \textit{sii} & v \models \phi \ \text{y}\ v \models \psi \\
v \models \phi \to \psi & \textit{sii} & v \not\models \phi \ \text{o}\ v \models \psi \\
v \models \phi \leftrightarrow \psi & \textit{sii} & (v \models \phi \ \text{sii}\ v \models \psi)
\end{array}
$$

Tautologías y satisfactibilidad

Dadas fórmulas ϕ y ψ

- ϕ es lógicamente equivalente a ψ cuando $v \models \phi$ sii $v \models \psi$

Una fórmula ϕ es

- una tautología si $v \models \phi$ para toda valuación v
- satisfactible si existe una valuación v tal que $v \models \phi$
- insatisfactible si no es satisfactible

Un conjunto de fórmulas S es

- satisfactible si existe una valuación v tal que para todo $\phi \in S$, se tiene $v \models \phi$
- insatisfactible si no es satisfactible

Ejemplos

Tautologías

- $p \rightarrow p$
- $\neg\neg p \rightarrow p$
- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Fórmulas insatisfactibles

- $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge p$
- $(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$

Tautologías e insatisfactibilidad

Teorema

Una fórmula ϕ es una tautología sii $\neg\phi$ es insatisfactible

Demostración.

$\rightarrow$. Si ϕ es tautología, para toda valuación v, $v \models \phi$. Entonces, $v \not\models \neg\phi$ (i.e. v no satisface $\neg\phi$).

$\leftarrow$. Si $\neg\phi$ es insatisfactible, para toda valuación v, $v \not\models \neg\phi$. Luego $v \models \phi$. $\square$

Observación

Este resultado sugiere un método indirecto para probar que una fórmula ϕ es una tautología, que es probar que $\neg\phi$ es insatisfactible

Relación entre tablas de verdad y valuaciones

- Filas de una tabla se corresponden con las valuaciones

	p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \to r)$
v_1	T	T	T	T	T
v_2	T	T	F	T	F
v_3	T	F	T	F	T
v_4	T	F	F	F	T
v_5	F	T	T	F	T
v_6	F	T	F	F	T
v_7	F	F	T	F	T
v_8	F	F	F	F	T

- ¿Cuántas valuaciones diferentes existen para una fórmula de n variables?

Equivalencias entre fórmulas

- **Teorema.** Las siguientes son tautologías.

  1. Idempotencia
     $(p \wedge p) \leftrightarrow p$
     $(p \vee p) \leftrightarrow p$
  2. Asociatividad
     $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
     $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
  3. Conmutatividad
     $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
     $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
  4. Distributividad
     $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
     $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  5. Reglas de De Morgan
     $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
     $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$