Algoritmos y Estructuras de Datos

Guía Práctica 3
Verificación de programas (Parte 1)

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

3.1. Precondición más débil en SmallLang

Ejercicio 1. Calcular las siguientes expresiones, donde a, b son variables reales, i una variable entera y A es una secuencia de reales.

a) $\text{def}(a + 1)$.

b) $\text{def}(a/b)$.

c) $\text{def}(\sqrt{a/b})$.

d) $\text{def}(A[i] + 1)$.

e) $\text{def}(A[i + 2])$.

f) $\text{def}(0 \leq i \leq |A| \ \wedge_L \ A[i] \geq 0)$.

Ejercicio 2. Calcular las siguientes precondiciones más débiles, donde a, b son variables reales, i una variable entera y A es una secuencia de reales.

a) $wp(\textbf{a := a+1; b := a/2}, b \geq 0)$.

b) $wp(\textbf{a := A[i] + 1; b := a*a}, b \neq 2)$.

c) $wp(\textbf{a := A[i] + 1; a := b*b}, a \geq 0)$.

d) $wp(\textbf{a := a-b; b := a+b}, a \geq 0 \wedge b \geq 0)$.

Ejercicio 3. Sea $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |A| \rightarrow_L A[j] \geq 0)$. Calcular las siguientes precondiciones más débiles, donde i es una variable entera y A es una secuencia de enteros.

a) $wp(\textbf{A[i] := 0}, Q)$.

b) $wp(\textbf{A[i+2] := 0}, Q)$.

c) $wp(\textbf{A[i+2] := -1}, Q)$.

d) $wp(\textbf{A[i] := 2 * A[i]}, Q)$.

e) $wp(\textbf{A[i] := A[i-1]}, Q)$.

Ejercicio 4. Para los siguientes pares de programas S y postcondiciones Q

- Escribir la precondición más débil $P = wp(S, Q)$
- Mostrar formalmente que la P elegida es correcta

a) $S \equiv$

```
if( a < 0 )
  b := a
else
  b := -a
endif
```

$Q \equiv (b = -|a|)$

b) $S \equiv$

```
if( a < 0 )
  b := a
else
  b := -a
endif
```

$Q \equiv (b = |a|)$

c) $S \equiv$

```
if( i > 0 )
  s[i] := 0
else
  s[0] := 0
endif
```

$Q \equiv (\forall j :\mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] \geq 0)$

d) $S \equiv$

```
if( i > 1 )
  s[i] := s[i-1]
else
  s[i] := 0
endif
```

$Q \equiv (\forall j :\mathbb{Z})(1 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] = s[j-1])$

e) $S \equiv$

```
if( s[i] < 0 )
  s[i] := -s[i]
else
  skip
endif
```

$Q \equiv 0 \leq i < |s| \ \wedge_L \ s[i] \geq 0$

f) $S \equiv$

```
if( s[i] > 0 )
  s[i] := -s[i]
else
  skip
endif
```

$Q \equiv (\forall j :\mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \ \rightarrow_L \ s[j] \geq 0)$

Ejercicio 5. Para las siguientes especificaciones:

- Poner nombre al problema que resuelven
- Escribir un programa S sencillo en SmallLang, sin ciclos, que lo resuelva
- Dar la precondición más débil del programa escrito con respecto a la postcondición de su especificación

a) `proc` `problema1` (in s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in i: $\mathbb{Z}$, inout a: $\mathbb{Z}$) {

  `requiere` $\{0 \leq i < |s| \ \wedge_L \ a = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]\}$

  `asegura` $\{a = \sum_{j=0}^{i} s[j]\}$

}

b) `proc` `problema2` (in s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in i: $\mathbb{Z}$) : Bool {

  `requiere` $\{0 \leq i < |s| \ \wedge_L \ (\forall j :\mathbb{Z})(0 \leq j < i \rightarrow_L s[j] \geq 0)\}$

  `asegura` $\{res = true \leftrightarrow (\forall j :\mathbb{Z})(0 \leq j \leq i \rightarrow_L s[j] \geq 0)\}$

}

c) `proc` `problema3` (inout s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in i: $\mathbb{Z}$) {

  `requiere` $\{(0 \leq i < |s|) \wedge_L (\forall j :\mathbb{Z})(0 \leq j < i \rightarrow s[j] = fibonacci(j))\}$

  `asegura` $\{(\forall j :\mathbb{Z})(0 \leq j \leq i \rightarrow s[j] = fibonacci(j))\}$

}

Ejercicio 6. Dada la poscondición $Q \equiv \{(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] \ mod \ 2 = 0)\}$ y el siguiente código

```
if (i mod 3 = 0)
    s[i] := s[i] + 6;
else
    s[i] := i;
endif
```

a) Demostrar que las siguientes WPs son incorrectas dando un contraejemplo

  I) $P \equiv \{0 \leq i \leq |s| \wedge_L i \ mod \ 3 = 0 \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] \ mod \ 2 = 0)\}$

  II) $P \equiv \{0 \leq i < |s| \wedge_L i \ mod \ 3 \neq 0 \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] \ mod \ 2 = 0)\}$

III) $P \equiv \{i \ mod \ 3 = 0 \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] \ mod \ 2 = 0)\}$

IV) $P \equiv \{0 \leq i < |s|/2 \wedge_L i \ mod \ 3 = 0 \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] \ mod \ 2 = 0)\}$

b) La siguiente WP es incorrecta pero no se puede dar un contraejemplo para demostrarlo. ¿Por qué sucede esto?

$P \equiv \{0 \leq i < |s| \wedge_L (i \ mod \ 3 = 0 \vee i \ mod \ 2 = 0) \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] \ mod \ 2 = 0)\}$

3.1.1. Ejercicios de parcial

Ejercicio 7. Dado el siguiente condicional determinar la precondición más débil que permite hacer valer la poscondición (Q) propuesta. Se pide:

- Describir en palabras la WP esperada
- Derivarla formalmente a partir de los axiomas de precondición más débil. Para obtener el puntaje máximo deberá simplificarla lo más posible.

a) $Q \equiv \{(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] > 0)\}$

```
if s[i] < 0 then
| s[i] := −s[i]
else
| s[i] := 0;
end
```

b) $Q \equiv (\exists j : \mathbb{Z})(j \geq 0 \wedge j^2 = a)$

```
if a mod 2 = 0 then
| a := a ∗ a
else
| a := −|a|;
end
```

c) $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] = 2^j)$

```
if s[i] ≠ 2^i then
| s[i] = 2 ∗ s[i − 1]
else
| s[0] = 1;
end
```

d) $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] \ mod \ 3 = 0)$

```
if i mod 3 == 0 then
| s[i] = s[i] + 6
else
| s[i] = i;
end
```

e) $Q \equiv \{(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] \ mod \ 2 = 0)\}$

```
if i mod 2 = 0 then
| s[i] = 2 ∗ s[i]
else
| s[0] = 3;
end
```