

### Ejercicio 1. Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

a. Si  $B$  es computable entonces es c.e.

Verdadero.  $B$  es computable  $\rightarrow$  su función característica es computable.

$B$  computable  $\rightarrow$  saber si  $x \in \mathcal{B}$   $\Leftrightarrow$  existe  $x$  que satisface  $x \in B$ .

Si reduce  $x \notin B$  me lleva a la propiedad

b. Si  $B$  es c.e. entonces  $B$  es computable o su complemento lo es.

Falso, por c.e. significa que puedes decírse si  $x \in B$ , pero no se dice si  $x \notin B$ .

Sea  $B = \{x : \Phi_x(x) \downarrow\}$ ,  $B$  es c.e. porque la función característica  $x \in B = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$

Sabemos que  $B$  no es computable porque es halt. El complemento ( $\bar{B} = \{x : \Phi_x(x) \uparrow\}$ )

En este caso es co-c.e., pero no computable. Contro ejemplo!

(no puede  
decir si  $x \in B$   
no responde  
computable)

c. Si  $B$  es c.e. entonces su complemento es c.e.

Falso, sea  $B = \{x : \Phi_x(x) \downarrow\}$  que es c.c.

Pero  $\bar{B} = \{x : \Phi_x(x) \uparrow\}$  no es c.c., sino que es co-c.c. Contro Ejemplo!

d. Si  $B$  es c.e. y su complemento es c.e., entonces es computable.

Verdadero. Si  $B$  es c.e., tiene un programa que computa si  $x \in B$ . P

1.  $B$  es c.c. tiene un programa que computa  $x \notin B$  ( $x \in \bar{B}$ ). P'

$\Rightarrow$  Podemos hacer un programa /  $x \in B$   $\begin{cases} 1 & P(x) = 1 \\ 0 & P'(x) = 1 \end{cases}$

Propiedad  
Un conjunto  $A$  es co-c.e. si  $\bar{A}$  es c.e.

Theorema  
Un conjunto  $A$  es computable si y sólo si es c.e. y co-c.e.

Decidir si el siguientes conjuntos son computables, c.e. o co-c.e.

$$A_1 = \{x \mid x < 10^6 \wedge \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow\}$$

Decidir si el siguientes conjunto es computables, c.e. o co-c.e.

$$A_2 = \{x \mid x > 10^6 \wedge \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow\}$$

Este conjunto es igual a  $K$  salvo una cantidad finita de elementos. Y como sabemos que  $K$  no es computable,  $A_2$  tampoco es computable.

¿Es c.e.? Para ver que sí lo es, tenemos que computar la función

$$f_{A_2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_2 \\ \uparrow & \text{si no.} \end{cases}$$

El siguiente programa la computa:

$Y \leftarrow 1$   
 $Z_1 \leftarrow \Phi_{X_1}^{(1)}(X_1)$   
[A] IF  $X_1 \leq 10^6$  GOTO A

Por lo tanto,  $A_2$  es c.e. Como no es computable y es c.e.,  $A_2$  no es co-c.e.

Ejercicio 2. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son computables, cuáles son c.e., cuáles son co-c.e. y demostrar en cada caso:

$$C_1 = \{x : \Phi_x^{(1)}(x) = 2x\}$$

Es c.e. Puesto que podemos hacer un programa P:  $\Phi_x(x)$   
 $\quad \text{if } (\gamma = 2 \cdot x) \text{ then } \{\gamma = 1\}$   
 $\quad \text{else } \{\text{loop}\}$   
 $\quad (\text{donde } \gamma \cdot x \text{ no termina } +.)$

Sea  $e \in C_1 \rightarrow \Phi_e(e) = 2e$ ,  $\therefore e' / \Phi_e = \Phi_{e'} \rightarrow e' \in C_1$ . Entonces  $\Phi_e(e) = 2e \rightarrow \Phi_{e'}(e) = 2e$

Pero de modo similar  $\Phi_{e'}(e') = 2e'$ , por lo tanto  $2e' + 1$

$e = e' \quad C_1 = \{x : \Phi_x^{(1)}(x) = 2x\}$   
 $e' \vdash \quad$   
 $\vdash \quad$   
 $\vdash \quad$   
 $\vdash \quad$   
 $C_1 \text{ incl } \text{Si } (\forall e, e' \in C_1 \wedge e \neq e' \rightarrow \Phi_{e'}(e) = 2e')$   
 $\text{GUA } C_1 \text{ incl } \text{Ver que } \forall e, e' \in C_1 \wedge e \neq e' \rightarrow \Phi_{e'}(e) = 2e \rightarrow \Phi_{e'}(e) = 2e$   
 $\text{Avrg } e \in C_1 \wedge e' \in C_1 \rightarrow \Phi_{e'}(e) = 2e \rightarrow \Phi_{e'}(e) = 2e$   
 $\text{Avrg } e \in C_1 \wedge e' \in C_1 \rightarrow \Phi_{e'}(e) = 2e \rightarrow \Phi_{e'}(e) = 2e + 1$

Ver que no es computable

$$f_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x) = 2x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}, \quad \text{asimismo } f_c \text{ Computable}$$

Entonces  $\exists g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } f_c(x) = 0 \\ 1 & \text{si } f_c(x) = 1 \end{cases}$  que es computable xq  $f_c$  lo es

Abs! No es computable  $\exists e / \Phi_e(x) = g(x)$ ,  $\Phi_e(e) = \uparrow \Leftrightarrow f_c(e) = 1 \Leftrightarrow \Phi_e(e) = 2e$   
 $\Phi_e(e) = 2e \Leftrightarrow f_c(e) = 0 \Leftrightarrow \Phi_e(e) \uparrow \vee \Phi_e(e) \neq 2e$  en computable  $f_c$

A: No es computable  $\rightarrow$  en Cc, no es  $\omega$ -Cc.

$$C_2 = \{x : 0 \in \text{Dom } \Phi_x^{(1)}\}$$

$$f_c = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_x(0) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Exce porque  $\exists p / \Psi_p = h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_x(0) \downarrow \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$

$$p \cdot \Phi_x(0) \leftarrow \text{si solo, entro } \downarrow (0 \in \text{Dom})$$

$$y := 1$$

Ver si es Computable.

R: re:  $C_2$  es Conj de cndicn  $\leftrightarrow \forall \langle e, e' \rangle / \Phi_e = \Phi_{e'} \wedge e \in C_2 \rightarrow e' \in C_2$

Sea  $e \in C_2, e' / \Phi_e = \Phi_{e'}, \forall v q e' \in C_2$ . Se que  $\Phi_e(0) \downarrow \rightarrow \Phi_{e'}(0) \downarrow \rightarrow e' \in C_2 \checkmark$

Ex conj de cndicn, y no trivial,  $\Psi_p(x) = \underbrace{\Phi_x(x) = 1}_{\text{const}} \text{ esto } \circ \text{ } C_2 \neq \emptyset \text{ y } C_2 \neq \mathbb{N} xq \Psi_p(x) = \begin{cases} \uparrow & x = 0 \\ \neq \text{no} & \text{si no} \end{cases}$  no ento en  $C_1$

$\circlearrowleft$  No es Computable. A: en Cc y no es Computable. No es  $\omega$ -Cc

$$C_3 = \{x : \Phi_x^{(2)} \text{ es parcial computable}\}$$

Ex siempre en Parcial Computable xq x es Un numero de Programas  $\circlearrowleft C_3 = \mathbb{N}$ .

Cc:  $\deg p : y := 1 \leftarrow \text{siempre partene} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{oo Ex Computable} \\ \text{ccc: } \deg p' : y := 0 \leftarrow \text{Numer no partene} \end{array} \right.$

$$C_4 = \{x : 0 \in \text{Im } \Phi_x^{(1)}\}$$

$$f_c = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in \text{Im } \Phi_x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}. \quad \text{Ex Cc } \circlearrowleft \text{ que fuedo un p que computa } f_c = \begin{cases} 1 & 0 \in \text{Im } \Phi_x \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

$$p : y := 1 \quad z = 0$$

While  $y \neq 0 \{$

$$\Psi_x(z_0) \quad \leftarrow \text{si role, } c \in \mathbb{N}^6$$

$$z++ \}$$

$y \downarrow \text{down} \uparrow, z \uparrow$

$$y := 1$$

Ex Computable?

R: re:  $C$  es Conj de cndicn  $\leftrightarrow \forall \langle e, e' \rangle / \Phi_e = \Phi_{e'} \wedge e \in C \rightarrow e' \in C$

Sea  $e \in C, e' / \Phi_e = \Phi_{e'}, \forall v q e' \in C$ . Se que  $\exists x / \Phi_e(x) = 0 \rightarrow \Phi_{e'}(x) = 0 \rightarrow e' \in C \checkmark$

Ex conj de cndicn, y no trivial,  $C_3 \neq \emptyset$  ya que  $\exists p / \Psi_p = f_0(x)$  con  $f_0(x) = 0$

$$C_3 \neq \mathbb{N} \text{ ya que } \exists p' / \Psi_{p'} = f_1(x) \text{ con } f_1(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

$\circlearrowleft$  En Cc y No Computable, no es  $\omega$ -Cc.

$$C_5 = \{x : \Phi_x^{(1)}(z) > 10 \ \forall z \leq x\}$$

$$f_c = \begin{cases} 1 & \exists z, z \leq x \wedge \Phi_x(z) > 10 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \text{Entonces } f_{ce} = \begin{cases} 1 & \exists z, z \leq x \wedge \Phi_x(z) > 10 \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

rise Trivialmente

Versión Computable

$$\text{Paso: } C \text{ es Conjunto} \Leftrightarrow \forall \langle e, e' \rangle / \phi_e = \phi_{e'} \wedge e \in C \rightarrow e' \in C \quad \text{if } (\Phi_x(z_1) \leq 10) \{$$

$$e \in C, e' / \phi_e = \phi_{e'}, \text{ ergo } e' \in C.$$

$$\text{Se que: } \forall z \leq e \quad \Phi_e(z) > 10 \rightarrow \Phi_{e'}(z) > 10$$

$$\text{Pero si } e < e', \text{ no da que } \Phi_{e'}(z+1) > 10.$$

$\Leftarrow$  No es Un Conjunto.

Diagonalizar Asumo  $f_c$  Computable.

$$\text{Entonces } \text{Res } g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_c(x) = 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \text{que es Computable porque } f_c \text{ lo es.}$$

$$\text{Res } \Phi_e(x) = g'(x). \quad \Phi_e(e) = 1 \Leftrightarrow f_c(e) = 1 \Leftrightarrow \forall z. (z \leq e \rightarrow \Phi_e(z) > 10)$$

$$\Phi_e(e) = 1 \Leftrightarrow f_c(e) = 0 \Leftrightarrow \exists z. (z \leq e \wedge \Phi_e(z) \leq 10)$$

ABs. de suponer  $f_c$  Computable

$\Leftarrow$  NO

$$C_7 = \{x : \text{el programa de número } x \text{ no tiene instrucciones While}\}$$

$$\exists e \text{ ce } x \text{ q } f_{ce}(x) = \begin{cases} 1 & \times \text{ True While} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}, \text{ luego } P / \text{Res } = f_{ce} \text{ con } f_{ce}(x) = \begin{cases} 1 & \times \text{ True While} \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

$$f: z_0 := 0 // t$$

$$\text{While}(\text{len}(l(\text{Smap}(x, z_0, x_1))) = 1) \{$$

$$z_0 ++$$

$$y := 1.$$

(si no True While se incluye Bucle)  
q al menos que ok'

$$\text{Entonces } x \text{ q } f_{ce}(x) = \begin{cases} 1 & \times \text{ True While} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\text{luego } P / \text{Res} = f_{ce} \text{ con } f_{ce}(x) = \begin{cases} 1 & \times \text{ True While} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$f: z_0 := 0 // t$$

$$\text{While}(\text{Step}(x, z_0, x_1) != 1) \{$$

$$\text{if } \text{len}(l(\text{Smap}(x, z_0, x_1))) > 1 \{$$

loop

$$z_0 ++$$

$$\uparrow$$

$$y := 0.$$

$$C_8 = \{x : \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \neq \emptyset\}$$

ce ,  $\rho$ :  $\begin{cases} z_0 := \sigma & (\text{codifieren tuple}) \\ \text{While } (\text{Step}(x, l(z_0), R(z_0)) != 1) \\ & z_0++ \end{cases}$

$$y := 1$$

Computabilitad

R: re:  $C$  es conj de cndicn  $\Leftrightarrow \forall \langle e, e' \rangle / \Phi_e = \Phi_{e'} \wedge e \in C \rightarrow e' \in C$

Sea  $e \in C$ ,  $e' / \Phi_e = \Phi_{e'}$ , que  $e' \in C$ . De que  $\exists x / \Phi_e(x) \uparrow \rightarrow \Phi_{e'}(x) \downarrow \rightarrow e' \in C$   $\circlearrowleft$

En conj de cndicn, j nro tmbol,  $C \neq \emptyset$  zo que  $\exists p / \Psi_p = f_0(x)$  con  $f_0(x) = 1$  (constante 1)  
 $C \neq \text{loop}$  zo que  $\exists p' / \neg \Psi_{p'} = f_1(x)$  con  $f_1(x) = \text{loop}$

$$C_9 = \{x : \Phi_x^{(1)}(z) \uparrow \vee \Phi_x^{(1)}(z) > 0 \ \forall z \geq x\}$$

En cole  $x$  q  $f_{\text{code}}(x) = \begin{cases} \uparrow & \Phi_x(z) \uparrow \vee \Phi_x(z) > 0 \ \forall z \geq x \\ 0 & \text{sin } (\text{dmo r existe un } z \geq x, \text{ que satisfa la condicn } \Phi_x(z) = 0) \end{cases}$

Computabilitad

$f_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(z) \uparrow \vee \Phi_x(z) > 0 \ \forall z \geq x \\ 0 & \text{sin } \end{cases}$  Suponemos  $f_C$  Computable

$\stackrel{\text{def}}{g}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f_C(x) = 1 \\ \uparrow & \text{si } f_C(x) = 0 \end{cases}$

As  $\Phi_e(x) = g(x)$

$$\Phi_e(e) = 0 \Leftrightarrow f_C(e) \Leftrightarrow \forall z (\neg z \geq e \vee (\Phi_e(z) \uparrow \vee \Phi_e(z) > 0))$$

ABs!  $\Phi_e(e) = \uparrow \Leftrightarrow f_C(e) \Leftrightarrow \exists z (\neg z \geq e \wedge (\Phi_e(z) \downarrow \wedge \Phi_e(z) \leq 0))$   
 mdo de razon  $f_C$  computable

$\circlearrowleft$  En cole  $y$  nro ce,  $y$  no es computable.

$$C_{10} = \{x : \Phi_x^{(1)}(2x) \downarrow\}$$

En ce ( si def. razon en  $2x$ , sin loop)

Computabilitad

$f_{\text{code}}(x) = \begin{cases} 1 & \Phi_x(2x) \downarrow \text{ Asumo computable} \\ 0 & \text{sin } \end{cases}$

$\Phi_e(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_C(e) = 0 \\ 0 & \text{si } f_C(e) = 1 \end{cases}$

Queremos mostrar que  $f_C$  es computable.

$\stackrel{\text{def}}{g}(x)$  una funcn  $\begin{cases} 1 & \text{si } f_C(e) = 0 \\ \uparrow & \text{sin } \end{cases}$  con  $e / \Phi_e = g(x)$  (entonces puede tener el parámetro)

$$\Phi_e(ze) = 1 \Leftrightarrow f_C(e) = 0 \Leftrightarrow \Phi_e(2e) \uparrow$$

$$\Phi_e(ze) \uparrow \Leftrightarrow f_C(e) = 1 \Leftrightarrow \Phi_e(2e) \downarrow$$

$\uparrow$  es pdm en mdcn nro  $x$  q es constante  $e$ , queda mdcn nro  $x$  q es constante. Pero es  $\forall$

Ejercicio 3. Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

a. Si  $B_1, \dots, B_k$  son c.e. entonces  $\bigcup_{n \in \{1, \dots, k\}} B_n$  es c.e.

Son función

Verdadero con un granero deponiendo sobre de entradas. (que no sea n-síntesis alguna)

b. Si  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia de conjuntos c.e. entonces  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$  es c.e.

I. Como Un Conjunto no c.e. y lo fracciono en conjuntos de 1 elemento (no existe x que sea punto).

Entonces no quita es formas infinitas. La Union de todos en el conjunto que no es c.e. Es Falso x que hay.

c. Si  $B_1, \dots, B_k$  son c.e. entonces  $\bigcap_{n \in \{1, \dots, k\}} B_n$  es c.e.

Alo tiene que volver entradas, para, si como' cumple el siguiente. Cuando solo se le da la base. No acepta alguno, loops, lo esperado.

d. Si  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia de conjuntos c.e. entonces  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$  es c.e.

Falso, son infinitos, nunca tenes de ver todos para decir que x es aceptado por todos.

Ejercicio 4. Sea TOT =  $\{x : \Phi_x^{(1)} \text{ es una función total}\}$ .

a. Demostrar que TOT no es co-c.e.

b. Demostrar que TOT no es c.e. (Sugerencia: considerar la función  $g(z) = \Phi_{f(z)}^{(1)}(z) + 9$  donde  $f$  es una enumeración computable de TOT).

Entiendo de. No puedo para de revisar que Sean Computadoras para C.E  
Y para Co-C.E, nunca puedes para decir que no es total x que no lo mite en loop.

Ejercicio 5. Para cada  $k \in \mathbb{N}$  definimos el siguiente conjunto:

$$A_k = \{z \mid \Phi_k(x) = z \text{ para algún } x \in \mathbb{N}\}$$

Luego, definimos  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ .

i. ¿Son todos los  $A_k$  computables? ¿Son todos los  $A_k$  c.e.?

ii. Decidir si  $A$  es computable, c.e. y/o co-c.e.

$A_k$  es s. mapeo de  $\mathbb{N}$ .

Es c.e. ya que se puede preguntar sin problema a  $\Phi_k$  si  $x$  pertenece.

Ahora, como ahora estan en el mundo de infinitos, podria ser que al preguntar 1. x no sea, 2. zig buzonado.