

Ejercicio 1. Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

a. Si B es computable entonces es c.e.

Verdadero. B es computable si su función característica es computable.
 B computable \rightarrow Saber si $x \in$ o $x \notin B$. \Leftrightarrow Es c.e. xq implica saber si $x \in B$.
 Si me dice $x \notin B$ me malgasto tiempo

b. Si B es c.e. entonces B es computable o su complemento lo es.

Falso, Ser c.e. implica que puede darse si $x \in B$, pero sin ser c.e. no dice $x \notin B$.
 Sea $B = \{x: \Phi_x(x) \downarrow\}$, B es c.e. xq por la función característica $x \in B = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$
 Sabemos que B no es computable porque es halt. El complemento ($\bar{B} = \{x: \Phi_x(x) \uparrow\}$)
 En este caso es co-c.e., pero no computable. Contra ejemplo!

(no puede dar o xq no se es computable)

c. Si B es c.e. entonces su complemento es c.e.

Falso, sea $B = \{x: \Phi_x(x) \downarrow\}$ que es c.e.
 Pero $\bar{B} = \{x: \Phi_x(x) \uparrow\}$ no es c.e., sino que es co-c.e. Contra ejemplo!

d. Si B es c.e. y su complemento es c.e., entonces es computable.

Verdadero. A: B es c.e., tiene un programa que computa si $x \in B$. P
 1. \bar{B} es c.e. tiene un programa que computa $x \notin B$ ($x \in \bar{B}$). P'
 \Leftrightarrow Podemos hacer un programa $x \in B \begin{cases} 1 & P(x)=1 \\ 0 & P'(x)=1 \end{cases}$

Propiedad
 Un conjunto A es co-c.e. si \bar{A} es c.e.

Teorema
 Un conjunto A es computable sii es c.e. y co-c.e.

Decidir si el siguientes conjunto es computables, c.e. o co-c.e.

$$A_1 = \{x \mid x < 10^6 \wedge \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow\}$$

Si bien puede que nunca sepamos exactamente cuáles elementos están y cuáles no están en A_1 (porque en principio no tenemos un mecanismo efectivo para computar Halt) lo cierto es que tiene una cantidad finita de elementos. Y como todos los conjuntos finitos son computables, este también lo es. Más aún: En particular es c.e. y co-c.e.

Decidir si el siguientes conjunto es computables, c.e. o co-c.e.

$$A_2 = \{x \mid x > 10^6 \wedge \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow\}$$

Este conjunto es igual a K salvo una cantidad finita de elementos. Y como sabemos que K no es computable, A_2 tampoco es computable.

¿Es c.e.? Para ver que sí lo es, tenemos que computar la función

$$f_{A_2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_2 \\ \uparrow & \text{si no.} \end{cases}$$

El siguiente programa la computa:

```

Y ← 1
Z1 ← ΦX1(1)(X1)
[A] IF X1 ≤ 106 GOTO A
  
```

Por lo tanto, A_2 es c.e. Como no es computable y es c.e., A_2 no es co-c.e.

Ejercicio 2. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son computables, cuáles son c.e., cuáles son co-c.e. y demostrar en cada caso:

$$C_1 = \{x : \Phi_x^{(1)}(x) = 2x\}$$

Es c.e. Puesto que podemos hacer un programa $P: \Phi_x(x)$
 if $(x = 2 \cdot x)$ then $\{y = 1\}$
 else $\{\text{loop}\}$
 (donde x no termina \uparrow .)

Sea $e \in C_1 \rightarrow \Phi_e(e) = 2e$, sea $e' / \Phi_e = \Phi_{e'} \rightarrow e' \in C_1$. Enten $\Phi_e(e) = 2e \rightarrow \Phi_{e'}(e) = 2e$
 Pero no dice nada sobre $\Phi_{e'}(e') = 2e'$, podria dar $2e' + 1$

$C_1 = \{x / \Phi_x^{(1)} = 2x\}$
 C_1 incl $\text{Sii } (x \in C_1, \Phi_x = \Phi_{e'} \wedge e' \in C_1 \rightarrow e' \in C_1)$
 Para C_1 incl
 Ver que $\forall e \in C_1, e' \in C_1$
 Sean $e \in C_1$ y $e' / \Phi_e = \Phi_{e'}$, $\Phi_e(e) = 2e \rightarrow \Phi_{e'}(e) = 2e$
 Avg $\Phi_{e'}(e) = 2e$ ($e' \in C_1$)? No necesariamente. No se puede decir que $\Phi_{e'}(e') = 2e' + 1$

Ver que no es Computable

$$f_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x) = 2x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}, \text{ asumo } f_c \text{ Computable}$$

$$\text{Entonces } \exists g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } f_c(x) = 0 \\ 1 & \text{si } f_c(x) = 1 \end{cases} \quad \text{que es Computable xq } f_c \text{ lo es}$$

$$\text{Así } e / \Phi_e(x) = g(x), \quad \Phi_e(e) = 1 \leftrightarrow f_c(e) = 1 \leftrightarrow \Phi_e(e) = 2e$$

$$, \quad \Phi_e(e) = 2e \leftrightarrow f_c(e) = 0 \leftrightarrow \Phi_e(e) \uparrow \vee \Phi_e(e) \neq 2e$$

Así! No es Computable f_c
 Si C_1 no es Computable

$$C_2 = \{x : 0 \in \text{Dom } \Phi_x^{(1)}\}$$

$$f_c = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_x(0) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \text{Es CE porque } \exists P / \Psi_P = h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_x(0) \downarrow \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$$

$$P: \Phi_x(0) \leftarrow \text{si sale, enter } \downarrow (0 \in \text{Dom})$$

$$y := 1$$

Ver si es Computable.

R: no: C_2 es Conj de índices $\leftrightarrow \forall \langle e, e' \rangle / \Phi_e = \Phi_{e'} \wedge e \in C_2 \rightarrow e' \in C_2$

Así $e \in C_2, e' / \Phi_e = \Phi_{e'}, \forall \forall q e' \in C_2$. Le que $\Phi_e(0) \downarrow \rightarrow \Phi_{e'}(0) \downarrow \rightarrow e' \in C_2 \checkmark$

Es Conj de índices, y no trivial, $\Psi_P(x) = \underbrace{f_c(x)}_{\text{const } 1} = 1$ esto $\circ \circ C_2 \neq \emptyset$ y $C_2 \neq \mathbb{N}$ xq $\Psi_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$ no esto' en C_1

Así No es Computable. Si es CE y no es Computable, No es CoCE

$$C_3 = \{x : \Phi_x^{(2)} \text{ es parcial computable}\}$$

Φ_x siempre es Parcial Computable xq x es un número de Programa $\circ C_3 = \mathbb{N}$.

CE: dig $P: y := 1 \leftarrow$ siempre partecen } $\circ \circ$ Es Computable

CoCE: dig $P': y := 0 \leftarrow$ Nunca no partecen

$$C_4 = \{x : 0 \in \text{Im } \Phi_x^{(1)}\}$$

$$f_c = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in \text{Im } \Phi_x \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \text{Es CE ya que podemos } P \text{ que Computa } f_{cc} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in \text{Im } \Phi_x \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$$

$$P: y := 1 \quad z_0 = 0$$

$$\text{While } y \neq 0 \{$$

$$\Psi_x(z_0)$$

$$z++ \}$$

$$y := 1$$

si sale, $0 \in \text{Im } \Phi_x$
 y don't, si no \uparrow

Es Computable?

R: no: C es Conj de índices $\leftrightarrow \forall \langle e, e' \rangle / \Phi_e = \Phi_{e'} \wedge e \in C \rightarrow e' \in C$

Así $e \in C, e' / \Phi_e = \Phi_{e'}, \forall \forall q e' \in C$. Le que $\exists x / \Phi_e(x) = 0 \rightarrow \Phi_{e'}(x) = 0 \rightarrow e' \in C \checkmark$

Es Conj de índices, y no trivial, $C_3 \neq \emptyset$ ya que $\exists P / \Psi_P = f_0(x)$ con $f_0(x) = 0$

$$C_3 \neq \mathbb{N} \text{ ya que } \exists P' / \Psi_{P'} = f_1(x) \text{ con } f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=1 \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$$

$\circ \circ$ Es CE y No Computable, no es CoCE.

$$C_5 = \{x : \Phi_x^{(1)}(z) > 10 \forall z \leq x\}$$

$$f_c = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall z, z \leq x \wedge \Phi_x(z) > 10 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \text{En } C \quad f_{ce} = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall z, z \leq x \wedge \Phi_x(z) > 10 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\text{No } \Psi_P^1 = f_{ce}(x)$$

Ver si es Computable

Pase: C es Conj. induc. $\leftrightarrow \forall \langle e, e' \rangle / \phi_e = \phi_{e'} \wedge e \in C \rightarrow e' \in C$

$e \in C, e' / \phi_e = \phi_{e'}, \text{ q no } e' \in C$

Se que: $\forall z \leq e \quad \phi_e(z) > 10 \rightarrow \phi_{e'}(z) > 10$

Pero si $e < e'$, no se que $\phi_{e'}(z+1) > 10$.

o No es Un Conj. de induc.

Diagonalizar. Como f_c Computable.

Entonces sea $g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_c(x) = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$ Que es Computable porque f_c lo es.

sea $\phi_{e'}(x) = g'(x)$

$$\phi_e(e) = 1 \leftrightarrow f_c(e) = 1 \leftrightarrow \forall z (z \leq e \rightarrow \phi_e(z) > 10)$$

$$\phi_e(e) = 0 \leftrightarrow f_c(e) = 0 \leftrightarrow \exists z (z \leq e \wedge \phi_e(z) \leq 10)$$

ABS. de suponer f_c computable

o No es cace

$$\neg (P \rightarrow Q) = \neg P \vee Q$$

si se trata de ind. /

while (z1 <= x) {

if (Phi_x(z1) <= 10) {

z1++

} loop {

si no cumple / ind. /

$$\neg (\forall z. z \leq e \rightarrow \phi) \\ \exists z. \neg (z \leq e \rightarrow \phi) \\ \exists z. \neg (z \leq e \vee \phi) \\ \exists z (z \leq e \wedge \neg \phi)$$

$$C_7 = \{x : \text{el programa de número } x \text{ no tiene instrucciones While}\}$$

$$\text{En } C \text{ es } x \text{ q } f_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ tiene While} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \text{logro } P / \Psi_P = f_{ce} \quad \text{con } f_{ce}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ tiene While} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

f: z0 := 0 // t

while (len(l(Smap(x, z0, x1))) = 1) {

z0++

y := 1.

(si no tiene While se modifica Burrows) / x q alternan quida ok

$$\text{En } C \text{ es } x \text{ q } f_{ccc} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ tiene While} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\text{logro } P / \Psi_P = f_{ccc} \quad \text{con } f_{ccc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ tiene While} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

f: z0 := 0 // t

while (step(x, z0, x1) != 1) {

if (len(l(Smap(x, z0, x1))) > 1) {

loop {

z++

}

y := 0.

$$C_8 = \{x : \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \neq \emptyset\}$$

ce, p: $z_0 := 0$ (codificación triple)
 $\text{While } (\Delta \text{step}(x, l(z_0), R(z_0)) \neq 1) \{$
 $z_0++ \}$

y := 1

Computabilidad

R: se: C es Conj de índices $\leftrightarrow \forall \langle e, e' \rangle / \Phi_e = \Phi_{e'} \wedge e \in C \rightarrow e' \in C$

se: $e \in C, e' / \Phi_e = \Phi_{e'}, \forall e' \in C$. De que $\exists x / \Phi_e(x) \downarrow \rightarrow \Phi_{e'}(x) \downarrow \rightarrow e' \in C$ o.o

Es Conj de índices, y no trivial, $C \neq \emptyset$ ya que $\exists p / \Psi_p = f_0(x)$ con $f_0(x) = 1$ (constante 1)
 $C \neq \mathbb{N}$ ya que $\exists p' / \Psi_{p'} = f_1(x)$ con $f_1(x) = \text{loop}$

$$C_9 = \{x : \Phi_x^{(1)}(z) \uparrow \vee \Phi_x^{(1)}(z) > 0 \forall z \geq x\}$$

Es como xq $f_{\text{cond}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(z) \uparrow \vee \Phi_x(z) > 0 \forall z \geq x \\ 0 & \text{si no (pero si existe un } z \geq x, \text{ que este definido y } \Phi_x(z) = 0) \end{cases}$

Computabilidad

$f_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(z) \uparrow \vee \Phi_x(z) > 0 \forall z \geq x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$ Suponemos f_c Computable

se: $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f_c(x) = 1 \\ 1 & \text{si } f_c(x) = 0 \end{cases}$

De $\Phi_e(x) = g(x)$

$$\Phi_e(e) = 0 \leftrightarrow f_c(e) \leftrightarrow \forall z. (\neg z \geq e \vee (\Phi_e(z) \uparrow \vee \Phi_e(z) > 0))$$

$$\Delta \text{ BS! } \Phi_e(e) = 1 \leftrightarrow f_c(e) \leftrightarrow \exists z (\neg z \geq e \wedge (\Phi_e(z) \downarrow \wedge \Phi_e(z) \leq 0))$$

no de suponer f_c computable

o.o Es como y no ce, ya no es computable.

$$C_{10} = \{x : \Phi_x^{(1)}(2x) \downarrow\}$$

Es ce (si definimos $n = 2x$, sin loop)

Computabilidad

$f_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(2x) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$ Asumo computable

$$\Phi_e(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_c(e) = 0 \\ 0 & \text{si } f_c(e) = 1 \end{cases}$$

Queremos mostrar que f_c no es computable.

$g(x)$ una func $\begin{cases} 1 & \text{si } f_c(e) = 0 \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$ con $e / \Phi_e = g(x)$ (esto se puede x tener el parámetro)

$$\Phi_e(2e) = 1 \leftrightarrow f_c(e) = 0 \leftrightarrow \Phi_e(2e) \uparrow$$

$$\Phi_e(2e) \uparrow \leftrightarrow f_c(e) = 1 \leftrightarrow \Phi_e(2e) \downarrow$$

↑ es posible si alguien usa x q es constante e , queda mas risual si pone este. Pero es $\forall y$ constante.

Ejercicio 3. Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

a. Si B_1, \dots, B_k son c.e. entonces $\bigcup_{n \in \{1, \dots, k\}} B_n$ es c.e.

Son finitos

Verdadero. Con un guindor de poner y de volver de estado. (Quiero ver si acepta algunos)

b. Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos c.e. entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ es c.e.

¿Tomo un conjunto no c.e. y lo procuro en conjunto de elementos (eso es c.e. xq es finito).

Entre me quedo en finitos. La Union de todo es el conjunto que no es c.e. So Falso x contraj.

c. Si B_1, \dots, B_k son c.e. entonces $\bigcap_{n \in \{1, \dots, k\}} B_n$ es c.e.

Sea tiene que valer entodo, pero, si como' una el siguiente. Cuando salen de todo true. ¿no acepta alguno, loop, lo esperado.

d. Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos c.e. entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ es c.e.

Falso, son infinito, nunca termino de ver todo no decir que x es aceptado por todo.

Ejercicio 4. Sea $TOT = \{x : \Phi_x^{(1)} \text{ es una función total}\}$.

a. Demostrar que TOT no es co-c.e.

b. Demostrar que TOT no es c.e. (Sugerencia: considerar la función $g(z) = \Phi_{f(z)}^{(1)}(z) + 9$ donde f es una enumeración computable de TOT).

Esto lo uso de. No puedo poner de pensar que sea correcta nunca para c.e. y para co-c.e., nunca puedo poner para decir que no es total xq si no lo es estoy en loop.

Ejercicio 5. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos el siguiente conjunto:

$$A_k = \{z \mid \Phi_k(x) = z \text{ para algún } x \in \mathbb{N}\}$$

Luego, definimos $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

- i. ¿Son todos los A_k computables? ¿Son todos los A_k c.e.?
- ii. Decidir si A es computable, c.e. y/o co-c.e.

A_k es el rango de Φ_k .

Es c.e. ya que se puede preguntar sin problema a Φ_k si x pertenece.

Ahora, como debo elegir en el programa infinito, puedo ser que al preguntar 1. x no está, sig. buscando.