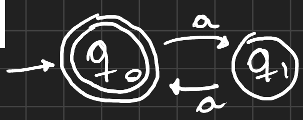
Practica 4 PUMPING

Ejercicio 1. Determinar si los siguientes lenguajes son regulares o no. Para los que sean regulares, dar un autómata finito que los defina (o explicar cómo puede construirse dicho autómata). Para los que no lo sean, demostrarlo.

a. $\{a^{2n} \mid n \geq 1\}$.



b. $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

1) Me dan un $p > 0$

2) Elijo $\alpha = a^p b^p$ que $\in L$ y $|\alpha| \geq p$

3) Me dan una descomposición $\alpha = xyz$ con $|xy| \leq p$ y $|y| \geq 1$

Para toda descomposición dada, $x = a^k$ con $k \geq 0$, $y = a^t$ con $t \geq 1$, $z = a^{p-k-t} b^p$

ya que $|xy| \leq p$ y los primeros p símbolos de α son a

4) Elijo $i \geq 0$ / $xy^iz \notin L$ $\rightarrow i = 0$ $\quad xy^0z = xz = a^k . a^{p-k-t} b^p = a^{p-t} b^p$

Como $t \geq 1$ $\quad p - t \neq p$ $\therefore$ $\alpha \notin L$ ya que no hay tantas a's como b's

c. $\{a^m b^n a^{m+n} \mid m, n \geq 1\}$. $\quad \alpha = a^p b^p a^{2p}$

Como $|xy| \leq p$ $\quad xy$ es de a's $\quad x = a^k \quad k \geq 0 \quad y = a^t$ con $t \geq 1$ xq $|y| \geq 1 \quad k + t \leq p$

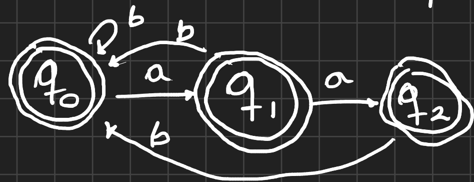
Luego $z = a^{p-k-t} b^p a^{2p}$

Con $i = 0$ $\quad xz = a^k a^{p-k-t} b^p a^{2p} = a^{p-t} b^p a^{2p}$. Si $\in L$ debería ser $a^m b^n a^{m+n}$

Entonces $m = p - t$ $\quad n = p$ $\therefore$ $m + n = p - t + p = 2p - t$ $\quad$ pero $t \geq 1$ $\therefore \notin L$

d. $\{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega$ no contiene tres *a*es consecutivas$\}$.

↳ lo mismo que 4 tampoco es < 3



e. $\{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_b\}$.

$\alpha = a^p b^p \quad |\alpha| \geq p$ y $\alpha \in L$

$|xy| \leq p \therefore$ $x = a^k$ y $y = a^t$ $\quad k \geq 0 \ t \geq 1$. $\quad z = a^{p-k-t} b^p$

Ahora con $i = 0$ $\quad a^k a^{p-k-t} b^p = a^{p-t} b^p$ $\quad$ pero $p - t \neq p$ ya que $t \geq 1$ $\therefore \notin L$

f. $\{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \neq |\omega|_b\}$.

Es complemento de e. Los L regulares están cerrados por complemento $\therefore$ si fuese regular e lo sería.

$\therefore$ no es regular

g. $\{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a < |\omega|_b\}$.

$\alpha = a^p b^{p+1}$ $\quad |\alpha| \geq p \quad \alpha \in L \qquad \alpha = xyz$

$|xy| \leq p \quad |y| \geq 1 \quad x^k \quad k \geq 0 \quad y^t \quad t \geq 1 \qquad z = a^{p-k-t} b^{p+1}$

$i = 5 \quad xy^5z \quad a^k a^{t5} a^{p-k-t} b^{p+1} = a^k a^{5t} a^{p-k-t} b^{p+1} = a^{p+4t} b^{p+1}$ pues $t \geq 1$

y $p+4 \not< p+1$

h. $\{\omega \in \{a,b\}^* \mid \omega = \omega^r\}$.

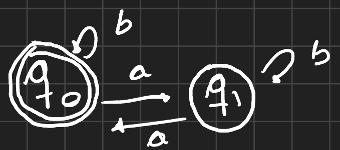
$\alpha = a^p b a^p \quad \alpha \in L \quad |\alpha| \geq p$

$|xy| \leq p \quad |y| \geq 1 \quad x = a^k \quad k \geq 0, \; y = a^t \quad t \geq 1 \qquad z = a^{p-k-t} b a^p$

$i = 0 \quad xz = a^k a^{p-k-t} b a^p = a^{p-t} b a^p \qquad t \geq 1 \;\therefore\; |a^{p-t}| \neq |a^p| \;\therefore\; xz \neq xz^R$

$\therefore\; xy^0z \notin L$

i. $\{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a \text{ es par}\}$.



j. $\{\omega \in \{a,b\}^* \mid \big||\omega|_a - |\omega|_b\big| \leq 1\}$.

$\alpha = a^p b^p \quad \alpha \in L \quad |\alpha| \geq p$

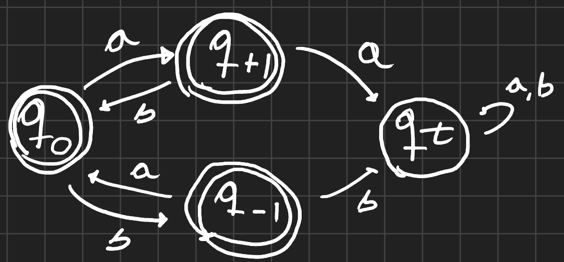
$|xy| \leq p \quad x = a^k \; k \geq 0, \; y = a^t \quad t \geq 1. \qquad z = a^{p-k-t} b^p$

$i = 5 \quad xy^5z = a^k a^{5t} a^{p-k-t} b^p = a^{p+4t} b^p \qquad p + 4t - p = 4t \qquad t \geq 1 \;\therefore\; 4t \geq 4$

$4 \not\leq 1 \;\therefore\; xy^5z \notin L$

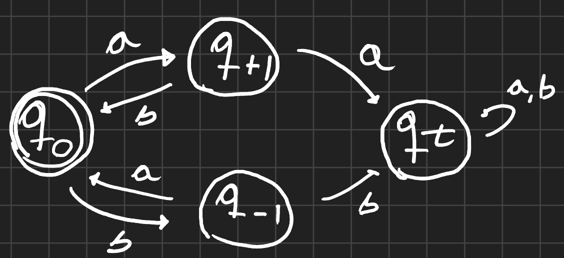
k. $\{\omega \in \{a,b\}^* \mid \text{para todo prefijo } \gamma \text{ de } \omega, \big||\gamma|_a - |\gamma|_b\big| \leq 1\}$.

$\mathcal{L}$	$\notin \mathcal{L}$
λ	aa
a	bb
b	baaab
ab	
ba	
abab	
baba	
abb	
baabbaa	



l. $\{\omega \in \{a,b\}^* \mid \text{para todo prefijo } \gamma \text{ de } \omega, \big||\gamma|_a - |\gamma|_b\big| \leq 1, \text{y } |\omega|_a = |\omega|_b\}$.

$\mathcal{L}$	$\notin \mathcal{L}$
λ	a
ab	b
ba	aab
abab	
abba	
abbaab	



m. $\{\omega \in \{a,b\}^* \mid$ para todo prefijo γ de ω, $|\gamma|_a \geq |\gamma|_b\}$.

$\mathcal{L}$ | $\notin \mathcal{L}$
aaab | aabbb
ababab | aabbabb aaaa

$\alpha = a^p b^p$, $\alpha \in \mathcal{L}$ $|\alpha| \geq p$

$|xy| \leq p$ $|y| \geq 1$

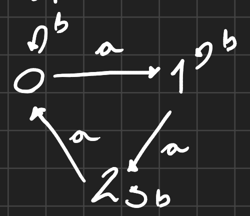
$x = a^k$ $k \geq 0$ $y = a^t$ $t \geq 1$ $z = a^{p-k-t} b^p$

Con $i = 0$ $xz = a^k a^{p-k-t} b^p = a^{p-t} b^p$ y $t \geq 1$ ∴ ∃ ini(α) / $|\gamma|_a < |\gamma|_b$

n. Sea k un natural fijo. $\mathcal{L}_k = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a$ es divisible por $k\}$.

Según Chatgpt, como lo del Brown $Q = \{0, 1, \dots k-1\}$ inicio/Final $= 0$

Ej 3



$i \xrightarrow{a} i+1$ $i \xrightarrow{b} i$

ñ. $\{\omega\omega \mid \omega \in \{a,b\}^*\}$.

$\alpha = a^p b a^p b$ $\alpha \in \mathcal{L}$ $|\alpha| \geq p$

$|xy| \leq p$ $|y| \geq 1$

$x = a^k$ $k \geq 0$ $y = a^t$ $t \geq 1$, $z = a^{p-k-t} b a^p b$

$i = 0 \to xz = a^k a^{p-k-t} b a^p b = a^{p-t} b a^p b$, como $t \geq 1$, $|a^{p-t}|_a \neq |a^p|_a$ ∴ $\notin L$

o. $\{\omega\#\gamma \mid \omega, \gamma \in \{a,b\}^*$ y γ no es una subcadena de $\omega\}$ (# es un símbolo del alfabeto).

$\alpha = a^p b a^p \# a^{p+1}$ $\alpha \in \mathcal{L}, |\alpha| \geq p$

$|xy| \geq p$ $|y| \geq 1$,

$x = a^k$ $y = a^t$, $k \geq 0$ $t \geq 1$, $z = a^{p-k-t} b a^p \# a^{p+1}$

$i = 2$ $xy^2z = a^k a^{2t} a^{p-k-t} b a^p \# a^{p+1} = a^{p+t} b a^p \# a^{p+1}$, pero una subcadena de w es a^{p+t}, como $t \geq 1$ a^{p+1} es una subcadena.

p. $\{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$.

$\alpha = a^{2^p}$ (p es natural) $\alpha \in \mathcal{L}$ $|\alpha| \geq p$

$|xy| \leq p$ $|y| \geq 1$, $x = a^k$ $k \geq 0$ $y = a^t$ $t \geq 0$, $z = a^{2^p-k-t}$

$i = 0$ $xz = a^k a^{2^p-k-t} = a^{2^p-t}$, pero $t \geq 1$ ∴ $2^p - t$

$1 \leq t \leq p \leq 2^p$

$2^p - t < 2^p$

No es potencia de 2

Capaz mal

Más claro, y correcto

$i = 2$ $xy^2z = a^k a^{2t} a^{2^p-k-t} = a^{2^p+t}$

$2^p \leq 2^p + t \leq 2^{p+1}$ No es potencia de 2! ∴ $\notin L$

$q.\ \{(ba)^n(ab)^m \mid n \le m\}.$ $\alpha = (ba)^p(ab)^p$ $\alpha \in L$ $|\alpha| \geq p$

$X = a^R$ $R \geq 0$ $t \geq 1$ $R' \geq 0$

Caso 1. $x = (ba)^R$ $y = (ba)^t$ $z = (ba)^{p-R-t}(ab)^p$. Con $i = 5$ $xy^5z = (ba)^{p+4t}(ab)^p$ $p+4t > p$ ya $t \geq 1$ $\therefore \notin \mathcal{L}$

Caso 2. $x = (ba)^R b$ $y = a(ba)^{R'}$ $z = (ba)^{p-R-R'-1}(ab)^p$. Con $i = 2$ $xy^2z = (ba)^R b\, \underbrace{a(ba)^{R'} a(ba)^{R'}}_{yy\ \to\ \text{hay 2 a consecutivas en } (ba)^m \ \therefore \notin \mathcal{L}}.z$

Caso 3. $x = (ba)^R$ $y = (ba)^{R'}b$ $z = a(ba)^{p-R-R'-1}(ab)^p$. Con $i=2$ $xy^2z = (ba)^R \underbrace{(ba)^{R'}b.\, (ba)^{R'}b}_{yy\ \to\ \text{hay 2 b seguidas} \ \therefore \notin \mathcal{L}}.z$

Caso 4. $x = (ba)^R b$ $y = a(ba)^{R'}b$ $z = a(ba)^{p-R-R'-2}(ab)^p$

$i=2$ $(ba)^R \underbrace{b\,a}(ba)^{R'}\underbrace{b\,a}_{3}(ba)^{R'}\underbrace{b\,a}(ba)^{p-R-R'-2}(ab)^p = (ba)^{p+1+2R'}(ab)^p$ $p+1+2R' > p$ ya que $R \geq 0$, $p+1 > p$ $\therefore \notin \mathcal{L}$

$\therefore$ No reg

$r.\ \{a^n b^m \mid n, m \geq 0 \land n \neq m\}.$

$\mathcal{L}^c = \Sigma^* - \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^c$ tiene que ser regular (Asumimos que $\mathcal{L}$ es)

$\alpha = a^p b^p$ $\alpha \in \mathcal{L}^c$ $|\alpha| \geq p$

$|XY| \leq p$ $|Y| \geq 1$, $X = a^R$ $R \geq 0$, $Y = a^t$ $t \geq 1$, $Z = a^{p-R-t}b^p$

$i = 0$ $xz = a^R a^{p-R-t} b^p = a^{p-t} b^p$ pero $t \geq 1$, y $\therefore p-t \neq p$ $\therefore xz \notin \mathcal{L}^c$ $\therefore \mathcal{L}^c$ no es regular

$\therefore$ $\mathcal{L}^c$ no es regular $\mathcal{L}$ no lo es

$s.\ \Sigma = \{a, b, c\}.\ \mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0 \land n \neq m\} \cup \{c^{3s} \mid s \geq 0\}.$

La Unión de Un lenguaje no regular con cualquier otro, no es regular

Por R) sabemos que no es regular

$t.$ Sea k un entero no negativo fijo. $\mathcal{L}_k = \underbrace{\{a^n b^{n+k} \mid n \geq 0\}}_{\mathcal{L}'_k} \cup \{b^s \mid s \geq 0\}.$

$\alpha = a^p b^{p+k}$ $\alpha \in \mathcal{L}'_k$ $|\alpha| \geq p$

$|xy| \leq p$ $|y| \geq 1$, $x = a^R$, $R \geq 0$, $y = a^t$ $t \geq 1$, $z = a^{p-R-t} b^{p+k}$

$i = 0$, $xz = a^{p-t} b^{p+k}$ inicialmente $(m+k) - m = k$

Ahora $(p+k) - (p-t) = p+k-p+t = k+t$ y $t \geq 0$ $\therefore xz \notin \mathcal{L}'_k$

Como $\mathcal{L}'_k$ no es regular y Unión no lo es $\therefore \mathcal{L}_k$ no es regular

$u.\ \Sigma = \{a, b, c\}.\ \mathcal{L} = \{a^m b^n c^s \mid m \neq n \lor m \neq s\}.$

$\alpha = a^p b^p c^p$ $\alpha \notin \mathcal{L}$, $\alpha \in \mathcal{L}^c$, $|\alpha| \geq p$

$|xy| \leq p$ $|y| \geq 1$, $x = a^R$ $R \geq 0$, $y = a^t$ $t \geq 1$, $z = a^{p-R-t} b^p c^p$

Con $i = 0$ $xz = a^R . a^{p-R-t} b^p c^p = a^{p-t} b^p c^p$, ahora $p-t \neq p$ ya que $t \geq 1$

$\therefore$ $p-t \neq p$, $m \neq n$ $\therefore$ $xz \in \mathcal{L}$ y $\notin \mathcal{L}^c$

$\therefore$ $\mathcal{L}^c$ no es regular

Como $\mathcal{L}^c$ no es regular $\mathcal{L}$ no es regular.

v. El lenguaje de las cadenas sobre $\Sigma = \{(,)\}$ cuyos paréntesis están balanceados.
Por ejemplo, `()`, `()()`, `(())` y `((()())())` pertenecen al lenguaje, pero `)(`, `((` y `())` no.

$\alpha = (^p)^p \quad \alpha \in \mathcal{L} \quad |\alpha| \geq p$

$|xy| \leq p \quad |y| \geq 1, \ x = (^k \quad y = (^t \quad k \geq 0 \ t \geq 1, \ z = (^{p-k-t})^p$

$i = 0 \quad xz = (^{p-t})^p$ como $t \geq 1, \ p - t \neq p.$

w. $\{(ab)^n a^m \mid n$ es múltiplo de $m\}$.

$\alpha = (ab)^p a^p \in \mathcal{L} \quad |\alpha| \geq p.$

c1) $x = (ab)^k, \ k \geq 0, \quad y = (ab)^t, \ t \geq 1 \quad i = 0, \ xz = (ab)^{p-t} a^p \quad p - t < p \therefore$ no es mult $y \notin \mathcal{L}$

c2) $x = (ab)^k a, \ k \geq 0, \ y = b(ab)^{k'}, \ k' \geq 0 \quad i = 0 \quad xz = (ab)^k \underbrace{a (ab)^{k'}}_{\notin \mathcal{L}} (ab)^{p-k-k'} \cdot a^p$

c3) $x = (ab)^k, \ k \geq 0 \quad y = (ab)^{k'} a, \ k' \geq 0$

$z = b(ab)^{p-k-k'-1} a^p \qquad i = 0 \quad xz = (ab)^k b (ab)^{p-k-k'-1} a^p$

$1 \cdot k = 0 \to \notin$ Las cadenas no empiezan por b

$2 \cdot k \geq 1 \to \notin \ldots abb \ldots \notin \mathcal{L}$

c4) $x = (ab)^k a \quad y = b(ab)^{k'} a$

$z = b(ab)^{p-k-k'-2} a^p \qquad i = 0 \quad xz = (ab)^k a b (ab)^{p-k-k'-2} a^p$

$= (ab)^{p-k'-1} a^p$

$k \geq 0, \ k' \geq 0, \quad p - 1 < p \therefore$ no múltiplo, $y \notin \mathcal{L}$

Con reverso sería para $a^m (ab)^n$ n múltiplo de m

$\alpha = a^p (ab)^p$ ✓

$x = a^k \ k \geq 0 \quad y = a^t \ t \geq 1, \ z = a^{p-k-t} (ab)^p$

$i = 2 \quad xyyz = a^{p+t} (ab)^p$, como $t \geq 1 \quad \underbrace{p+t}_{m} > \underbrace{p}_{n}.$ pero n no no puede ser múltiplo si es menor estricto porque $m \cdot k$ nunca va a llegar a un número más chico. $\therefore \alpha \notin \mathcal{L}^R \therefore \mathcal{L}^R$ no es regular $\therefore \mathcal{L}$ no es regular

x. $\underbrace{\{a^n \gamma \mid n \geq 1, \gamma \in \{a, b\}^*, |\gamma| \leq n\}}_{\mathcal{L}_1} \cup \underbrace{\{b^n a^m \mid n \equiv 1 \text{ mód } 3, m \geq 1\}}_{\mathcal{L}_2}$.

Es unión disjunta (uno empieza con a y otro con b

$\alpha = a^p b^p \quad |\gamma| = p \leq p$

$\alpha \in \mathcal{L}_1 \therefore \alpha \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2,$

$x = a^k \ k \geq 0 \ y = a^t \ t \geq 1, \ z = a^{p-k-t} b^p,$

Con $i = 0 \quad xz = a^{p-t} b^p \quad$ pero $p \nleq p - t$ ya que $t \geq 1. \therefore \mathcal{L}_1$ no es reg

Como la unión era disjunta $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ No es regular.

Ejercicio 2. Dado $\mathcal{L} = \{a^i b^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$.

a. Demostrar que $\mathcal{L}$ cumple

$$\forall \alpha, \alpha \in \mathcal{L} \wedge |\alpha| \geq 2 \Longrightarrow \exists (x, y, z) \text{ tales que } (\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall i, xy^i z \in \mathcal{L}).$$

b. Demostrar que $\mathcal{L}$ no es regular.

A)

Sea $P=2$, tenemos que mostrar que toda cadena $|\alpha| \geq P$ existe una descomposición $(x\,y\,z \ldots)$. $\notin \mathcal{L}$.

Vemos los casos de largo ≥ 2

$\alpha =$

$(a|b)^* \, b \, (a|b)^* \, a \; a^+$

$\alpha = a^{2k} b \; , |\alpha| \geq P, \; x =$