2do Parcial

member(X, [X | _]).
member(X, [Y | XS]) :- member(X, XS).

EsSublista(_, []).
EsSublista(L, [X | XS]) :- member(X, L), esSublista(L, XS).

Formulas

1) $\forall x, y.\ member(x, [x \mid y])$.

2) $\forall x, y, xs.\ member(x, xs) \to member(x, [y \mid xs])$

3) $\forall L.\ EsSublista(L, [\,])$.

4) $\forall L, X, XS.\ (member(X, L) \wedge esSublista(L, XS)) \to esSublista(L, [X \mid XS])$.

5) $\forall R.\ esSublista([a, b], R) \wedge member(b, R)$.

Clausulas

$[a, b, c \mid [d \mid [\,]]]$

1) $\{member(X_1, [X_1 \mid Y_1])\}$

2) $\{\neg member(X_2, XS_2), member(X_2, [Y_2 \mid XS_2])\}$

3) $\{esSub(L_3, [\,])\}$

4) $\{\neg member(X_4, L_4), \neg esSub(L_4, XS_4), esSub(L_4, [X_4 \mid XS_4])\}$

5) $\{\neg esSub([a, b], R_5), \neg member(b, R_5)\}$

$[a, b] = [a \mid [b \mid [\,]]]$

$[b] = [b \mid [\,]]$

(Capaz había que resolver desde el principio)

3 y 4 $S = \{XS := [\,], L_3 := L_4\}$ ⑥ $\{\neg member(X_4, L_4), esSub(L_4, [X_4 \mid [\,]])\}$

6 y 5 $S = \{L_4 := [a, b], R_5 := [X_4 \mid [\,]]\}$ ⑦ $\{\neg member(X_4, [a, b]), \neg member(b, [X_4 \mid [\,]])\}$

7 y 1 $S = \{X_1 := b, Y_1 := [\,], X_4 := b\}$ ⑧ $\{\neg member(b, [a, b])\}$

8 y 2 $S = \{X_2 := b, Y_2 := a, XS := [b \mid [\,]]\}$ ⑨ $\{\neg member(b, [b \mid [\,]])\}$

9 y 1 $S = \{X_1 := b, Y_1 := [\,]\}$ ⑩ $\emptyset$

No es SLD (No empiezo con objetivo)

Ejercicio 2 - Resolución

Consideremos el siguiente lenguaje del dominio de funciones numéricas:

- $X \leq Y$: predicado binario que representa que X es menor o igual que Y
- $cota(F, X)$: predicado binario que representa que X es una cota superior de la función F
- $sup(F)$: símbolo de función unario que representa el supremo de la función F
- $ev(F, N)$: símbolo de función binario que representa el resultado de evaluar la función F en N

Sean los siguientes axiomas:

- $\forall F. \forall X.(cota(F, X) \Leftrightarrow \forall N.ev(F, N) \leq X)$
  (definición de cota superior)
- $\forall F.(cota(F, sup(F)) \wedge \overbrace{\forall Y.(cota(F, Y) \Rightarrow sup(F) \leq Y)})$
  (el supremo de una función es una cota superior, y es la más chica de las cotas superiores)
- $\forall X. \forall Y. \forall Z.((X \leq Y \wedge Y \leq Z) \Rightarrow X \leq Z)$
  (transitividad de la relación menor o igual)

Se pide:

a. Pasar a forma clausal cada fórmula

b. Demostrar usando resolución que si una función es más chica que otra en todo punto, el supremo también es más chico:
$\forall F. \forall G.((\forall N.ev(F, N) \leq ev(G, N)) \Rightarrow sup(F) \leq sup(G))$

c. La resolución utilizada en el punto anterior ¿fue SLD? Justificar.

$Cota(F,X) \rightarrow \forall N. ev(F,N) \leq X) \wedge \forall N. ev(F,N) \leq X \rightarrow Cota(F,X)$

$\neg Cota(F,X) \vee (\forall N. ev(F,N) \leq X) \wedge \neg(\forall N. ev(F,N) \leq X) \vee Cota(F,X)$

1 $\{\neg Cota(F,X), (ev(F,N) \leq X)\}$ 2 $\{\neg(ev(F,N) \leq X), Cota(F,X)\}$

$\forall F. (Cota(F, sup(F)) \wedge \forall Y. (Cota(F,Y) \rightarrow sup(F) \leq Y))$

$\forall F. (Cota(F, sup(F)) \wedge \forall Y (\neg Cota(F,Y) \vee sup(F) \leq Y)$

3 $\{Cota(F, sup(F))\}$ 4 $\{\neg Cota(F,Y), sup(F) \leq Y\}$

$\forall X,Y,Z((X \leq Y \wedge Y \leq Z) \rightarrow X \leq Z)$

$\neg X \leq Y \vee \neg Y \leq Z \vee X \leq Z$

5 $\{\neg X \leq Y, \neg Y \leq Z, X \leq Z\}$

$\neg \forall F,G((\forall N. ev(F,N) \leq ev(G,N)) \rightarrow sup(F) \leq sup(G))$

$\exists F,G((\forall N. ev(F,N) \leq ev(G,N)) \wedge \neg sup(F) \leq sup(G))$

$\forall N. (ev(a,N) \leq ev(b,N)) \wedge \neg sup(a) \leq sup(b))$

6 $\{ev(a,N) \leq ev(b,N)\}$ 7 $\{\neg sup(a) \leq sup(b)\}$

1 $\{\neg Cota(F,X), (ev(F,N) \leq X)\}$ 2 $\{\neg(ev(F,N) \leq X), Cota(F,X)\}$ 3 $\{Cota(F, sup(F))\}$ 4 $\{\neg Cota(F,Y), sup(F) \leq Y\}$

5 $\{\neg X \leq Y, \neg Y \leq Z, X \leq Z\}$ 6 $\{ev(a,N) \leq ev(b,N)\}$ 7 $\{\neg sup(a) \leq sup(b)\}$

1 y 3 $S = \{F_3 := F_1, X_1 := sup(F_1)\}$ 8 $\{ev(F_1, N_1) \leq sup(F_1)\}$

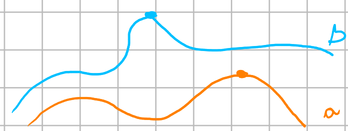
5 y 6 $S = \{X := ev(a,N), Y := ev(b,N)\}$ 9 $\{\neg ev(b,N) \leq Z, ev(a,N) \leq Z\}$

8 y 9 $S = \{F_1 := b, Z := sup(b)\}$ 10 $\{ev(a,N) \leq sup(b)\}$

2 y 10) $S = \{X := sup(b), F := a\}$ 11) $\{Cota(a, sup(b))\}$

11 y 4) $S := \{F := a, Y := sup(b)\}$ 12) $\{sup(a) \leq sup(b)\}$

12 y 7) $S := \{\}$ $\emptyset$



1 $\{\neg Cota(F,X), (ev(F,N) \leq X)\}$ 2 $\{\neg(ev(F,N) \leq X), Cota(F,X)\}$ 3 $\{Cota(F, sup(F))\}$ 4 $\{\neg Cota(F,Y), sup(F) \leq Y\}$

5 $\{\neg X \leq Y, \neg Y \leq Z, X \leq Z\}$ 6 $\{ev(a,N) \leq ev(b,N)\}$ 7 $\{\neg sup(a) \leq sup(b)\}$

6 y 2

1 y 3 $\{ev(F,N) \leq sup(F)\}$ 8

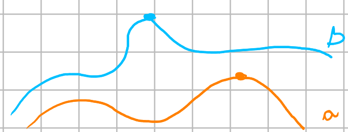
6 y 5 $\{\neg(X \leq ev(F,N)), X \leq sup(F)\}$ 9

9 y 7 $\{\neg(sup(a) \leq ev(b,N))\}$ 10

10 y 4 $\{\neg Cota(a, ev(b,N))\}$ 11

11 y 2 $\{\neg(ev(a,N') \leq ev(b,N))\}$ 12

12 y 6 $\{\}$



b) Demostrar el siguiente teorema usando deducción natural, sin utilizar principios clásicos:

$$(\forall X.\exists Y.(P(X,Y) \wedge Q(Y,X))) \Rightarrow \exists X.\exists Y.Q(Y,X)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x.\exists y.(P(x,y) \wedge Q(y,x))}\,ax}{\Gamma \vdash \exists y.(P(x,y) \wedge Q(y,x))}\,\forall_i \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash P(x,y) \wedge Q(x,y)}\,ax}{\Gamma' \vdash Q(y,x)}\,\wedge_{e2}}{\Gamma' \vdash \exists y.Q(y,x)}\,\exists_i}{\Gamma'\{\Gamma, P(x,y) \wedge Q(x,y) \vdash \exists x \exists y. Q(y,x)}\,\exists_i}{\dfrac{\Gamma\{\forall x.\exists y.(P(x,y) \wedge Q(y,x))) \vdash \exists x.\exists y.Q(y,x)}{\forall x.\exists y.(P(x,y) \wedge Q(y,x))) \to \exists x.\exists y.Q(y,x)}\,\to_i}\,\exists_E$$

Ejercicio 3 - Inferencia, Deducción Natural y POO

a) Consideremos el Cálculo Lambda tipado extendido con intervalos de números naturales:

$\sigma ::= \ldots \mid \mathsf{Intervalo}$

$M ::= \ldots \mid [M, M] \mid \text{case } M \text{ of } [\,] \rightsquigarrow M; x :: y \rightsquigarrow M$

donde $[M, N]$ es el intervalo que va desde el número M hasta N (inclusive) y case M of $[\,] \rightsquigarrow N; x :: y \rightsquigarrow O$ es un observador que recorre el intervalo M como si fuese una lista: con un caso para el intervalo vacío (N) y otro para un intervalo con al menos un elemento (O). En el segundo caso, las apariciones libres de la variable x en O se ligarán al primer elemento del intervalo y las apariciones libres de y en O se ligarán al intervalo sin su primer elemento.

Se extiende también el algoritmo de inferencia de la siguiente manera:

$\mathcal{I}(\Gamma \mid [M_1, M_2]) = (\mathsf{Intervalo} \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} Nat, \tau_1 \stackrel{?}{=} \tau_2\} \cup E_1 \cup E_2)$
donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$
$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{case } M_1 \text{ of } [\,] \rightsquigarrow M_2; x :: y \rightsquigarrow M_3) =$
$(\tau_2 \mid \{\tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3, \tau_1 \stackrel{?}{=} \mathsf{Intervalo}, X_x \stackrel{?}{=} Nat, X_y \stackrel{?}{=} \mathsf{Intervalo}\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$
donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$
$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$
$\mathcal{I}(\Gamma, x : X_x, y : X_y \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$
X_x y X_y variables frescas

Usar el algoritmo $\mathcal{I}$ para inferir el tipo de la siguiente expresión, o demostrar que no es tipable:

$$\text{case } (\lambda x.[\underline{1}, x])\ y \text{ of } [\,] \rightsquigarrow (\lambda z.[y, y]); x :: z \rightsquigarrow z$$

1) Rectificar

$\text{Case } (\lambda x.[\underline{1}, x])\ y \text{ of } [\,] \rightsquigarrow (\lambda z.[y,y]);\ w :: v \to v$

2) $\Gamma_0 = \{y : X_1\}$ $\quad M_0 = \text{Case } (\lambda x : X_2.[\underline{1}, x])\ y \text{ of } [\,] \rightsquigarrow (\lambda z : X_3.[y,y]);\ w :: v \to v$

3)

$\mathcal{I}(\{y : X_1\} \mid \text{Case } (\lambda x : X_2.[\underline{1}, x])\ y \text{ of } [\,] \rightsquigarrow (\lambda z : X_3.[y,y]);\ w :: v \to v)$ Clash! No unifica

$= (X_3 \to \text{intervalo} \mid \{X_3 \to \text{intervalo} \stackrel{?}{=} X_5, \boxed{X_2 \to \text{intervalo} = \text{intervalo}}, X_4 = Nat, X_5 = \text{intervalo}, Nat \stackrel{?}{=} Nat, Nat = X_1, X \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} X_1\}$

- $\mathcal{I}(\Gamma_0 \mid \lambda x : X_2.[\underline{1}, x]) = (X_2 \to \text{intervalo} \mid \{Nat \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} X_1\})$
  - $\mathcal{I}(\Gamma_0, x : X_2 \mid [\underline{1}, x]) = (\text{intervalo} \mid \{Nat \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} X_1\})$
    - $\mathcal{I}(\Gamma_0, x : X_2 \mid \underline{1}) = (Nat \mid \{Nat \stackrel{?}{=} Nat\})$
      - $\mathcal{I}(\Gamma_0, x : X_2 \mid \text{Zero}) = (Nat \mid \emptyset)$
    - $\mathcal{I}(\Gamma_0, x : X_2 \mid x) = (X_2 \mid \emptyset)$
- $\mathcal{I}(\Gamma_0 \mid (\lambda z : X_3.[y,y])) = (X_3 \to \text{intervalo} \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} X_1\})$
  - $\mathcal{I}(\Gamma_0, z : X_3 \mid [y,y]) = (\text{intervalo} \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} X_1\})$
    - $\mathcal{I}(\Gamma_0, z : X_3 \mid y) = (X_1 \mid \emptyset)$
    - $\mathcal{I}(\Gamma_0, z : X_3 \mid y) = (X_1 \mid \emptyset)$
- $\mathcal{I}(\Gamma_0, w : X_4, v : X_5 \mid v) = (X_5 \mid \emptyset)$