Ejercicio 5 ★

Demostrar en deducción natural que las siguientes fórmulas son teoremas **sin usar principios de razonamiento clásicos** salvo que se indique lo contrario. Recordemos que una fórmula σ es un teorema si y sólo si vale $\vdash \sigma$:

I. *Modus ponens* relativizado: $(\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau) \Rightarrow (\rho \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \rho \Rightarrow \tau$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\rho\Rightarrow(\sigma\Rightarrow\tau)}\text{ax}\quad\dfrac{}{\Gamma\vdash\rho}\text{ax}}{\Gamma\vdash\sigma\Rightarrow\tau}\Rightarrow_e\qquad\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\rho\Rightarrow\sigma}\text{ax}\quad\dfrac{}{\Gamma\vdash\rho}\text{ax}}{\Gamma\vdash\sigma}\Rightarrow_e}{\Gamma\{(\rho\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau),(\rho\Rightarrow\sigma),\rho\vdash\tau}\Rightarrow_e}{(\rho\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau),(\rho\Rightarrow\sigma)\vdash\rho\Rightarrow\tau}\Rightarrow_i}{\rho\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau\vdash(\rho\Rightarrow\sigma)\Rightarrow\rho\Rightarrow\tau}\Rightarrow_i}{\vdash(\rho\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau)\Rightarrow(\rho\Rightarrow\sigma)\Rightarrow\rho\Rightarrow\tau}\Rightarrow_i$$

II. Reducción al absurdo: $(\rho \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg\rho$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\rho\Rightarrow\bot}\text{ax}\quad\dfrac{}{\Gamma\vdash\rho}\text{ax}}{\Gamma\{\rho\Rightarrow\bot,\rho\vdash\bot}\Rightarrow_e}{\rho\Rightarrow\bot\vdash\neg\rho}\neg_i}{\vdash(\rho\Rightarrow\bot)\Rightarrow\neg\rho}\Rightarrow_i$$

III. Introducción de la doble negación: $\rho \Rightarrow \neg\neg\rho$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\rho}\text{ax}\quad\dfrac{}{\Gamma\vdash\neg\rho}\text{ax}}{\Gamma\{\rho,\neg\rho\vdash\bot}\neg_e}{\rho\vdash\neg\neg\rho}\neg_i}{\vdash\rho\Rightarrow\neg\neg\rho}\Rightarrow_i$$

IV. Eliminación de la triple negación: $\neg\neg\neg\rho \Rightarrow \neg\rho$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\rho}\text{ax}}{\Gamma\vdash\neg\neg\rho}\neg\neg_i\quad\dfrac{}{\Gamma\vdash\neg\neg\neg\rho}\text{ax}}{\Gamma\{\neg\neg\neg\rho,\rho\vdash\bot}\neg_e}{\neg\neg\neg\rho\vdash\neg\rho}\neg_i}{\vdash\neg\neg\neg\rho\Rightarrow\neg\rho}\Rightarrow_i$$

V. Contraposición: $(\rho \Rightarrow \sigma) \Rightarrow (\neg\sigma \Rightarrow \neg\rho)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,\rho\vdash\rho\Rightarrow\sigma}\text{ax}\quad\dfrac{}{\Gamma,\rho\vdash\rho}\text{ax}}{\Gamma,\rho\vdash\sigma}\Rightarrow_e\qquad\dfrac{}{\Gamma,\rho\vdash\neg\sigma}\text{ax}}{\Gamma,\rho\vdash\bot}\neg_e}{\Gamma\{\rho\Rightarrow\sigma,\neg\sigma\vdash\neg\rho}\neg_i}{\rho\Rightarrow\sigma\vdash\neg\sigma\Rightarrow\neg\rho}\Rightarrow_i}{\vdash(\rho\Rightarrow\sigma)\Rightarrow(\neg\sigma\Rightarrow\neg\rho)}\Rightarrow_i$$

VI. Adjunción: $((\rho \wedge \sigma) \Rightarrow \tau) \Leftrightarrow (\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau)$

$(\Rightarrow)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash(\rho\wedge\sigma)\Rightarrow\tau}\text{ax}\qquad\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\rho}\text{ax}\quad\dfrac{}{\Gamma\vdash\sigma}\text{ax}}{\Gamma\vdash\rho\wedge\sigma}\wedge_i}{\Gamma\{((\rho\wedge\sigma)\Rightarrow\tau),\rho,\sigma\vdash\tau}\Rightarrow_e}{((\rho\wedge\sigma)\Rightarrow\tau),\rho\vdash\sigma\Rightarrow\tau}\Rightarrow_i}{((\rho\wedge\sigma)\Rightarrow\tau)\vdash\rho\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau}\Rightarrow_i}{\vdash((\rho\wedge\sigma)\Rightarrow\tau)\Rightarrow(\rho\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau)}\Rightarrow_i$$

$(\Leftarrow)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\rho\Rightarrow(\sigma\Rightarrow\tau)}\text{ax}\quad\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\rho\wedge\sigma}\text{ax}}{\Gamma\vdash\rho}\wedge_{e_1}}{\Gamma\vdash\sigma\Rightarrow\tau}\Rightarrow_e\qquad\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\rho\wedge\sigma}\text{ax}}{\Gamma\vdash\sigma}\wedge_{e_2}}{\Gamma\{\rho\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau,\rho\wedge\sigma\vdash\tau}\Rightarrow_e}{\rho\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau\vdash((\rho\wedge\sigma)\Rightarrow\tau)}\Rightarrow_i}{\vdash(\rho\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau)\Rightarrow((\rho\wedge\sigma)\Rightarrow\tau)}\Rightarrow_i$$

VII. de Morgan (I): $\neg(\rho \vee \sigma) \Leftrightarrow (\neg\rho \wedge \neg\sigma)$

$(\Rightarrow)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\rho}\text{ax}}{\Gamma\vdash\rho\vee\sigma}\vee_{i_1}\quad\dfrac{}{\Gamma\vdash\neg(\rho\vee\sigma)}\text{ax}}{\Gamma\{\neg(\rho\vee\sigma),\rho\vdash\bot}\neg_e}{\neg(\rho\vee\sigma)\vdash\neg\rho}\neg_i\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\sigma}\text{ax}}{\Gamma\vdash\rho\vee\sigma}\vee_{i_2}\quad\dfrac{}{\Gamma\vdash\neg(\rho\vee\sigma)}\text{ax}}{\neg(\rho\vee\sigma),\sigma\vdash\bot}\neg_e}{\neg(\rho\vee\sigma)\vdash\neg\sigma}\neg_i}{\neg(\rho\vee\sigma)\vdash\neg\rho\wedge\neg\sigma}\wedge_i}{\vdash\neg(\rho\vee\sigma)\Rightarrow(\neg\rho\wedge\neg\sigma)}\Rightarrow_i}{}$$

$(\Leftarrow)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash(\rho\vee\sigma)}\text{ax}\qquad\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\rho\vee\sigma}\text{ax}\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,\rho\vdash\rho}\text{ax}\quad\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,\rho\vdash\neg\rho\wedge\neg\sigma}\text{ax}}{\Gamma,\rho\vdash\neg\rho}\wedge_{e_1}}{\Gamma,\rho\vdash\bot}\neg_e}{\Gamma,\rho\vdash\neg(\rho\vee\sigma)}\bot_e\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,\sigma\vdash\sigma}\text{ax}\quad\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,\sigma\vdash\neg\rho\wedge\neg\sigma}\text{ax}}{\Gamma,\sigma\vdash\neg\sigma}\wedge_{e_2}}{\Gamma,\sigma\vdash\bot}\neg_e}{\Gamma,\sigma\vdash\neg(\rho\vee\sigma)}\bot_e}{\Gamma\vdash\neg(\rho\vee\sigma)}\vee_e}{\Gamma\{(\neg\rho\wedge\neg\sigma),(\rho\vee\sigma)\vdash\bot}\neg_e}{(\neg\rho\wedge\neg\sigma)\vdash\neg(\rho\vee\sigma)}\neg_i}{\vdash(\neg\rho\wedge\neg\sigma)\Rightarrow\neg(\rho\vee\sigma)}\Rightarrow_i$$

Ejercicio 6 ★

Demostrar en deducción natural que vale $\vdash \sigma$ para cada una de las siguientes fórmulas. Para estas fórmulas es imprescindible **usar lógica clásica**:

I. Absurdo clásico: $(\neg\tau \Rightarrow \bot) \Rightarrow \tau$

$\Gamma \vdash \neg\tau \Rightarrow \bot$ ax $\quad \Gamma \vdash \neg\tau$ ax

$\Gamma \{ \neg\tau \Rightarrow \bot, \neg\tau \vdash \bot$ $\Rightarrow_e$

$\neg\tau \Rightarrow \bot \vdash \neg\neg\tau$ $\neg_i$

$\neg\tau \Rightarrow \bot \vdash \tau$ $\neg\neg_e$

$\vdash (\neg\tau \Rightarrow \bot) \Rightarrow \tau$ $\Rightarrow_i$

II. Ley de Peirce: $((\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau$

$\Gamma' \vdash \tau$ ax $\quad \Gamma' \vdash \neg\tau$ ax

$\Gamma' \{ \Gamma, \neg\tau, \tau \vdash \bot$ $\neg_e$

$\Gamma, \neg\tau, \tau \vdash \rho$ $\bot_e$

$\Gamma, \neg\tau \vdash (\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \tau$ ax $\quad \Gamma, \neg\tau \vdash \tau \Rightarrow \rho$ $\Rightarrow_i$

$\Gamma, \neg\tau \vdash \tau$ $\Rightarrow_e$ $\quad \Gamma, \neg\tau \vdash \neg\tau$ ax

$\Gamma, \neg\tau \vdash \bot$ $\neg_e$

$\Gamma \{ ((\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \tau) \vdash \tau$ PBC

$\vdash ((\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau$ $\Rightarrow_i$

III. Tercero excluido: $\tau \vee \neg\tau$

To-do (resuelto en clase)

IV. Consecuencia milagrosa: $(\neg\tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau$

$\Gamma \vdash \neg\tau \Rightarrow \tau$ ax $\quad \Gamma \vdash \neg\tau$ ax

$\Gamma \vdash \tau$ $\Rightarrow_e$ $\quad \Gamma \vdash \neg\tau$ ax

$\Gamma \{ (\neg\tau \Rightarrow \tau), \neg\tau \vdash \bot$ $\neg_e$

$(\neg\tau \Rightarrow \tau) \vdash \tau$ PBC

$\vdash (\neg\tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau$ $\Rightarrow_i$

V. Contraposición clásica: $(\neg\rho \Rightarrow \neg\tau) \Rightarrow (\tau \Rightarrow \rho)$

$\Gamma' \vdash \neg\rho \Rightarrow \neg\tau$ ax $\quad \Gamma' \vdash \neg\rho$ ax

$\Gamma, \neg\rho \vdash \tau$ ax $\quad \Gamma' \{ \Gamma, \neg\rho \vdash \neg\tau$ $\Rightarrow$

$\Gamma, \neg\rho \vdash \bot$ $\neg_e$

$\Gamma \{ (\neg\rho \Rightarrow \neg\tau), \tau \vdash \rho$ PBC

$(\neg\rho \Rightarrow \neg\tau) \vdash \tau \Rightarrow \rho$ $\Rightarrow_i$

$\vdash (\neg\rho \Rightarrow \neg\tau) \Rightarrow (\tau \Rightarrow \rho)$ $\Rightarrow_i$

VI. Análisis de casos: $(\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow (\neg\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \rho$

$\Gamma, \tau \vdash \tau \Rightarrow \rho$ ax $\quad \Gamma, \tau \vdash \tau$ ax $\quad \Gamma, \neg\tau \vdash \neg\tau \Rightarrow \rho$ ax $\quad \Gamma, \neg\tau \vdash \neg\tau$ ax

$\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau$ LEM $\quad \Gamma, \tau \vdash \rho$ $\Rightarrow_e$ $\quad \Gamma, \neg\tau \vdash \rho$ $\Rightarrow_e$

$\Gamma \{ (\tau \Rightarrow \rho), (\neg\tau \Rightarrow \rho) \vdash \rho$ $\vee_e$

$(\tau \Rightarrow \rho) \vdash (\neg\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \rho$ $\Rightarrow_i$

$\vdash (\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow (\neg\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \rho$ $\Rightarrow_i$

VII. Implicación vs. disyunción: $(\tau \Rightarrow \rho) \Leftrightarrow (\neg\tau \vee \rho)$

$\Rightarrow)$

$\Gamma, \tau \vdash (\tau \Rightarrow \rho)$ ax $\quad \Gamma, \tau \vdash \tau$ ax

$\Gamma, \tau \vdash \rho$ $\Rightarrow_e$ $\quad \Gamma, \neg\tau \vdash \neg\tau$ ax

$\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau$ LEM $\quad \Gamma, \tau \vdash (\neg\tau \vee \rho)$ $\vee_{i_2}$ $\quad \Gamma, \neg\tau \vdash (\neg\tau \vee \rho)$ $\vee_{i_1}$

$\Gamma \{ (\tau \Rightarrow \rho) \vdash \neg\tau \vee \rho$ $\vee_e$

$\vdash (\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow (\neg\tau \vee \rho)$ $\Rightarrow_i$

$\Leftarrow)$

$\Gamma, \neg\tau \vdash \tau$ ax $\quad \Gamma, \neg\tau \vdash \neg\tau$ ax

$\Gamma, \neg\tau \vdash \bot$ $\neg_e$

$\Gamma \vdash (\neg\tau \vee \rho)$ ax $\quad \Gamma, \neg\tau \vdash \rho$ $\bot_e$ $\quad \Gamma, \rho \vdash \rho$ ax

$\Gamma \{ (\neg\tau \vee \rho), \tau \vdash \rho$ $\vee_e$

$(\neg\tau \vee \rho) \vdash (\tau \Rightarrow \rho)$ $\Rightarrow_i$

$\vdash (\neg\tau \vee \rho) \Rightarrow (\tau \Rightarrow \rho)$ $\Rightarrow_i$

Ejercicio 8

Si $[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ es una lista de fórmulas, definimos la notación $[\tau_1, \ldots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma$ inductivamente:

$$\begin{array}{lcl} ([] \Rightarrow^* \sigma) & = & \sigma \\ ([\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma) & = & \tau_1 \Rightarrow ([\tau_2, \ldots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma) \end{array}$$

Probar por inducción en n que $\tau_1, \ldots, \tau_n \vdash \sigma$ es válido si y sólo si $\vdash [\tau_1, \ldots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma$ es válido.

Definamos $P(n)$

$P(n)$: $\tau_1, \ldots, \tau_n \vdash \sigma$ es válido $\Leftrightarrow \vdash [\tau_1, \ldots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma$ es válido.

- Caso base: $P(0)$

$P(0)$: $\vdash \sigma$ es válido $\Leftrightarrow \vdash [\,] \Rightarrow^* \sigma$ es válido. $\overset{\{def\}}{\equiv}$

$\vdash \sigma$ es válido $\Leftrightarrow \vdash \sigma$ es válido $\square$

- Tomo $P(n)$ como hipótesis inductiva, quiero probar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$P(n+1)$: $\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau_{n+1} \vdash \sigma$ es válido $\Leftrightarrow \vdash [\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau_{n+1}] \Rightarrow^* \sigma$ es válido.

Abusando de notación, diré que $P(n+1)$ equivale a

$P(n+1)$: $\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau_{n+1} \vdash \sigma = \vdash [\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau_{n+1}] \Rightarrow^* \sigma$

der) Por def: $\vdash [\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau_{n+1}] \Rightarrow^* \sigma \equiv \vdash \tau_1 \Rightarrow [\tau_2, \ldots, \tau_n, \tau_{n+1}] \Rightarrow^* \sigma \equiv \ldots \equiv$

$\vdash \tau_1 \Rightarrow \tau_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \tau_n \Rightarrow \tau_{n+1} \Rightarrow \sigma \overset{\{\Rightarrow_i \times N\}}{\equiv}$

$\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau_{n+1} \vdash \sigma$. Que es lo mismo que izq $\square$