Równanie transportu ciepła MES

Tomasz Furgała

Styczeń 2024

1 Problem

Równanie transport ciepła:

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = 100x$$

$$u(2) = 0$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20$$

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in [0,1] \\ 2x & \text{dla} \quad x \in (1,2] \end{cases}$$

gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0,2] \ni x \mapsto u(x) \in R$$

2 Rozwiazanie

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du(x)}{dx}\right) \cdot v(x) = 100x \cdot v(x), \qquad u \in V, \forall v \in V, V = \{f \in H^1, f(2) = 0\}$$

$$-\int_0^2 \left(\frac{d}{dx}\left(k(x) \cdot u'(x)\right) \cdot v(x)\right) dx = \int_0^2 \left(100x \cdot v(x)\right) dx$$

całkuje przez cześci lewa strone równania:

$$-\int_0^2 \left(\frac{d}{dx}\left(k(x) \cdot u'(x)\right) \cdot v(x)\right) dx = -(v(x) \cdot k(x) \cdot u'(x))\Big|_0^2 + \int_0^2 (k(x) \cdot u'(x) \cdot v'(x))dx =$$

$$= -v(2) \cdot k(2) \cdot u'(2) + v(0) \cdot k(0) \cdot u'(0) + \int_0^2 (k(x) \cdot u'(x) \cdot v'(x))dx = (*)$$

$$u, v \in V \wedge u(2) = 0 \Rightarrow v(2) = 0$$

$$u'(0) = 20 - u(0)$$

$$k(0) = 1$$

$$(*) = v(0)(20 - u(0)) + \int_0^2 (k(x) \cdot u'(x) \cdot v'(x))dx$$

teraz wracajac do naszego głównego równania:

$$20v(0) - v(0) \cdot u(0) + \int_0^2 (k(x) \cdot u'(x) \cdot v'(x))dx = \int_0^2 (100x \cdot v(x))\, dx$$

to jest nasze sformułowanie wariancyjne:

$$\int_0^2 (k(x) \cdot u'(x) \cdot v'(x))dx - v(0) \cdot u(0) = \int_0^2 (100x \cdot v(x))\, dx - 20v(0)$$

$$B(u, v) = \int_0^2 (k(x) \cdot u'(x) \cdot v'(x))dx - v(0) \cdot u(0)$$

$$L(v) = \int_0^2 (100x \cdot v(x))\, dx - 20v(0)$$

$$B(u, v) = L(v)$$