

所用的模型：对数几率回归

$$\ln \frac{p(y=1|\mathbf{x})}{p(y=0|\mathbf{x})} = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x} + b$$

$$p(y=1|\mathbf{x}) = \frac{e^{\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x} + b}}{1 + e^{\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x} + b}}$$

$$p(y=0|\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + e^{\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x} + b}}$$

对于输入的 \mathbf{x} ，计算 $\frac{p(y=1|\mathbf{x})}{p(y=0|\mathbf{x})}$ 与设定的阈值比较，大于阈值的为正

类，反之为反类

参数确定：

为了便于表示和计算，令 $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\omega}; b)$, $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}; 1)$, $p_i(\boldsymbol{\beta}) = p(y=i|\hat{\mathbf{x}};\boldsymbol{\beta})$, m 为样本数，利用最大化对数似然估计：

$$l(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^m \ln p(y_i|\hat{\mathbf{x}}_i;\boldsymbol{\beta})$$

等价于最小化：

$$l(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^m (-y_i \boldsymbol{\beta}^T \hat{\mathbf{x}}_i + \ln(1 + e^{\boldsymbol{\beta}^T \hat{\mathbf{x}}_i}))$$

故所要求的参数向量为：

$$\boldsymbol{\beta}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} l(\boldsymbol{\beta})$$

利用梯度下降算法得到最优解：

(1) 取初值 $\boldsymbol{\beta}^{(0)} = [0.1; 0.1; 0.1; 0.1; 0.1]$ ，置 $k=0$ ；

(2) 计算 $l(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) = \sum_{i=1}^m (-y_i \boldsymbol{\beta}^{(k)T} \hat{\mathbf{x}}_i + \ln(1 + e^{\boldsymbol{\beta}^{(k)T} \hat{\mathbf{x}}_i}))$;

(3) 计算梯度 $\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^{(k)})}{\partial \boldsymbol{\beta}^{(k)}} = -\sum_{i=1}^m \hat{\mathbf{x}}_i (y_i - p_i(\hat{\mathbf{x}}_i; \boldsymbol{\beta}^{(k)}))$, 并且一维搜索确定 η_k 得

到 $\min_{\eta_k \geq 0} l(\boldsymbol{\beta}^{(k)} - \eta_k \times (\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^{(k)})}{\partial \boldsymbol{\beta}^{(k)}}))$

(4) $\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(k)} - \eta_k \times (\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^{(k)})}{\partial \boldsymbol{\beta}^{(k)}})$, 并计算 $l(\boldsymbol{\beta}^{(k+1)})$, 当 $\|l(\boldsymbol{\beta}^{(k+1)}) - l(\boldsymbol{\beta}^{(k)})\| < \varepsilon$

时, 令 $\boldsymbol{\beta}^* = \boldsymbol{\beta}^{(k)}$, 停止迭代

(5) 否则置 $k=k+1$, 返回 (2)