Le modèle de Cucker-Smale : Flocking et apprentissage du réseau d'interaction

Adrien Cotil

12/06/2024

UMR MISTEA, INRAE, Institut Agro, 34060 Montpellier, France.
Email adress : adrien.cotil@inrae.fr.

Objectifs de la thèse

1. **Comprendre** l'impact des relations sociales entre les individus sur leurs déplacements en condition d'élevage.

Objectifs de la thèse

1. **Comprendre** l'impact des relations sociales entre les individus sur leurs déplacements en condition d'élevage.

2. **Concevoir** un algorithme de détection précoce de pathologies chez les animaux d'élevage.

Graphes de proximité

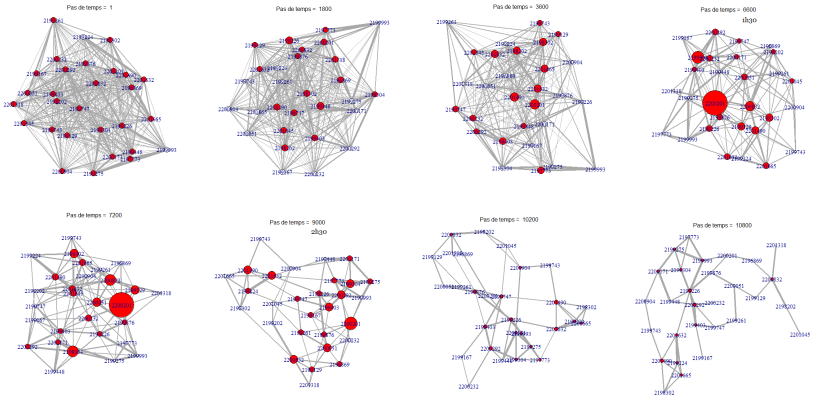


Figure: Temps passé à moins de 2 mètres

Modèle général du déplacement des animaux

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h \times v_i(t),$$

Figure: Tim Whittaker/youtube (https://www.youtube.com/embed/2BSI3aKtvXk)

Figure: Auklet flock, Shumagins 1986 (https://digitalmedia.fws.gov)

Modèle général du déplacement des animaux

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h \times v_i(t),$$

$$v_i(t+h) = v_i(t) + h \times \text{Forces environnementales}$$

Figure: Tim Whittaker/youtube (https://www.youtube.com/embed/2BSI3aKtvXk)

Figure: Auklet flock, Shumagins 1986 (https://digitalmedia.fws.gov)

Modèle général du déplacement des animaux

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h \times v_i(t),$$

$$v_i(t+h) = v_i(t) + h \times \text{Forces environnementales}$$
$$+ h \times \text{Forces sociales}$$

Figure: Tim Whittaker/youtube (https://www.youtube.com/embed/2BSI3aKtvXk)

Figure: Auklet flock, Shumagins 1986 (https://digitalmedia.fws.gov)

Modèle général du déplacement des animaux

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h \times v_i(t),$$

$$\begin{aligned} v_i(t+h) = v_i(t) &+ h \times \text{Forces environnementales} \\ &+ h \times \text{Forces sociales} \\ &+ \sqrt{h} \times \text{Aléatoires.} \end{aligned}$$

Figure: Tim Whittaker/youtube (https://www.youtube.com/embed/2BSI3aKtvXk)

Figure: Auklet flock, Shumagins 1986 (https://digitalmedia.fws.gov)

First Principles of Swarming

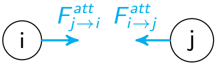
$$x_i(t+h) = x_i(t) + h \times v_i(t), \quad v_i(t+h) = v_i(t) + h \times \sum_j F_{j\to i}(t),$$

First Principles of Swarming

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h \times v_i(t), \quad v_i(t+h) = v_i(t) + h \times \sum_j F_{j\to i}(t),$$

où

$$F_{j\to i}(t) = F^{att}_{j\to i}(t)$$

Attraction à longue distance : 

First Principles of Swarming

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h \times v_i(t), \quad v_i(t+h) = v_i(t) + h \times \sum_j F_{j\to i}(t),$$

où

$$F_{j\to i}(t) = F^{att}_{j\to i}(t) + F^{rep}_{j\to i}(t)$$

Attraction à longue distance : $(i) \xrightarrow{F^{att}_{j\to i}} \quad \xleftarrow{F^{att}_{i\to j}} (j)$

Répulsion à courte distance : $\xleftarrow{F^{rep}_{j\to i}} (i)(j) \xrightarrow{F^{rep}_{i\to j}}$

First Principles of Swarming

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h \times v_i(t), \quad v_i(t+h) = v_i(t) + h \times \sum_j F_{j\to i}(t),$$

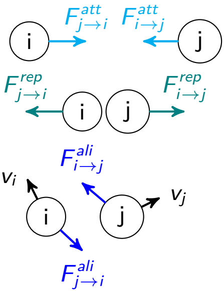
où

$$F_{j\to i}(t) = F^{att}_{j\to i}(t) + F^{rep}_{j\to i}(t) + F^{ali}_{j\to i}(t).$$

Attraction à longue distance :

Répulsion à courte distance :

Alignement des vitesses :



Simulation FPS

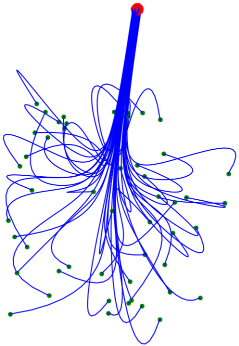


Figure: États initiaux (vert), trajectoires (bleu), états finaux (rouge).

Simulation FPS

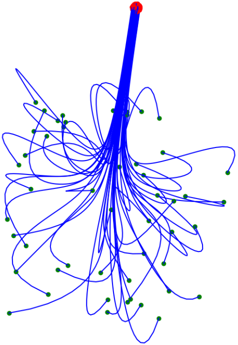


Figure: États initiaux (vert), trajectoires (bleu), états finaux (rouge).

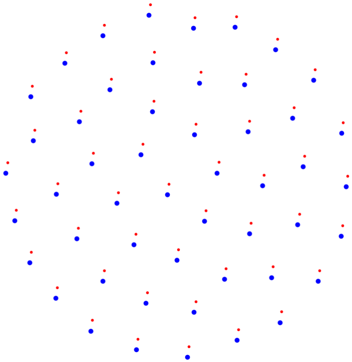


Figure: Focus sur les états finaux ; positions (bleu), vecteurs vitesses (rouge).

Simulation FPS avec composante aléatoire

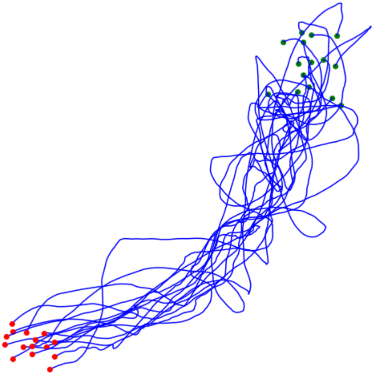


Figure: Initial state (green), trajectories (blue), final state (red).

Modèle de Cucker-Smale

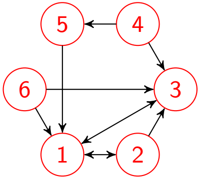
Modèle de Cucker-Smale sur un graphe pondéré :

$$F^{ali}_{j \to i}(t) = A_{ij}\psi(\|x_j(t) - x_i(t)\|_2)(v_j(t) - v_i(t)).$$

Modèle de Cucker-Smale

Modèle de Cucker-Smale sur un graphe pondéré :

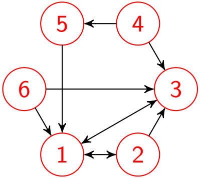
$$F^{ali}_{j\to i}(t) = A_{ij}\psi(\|x_j(t) - x_i(t)\|_2)(v_j(t) - v_i(t)).$$



Modèle de Cucker-Smale

Modèle de Cucker-Smale sur un graphe pondéré :

$$F^{ali}_{j\to i}(t) = A_{ij}\psi(\|x_j(t) - x_i(t)\|_2)(v_j(t) - v_i(t)).$$



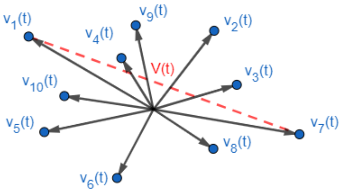
$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Phénomène de Flocking

$$V(t) = \max_{i,j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2$$

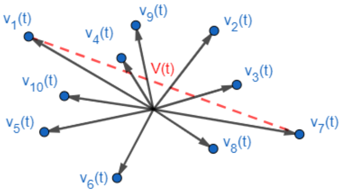
Phénomène de Flocking

$$V(t) = \max_{i,j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2$$



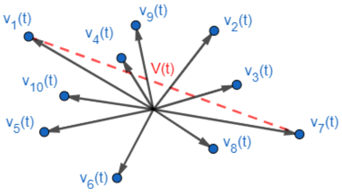
Phénomène de Flocking

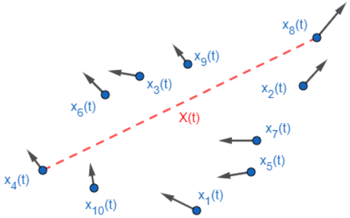
$$V(t) = \max_{i,j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2 \qquad X(t) = \max_{i,j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2$$



Phénomène de Flocking

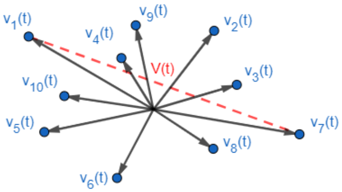
$$V(t) = \max_{i,j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2 \qquad X(t) = \max_{i,j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2$$

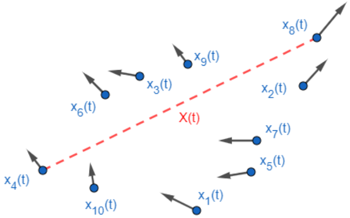




Phénomène de Flocking

$$V(t) = \max_{i,j} \|v_i(t) - v_j(t)\|_2 \qquad X(t) = \max_{i,j} \|x_i(t) - x_j(t)\|_2$$

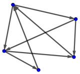




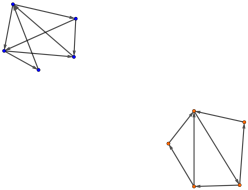
Définition

On dit qu'il y a flocking si $V(t)$ tend vers 0 et $X(t)$ est borné.

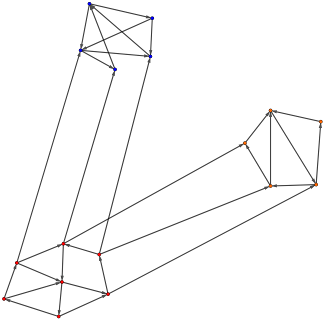
Matrice d'interaction



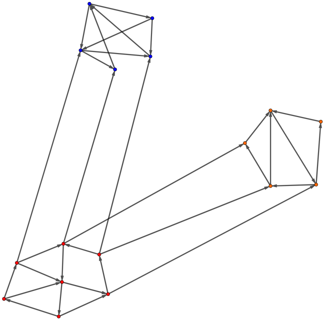
Matrice d'interaction



Matrice d'interaction



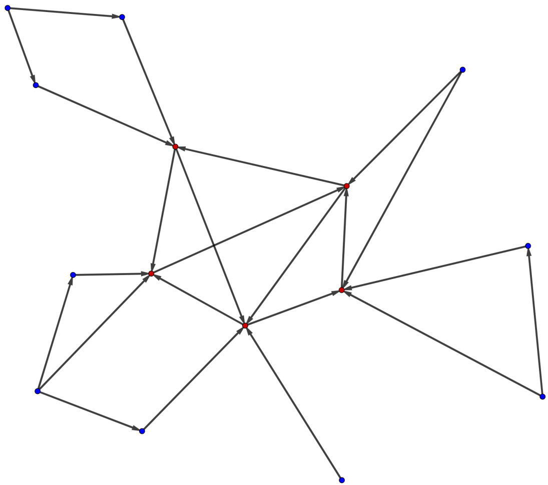
Matrice d'interaction



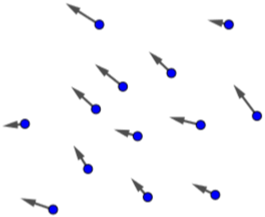
Définition

A est connecté si pour toute paire d'individu (i, j) il existe au moins un individu k tel que $i \to k$ et $j \to k$.

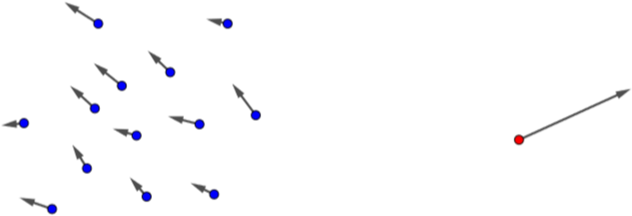
Matrice d'interaction



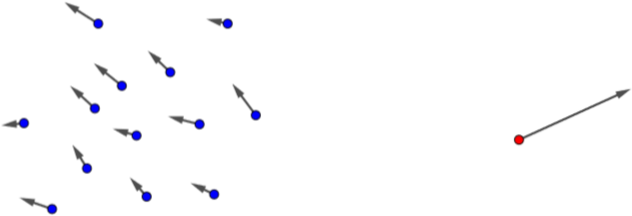
Fonction de communication



Fonction de communication



Fonction de communication



"Il y a flocking si $V(0)$ et $X(0)$ ne sont pas tous les deux grands en même temps"

Condition de Flocking

Théorème

Si A est (fortement) connecté alors il y a flocking si

$$V(0) < C_A \int_{X(0)}^{+\infty} \psi(r)\, dr.$$

Condition de Flocking

Théorème

Si A est (fortement) connecté alors il y a flocking si

$$V(0) < C_A \int_{X(0)}^{+\infty} \psi(r)\, dr.$$

Si $\displaystyle\int^{+\infty} \psi(r)\, dr = +\infty \quad \longrightarrow \quad$ flocking pour toutes cond.ini.

Condition de Flocking

Théorème

Si A est (fortement) connecté alors il y a flocking si

$$V(0) < C_A \int_{X(0)}^{+\infty} \psi(r)\, dr.$$

Si $\int^{+\infty} \psi(r)\, dr = +\infty \quad \longrightarrow \quad$ flocking pour toutes cond.ini.

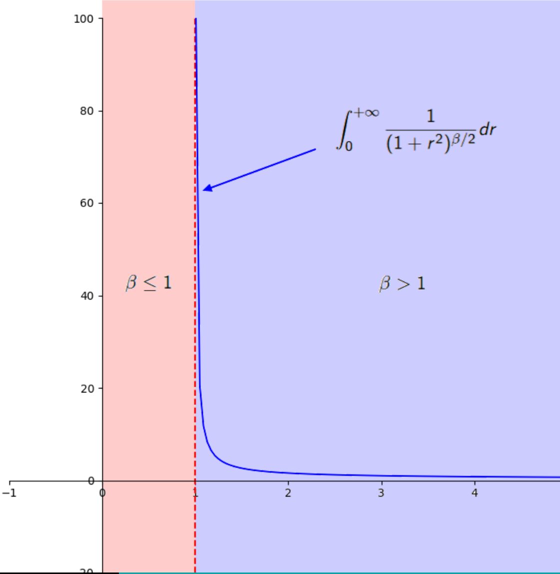
Si $\int^{+\infty} \psi(r)\, dr < +\infty \quad \longrightarrow \quad$ non flocking pour certaines cond.ini.

Transition de phase

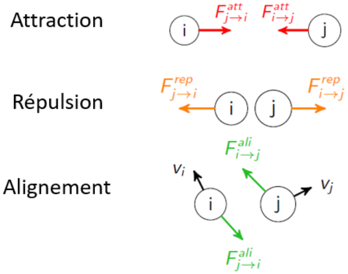
$$\psi(r) = \frac{1}{(1 + r^2)^{\beta/2}}$$

Transition de phase

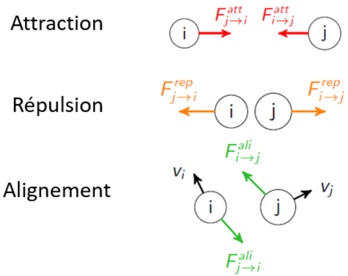
$$\psi(r) = \frac{1}{(1+r^2)^{\beta/2}}$$



Bilan


Attraction
$F^{att}_{j\to i}$
$F^{att}_{i\to j}$
i
j
Répulsion
$F^{rep}_{j\to i}$
$F^{rep}_{i\to j}$
i
j
Alignement
$F^{ali}_{i\to j}$
v_i
v_j
i
j
$F^{ali}_{j\to i}$

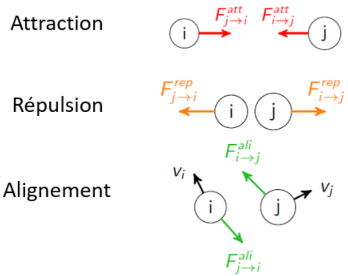
Bilan

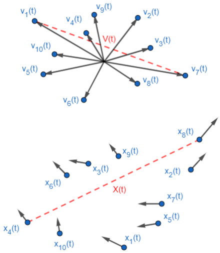


Cucker-Smale

$$F^{ali}_{j\to i}(t) = A_{ij}\psi(\|x_j(t) - x_i(t)\|_2)(v_j(t) - v_i(t)).$$

Bilan

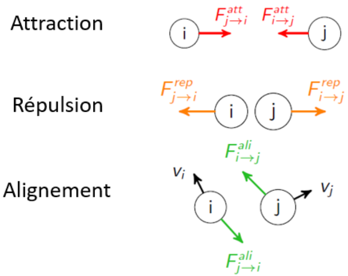


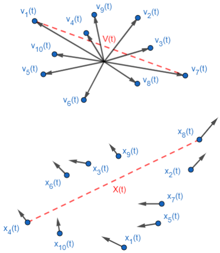


Cucker-Smale

$$F^{ali}_{j\to i}(t) = A_{ij}\psi(\|x_j(t) - x_i(t)\|_2)(v_j(t) - v_i(t)).$$

Bilan





Il y a flocking si:

Cucker-Smale

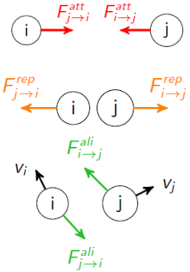
$$F^{ali}_{j\to i}(t) = A_{ij}\psi(\|x_j(t) - x_i(t)\|_2)(v_j(t) - v_i(t)).$$

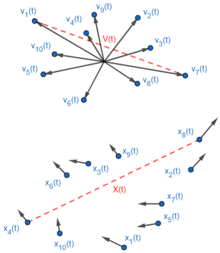
Bilan

Attraction

Répulsion

Alignement





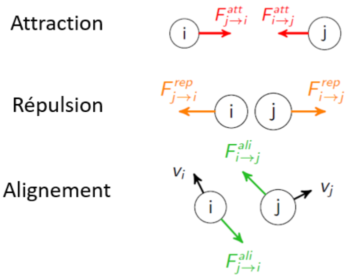
Cucker-Smale

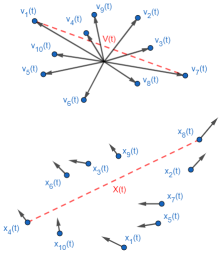
$$F^{ali}_{j\to i}(t) = A_{ij}\psi(\|x_j(t) - x_i(t)\|_2)(v_j(t) - v_i(t)).$$

Il y a flocking si:

- La matrice A est connectée.

Bilan





Cucker-Smale

$$F^{ali}_{j\to i}(t) = A_{ij}\psi(\|x_j(t) - x_i(t)\|_2)(v_j(t) - v_i(t)).$$

Il y a flocking si:

- La matrice A est connectée.
- $X(0)$ et $V(0)$ ne sont pas grands en même temps.

Inférence de la matrice d'intéraction

Modèle de Cucker-Smale stochastique sur un graphe pondéré :

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h \times v_i(t),$$
$$v_i(t+h) = v_i(t) + h \times \sum_{j=1}^{N} A_{ij}(v_j(t) - v_i(t)) + \sqrt{h} \times \text{Aléatoire}.$$

P.Cattiaux, F.Delebecque, L.Pédèches, "Stochastic Cucker-Smale models: old and new.", *The Annals of Applied Probability*.

Inférence de la matrice d'intéraction

Modèle de Cucker-Smale stochastique sur un graphe pondéré :

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h \times v_i(t),$$
$$v_i(t+h) = v_i(t) + h \times \sum_{j=1}^{N} A_{ij}(v_j(t) - v_i(t)) + \sqrt{h} \times \text{Aléatoire}.$$

$\rightarrow$ **Inférence de la matrice A = Régression linéaire.**

P.Cattiaux, F.Delebecque, L.Pédèches, "Stochastic Cucker-Smale models: old and new.", *The Annals of Applied Probability*.

Lacunes théoriques

1. Perte d'information due au flocking.

Lacunes théoriques

1. Perte d'information due au flocking.
2. Problème d'identifiabilité.

Lacunes théoriques

1. Perte d'information due au flocking.
2. Problème d'identifiabilité.
3. Surparamétrisation (N^2 paramètres).

Lacunes théoriques

1. Perte d'information due au flocking.
2. Problème d'identifiabilité.
3. Surparamétrisation (N^2 paramètres).

Hypothèse : Les individus sont organisés en groupes de telle sorte que deux individus d'un même groupe interagissent avec les autres "de la même manière".

Hypothèse des classes sociales

On pose :

Hypothèse des classes sociales

On pose :

- K le nombre de classes.

Hypothèse des classes sociales

On pose :

- K le nombre de classes.
- $z_i \in \{1, \dots, K\}$ la classe de l'individu i.

Hypothèse des classes sociales

On pose :

- K le nombre de classes.
- $z_i \in \{1, \dots, K\}$ la classe de l'individu i.
- B_{kl} la force d'alignement entre un individu de la classe k et un de la classe l.

Hypothèse des classes sociales

On pose :

- K le nombre de classes.
- $z_i \in \{1, \ldots, K\}$ la classe de l'individu i.
- B_{kl} la force d'alignement entre un individu de la classe k et un de la classe l.

On suppose que : $A_{ij} = B_{z_i z_j}$.

Hypothèse des classes sociales

On pose :

- K le nombre de classes.
- $z_i \in \{1, \ldots, K\}$ la classe de l'individu i.
- B_{kl} la force d'alignement entre un individu de la classe k et un de la classe l.

On suppose que : $A_{ij} = B_{z_i z_j}$.

Exemple : followers, leaders, explorateurs.

Hypothèse des classes sociales

On pose :

- K le nombre de classes.
- $z_i \in \{1, \ldots, K\}$ la classe de l'individu i.
- B_{kl} la force d'alignement entre un individu de la classe k et un de la classe l.

On suppose que : $A_{ij} = B_{z_i z_j}$.

Exemple : followers, leaders, explorateurs.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hypothèse des classes sociales

On pose :

- K le nombre de classes.
- $z_i \in \{1, \ldots, K\}$ la classe de l'individu i.
- B_{kl} la force d'alignement entre un individu de la classe k et un de la classe l.

On suppose que : $A_{ij} = B_{z_i z_j}$.

Exemple : followers, leaders, explorateurs.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Idée de l'algorithme

- Classes des individus connues $\rightarrow$ Calcul de B facile (régression linéaire).

Idée de l'algorithme

- Classes des individus connues $\rightarrow$ Calcul de B facile (régression linéaire).
- B connue $\rightarrow$ Calcul des classes des individus facile.

Idée de l'algorithme

- Classes des individus connues $\rightarrow$ Calcul de B facile (régression linéaire).
- B connue $\rightarrow$ Calcul des classes des individus facile.

Algorithm Kmeans-CSBM

Idée de l'algorithme

- Classes des individus connues $\rightarrow$ Calcul de B facile (régression linéaire).
- B connue $\rightarrow$ Calcul des classes des individus facile.

Algorithm Kmeans-CSBM

Require: Labellisation initiale $z^{(0)}$.

Idée de l'algorithme

- Classes des individus connues $\rightarrow$ Calcul de B facile (régression linéaire).
- B connue $\rightarrow$ Calcul des classes des individus facile.

Algorithm Kmeans-CSBM

Require: Labellisation initiale $z^{(0)}$.
  while $z^{(n)} \neq z^{(n-1)}$ **do**

Idée de l'algorithme

- Classes des individus connues $\rightarrow$ Calcul de B facile (régression linéaire).
- B connue $\rightarrow$ Calcul des classes des individus facile.

Algorithm Kmeans-CSBM

Require: Labellisation initiale $z^{(0)}$.

while $z^{(n)} \neq z^{(n-1)}$ **do**

1. Calcul de $B^{(n)}$ en fonction de $z^{(n)}$.

Idée de l'algorithme

- Classes des individus connues $\rightarrow$ Calcul de B facile (régression linéaire).
- B connue $\rightarrow$ Calcul des classes des individus facile.

Algorithm Kmeans-CSBM

Require: Labellisation initiale $z^{(0)}$.
while $z^{(n)} \neq z^{(n-1)}$ **do**
1. Calcul de $B^{(n)}$ en fonction de $z^{(n)}$.
2. Calcul de $z^{(n+1)}$ en fonction de $B^{(n)}$.

Idée de l'algorithme

- Classes des individus connues $\rightarrow$ Calcul de B facile (régression linéaire).
- B connue $\rightarrow$ Calcul des classes des individus facile.

Algorithm Kmeans-CSBM

Require: Labellisation initiale $z^{(0)}$.
while $z^{(n)} \neq z^{(n-1)}$ **do**
1. Calcul de $B^{(n)}$ en fonction de $z^{(n)}$.
2. Calcul de $z^{(n+1)}$ en fonction de $B^{(n)}$.

end while

Idée de l'algorithme

- Classes des individus connues $\rightarrow$ Calcul de B facile (régression linéaire).
- B connue $\rightarrow$ Calcul des classes des individus facile.

Algorithm Kmeans-CSBM

Require: Labellisation initiale $z^{(0)}$.
while $z^{(n)} \neq z^{(n-1)}$ **do**
1. Calcul de $B^{(n)}$ en fonction de $z^{(n)}$.
2. Calcul de $z^{(n+1)}$ en fonction de $B^{(n)}$.

end while
return la labellisation z et la matrice B.