Optimisation des paiements de dividendes avec injections obligatoires dans le modèle brownien

Tommy Mastromonaco

Séminaire étudiant d'actuariat et de statistique

Juin 2025

Introduction

Mise en contexte

En fonction de son surplus de capital, une firme peut :

- verser des dividendes aux actionnaires quand son surplus est *élevé* ;
- demander aux actionnaires d'injecter du capital quand son surplus est *faible*.

Mise en contexte

En fonction de son surplus de capital, une firme peut :

- verser des dividendes aux actionnaires quand son surplus est *élevé* ;
- demander aux actionnaires d'injecter du capital quand son surplus est *faible*.

Pour satisfaire les actionnaires, elle a intérêt à verser beaucoup et injecter peu. Il y a toutefois un **équilibre** à atteindre entre les versements et les injections.

Mise en contexte

En fonction de son surplus de capital, une firme peut :

- verser des dividendes aux actionnaires quand son surplus est *élevé* ;
- demander aux actionnaires d'injecter du capital quand son surplus est *faible*.

Pour satisfaire les actionnaires, elle a intérêt à verser beaucoup et injecter peu. Il y a toutefois un **équilibre** à atteindre entre les versements et les injections.

Cette situation motive l'étude de problèmes de **contrôle stochastique**, dans lesquels on *optimise* les paiements de dividendes, déduits du coût d'injections obligatoires, de façon à *maximiser* une **fonction de performance** mesurant la satisfaction des actionnaires.

Les constituants du problème

Je présente ici un problème de ce genre ainsi que les étapes menant à sa résolution.

Les constituants du problème

Je présente ici un problème de ce genre ainsi que les étapes menant à sa résolution.

Les divers problèmes se distinguent essentiellement par :

Les constituants du problème

Je présente ici un problème de ce genre ainsi que les étapes menant à sa résolution.

Les divers problèmes se distinguent essentiellement par :

- le processus modélisant le *surplus non contrôlé* (X_t) ;

Les constituants du problème

Je présente ici un problème de ce genre ainsi que les étapes menant à sa résolution.

Les divers problèmes se distinguent essentiellement par :

- le processus modélisant le *surplus non contrôlé* (X_t) ;
- l'ensemble des *stratégies admissibles* pour les paiements de dividendes $(\mathcal{U}_{K,S})$;

Les constituants du problème

Je présente ici un problème de ce genre ainsi que les étapes menant à sa résolution.

Les divers problèmes se distinguent essentiellement par :

- le processus modélisant le *surplus non contrôlé* (X_t) ;
- l'ensemble des *stratégies admissibles* pour les paiements de dividendes $(\mathcal{U}_{K,S})$;
- la fonction de performance (V_u), quoiqu'il y a souvent un "choix naturel" ;

Les constituants du problème

Je présente ici un problème de ce genre ainsi que les étapes menant à sa résolution.

Les divers problèmes se distinguent essentiellement par :

- le processus modélisant le *surplus non contrôlé* (X_t) ;
- l'ensemble des *stratégies admissibles* pour les paiements de dividendes $(\mathcal{U}_{K,S})$;
- la fonction de performance (V_u), quoiqu'il y a souvent un "choix naturel" ;
- le type d'injections obligatoires (réflexion en 0) ;

Les constituants du problème

Je présente ici un problème de ce genre ainsi que les étapes menant à sa résolution.

Les divers problèmes se distinguent essentiellement par :

- le processus modélisant le *surplus non contrôlé* (X_t) ;
- l'ensemble des *stratégies admissibles* pour les paiements de dividendes $(\mathcal{U}_{K,S})$;
- la fonction de performance (V_u), quoiqu'il y a souvent un "choix naturel" ;
- le type d'injections obligatoires (réflexion en 0) ;
- le type de ruine, si applicable ;

Les constituants du problème

Je présente ici un problème de ce genre ainsi que les étapes menant à sa résolution.

Les divers problèmes se distinguent essentiellement par :

- le processus modélisant le *surplus non contrôlé* (X_t) ;
- l'ensemble des *stratégies admissibles* pour les paiements de dividendes $(\mathcal{U}_{K,S})$;
- la fonction de performance (V_u), quoiqu'il y a souvent un "choix naturel" ;
- le type d'injections obligatoires (réflexion en 0) ;
- le type de ruine, si applicable ;
- d'autres mécanismes financiers comme de la réassurance, des coûts de transaction, etc.

Contenu de l'exposé

Présentation du problème

Surplus non contrôlé

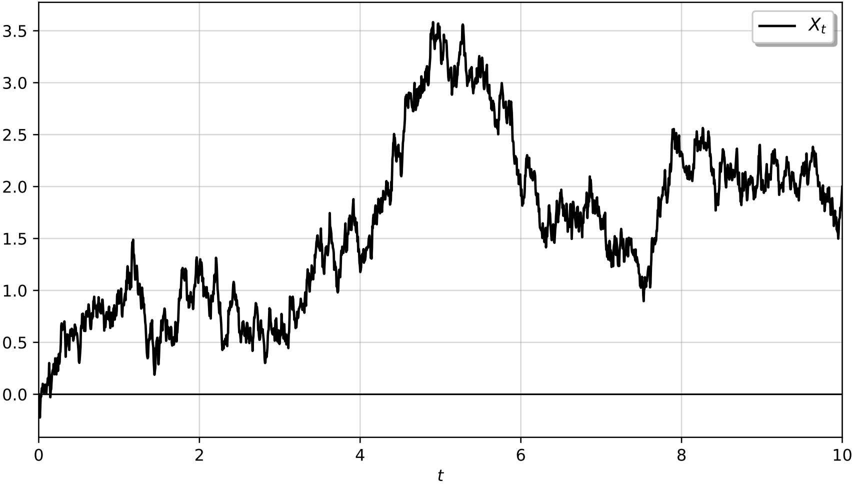
On se place sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ où $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard.

Le *surplus non contrôlé* $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ est le mouvement brownien arithmétique

$$\mathrm{d}X_t = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t$$

avec $\mu, \sigma > 0$ fixés.

Surplus non contrôlé



Processus de dividendes

On modélise les versements de dividendes **cumulatifs** par un processus $L = (L_t)_{t \geqslant 0}$ qui est donc **croissant**.

Processus de dividendes

On modélise les versements de dividendes **cumulatifs** par un processus $L = (L_t)_{t \geqslant 0}$ qui est donc **croissant**.

On ajoute la restriction que L soit **absolument continu** [Alb09], donc qu'il admette un processus positif et borné $\ell = (\ell_t)_{t \geqslant 0}$ tel que

$$L_t = \int_0^t \ell_s \mathrm{d}s, \quad t \geqslant 0.$$

Le processus ℓ représente le **taux instantané** de versements de dividendes.

Processus de dividendes

On modélise les versements de dividendes **cumulatifs** par un processus $L = (L_t)_{t \geqslant 0}$ qui est donc **croissant**.

On ajoute la restriction que L soit **absolument continu** [Alb09], donc qu'il admette un processus positif et borné $\ell = (\ell_t)_{t \geqslant 0}$ tel que

$$L_t = \int_0^t \ell_s \mathrm{d}s, \quad t \geqslant 0.$$

Le processus ℓ représente le **taux instantané** de versements de dividendes.

On voudrait que le **taux** ℓ soit fonction du surplus contrôlé...

Stratégies admissibles et surplus contrôlé

...donc le processus de dividendes $L^u = (L_t^u)_{t \geqslant 0}$ est donné par

$$L_t^u = \int_0^t u(X_s^u)\mathrm{d}s, \quad t \geqslant 0,$$

avec $X^u = (X_t^u)_{t \geqslant 0}$ étant le processus du surplus contrôlé

$$X_t^u = X_t - L_t^u + G_t^u.$$

Stratégies admissibles et surplus contrôlé

...donc le processus de dividendes $L^u = (L^u_t)_{t \geqslant 0}$ est donné par

$$L^u_t = \int_0^t u(X^u_s)\mathrm{d}s, \quad t \geqslant 0,$$

avec $X^u = (X^u_t)_{t \geqslant 0}$ étant le processus du surplus contrôlé

$$X^u_t = X_t - L^u_t + G^u_t.$$

Ici, $u \in \mathcal{U}_{K,S}$, où $\mathcal{U}_{K,S}$ est l'ensemble des **stratégies admissibles**, pour $K, S > 0$ fixés, caractérisé par l'ensemble de *fonctions* suivant :

$$\mathcal{U}_{K,S} = \{u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid 0 \leqslant u(x) \leqslant Kx + S \text{ pour tout } x \geqslant 0\}.$$

Problème de Skorokhod

Plus exactement, le processus X^u est solution du problème de Skorokhod [Pil14]

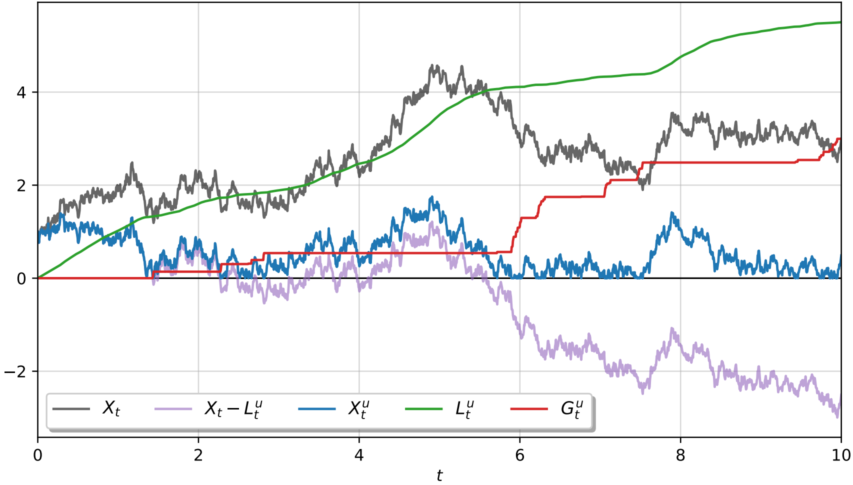
$$\mathrm{d}X_t^u = (\mu - u(X_t^u))\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t + \mathrm{d}G_t^u, \quad X_0^u = x, \quad G_0^u = 0,$$

où :

- $X_t^u \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$;
- G^u est croissant ;
- $\int_0^t \mathbb{1}_{X_s^u > 0} \mathrm{d}G_s^u = 0$ pour tout $t \geqslant 0$.

Le processus des injections G^u fait **réfléchir** X^u vers les positifs lorsque $X_t^u = 0$.

Exemple avec la fonction identité



Fonction de performance

Définition : Fonction de performance

Pour $u \in \mathcal{U}_{K,S}$, la **fonction de performance** de la stratégie u est donnée par

$$V_u(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt} u(X_t^u)\mathrm{d}t - \beta \int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}\mathrm{d}G_t^u\right], \quad x \geqslant 0,$$

où $\mathbb{E}_x$ est l'espérance avec $X_0^u = x$, et :

- $q > 0$ est un taux d'intérêt continu ;
- $\beta > 1$ est le coût proportionnel des injections de capital.

Objectif d'optimisation

Trouver une stratégie $u^* \in \mathcal{U}_{K,S}$ telle que $\forall u \in \mathcal{U}_{K,S}$,

$$V_{u^*}(x) \geqslant V_u(x), \quad x \geqslant 0,$$

ainsi que la forme explicite de la fonction de performance optimale associée à la stratégie optimale u^* (appelée *fonction valeur*)

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}_{K,S}} V_u(x), \quad x \geqslant 0.$$

Résumé du problème

Pour $u \in \mathcal{U}_{K,S} = \{u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid 0 \leqslant u(x) \leqslant Kx + S \text{ pour tout } x \geqslant 0\}$, le surplus contrôlé et la fonction de performance sont donnés respectivement par

$$\mathrm{d}X_t^u = (\mu - u(X_t^u))\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t + \mathrm{d}G_t^u, \quad X_0^u = x, \quad G_0^u = 0,$$

$$V_u(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt} u(X_t^u)\mathrm{d}t - \beta \int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}\mathrm{d}G_t^u\right], \quad x \geqslant 0.$$

L'objectif est de trouver :

- la fonction valeur $V(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}_{K,S}} V_u(x)$, $x \geqslant 0$;
- une stratégie optimale $u^* \in \mathcal{U}_{K,S}$ telle que $V_{u^*}(x) = V(x)$, $x \geqslant 0$.

Stratégies linéaires

Équation HJB

L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) du problème [Pér18] est, $\forall x \geqslant 0$,

$$\max\left\{\frac{\sigma^2}{2}\hat{V}''(x) + \mu\hat{V}'(x) - q\hat{V}(x) + \max_{0\leqslant v\leqslant Kx+S}\left[v\left(1-\hat{V}'(x)\right)\right],\ \hat{V}'(x)-\beta\right\} = 0,$$

dont on s'attend qu'une solution soit la fonction valeur V. On peut *construire* une **stratégie candidate** $\hat{u} \in \mathcal{U}_{K,S}$ en posant

$$\begin{aligned}\hat{u}(x) &= \operatorname*{argmax}_{0\leqslant v\leqslant Kx+S}\left[v\left(1-\hat{V}'(x)\right)\right] \text{ pour chaque } x \geqslant 0\\ &= \begin{cases} 0, & \hat{V}'(x) > 1,\\ Kx+S, & \hat{V}'(x) \leqslant 1.\end{cases}\end{aligned}$$

Stratégies linéaires

On s'attend à ce que V soit **croissante** et **concave**, donc

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} 0, & x < b, \\ Kx + S, & x \geqslant b. \end{cases}$$

Stratégies linéaires

On s'attend à ce que V soit **croissante** et **concave**, donc

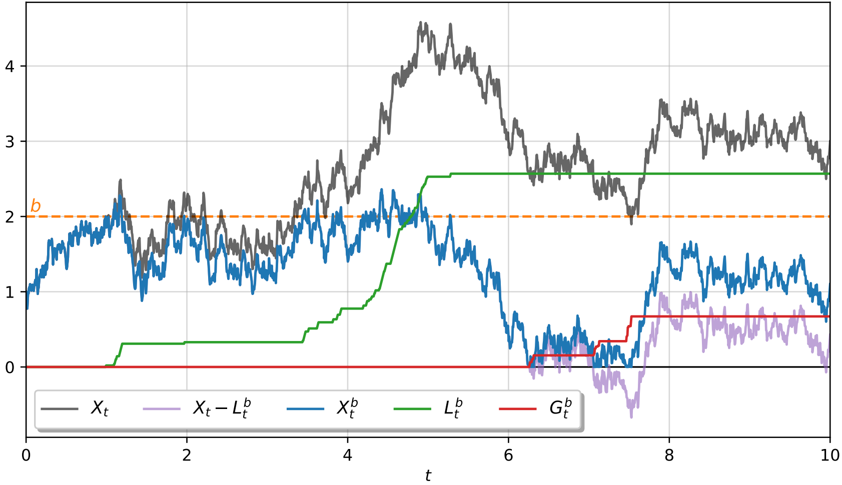
$$\hat{u}(x) = \begin{cases} 0, & x < b, \\ Kx + S, & x \geqslant b. \end{cases}$$

À partir d'ici, nous considérons l'ensemble des **stratégies linéaires**

$$\{u_b(x) = (Kx + S)\mathbb{1}_{x \geqslant b} \mid b > 0\} \subseteq \mathcal{U}_{K,S}, \text{ et}$$

$$\mathrm{d}X_t^b = \left(\mu - \left(KX_t^b + S\right)\mathbb{1}_{X_t^b \geqslant b}\right)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t + \mathrm{d}G_t^b, \quad X_0^b = x, \quad G_0^b = 0.$$

Exemple de processus



Résolution du problème

1. Calculer explicitement la fonction de performance V_b d'une stratégie linéaire de seuil $b > 0$

$$V_b(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt} \left(K X_t^b + S \right) \mathbb{1}_{X_t^b \geqslant b} \mathrm{d}t - \beta \int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt} \mathrm{d}G_t^b \right], \quad x \geqslant 0;$$

Résolution du problème

1. Calculer explicitement la fonction de performance V_b d'une stratégie linéaire de seuil $b > 0$

$$V_b(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}\left(KX_t^b + S\right)\mathbb{1}_{X_t^b \geqslant b}\mathrm{d}t - \beta\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}\mathrm{d}G_t^b\right], \quad x \geqslant 0;$$

2. Prouver l'existence d'un $b^* > 0$ tel que V_{b^*} est $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ dans le but d'appliquer la *Formule d'Itô* lors de la vérification ;

Résolution du problème

1. Calculer explicitement la fonction de performance V_b d'une stratégie linéaire de seuil $b > 0$

$$V_b(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt} \left(K X_t^b + S \right) \mathbb{1}_{X_t^b \geqslant b} \mathrm{d}t - \beta \int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt} \mathrm{d}G_t^b \right], \quad x \geqslant 0;$$

2. Prouver l'existence d'un $b^* > 0$ tel que V_{b^*} est $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ dans le but d'appliquer la *Formule d'Itô* lors de la vérification ;

3. Vérifier que le candidat V_{b^*} est bien optimal parmi toutes les stratégies admissibles.

Fonction de performance d'une stratégie linéaire

Transformées de Laplace

Soit, pour un processus quelconque $A = (A_t)_{t \geqslant 0}$, le *temps d'arrêt*

$$\tau_b^A = \inf\{t \geqslant 0 \mid A_t = b\}, \quad b \in \mathbb{R}, \text{ et}$$

$$\mathrm{d}X_t = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t, \qquad \mathrm{d}Y_t = (\mu - S - KY_t)\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t.$$

Transformées de Laplace

Soit, pour un processus quelconque $A = (A_t)_{t \geqslant 0}$, le *temps d'arrêt*

$$\tau_b^A = \inf\{t \geqslant 0 \mid A_t = b\}, \quad b \in \mathbb{R}, \text{ et}$$

$$\mathrm{d}X_t = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t, \qquad \mathrm{d}Y_t = (\mu - S - KY_t)\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t.$$

On s'intéresse aux **transformées de Laplace** suivantes :

$$\begin{cases} \varphi_b(x) = \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\tau_b^X} \mathbb{1}_{\tau_b^X < \tau_0^X}\right], & 0 \leqslant x \leqslant b, \\ \psi_b(x) = \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\tau_0^X} \mathbb{1}_{\tau_0^X < \tau_b^X}\right], & 0 \leqslant x \leqslant b, \\ \Psi_b(x) = \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\tau_b^Y} \mathbb{1}_{\tau_b^Y < \infty}\right], & b \leqslant x. \end{cases}$$

Solutions d'EDOs

Ces transformées sont solutions d'équations différentielles ordinaires [Bor02].

Plus exactement, $\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\tau_b^X}\mathbb{1}_{\tau_b^X<\tau_0^X}\right]$ et $\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\tau_0^X}\mathbb{1}_{\tau_0^X<\tau_b^X}\right]$ sont solutions de

$$\frac{\sigma^2}{2}f''(x)+\mu f'(x)-qf(x)=0,$$

et $\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\tau_b^Y}\mathbb{1}_{\tau_b^Y<\infty}\right]$ est solution de

$$\frac{\sigma^2}{2}f''(x)+(\mu-(Kx+S))f'(x)-qf(x)=0.$$

Propriété forte de Markov

Les différents processus introduits jusqu'ici sont **markoviens**.

Théorème : Propriété forte de Markov

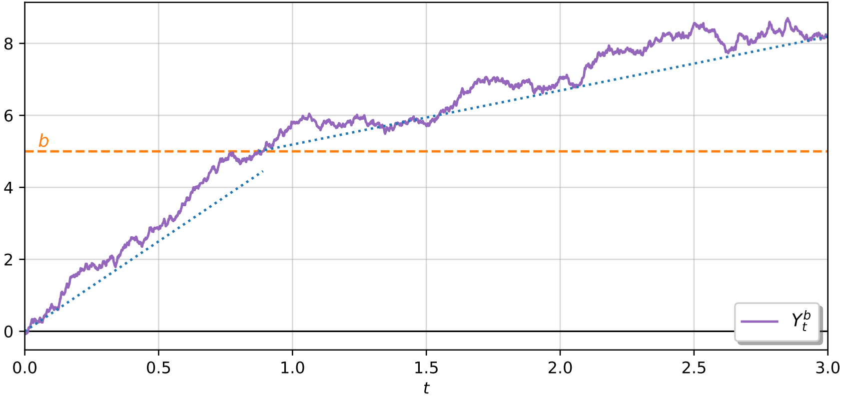
Un processus en temps continu $(A_t)_{t\geqslant 0}$ à d dimensions satisfait la **Propriété forte de Markov** si, pour un temps d'arrêt τ et une fonctionnelle $\Upsilon : \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\tau<\infty}\Upsilon\left((A_{\tau+t})_{t\geqslant 0}\right) \mid \mathcal{F}_\tau\right] = \mathbb{1}_{\tau<\infty}\mathbb{E}_{A_\tau}\left[\Upsilon\left((A_t)_{t\geqslant 0}\right)\right], \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

où $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}^d$ [LeG13].

Processus réfracté

$$\mathrm{d}Y_t^b = \left(\mu - (KY_t^b + S)\mathbb{1}_{Y_t^b \geqslant b}\right)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t.$$



Une nouvelle transformée

On s'intéresse à la transformée de Laplace

$$\Phi_b(x) = \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\tau_0^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b}<\infty}\right], \quad x \geqslant 0,$$

qui est donnée par

$$\Phi_b(x) = \begin{cases} \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\tau_0^X} \mathbb{1}_{\tau_0^X<\tau_b^X}\right] + \Phi_b(b)\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\tau_b^X} \mathbb{1}_{\tau_b^X<\tau_0^X}\right], & x < b, \\ \Phi_b(b)\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\tau_b^Y} \mathbb{1}_{\tau_b^Y<\infty}\right], & x \geqslant b. \end{cases}$$

Fonction de performance sans injections

La fonction de performance d'une stratégie linéaire de seuil $b > 0$ dans le problème **sans injections de capital** [Rao23] est

$$J_b(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_0^{Y^b}} \mathrm{e}^{-qt} (K Y_t^b + S) \mathbb{1}_{Y_t^b \geqslant b} \mathrm{d}t \right], \quad x \geqslant 0,$$

et elle est donnée par

$$J_b(x) = \begin{cases} J_b(b) \mathbb{E}_x \left[\mathrm{e}^{-q\tau_b^X} \mathbb{1}_{\tau_b^X < \tau_0^X} \right], & x < b, \\ \frac{K}{q+K}\left(x + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \left[J_b(b) - \frac{K}{q+K}\left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \mathbb{E}_x \left[\mathrm{e}^{-q\tau_b^Y} \mathbb{1}_{\tau_b^Y < \infty} \right], & x \geqslant b. \end{cases}$$

Fonction de performance d'une stratégie linéaire

On rappelle que la fonction de performance d'une stratégie linéaire de seuil $b > 0$ est définie comme étant

$$V_b(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}\left(KX_t^b + S\right)\mathbb{1}_{X_t^b \geqslant b}\mathrm{d}t - \beta\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}\mathrm{d}G_t^b\right], \quad x \geqslant 0.$$

Elle est donnée, pour $x \geqslant 0$, par

$$\begin{aligned} V_b(x) &= \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_0^{Y^b}} \mathrm{e}^{-qt}(KY_t^b + S)\mathbb{1}_{Y_t^b \geqslant b}\mathrm{d}t\right] + V_b(0)\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\tau_0^{Y^b}}\mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b}<\infty}\right] \\ &= J_b(x) + V_b(0)\Phi_b(x). \end{aligned}$$

Fonction de performance d'une stratégie linéaire

$$V_b(x) = \begin{cases} V_b(b)\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\tau_b^X}\mathbb{1}_{\tau_b^X<\tau_0^X}\right] + V_b(0)\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\tau_0^X}\mathbb{1}_{\tau_0^X<\tau_b^X}\right], & x < b, \\ \frac{K}{q+K}\left(x+\frac{\mu}{q}+\frac{S}{K}\right) + \left[V_b(b) - \frac{K}{q+K}\left(b+\frac{\mu}{q}+\frac{S}{K}\right)\right]\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-q\tau_b^Y}\mathbb{1}_{\tau_b^Y<\infty}\right], & x \geqslant b. \end{cases}$$

Proposition

Pour tout $b > 0$, la dérivée de V_b est telle que

$$V_b'(x) \geqslant 0, \quad x \geqslant 0$$

et en particulier,

$$V_b'(0) = \beta.$$

Continuité de la dérivée seconde

Critère de continuité

Dans le but d'appliquer la *Formule d'Itô*, on veut montrer qu'il existe un $b^* > 0$ tel que $V_{b^*} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$.

Les fonctions J_b et Φ_b sont $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, donc $V_b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ pour tout $b > 0$. De plus, V_b'' est continue pour tout $x \neq b$. Il faut donc que $V_{b^*}''(b^*+) = V_{b^*}''(b^*-)$.

Critère de continuité

Dans le but d'appliquer la *Formule d'Itô*, on veut montrer qu'il existe un $b^* > 0$ tel que $V_{b^*} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$.

Les fonctions J_b et Φ_b sont $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, donc $V_b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ pour tout $b > 0$. De plus, V_b'' est continue pour tout $x \neq b$. Il faut donc que $V_{b^*}''(b^*+) = V_{b^*}''(b^*-)$.

On a l'équivalence suivante, commune à beaucoup de problèmes de ce type [Ava09].

Théorème

Soit $b > 0$, alors $V_b''(b+) = V_b''(b-)$ si et seulement si $V_b'(b) = 1$.

Une équation à résoudre

Cela nous aide à construire une équation de la forme

$$g(b) = 0.$$

Ici, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$g(b) = \frac{K}{q+K}\left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K}\right) + \frac{q}{q+K}\frac{1}{\Psi_b'(b)} - \frac{1 - V_b(0)\psi_b'(b)}{\varphi_b'(b)}.$$

Comme g est continue sur $(0,\infty)$, on souhaite appliquer le Théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'il existe un $b^* > 0$ tel que $g(b^*) = 0$.

Existence du seuil optimal

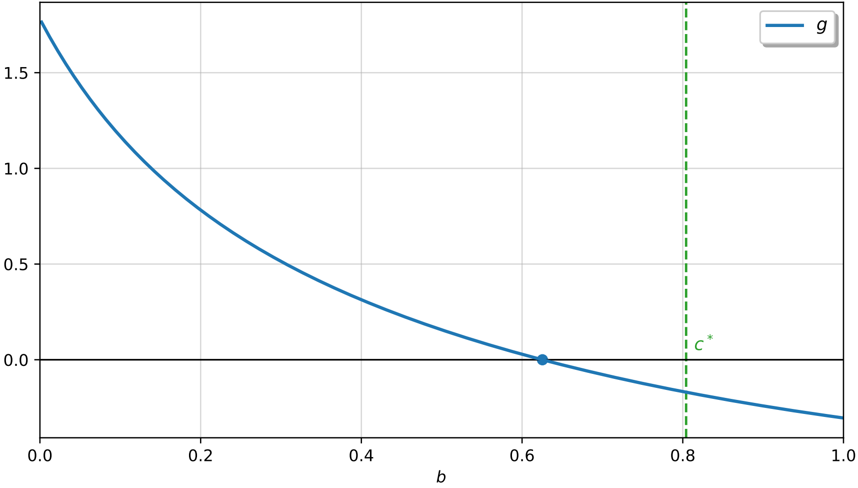
Proposition

Soit $c^* > 0$ la barrière optimale du problème limite [Løk08], s'obtenant en faisant tendre K ou S vers l'infini, alors la fonction g est telle que

$$g(c^*) < 0 < g(0+) = -\frac{\beta - 1}{\Psi_0'(0)}.$$

Donc, il existe un $b^* \in (0, c^*)$ par la continuité de g et le Théorème des valeurs intermédiaires.

Existence du seuil optimal



Vérification de l'optimalité

Propriétés de cette fonction

Proposition : Concavité

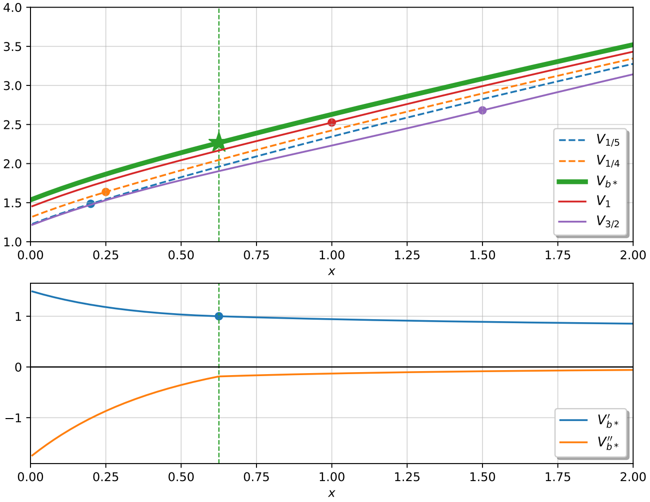
La fonction de performance V_{b^*} est strictement concave. Autrement dit, $V''_{b^*}(x) < 0$ pour tout $x \geqslant 0$.

Corollaire

La dérivée de V_{b^*} satisfait

$$\begin{cases} V'_{b^*}(x) > 1, & x < b^*, \\ V'_{b^*}(x) \leqslant 1, & x \geqslant b^*. \end{cases}$$

Exemple de fonction valeur



Équation HJB

Lemme : Équation HJB

La fonction de performance V_{b^*} satisfait, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\frac{\sigma^2}{2} V''_{b^*}(x) + \mu V'_{b^*}(x) - q V_{b^*}(x) + \max_{0 \leqslant v \leqslant Kx+S} \left[v \left(1 - V'_{b^*}(x) \right) \right] = 0,$$

$$V'_{b^*}(x) - \beta \leqslant 0.$$

Autrement dit, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\max \left\{ \frac{\sigma^2}{2} V''_{b^*}(x) + \mu V'_{b^*}(x) - q V_{b^*}(x) + \max_{0 \leqslant v \leqslant Kx+S} \left[v \left(1 - V'_{b^*}(x) \right) \right],\ V'_{b^*}(x) - \beta \right\} = 0.$$

Vérification

Théorème : Vérification

Pour tout $x \geqslant 0$ et pour toute stratégie $u \in \mathcal{U}_{K,S}$, on a $V_{b^*}(x) \geqslant V_u(x)$.

Éléments de preuve. On applique la *Formule d'Itô* à $\mathrm{e}^{-qt} V_{b^*}(X_t^u) \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+^2)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-qt} V_{b^*}(X_t^u) = V_{b^*}(X_0^u) &+ \int_0^t \mathrm{e}^{-qs} V_{b^*}'(X_s^u) \mathrm{d}G_s^u + \int_0^t \sigma \mathrm{e}^{-qs} V_{b^*}'(X_s^u) \mathrm{d}B_s \\ &+ \int_0^t \mathrm{e}^{-qs} \left(\frac{\sigma^2}{2} V_{b^*}''(X_s^u) + \mu V_{b^*}'(X_s^u) - q V_{b^*}(X_s^u) - u(X_s^u) V_{b^*}'(X_s^u) \right) \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Vérification

On fait apparaître $\int_0^t \mathrm{e}^{-qs} u(X_s^u)\mathrm{d}s$ et $-\beta \int_0^t \mathrm{e}^{-qs}\mathrm{d}G_s^u$:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-qt} V_{b^*}(X_t^u) \\
&\quad = V_{b^*}(X_0^u) - \int_0^t \mathrm{e}^{-qs}\left(u(X_s^u)\mathrm{d}s - \beta \mathrm{d}G_s^u\right) + \int_0^t \sigma \mathrm{e}^{-qs} V_{b^*}'(X_s^u)\mathrm{d}B_s \\
&\qquad + \int_0^t \mathrm{e}^{-qs}\left(\frac{\sigma^2}{2} V_{b^*}''(X_s^u) + \mu V_{b^*}'(X_s^u) - qV_{b^*}(X_s^u) + u(X_s^u)\left(1 - V_{b^*}'(X_s^u)\right)\right)\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_0^t \mathrm{e}^{-qs}\left(V_{b^*}'(X_s^u) - \beta\right)\mathrm{d}G_s^u.
\end{aligned}
$$

Vérification

On applique l'équation HJB, on prend l'espérance avec $X_0^u = x$, puis la limite :

$$\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-qt}V_{b^*}(X_t^u)\right] \leqslant \mathbb{E}_x\left[V_{b^*}(X_0^u)\right] - \mathbb{E}_x\left[\int_0^t \mathrm{e}^{-qs}\big(u(X_s^u)\mathrm{d}s - \beta \mathrm{d}G_s^u\big)\right] + \mathbb{E}_x\left[\int_0^t \sigma \mathrm{e}^{-qs}V_{b^*}'(X_s^u)\mathrm{d}B_s\right]$$

$$\Longrightarrow V_{b^*}(x) \geqslant \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-qt}V_{b^*}(X_t^u)\right] + \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[\int_0^t \mathrm{e}^{-qs}\big(u(X_s^u)\mathrm{d}s - \beta \mathrm{d}G_s^u\big)\right] \geqslant \mathbb{E}_x\left[\lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-qs}\big(u(X_s^u)\mathrm{d}s - \beta \mathrm{d}G_s^u\big)\right] = V_u(x).$$

Solution du problème

Théorème : Solution

Soit $b^* \in (0, c^*)$ tel que $g(b^*) = 0$. La stratégie linéaire $u_{b^*} \in \mathcal{U}_{K,S}$ telle que $u_{b^*}(x) = (Kx + S)\mathbb{1}_{x \geqslant b^*}$ est optimale, et la fonction valeur V est donnée par

$$V(x) = J_{b^*}(x) + \left(1 - J'_{b^*}(b^*)\right) \frac{\Phi_{b^*}(x)}{\Phi'_{b^*}(b^*)}, \quad x \geqslant 0,$$

ou de manière équivalente par

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\varphi_b(x)\left(\psi'_{b^*}(0) - \beta\psi'_{b^*}(b^*)\right) + \psi_b(x)\left(\beta\varphi'_{b^*}(b^*) - \varphi'_{b^*}(0)\right)}{\psi'_{b^*}(0)\varphi'_{b^*}(b^*) - \psi'_{b^*}(b^*)\varphi'_{b^*}(0)}, & 0 \leqslant x < b^*, \\ \frac{K}{q+K}\left(x + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K}\right) + \frac{q}{q+K}\frac{\Psi_{b^*}(x)}{\Psi'_{b^*}(b^*)}, & x \geqslant b^*. \end{cases}$$

Références I

[Alb09] H. Albrecher et S. Thonhauser. « Optimality results for dividend problems in insurance ». *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. RACSAM* 103.2 (2009), p. 295-320.

[Ava09] B. Avanzi. « Strategies for Dividend Distribution : A Review ». *North American Actuarial Journal* 13.2 (2009), p. 217-251.

[Bor02] A. N. Borodin et P. Salminen. *Handbook of Brownian motion—facts and formulae.* 2e. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[LeG13] J.-F. Le Gall. *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique.* Mathématiques et Applications. Springer-Verlag, 2013.

[Løk08] A. Løkka et M. Zervos. « Optimal dividend and issuance of equity policies in the presence of proportional costs ». *Insur. : Math. Econ.* 42.3 (2008), p. 954-961.

Références II

[Pér18] J.-L. Pérez, K. Yamazaki et X. Yu. « On the Bail-Out Optimal Dividend Problem ». *Journal of Optimization Theory and Applications* 179.2 (2018), p. 553-568.

[Pil14] A. Pilipenko. *An introduction to stochastic differential equations with reflection*. 1re. Lectures in Pure and Applied Mathematics. Potsdam University Press, 2014.

[Rao23] N. Rao. « Problème d'optimisation de De Finetti pour des stratégies absolument continues dont le taux est borné linéairement ». Mém. de mast. Université du Québec à Montréal, 2023.