Application des méthodes de simulation du modèle 3/2 à la tarification d'options.

Iro R. Kouarfate, Michael A. Kouritzin et Anne Mackay

Université du Québec à Montréal
Département de Mathématique

kouarfate.iro_rene@courrier.uqam.ca

27 juin 2024

Sommaire

Introduction et motivation

- Tarifier, c'est déterminer le prix à payer aujourd'hui pour acheter ou vendre un produit financier dans le futur à un prix fixé K.
- La valeur future d'un produit finacier (actif, produit dérivés) est incertaine.
- L'évolution des actifs financiers est souvent modélisée par les équations différentielles stochastique (EDS).
- L'évaluation des produits financiers est basée sur les solutions (analytiques ou numériques) des modèles financiers.
- La motivation du modèle 3/2 est liée au limites des modèles de Black-Scholes et de Heston.
- Nous présentons une méthode de simulation basée sur la solution explicite faible du modèle 3/2.

Définition du modèle

Definition (Modèle 3/2)

Sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$, la dynamique du modèle 3/2 est donnée par

$$\begin{cases} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t \; dZ_t \\ dV_t &= \kappa V_t(\bar{V} - V_t)dt + \eta V_t^{\frac{3}{2}} \; dW_t \end{cases} \tag{1}$$

avec $S_0 > 0$, $V_0 > 0$ des valeurs initiales des deux processus. r est le taux de rendement moyen sans risque, Z et W sont deux mouvements browniens standards corrélés de coefficient de corrélation $\rho \in [-1, 1]$. κ, $\bar{V}$ et η sont des nombres réels strictement positifs.

Définition du modèle

En posant $X = \log(S)$ et en appliquant le lemme d'Itô au processus $U_t = \dfrac{1}{V_t}$ avec $V_t > 0$, le modèle 3/2 est défini par le système des EDS suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} dX_t & = & \left(r - \dfrac{1}{2U_t}\right) dt + U_t^{-\frac{1}{2}} \left(\rho\, dW_t + \sqrt{1-\rho^2}\, dB_t\right) \\ dU_t & = & \kappa \bar{V} \left(\dfrac{\kappa + \eta^2}{\kappa \bar{V}} - U_t\right) dt - \eta \sqrt{U_t}\, dW_t. \end{array}\right. \tag{2}$$

où U est le processus inverse de la variance et

$$\rho\, dW_t + \sqrt{1-\rho^2}\, dB_t = dZ_t$$

est la décomposition de Cholesky.

Évaluation neutre au risque

Theorem (Théorème fondamental de l'évaluation neutre au risque)

Sous la mesure neutre au risque, la valeur au temps $t = 0$ de l'option d'achat européenne de maturité T et de prix d'exercice K est

$$C_0 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\max\left(S_T - K, 0\right)\right]. \tag{3}$$

Lemma (Formule analytique du modèle 3/2 pour le prix d'une option européenne)

Le prix de cette option au temps $t = 0$ est donné par :

$$C\left(S_0, K, T\right) = S_0 e^{-\delta T} - \frac{\sqrt{S_0 K} e^{-\frac{1}{2}(r+\delta)T}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\Re\left[e^{iuk}\phi_T\left(u - \frac{i}{2}\right)\right]}{u^2 + \frac{1}{4}} du, \tag{4}$$

La méthode de Milstein

- Elle est basée sur les approximations d'ordre 1 de X et d'ordre 2 de U.
- Pour $0 < s < t$, l'approximation de Milstein du modèle 3/2 est :

$$X_t - X_s \approx \left[r - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{U_s}\right)\right](t-s) + \sqrt{(t-s)\; f\left(U_s^{-1}\right)} X_s \left(\rho Z_v + \sqrt{1-\rho^2} Z_x\right),$$

$$U_t - U_s \approx \left[\kappa + \eta^2 - \kappa \bar{V}\; f\left(U_s\right)\right](t-s) - \eta \sqrt{(t-s)\; f\left(U_s\right)}\; Z_v + \frac{1}{4}\eta^2 \left(Z_v^2 - 1\right)(t-s).$$

avec $f(x) = \max(0, x)$ où Z_v et Z_x sont des réalisations de lois normales centrées réduites indépendantes.

Méthodes de simulation

La méthode exponentielle quadratique de Andersen (QE)

Elle est basée sur deux étapes :

- Une variable aléatoire khi carré peut être bien représentée par le carré d'une variable aléatoire gaussienne (Andersen 2008).
  1. Pour $0 < s < t$, $U(t) \mid U(s) = a_1 (b_1 + Z_v)^2$,où $Z_v \sim N(0,1)$
  2. a_1 et b_1 sont déterminées par la technique d'appariement des moments c'est-à-dire que :

$$a_1 = \frac{m}{1+b_1^2}, b_1^2 = 2\psi^{-1} - 1 + \sqrt{2\psi^{-1}}\sqrt{2\psi^{-1} - 1},$$

$$\psi = \frac{s^2}{m^2}, m = \mathbb{E}[U(t) \mid U(s)] \text{ et } s^2 = \mathbb{V}ar[U(t) \mid U(s)].$$

- La deuxième étape est basée sur la la simulation exacte du processus du log-rendement de l'actif sous-jacent $X = \log(S)$

Méthodes de simulation

La méthode QE (suite)

1. La dérivation de $X = \log(S)$ donne

$$X_t = X_s + \left(r - \frac{\rho\kappa\bar{V}}{\eta}\right)(t-s) + \left[\frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right]\int_s^t \frac{1}{U_u}du$$
$$-\frac{\rho}{\eta}\log\left(\frac{U_t}{U_s}\right) + \sqrt{1-\rho^2}\int_s^t \left(\sqrt{U_u}\right)^{-1} dZ_u. \quad (5)$$

2. On approxime les intégrales réelle et stochastique comme suit :

$$\int_s^t (U_u)^{-1}\, du \cong (t-s)\frac{(U_t)^{-1} + (U_s)^{-1}}{2}$$
$$\int_s^t \left(\sqrt{U_u}\right)^{-1} dZ_u \cong \sqrt{\frac{t-s}{2}\left((U_t)^{-1} + (U_s)^{-1}\right)}Z.$$

Solution faible explicite du modèle 3/2

Nous adaptons les résultats de (Kouritzin 2018) sur le modèle de Heston au modèle 3/2.

- **Condition d'existence d'une solution explicite faible du modèle**
  1. S'il existe un entier naturel non nul n tel que $\kappa + \eta^2 = \frac{n\eta^2}{4}$, alors le processus U admet une solution faible explicite.
  2. On a alors la **Condition** $(\mathbf{C}^{'})$: Il existe un nombre entier naturel n supérieur ou égal 5 tel que $\kappa = \frac{\eta^2(n-4)}{4}$.
- **L'approche proposée est basée sur le fait que :**
  1. Le processus S, admet une solution exacte. (Baldeau 2012).
  2. Si **Condition** $(\mathbf{C}^{'})$ est vérifiée, alors le processus U est égal en distribution à la somme des carrés de n processus Ornstein-Uhlenbeck.

Solution faible explicite du modèle 3/2

Dérivation de la solution explicite faible si $(\mathbf{C}^{'})$ est vérifiée

Considérons la dynamique du modèle 3/2 suivante :

$$\begin{cases} dX_t &= \left(r - \frac{1}{2U_t}\right) dt + U_t^{-\frac{1}{2}} \left(\rho \, dW_t + \sqrt{1-\rho^2} \, dB_t\right) \\ dU_t &= \kappa\theta \left(\frac{\kappa + \eta^2}{\kappa\theta} - U_t\right) dt - \eta\sqrt{U_t} \, dW_t. \end{cases} \tag{6}$$

On a

$$X_t = X_0 + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right) t + \left[\frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right] \int_0^t (U_s)^{-1} \, ds - \frac{\rho}{\eta} \log\left(\frac{U_t}{U_0}\right) + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t \left(\sqrt{U_s}\right)^{-1} dB_s. \tag{7}$$

Solution faible explicite du modèle 3/2

Theorem (Solution explicite faible du modèle 3/2.)

Supposons qu'il existe un entier naturel $n \geq 5$ *tel que la condition* (C') *soit vérifiée avec ce n. Soient* $W^{(1)}, W^{(2)}, ..., W^{(n)}, B$ *des MBS indépendants sur* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{Q}\right)$ *et* $\epsilon > 0$ *un nombre réel. Soient* $S_0 > 0$ *et* $U_0 > 0$ *des constantes réelles. Le modèle 3/2 défini par le système (6) a une solution explicite faible définie par :*

$$
\begin{aligned}
S_t = S_0 \exp\Bigg(\sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \sqrt{U_s^{-1}}dB_s + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right)t \\
+ \left[\frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right]\int_0^t \left(\hat{U}_s\right)^{-1} ds - \frac{\rho}{\eta}\log\left(\frac{U_t}{U_0}\right)\Bigg)
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
U_t = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_t^{(i)}\right)^2 \tag{9}
$$

Solution faible explicite du modèle 3/2

Theorem (suite)

avec $\tau_\epsilon = \inf\{t : U_t < \epsilon\}$ *où pour* $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$Y_t^{(i)} = -\frac{\eta}{2}\int_0^t e^{-\frac{\kappa\theta}{2}(t-u)} dW_u^{(i)} + e^{-\frac{\kappa\theta}{2}t} Y_0^{(i)}, \quad Y_0^{(i)} = \sqrt{U_0/n} \tag{10}$$

sont des processus d'Ornstein-Uhlenbeck et sous la mesure $\mathbb{Q}$,

$$W_t = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t Y_u^{(i)} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(Y_u^{(j)} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dW_u^{(i)} \tag{11}$$

est un mouvement brownien tel que

$$dU_t = \left(\kappa + \eta^2 - \kappa\theta U_t \right) dt - \eta\sqrt{U_t} dW_t$$

Solution faible explicite du modèle 3/2

Dérivation du modèle avec arrêt Si $(\mathbf{C}^{'})$ n'est pas vérifiée

- Nous définissons de nouveaux paramètres pour obtenir une calibration qui vérifie $(\mathbf{C}^{'})$ comme suit. Soit $n \geq 5$ un entier naturel, κ_η et θ_η des réels positifs tel que :

$$\begin{aligned} n &= \left(\left\lfloor \frac{4\kappa}{\eta^2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \vee 1 \right) + 4, \;\; \kappa_\eta = \frac{(n-4)\eta^2}{4}, \\ \theta_\eta &= \frac{\kappa\theta}{\kappa_\eta} \text{ c'est-à-dire } \kappa_\eta\theta_\eta = \kappa\theta \end{aligned}$$

- U peut prendre des valeurs proches de zéro. On arrêtera le processus U lorsqu'il approchera zéro.
- Nous considérons les MBS indépendants $W^{(1)}, W^{(2)}, ..., W^{(n)}$ et B définis sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{Q}\right)$ et définissons les processus $\hat{U}$ et $\hat{S}$ par

Solution faible explicite du modèle 3/2

$$\hat{S}_t = S_0 \exp\Bigg(\sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \sqrt{\hat{U}_s^{-1}}\,dB_s + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right)t$$
$$+ \left[\frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right]\int_0^t \left(\hat{U}_s\right)^{-1} ds - \frac{\rho}{\eta}\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right)\Bigg) \tag{12}$$

$$\hat{U}_t = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_t^{(i)}\right)^2, \tag{13}$$

où pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$

$$Y_t^{(i)} = -\frac{\eta}{2}\int_0^{t\wedge\tau_\epsilon} e^{-\frac{\kappa\theta}{2}(t-u)}\,dW_u^{(i)} + e^{-\frac{\kappa\theta}{2}(t\wedge\tau_\epsilon)}\,Y_0^{(i)} \tag{14}$$

avec $Y_0^{(i)} = \sqrt{U_0/n}$, $U_0 > \epsilon$ et $\tau_\epsilon = \inf\left\{t \in [0, T], \hat{U}_t < \epsilon\right\}$.

Solution faible explicite du modèle 3/2

- Nous construisons une mesure de probabilité artificielle sous laquelle les processus $\hat{S}$ et $\hat{U}$ satisfont (6)

Lemma (Dynamique de $\hat{U}$ sous $\mathbb{Q}$)

Soient $\left(W^{(1)}, W^{(2)}, \dots, W^{(n)}\right)$ des MBS et indépendants sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{Q}\right)$ et $\left\{Y_t^{(i)}\right\}_{i=1}^{n}$ des processus de Ornstein-Ulhenbeck dont la dynamique est définie par (14). Sous la mesure $\mathbb{Q}$, le processus W_t défini par

$$W_t = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t Y_u^{(i)} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(Y_u^{(j)} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dW_u^{(i)},$$

est un mouvement brownien standard pour $t \in [0, T]$ et le processus

Solution faible explicite du modèle 3/2

Lemma (suite)

$\hat{U}_t = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_t^{(i)} \right)^2$ *satisfait*

$$\begin{cases} d\hat{U}_t & = & \left(\kappa_\eta + \eta^2 - \kappa\theta \hat{U}_t \right) dt - \eta \sqrt{\hat{U}_t} dW_t, \ si\ t \leq \tau_\epsilon \\ d\hat{U}_t & = & 0, \ si\ t > \tau_\epsilon \end{cases} \tag{15}$$

avec $\hat{U}_0 = U_0$.

On a que

$$\begin{aligned} d\hat{U}_t &= \left(\kappa_\eta + \eta^2 - \kappa\theta \hat{U}_t \right) dt - \eta \sqrt{\hat{U}_t} dW_t \\ &= \left(\kappa + \eta^2 - \kappa\theta \hat{U}_t \right) dt - \eta \sqrt{\hat{U}_t} \left(dW_t - \frac{\kappa_\eta - \kappa}{\eta \sqrt{\hat{U}_t}} dt \right). \end{aligned}$$

Solution faible explicite du modèle 3/2

Notons $\hat{W}_t$ le processus défini par $\hat{W}_0 = 0$ et

$$\begin{cases} d\hat{W}_t = dW_t + \dfrac{\kappa - \kappa_\eta}{\eta\sqrt{\hat{U}_t}} dt, \text{ si } t \leq \tau_\epsilon \\ d\hat{W}_t = dW_t, \text{ si } t > \tau_\epsilon. \end{cases} \tag{16}$$

- on cherche la mesure sous laquelle $\hat{U}_t$ a la même distribution que celle de U_t sous $\mathbb{Q}$ pour $t \leq \tau_\epsilon$.

Remarque

S'il existe une mesure de probabilité sous laquelle $\hat{W}$ est un mouvement brownien standard sur $[0, T]$, alors sous cette mesure de probabilité, $\hat{U}_t$ aura la même distribution que celle de U_t sous la mesure $\mathbb{Q}$ jusqu'à τ_ϵ.

Solution faible explicite du modèle 3/2

- Nous définissons une mesure de probabilité sous laquelle $\hat{W}_t$ est un mouvement brownien.

Lemma (Définition de la mesure artificielle $\hat{\mathbb{P}}$)

Soient $\left(W^{(1)}, W^{(2)}, ..., W^{(n)}\right)$ *des MBS et indépendants sur* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{Q}\right)$ *et* W *le MBS défini par (11). Soient* $\epsilon \in (0,1)$, $T \in \mathbb{R}_+^*$ *fixé,* $\tau_\epsilon = \inf\left\{t \in [0, T], \hat{U}_t < \epsilon\right\}$ *un temps d'arrêt et* $\hat{U}_0$ *une constante réelle telle que* $\hat{U}_0 > \epsilon$*. On définit le processus* $\hat{L}$ *par*

$$\hat{L}_t = \exp\left(\int_0^t \frac{\kappa_\eta - \kappa}{\eta\sqrt{\hat{U}_s}} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\left|\kappa_\eta - \kappa\right|^2}{\eta^2 \hat{U}_s} ds\right), \tag{17}$$

Solution faible explicite du modèle 3/2

Lemma (suite)

et, on définit la mesure $\hat{\mathbb{P}}$ telle que pour tout $A \in \mathcal{F}_T$, $\hat{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_A L_T\right]$ où $\mathbb{I}_A$ est la fonction indicatrice de A.
Alors le processus $\hat{L}$ est une martingale sur $[0, T]$ sous la mesure $\mathbb{Q}$. De plus, $\hat{\mathbb{P}}$ définit une mesure de probabilité et enfin le processus

$$\hat{W}_t = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t Y_u^{(i)} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(Y_u^{(j)} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dW_u^{(i)} + \int_0^{t \wedge \tau_\epsilon} \frac{(\kappa - \kappa_\eta)}{\eta \sqrt{\hat{U}_s}} ds \quad (18)$$

est un mouvement brownien standard sur $[0, T]$ sous la mesure $\hat{\mathbb{P}}$ satisfaisant (16).

Remarque

$$\hat{L}_t = \exp\left(\int_0^t \frac{\kappa_\eta - \kappa}{\eta\sqrt{\hat{U}_s}} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\left|\kappa_\eta - \kappa\right|^2}{\eta^2 \hat{U}_s} ds\right)$$
$$= \frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{Q}}\bigg|\mathcal{F}_t$$

est la dérivée de Radon-Nikodym de $\hat{\mathbb{P}}$ par rapport à $\mathbb{Q}$. $\hat{L}_t$ peut être interprétée comme étant le facteur d'ajustement appliqué à une probabilité quelconque $\mathbb{Q}$ afin d'obtenir $\hat{\mathbb{P}}$.

Nous pouvons aussi voir $\hat{L}_t$ comme étant le poids qui est donné à chaque simulation en fonction de sa vraisemblance au vrai modèle. On fait donc de l'échantillonnage préférentiel.

Lemma (Dynamique du processus $\hat{U}$ du modèle avec arrêt sous la mesure de probabilité artificielle $\hat{\mathbb{P}}$.)

Sous la mesure de probabilité artificielle $\hat{\mathbb{P}}$ le processus $\hat{U}$ défini par (13) du modèle avec arrêt a pour dynamique

$$\begin{cases} d\hat{U}_t &= \left((\kappa + \eta^2) - \kappa\theta \hat{U}_t\right) dt - \eta\sqrt{\hat{U}_t} d\hat{W}_t \text{ si } t \leq \tau_\epsilon \\ d\hat{U}_t &= 0 \text{ si } t > \tau_\epsilon \end{cases} \tag{19}$$

où $\hat{W}$ défini par (18) est un mouvement brownien standard sous $\hat{\mathbb{P}}$. De plus, pour $t \leq \tau_\epsilon$, le processus $\hat{L}$ peut être exprimé par

$$\hat{L}_t = \exp\left(\frac{\kappa - \kappa_\eta}{\eta^2}\left[\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right) + \int_0^t \left(\kappa\theta - \frac{\eta^2 + 3\kappa_\eta - \kappa}{2\hat{U}_s}\right) ds\right]\right). \tag{20}$$

Solution faible explicite du modèle 3/2

Lemma (Dynamique de l'actif sous-jacent du modèle avec arrêt sous la mesure de probabilité artificielle. $\hat{\mathbb{P}}$.)

Sous la mesure de probabilité artificielle $\hat{\mathbb{P}}$ le processus $\hat{S}$ défini par (12) de l'actif sous-jacent du modèle avec arrêt a pour dynamique

$$\begin{cases} d\hat{S}_t &= r\hat{S}_t dt + \hat{U}_t^{-\frac{1}{2}}\hat{S}_t\left(\rho d\hat{W}_t + \sqrt{1-\rho^2}dB_t\right), \ si\ t \leq \tau_\epsilon, \\ d\hat{S}_t &= \hat{S}_t\left(r_\epsilon dt + \sigma_\epsilon dB_t\right), \ si\ t > \tau_\epsilon, \end{cases} \tag{21}$$

avec

$$\begin{cases} d\hat{U}_t &= \left((\kappa+\eta^2) - \kappa\theta\hat{U}_t\right)dt - \eta\sqrt{\hat{U}_t}d\hat{W}_t, \ si\ t \leq \tau_\epsilon, \\ d\hat{U}_t &= 0\ si\ t \geq \tau_\epsilon, \end{cases}$$

Solution faible explicite du modèle 3/2

où $r_\epsilon = r - \rho \dfrac{2\kappa\theta\epsilon + \eta\rho - \eta^2 - 2\kappa}{2\eta\epsilon}$, $\sigma_\epsilon = \sqrt{\dfrac{1-\rho^2}{\epsilon}}$ et $\left(B, \hat{W}\right)$ sont des MBS et indépendants sous la mesure artificielle $\hat{\mathbb{P}}$ car (B, W) sont des MBS indépendants sous la mesure $\mathbb{Q}$.

Remarque

Comme on arrête le processus $\hat{U}$ à ϵ après τ_ϵ, on obtient le modèle de Black-Scholes pour $t > \tau_\epsilon$.

En résumé,

- La dynamique du modèle avec arrêt sous $\hat{\mathbb{P}}$ est donnée par :

Solution faible explicite du modèle 3/2

$$\begin{cases} d\hat{S}_t &= r\hat{S}_t dt + \hat{U}_t^{-\frac{1}{2}} \hat{S} \left(\rho d\hat{W}_t + \sqrt{1-\rho^2} dB_t\right) \\ d\hat{U}_t &= \left((\kappa+\eta^2) - \kappa\theta\hat{U}_t\right) dt - \eta\sqrt{\hat{U}_t} d\hat{W}_t \end{cases} \text{ si } t \leq \tau_\epsilon \qquad (22)$$

et

$$\begin{cases} d\hat{S}_t &= \hat{S}_t \left(r_\epsilon dt + \sigma_\epsilon \; dB_t\right) \\ d\hat{U}_t &= 0 \end{cases} \text{ si } t > \tau_\epsilon \qquad (23)$$

où $\tau_\epsilon = \inf\left\{t \in [0, T] : \hat{U}_t \leq \epsilon\right\}$ et B, $\hat{W}$ deux MBS indépendants sous $\hat{\mathbb{P}}$.

- Une solution explicite faible du modèle avec arrêt sous la mesure $\hat{\mathbb{P}}$ est donnée par l'ensemble des processus suivants :

Solution faible explicite du modèle 3/2

$$\hat{S}_t = S_0 \exp\left(\sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \sqrt{\hat{U}_s}^{\,-1} dB_s + \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\eta}\right) t \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2}\right]\int_0^t \left(\hat{U}_s\right)^{-1} ds - \frac{\rho}{\eta}\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right)\right) \tag{24}$$

$$\hat{U}_t = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_t^{(i)}\right)^2, \tag{25}$$

$$\hat{L}_t = \exp\left(\frac{\kappa - \kappa_\eta}{\eta^2}\left[\log\left(\frac{\hat{U}_t}{U_0}\right) + \int_0^t \left(\kappa\theta - \frac{\eta^2 + 3\kappa_\eta - \kappa}{2\hat{U}_s}\right) ds\right]\right) \tag{26}$$

si $t \leq \tau_\epsilon$ et

$$Y_t^{(i)} = -\frac{\eta}{2}\int_0^{t\wedge\tau_\epsilon} e^{-\frac{\kappa\theta}{2}(t-u)} dW_u^{(i)} + e^{-\frac{\kappa\theta}{2} t\wedge\tau_\epsilon} Y_0^{(i)} \text{ où } Y_0^{(i)} = \sqrt{U_0/n}, \tag{27}$$

Méthode de simulation explicite pondérée du modèle 3/2

Soit $\mathcal{P} = \{0, h, ..., Mh\}$ de l'intervalle $[0, T]$ de pas uniforme $h = \frac{T}{M}$.

- **Simuler le Ornstein-Uhlenbeck** Y

$$Y_t = -\frac{\eta}{2}\int_0^{t\wedge\tau_\epsilon} e^{-\frac{\kappa\theta}{2}(t-u)}dW_u + e^{-\frac{\kappa\theta}{2}t}Y_0.$$

$$Y_{t+h} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \alpha_h Y_t - \sigma_h Z,$$

  avec $\alpha_h = e^{-\frac{\kappa\theta}{2}h}$ et $\sigma_h = \eta\sqrt{\frac{1-e^{-\kappa\theta h}}{4\kappa\theta}}$, on obtient
  où Z suit la loi normale centrée réduite

- **Simuler le processus de variance** V

  Simuler $U_t = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_t^{(i)}\right)^2$ avec $U_t > 0$ et poser $V_t = \dfrac{1}{U_t}$ où $Y^{(i)}$
  $i = 1, 2, ..., n$ sont des processus construit à l'aide des mouvements browniens indépendants $W^{(i)}$

- **Simuler les processus $\hat{S}$ et $\hat{L}$**
  1. Définir les constantes suivantes.

$$a_1 = \sqrt{1-\rho^2}, \quad b_1 = r - \frac{\kappa\theta}{\eta}\rho, \quad c_1 = \frac{\kappa + \frac{\eta^2}{2}}{\eta}\rho - \frac{1}{2},$$

$$d_1 = \frac{\rho}{\eta}, \quad e_1 = \frac{\kappa_\eta - \kappa}{\eta^2}, \quad f_1 = -e_1\,\frac{\eta^2 + 3\kappa_\eta - \kappa}{2}.$$

  2. Conditionnellement à $\hat{S}_t$, $\hat{V}_t$, $\hat{V}_{t+h}$ et $\hat{L}_t$, de (24) et (26) on a :

$$\hat{S}_{t+h} = \hat{S}_t \exp\left(a_1 \int_t^{t+h} \sqrt{\hat{V}_s}dB_s + b_1 h + c_1 \int_t^{t+h} \hat{V}_s ds + d_1 \log\left(\frac{\hat{V}_t}{\hat{V}_{t+h}}\right)\right) \tag{28}$$

$$\hat{L}_{t+h} = \hat{L}_t \exp\left\{e_1\left(\log(\frac{\hat{V}_t}{\hat{V}_{t+h}}) + \kappa\theta h\right) + f_1 \int_t^{t+h} \hat{V}_s ds\right\}, \text{ si } t \le \tau_\epsilon. \tag{29}$$

avec $\hat{V}_t = \frac{1}{\hat{U}_t}$, où $\hat{V}_t \geq \epsilon > 0$

- La valeur d'une option d'achat européenne de maturité T et prix d'exercice K est $C\left(T, S_T\right) = \max\left(S_T - K, 0\right)$
- L'estimateur Monte Carlo $\hat{C}$ du prix C est donné par :

$$\hat{C} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}\left(S_T - K\right)^+\right] \approx \frac{e^{-rT}}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(S_T^{(i)} - K\right)^+ \tag{30}$$

où $(x-K)^+ = \max\left(x - K, 0\right)$ ou par

$$\mathbb{E}\left[C\left(T, S_T\right)\right] \approx \frac{\sum_{k=1}^{N} \hat{L}_T^{(k)} C\left(\hat{S}_T^{(k)}, T\right) \mathbb{I}_{\{\hat{\mathcal{T}_\epsilon}^{(k)} > T\}}}{\sum_{k=1}^{N} \hat{L}_T^{(k)} \mathbb{I}_{\{\hat{\mathcal{T}_\epsilon}^{(k)} > T\}}}. \tag{31}$$

Application des algorithmes

Les critères de performances des algorithmes :

- La précision des algorithmes est donnée par l'erreur quadratique moyenne relative (RMSE).
- L'approximation du RMSE d'un estimateur $\hat{C}$ de C est donnée par :

$$RMSE = \frac{\mathbb{E}\left[\left(C - \hat{C}\right)^2\right]}{C} \approx \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \frac{\left(C - \hat{C}^{(j)}\right)^2}{C} \tag{32}$$

- L'éfficacité d'un algorithme est donnée par la formule suivante :

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}\right) = \frac{1}{RMSE \times \hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)} \tag{33}$$

Application des algorithmes

Table – Ensembles de paramètres

	$PS2$	$PS3$	$PS4$	$PS5$
S_0	100	100	100	100
V_0	0.2450^2	0.2450^2	0.2450^2	0.2450^2
κ	22.84	**18.3184**	**19.76**	**20.48**
θ	0.4669^2	0.4669^2	0.4669^2	0.4669^2
η	8.56	8.56	**3.2**	**3.2**
ρ	-0.99	-0.99	-0.99	-0.99
r	0.00	0.00	0.00	0.00
ϵ	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001

- $PS2$ ne vérifie $(\mathbf{C}^{'})$, $n = 5$ processus de Ornstein-Uhlenbeck et $PS3$ vérifie $(\mathbf{C}^{'})$, $n = 5$.
- $(PS4)$ ne vérifie pas $(\mathbf{C}^{'})$, $n = 12$ et $(PS5)$ vérifie $(\mathbf{C}^{'})$, $n = 12$.

Table – Prix exacts des options d'achat européennes avec $PS2$, $PS3$, $PS4$ et $PS5$

	Prix exact			
K/S_0	$PS2$	$PS3$	$PS4$	$PS5$
0.95	10.364	10.055	11.657	11.724
1	7.3864	7.0422	8.9263	8.9987
1.05	4.9376	4.5860	6.6360	6.7101

Résultats et interprétations

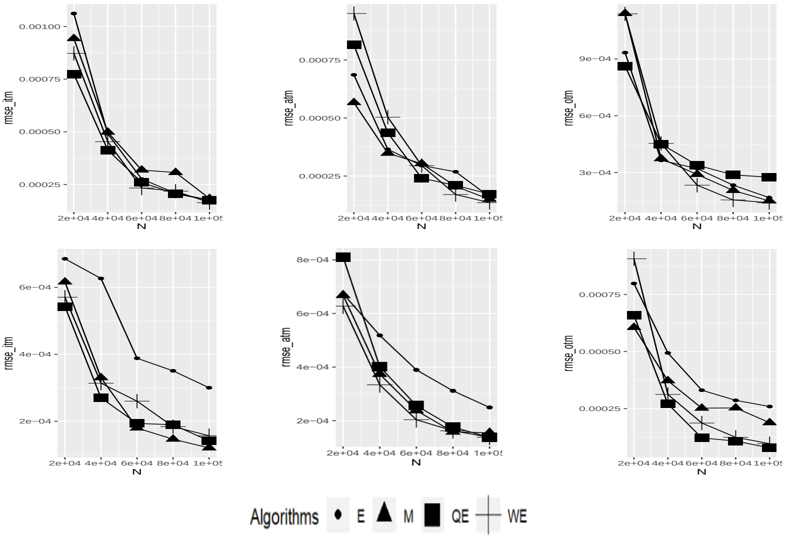

Figure – RMSE en fonction de N avec $PS3$ (en bas) et $PS5$ (en haut)

Résultats et interprétations

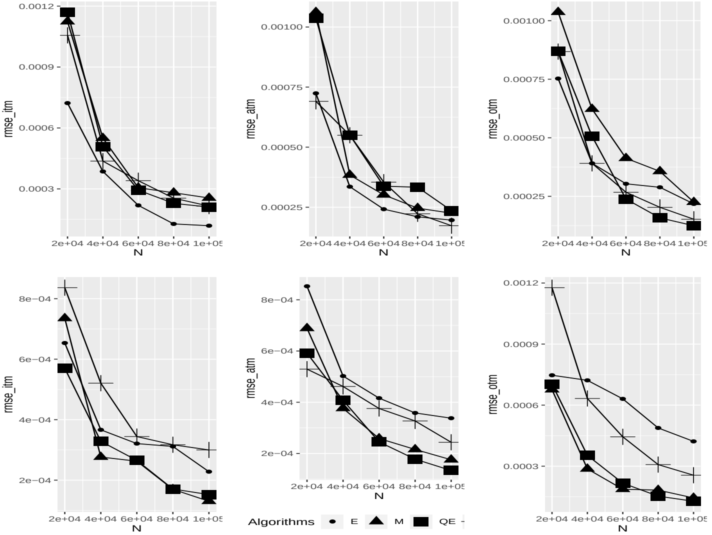

Figure – RMSE en fonction N avec $PS2$ (en bas) et $PS4$ (en haut)

Résultats et interprétations

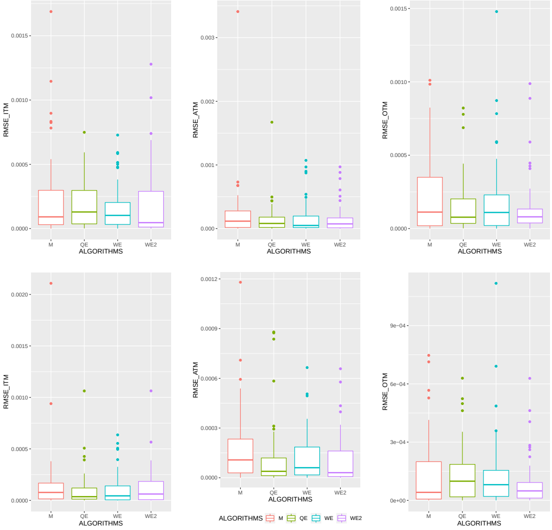

Figure – Distribution RMSE pour 100000 simulations $PS3$(en bas) $PS5$(en haut).

Résultats et interprétations

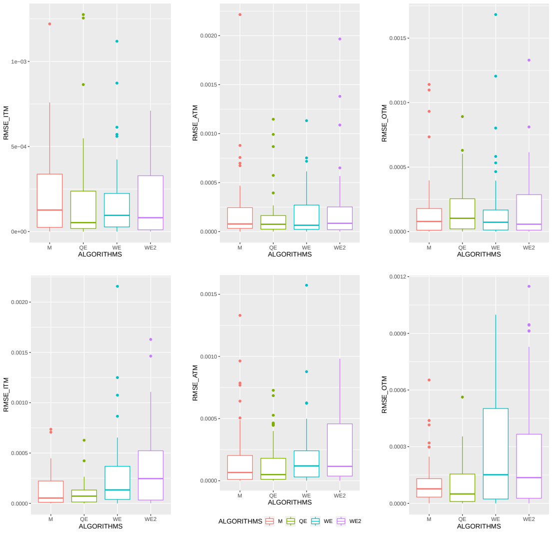

Figure – Distribution RMSE pour 100000 simulations $PS2$(en bas) $PS4$(en haut)

Table – Efficacité avec $PS3$

Nombre de simulations	M		Milstein	QE	Simulations pondérée
10000	2	$\hat{\mathbb{E}}\left[\left(C-\hat{C}\right)^2\right]$	0.00597	0.00570	0.00649
		$\hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)$	0.08165	0.44335	0.24975
		$\mathcal{E}\left(\hat{C}\right)$	2075.65	395.71	616.60
50000	2	$\hat{\mathbb{E}}\left[\left(C-\hat{C}\right)^2\right]$	0.00160	0.00133	0.00131
		$\hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)$	0.4067	2.2157	1.3242
		$\mathcal{E}\left(\hat{C}\right)$	1536.24	339.147	578.00

Table – Efficacité avec $PS2$

Nombre de simulations	M		Milstein	QE	Simulation pondérée
10000	2	$\hat{\mathbb{E}}\left[\left(C-\hat{C}\right)^2\right]$	0.00978	0.00736	0.01012
		$\hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)$	0.0813	0.4437	0.4752
		$\mathcal{E}\left(\hat{C}\right)$	1257.68	306.14	207.85
50000	2	$\hat{\mathbb{E}}\left[\left(C-\hat{C}\right)^2\right]$	0.00222	0.00163	0.00309
		$\hat{\mathbb{E}}\left(\tau_{\hat{C}}\right)$	0.4062	2.2151	2.1046
		$\mathcal{E}\left(\hat{C}\right)$	1107.95	276.42	153.85

Conclusion et Perspectives

- RMSE décroit en fonction du nombre de simulations dans tous les schémas considérés.
- Lorsque $(\mathbf{C}^{'})$ est vérifiée, l'algorithme est plus précis.
- Si le nombre de processus à simuler est élevé, cela améliore la précision de la simulation pondérée.
- L'algorithme est plus efficace que la méthode si $(\mathbf{C}^{'})$ est vérifié et moins efficace dans le cas contraire.

Merci pour votre attention !

Références

Andersen, Leif (2008). "Simple and efficient simulation of the Heston stochastic volatility model". In : *Journal of Computational Finance* 11.3, p. 1-43.

Kouritzin, Michael A (2018). "Explicit Heston solutions and stochastic approximation for path-dependent option pricing". In : *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 21.01, p. 1850006.