Exam title (Løsning)

Laget av: Tommy O.

Instruks

Del 1 Innleveringen skal føres, ikke kladdes. Skriv **klart og tydelig** med penn. Vis nok utregninger til at jeg klart kan se hvordan du kom frem til svaret. Sett 2 streker under ditt endelige svar. Lever besvarelsen til meg i timen.

Del 2 Bruk Geogebra så mye du kan, ta skjermbilder og lim inn. Sett 2 streker under riktig svar og skriv nok til at jeg kan se hvordan du kom frem til svaret. Lever `.docx` og `.pdf` på ItsLearning.

Del 1 – Uten hjelpemidler

1. **Derivasjon**

(a) (1 poeng) Deriver funksjonen $f(x) = (x^2 + 2)^4$

Løsning. Vi bruker kjerneregelen med $u = x^2 + 2$. Da blir $u' = 2x$ og vi får

$$f'(x) = f'(u)u' = 4u^3(2x) = \underline{\underline{8x\left(x^2+2\right)^3}}$$

(b) (1 poeng) Deriver funksjonen $g(x) = \frac{e^x}{x}$

Løsning. Skriv funksjonen som faktorer, slik at vi får $g(x) = \frac{e^x}{x} = e^x x^{-1}$. Bruk deretter produktregelen $(uv) = u'v + uv'$, med $u = e^x$ og $v = x^{-1}$. Vi får denne utregningen:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (e^x)' x^{-1} + e^x \left(x^{-1}\right)' \\ &= e^x x^{-1} + e^x(-1)x^{-2} \\ &= \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} \\ &= \frac{xe^x}{x^2} - \frac{e^x}{x^2} \\ &= \underline{\underline{\frac{e^x(x-1)}{x^2}}} \end{aligned}$$

(c) (1 poeng) Deriver funksjonen $h(x) = e^{-x} \ln(x^2)$

Løsning. Vi må bruke kjerneregelen og produktregelen. La $u = e^{-x}$ og $v = \ln(x^2)$, vi regner ut de deriverte

$$\begin{aligned} u' &= -e^{-x} \\ v' &= \frac{1}{x^2}(2x) = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Nå bruker vi produktregelen $(uv) = u'v + uv'$

$$\begin{aligned} h'(x) &= u'v + uv' \\ &= -e^{-x} \ln\left(x^2\right) + e^{-x}\frac{2}{x} \\ &= -2e^{-x} \ln(x) + e^{-x}\frac{2}{x} \\ &= \underline{\underline{2e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \ln(x)\right)}} \end{aligned}$$

2. **En polynomfunksjon**
Vi ser på følgende polynomfunksjon

$$p(x) = x^3 - 13x + 12$$

(a) (1 poeng) Vi at divisjonen $p(x) : (x-1)$ går opp uten å utføre polynomdivisjon.

Løsning. Vi sjekker at $p(1) = 0$ slik

$$p(1) = (1)^3 - 13(1) + 12 = 1 - 13 + 12 = 0$$

(b) (1 poeng) Finn alle løsningen til likningen $p(x) = 0$.

Løsning. Dette er det samme som å finne nullpunktene til $p(x)$. Vi regner ut $p(x) : (x-1) = x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$, der den siste likheten kommer fra å bruke ABC-formelen. Da kan vi faktorisere slik:

$$p(x) = (x-1)(x-3)(x+4)$$

Og løsningsmengden er $\underline{\underline{L = \{1, 3, -4\}}}$.

(c) (1 poeng) Regn ut $p'(1)$. Hva betyr svaret?

Løsning. Den deriverte blir

$$p'(x) = 3x^2 - 13$$

og vi får $p'(1) = 3(1)^2 - 13 = 3 - 13 = -10$. Den deriverte er stigningen i et punkt. Tolkningen av svaret er at i punktet $x = 1$ så synker funksjonen slik at $\Delta x/\Delta y = -10$. Med andre ord er stigningen til tangenten i punktet $x = 1$ lik -10.

(d) (1 poeng) Finn x-verdiene som tilhører eventuelle topp- og bunnpunkt.

Løsning. I et ekstremalpunkt er $p'(x) = 0$, så vi løser

$$\begin{aligned} p'(x) = 3x^2 - 13 &= 0 \\ 3x^2 &= 13 \\ x &= \pm\sqrt{\frac{13}{3}} \end{aligned}$$

For å karakterisere punktene kan vi bruke fortegnslinje eller andrederiverttesten. La oss se på den andrederiverte. Vi får at $p''(x) = 6x$. I punktet $x = -\sqrt{13/3}$ er $p''(x) < 0$, slik at $\underline{\underline{p(-\sqrt{13/3})\text{ er et toppunkt}}}$. I punktet $x = \sqrt{13/3}$ er $p''(x) > 0$, slik at $\underline{\underline{p(\sqrt{13/3})\text{ er et bunnpunkt}}}$.

(e) (1 poeng) Finn eventuelle vendepunkter.

Løsning. Et vendepunkt oppstår når $p''(x)$ skifter fortegn. Vi vet at $p''(x) = 6x$, så vendepunktet har $x = 0$ fordi $p''(x) = 6x$ skifter fortegn i punktet $x = 0$. y-verdien er gitt av $p(0) = 12$, og $\underline{\underline{\text{vendepunktet blir da }(0, 12)}}$.

3. **Summer**

(a) (1 poeng) Vi ser på rekken

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

Er rekken aritmetisk, geometrisk, eller ingen av delene?

Løsning. Sett $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$ og $a_3 = \frac{1}{3}$. Dersom rekken er aritmetisk må differansen være konstant, men

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$
$$a_3 - a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

Differansen er ikke konstant, så rekken er ikke aritmetisk. Dersom rekken er geometrisk må kvotienten/faktoren være konstant, men

$$a_2/a_1 = \frac{1}{2}/1 = \frac{1}{2}$$
$$a_3/a_2 = \frac{1}{3}/\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

Kvotienten er ikke konstant, så rekken er ikke geometrisk.
Rekken er verken aritmetisk eller geometrisk.

(b) (1 poeng) Regn ut summen $50 + 51 + ... + 99 + 100$.

Løsning. Vi bruker formelen

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

med $a_1 = 50$, $a_n = 100$ og $a_1 = 51$, vi får da

$$S = \frac{50 + 100}{2} 51 = 75(51) = 75(50 + 1) = \underline{\underline{3825}}$$

(c) (1 poeng) Mons ønsker å ha nok penger på konto slik at renteoverskudded hvert år blir 25000. Renten er 5%. Hvor mye må Mons ha på konto?

Løsning. La P være penger på konto. Vi må løse $P \times 0.05 = 25000$, vi får

$$P = \frac{25000}{0.05} = \frac{25000}{\left(\frac{1}{20}\right)} = 25000 \times 20 = \underline{\underline{500000}}$$

(d) (1 poeng) En lege skal administrere en type cellegift til en pasient over lang tid. Vi ser for oss at 1000 milligram cellegift er øvre grense hvor hva en pasient kan ha i kroppen.

i. (1 poeng) Anta at kroppen bryter ned 20% av cellegiften hver dag. Er det trygt å gi pasienten 300 milligram cellegift per dag? Hvorfor/hvorfor ikke?

Løsning. Pasienten vil etter lang tid ha

$$\begin{aligned}&300 + (0.8)300 + (0.8)^2 300 + (0.8)^3 300 + ... =\\&300\left(1 + 0.8 + 0.8^2 + 0.8^3 + ...\right) =\\&300\frac{1}{1-0.8} =\\&300 \times 5 = 1500 \text{ mg}\end{aligned}$$

i blodet. Dette er over øvre grense. Det er ikke trygt.

ii. (1 poeng) Hva må nedbrytningsprosenten være for at de skal være trygt?

Løsning. Vi løser

$$\begin{aligned}&300 + (x)300 + (x)^2 300 + (x)^3 300 + ... = 1000\\&300\frac{1}{1-x} = 1000\\&\frac{1}{1-x} = \frac{10}{3}\\&\frac{1}{1-x} = \frac{10}{3}\\&1 = \frac{10}{3}(1-x)\\&\Leftrightarrow x = \frac{7}{10}\end{aligned}$$

Nedbrytningsprosenten må være 30%.

Del 2 – Med hjelpemidler

1. **Maksimere overskudd**
En bedrift har følgende totale kostnad og inntekt per dag knyttet til produksjonen av varer, der x er antall varer produsert på én dag.

$$K(x) = 0.1x^2 - 5x + 2200$$
$$I(x) = 1200 \ln(x+1)$$

(a) (1 poeng) Bestem $K'(60)$ og $I'(60)$. Kan du ut i fra tallene si om bedriften bør produsere flere eller færre enn 60 enheter per dag?

Løsning. Her bør du bruke CAS i Geogebra. Skriv inn

```
K(x) := 0.1*x*x - 5*x + 2200
K'(60)
```

og du får at $\underline{\underline{K'(60) \approx 7}}$. På samme måte får du at $\underline{\underline{I'(60) \approx 19.67}}$. Ettersom grenseinntekten er høyere enn grensekostnaden bør bedriften produsere flere enn 60 enheter per dag.

(b) (1 poeng) Bestem produksjonsmengden som gir størst overskudd for bedriften.

Løsning. Definer en ny funksjon for overskuddet i Geogebra:

```
O(x) := I - K
```

Bruk så

```
Ekstremalpunkt[ <Funksjon>, <Start>, <Slutt> ]
```

kommandoen til å finne maksimum. Vi får at $(x, y) = (90.54, 2853.08)$. Vi undersøker både $x = 90$ og $x = 91$. Når $x = 90$ får vi $O(90) = 2853.03$, og når $x = 91$ får vi $O(91) = 2853.05$. Overskuddet er størst når produksjonsmengden x er lik 91

2. **Vekstmodell**
Det høres måling av antall fisk i et oppdrettsanlegg. Følgende måling ble gjort, der d er antall dager etter at vi startet oppdrett og A_d er antall fisk mål på dag d.

d	10	20	30	40	50	60	70	80
A_d	53	122	257	468	674	799	854	877

(a) (1 poeng) Bestemt konstantene i modellen for logistisk vekst slik at modellen passer til dataene. Med andre ord, bestem C, a og b i:

$$A(d) = \frac{C}{1 + ae^{-bd}}$$

Løsning. Bruk regresjonsanalyse i Geogebra. Skriv inn i regnearket, marker og velg regresjonsanalyse. Du får

$$C = 893.99 \approx \underline{\underline{894.0}}$$
$$a = 47.92 \approx \underline{\underline{47.9}}$$
$$b = 0.0994 \approx \underline{\underline{0.1}}$$

(b) (1 poeng) Hvor mange fisk startet oppdrettsanlegget med i følge modellen?

Løsning. Regn ut $A(0)$, antall fisk ved dag 0. Vi får $A(0) = 18.27 \approx \underline{\underline{18}}$.

(c) (1 poeng) Hva er grensen for hvor mange fisk det kan være i oppdrettsanlegget i følge modellen?

Løsning. Dette kan vi lese av som C i uttrykket $A(d) = \frac{C}{1+a\exp(-bd)}$. Bærekapaisteten er $C = \underline{\underline{894}}$ fisk.

(d) (1 poeng) Hvor mange fisk var det etter 55 dager i følge modellen?

Løsning. Regn ut $A(55) = 743.57 \approx \underline{\underline{744}}$ fisk.

(e) (1 poeng) Når vokste fiskebestanden raskest?

Løsning. Alternativ 1:
Regn ut den deriverte av $A(d)$ i CAS i Geogebra. Bruk deretter
`Maks[ <Funksjon>, <Start x-verdi>, <Slutt x-verdi> ]`
til å finne maksimum til den deriverte. Maksimum skjer når $x = 38.92 \approx \underline{\underline{39}}$, og da sted fiskebestanden med omtrent 22 fisk per dag fordi $A'(38.92) = 22.21$.
Alternativ 2:
Du kan bruke at $A(d)$ vokser raskest når $A(d) = C/2$. Se kapittelsammendrag i læreboka. Du skal få samme svar.

3. **Bensinforbruk**
En bil kjører x kilometer i løpet av t timer, der x er gitt ved

$$x(t) = 60t + 30e^{-0.4t} - 25$$

(a) (1 poeng) Hvor langt kjører bilen i løpet av den første halvtimen?

Løsning. Regn ut $x(0.5) = 29.56$. Bilen kjører $\underline{\underline{29.6}}$ kilometer i løpet av den første halvtimen.

(b) (1 poeng) Bruk digitalt verktøy og bestem hvor lang tid bilen bruker på de første 500 km.

Løsning. Vi må finne t^* slik at $x(t^*) = 500$. Lag $y = 500$ i Geogebra og finn krysning. Vi får punktet $(x, y) = (8.73, 500)$. Bilen bruker 8.73 timer på de første 500 km, dette tilsvarer $\underline{\underline{\text{8 timer}}}$ og $0.73 \times 60 \approx \underline{\underline{\text{44 minutter}}}$.

(c) (1 poeng) Det samlede bensinforbruket b etter å ha kjørt x km er gitt ved

$$b(x) = 0.05x\left(1 + e^{-0.5x}\right)$$

der $b(x)$ er målt i liter. Bestem $b'(x)$ uten å bruke digitale hjelpemidler. Forklar hvilke derivasjonsregler du har brukt. Hva er den praktiske betydningen av tallet $b'(10)$?

Løsning. Vi må bruke kjerneregelen på $f(x) = e^{-0.5x}$, slik at $f'(x) = -0.5e^{-0.5x}$. Vi må også bruke produktregelen. Svaret blir

$$\begin{aligned} b'(x) &= (0.05x)'\left(1 + e^{-0.5x}\right) + (0.05x)\left(1 + e^{-0.5x}\right)' \\ &= 0.05\left(1 + e^{-0.5x}\right) + (0.05x)\left((-0.5)e^{-0.5x}\right) \\ &= \underline{\underline{0.05\left(1 + e^{-0.5x} - 0.5xe^{-0.5x}\right)}} \end{aligned}$$

Dersom $b(x)$ er det samlede bensinforbruket er $b'(x)$ endringen i det samlede forbruket. Endringen i det samlede forbruket er forbruket etter x kilometer. $\underline{\underline{b'(x) \text{ er det momentane (øyeblikkelige) forbruket per kilometer.}}}$ Eksempel: $b'(10)$ er forbruket per kilometer etter 10 kilometer.

(d) (1 poeng) Det kan vises at bensinforbruket f målt i liter per time etter t timer er

$$f(t) = b'(x)x'(t).$$

Bestemt bensinforbruket per minutt når bilen har kjørt i en halv time.

Løsning. Vi regner ut $x'(t)$, som blir $60 - 12e^{-0.4t}$. Videre vet vi at $b'(x) = 0.05\left(1 + e^{-0.5x} - 0.5xe^{-0.5x}\right)$. Vi skriver produktet $f(t) = b'(x)x'(t)$ som:

$$f(t) = b'(x)x'(t) = 0.05\left(1 + e^{-0.5x} - 0.5xe^{-0.5x}\right)\left(60 - 12e^{-0.4t}\right)$$

Etter en halv time har vi $x(t = 0.5) \approx 29.6$. Vi får:

$$\begin{aligned} f(0.5) &= 0.05\left(1 + e^{-0.5x} - 0.5xe^{-0.5x}\right)\left(60 - 12e^{-0.4t}\right) \\ &= 0.05\left(1 + e^{-0.5\times 29.6} - 0.5 \times 29.6 \times e^{-0.5\times 29.6}\right)\left(60 - 12e^{-0.4\times 0.5}\right) \\ &\approx 2.50875 \end{aligned}$$

Etter en halv time er bensinforbruket ca 2.5 liter per time. Da er forbruket $2.50875/60 = \underline{\underline{0.042}}$ liter per minutt. (Takk til Susanna. Hun regnet rett på denne oppgaven, jeg regnet først feil.)

4. **Sushi-restaurant**
Se på følgende kvitteringer fra en oppdiktet sushi-restaurant.

(a) (1 poeng) Regn ut prisen på laks, scampi og tunfisk.

Løsning. Skriv inn følgende i Geogebra: `Nløs[{`

```
2l + 1s + 2t = 88,
3l + 2s + 1t = 101,
3l + 1s + 2t = 103
},{l, s, t}]
```

Løsningen blir $\underline{\underline{l = 15,\ s = 18 \text{ og } t = 20}}$.