

2025 Fall

사후 공분산과 베이지안 업데이트를 활용한 NCO 자산배분 개선 방안 제안

Posterior-NCO: Improving NCO Portfolio Allocation
via Posterior Covariance and Bayesian Updating

Quantifi Sogang

서강대학교 경제대학
경제학부 이 정 훈

2025.09.14

초 록

본 연구는 투자자의 주관적 견해(View)를 반영한 사후 공분산(posterior covariance)을 기반으로 한 Nested Clustered Optimization(NCO) 모형을 제안한다. 기존의 자산배분 기법은 표본 공분산에 전적으로 의존하기 때문에 추정오차와 샘플 불안정성에 취약하다. 이를 보완하기 위해 본 연구는 Black-Litterman 접근법을 활용하여 시장 균형정보와 뷰 행렬(view matrix)을 결합하고, Bayesian 업데이트 절차를 통해 사후 평균과 공분산을 도출한다. 이후 이 사후 공분산을 상관행렬로 변환하고, 계층적 군집화(Hierarchical Clustering)와 Nested Clustered Optimization(NCO)을 적용함으로써 투자자의 견해가 반영된 새로운 포트폴리오 배분 전략을 설계한다.

본 연구는 제안한 Posterior-NCO 모형의 성능을 평가하기 위해 몬테카를로 시뮬레이션을 실시하였다. 3000 번의 반복 시뮬레이션을 통해 다양한 샘플 경로를 생성하고, 전통적 Markowitz, 표준 NCO, 그리고 Posterior-NCO 를 비교한 결과, Posterior-NCO 는 평균적으로 Sharpe ratio 가 개선되었으며(NCO 대비 +5.8%p 승률, Markowitz 대비 +3.3% 향상), 포트폴리오 집중도(HHI)는 완화되는 양상을 보였다. 다만 변동성은 기존 NCO 보다 다소 높게 나타나, 견해의 반영이 수익-위험 균형(trade-off)에 변화를 주는 것을 확인할 수 있었다. 또한 Correlation View Blending 시나리오에서는 Sharpe ratio 가 기존 NCO 와 유사하게 유지되면서도 최대 낙폭(Maximum Drawdown)과 집중도(HHI) 측면에서 안정적 성과를 보였다.

이러한 결과는 Posterior-NCO 가 단순히 데이터 기반 추정치에 의존하는 기존 최적화 방식과 달리, 투자자의 신념과 불확실성을 정량적으로 반영하여 성과 개선 가능성을 높일 수 있음을 보여준다. 본 연구는 불확실성이 큰 금융시장 환경에서 견해 기반의 Bayesian 업데이트와 클러스터링 기반 최적화 기법을 결합한 새로운 포트폴리오 구성 방법론을 제시했다는 점에서 학문적 의의가 있으며, 향후 실제 시장 데이터와 매크로 이벤트 기반 뷰 설정을 적용하는 확장 연구가 요구된다.

Keywords: Posterior Covariance, Nested Clustered Optimization (NCO), Bayesian Update, Black-Litterman, Portfolio Optimization, Monte Carlo Simulation, Asset Allocation, Machine Learning

Abstract

This paper proposes a Nested Clustered Optimization (NCO) framework—Posterior-NCO—that incorporates investors' subjective views via posterior covariance estimation. Traditional portfolio allocation methods rely heavily on sample covariance matrices and are therefore vulnerable to estimation error and sample instability. To mitigate these issues, the study combines market equilibrium information with a view matrix using a Black–Litterman style approach and derives posterior means and covariances through a Bayesian updating procedure. The posterior covariance is then converted to a correlation matrix and fed into hierarchical clustering and Nested Clustered Optimization, yielding a portfolio construction method that formally embeds investor views.

To evaluate the proposed Posterior-NCO, we conduct Monte Carlo experiments with 3,000 simulation trials that generate a variety of sample paths. We compare Posterior-NCO with classical Markowitz, and with the standard NCO. On average, Posterior-NCO improves the Sharpe ratio (relative to standard NCO by +5.8 percentage points and relative to Markowitz by +3.3%), and it reduces portfolio concentration as measured by the Herfindahl–Hirschman Index (HHI). However, realized volatility was somewhat higher than with standard NCO, indicating that the incorporation of views alters the return–risk trade-off. Under a Correlation-View-Blending scenario, Posterior-NCO maintained a Sharpe ratio comparable to standard NCO while delivering improved outcomes in maximum drawdown and concentration metrics.

These results indicate that Posterior-NCO can enhance performance relative to purely data-driven allocation methods by quantitatively incorporating investor beliefs and their uncertainty. The study contributes a novel methodology that fuses view-based Bayesian updating with clustering-based optimization, which is particularly relevant in environments of high uncertainty. Future work should extend this framework to empirical market data and to view specifications driven by macroeconomic events.

Keywords: Posterior Covariance, Nested Clustered Optimization (NCO), Bayesian Update, Black–Litterman, Portfolio Optimization, Monte Carlo Simulation, Asset Allocation, Machine Learning

목 차

1. 서론

1.1 연구 배경 및 필요성

1.2 연구 목적 및 문제 제기

2. 선행 연구

2.1 Markowitz Mean-Variance Optimization

2.2 Black-Litterman Optimization

2.3 Shrinkage 및 공분산 추정 기법

2.4 Nested Clustered Optimization (NCO)

3. Montecarlo Experiments

3.1 Methodology

3.2 시뮬레이션 설계

4. 실험 결과

5. 결론

5.1 해석 및 시사점

5.2 한계 및 연구 과제

참고 문헌

1. 서론 (Introduction)

1.1 연구 배경 및 필요성

현대 포트폴리오 이론의 출발점인 Markowitz(1952)의 평균-분산 모형은 자산의 기대수익률과 공분산 행렬을 기반으로 최적화 문제를 설정함으로써 투자자의 효용을 극대화하는 이론적 틀을 제공하였다. 그러나 실제 금융시장에서 이 모형을 적용하는 과정에서는 심각한 추정오차(estimation error) 문제가 발생한다. 특히 포트폴리오 내의 자산의 개수가 증가할수록 표본 공분산 행렬은 불안정하게 추정되며, 두꺼운 꼬리 분포가 빈번하게 관측되는 금융 데이터의 특성상 분산 추정치가 극단적으로 왜곡되는 경우도 빈번하다. 이러한 이유로 고전적 Markowitz 모형은 실무적으로는 포트폴리오 분산을 과소 추정하거나 특정 자산군에 과도한 비중을 부여하는 등 실질적 활용에 제약이 크다.

이러한 문제를 보완하기 위해 다양한 연구들이 공분산 행렬의 추정 방식을 개선하는 데 집중해 왔다. shrinkage estimator, factor model 기반 공분산 추정, random matrix theory 를 이용한 denoising 기법 등이 그 대표적 예이다. Lopez de Prado(2016, 2020)는 기존의 공분산 추정치가 가지는 불안정성 자체를 피하기 위해 새로운 최적화 알고리즘인 Nested Clustered Optimization(NCO)을 제안하였다. NCO 는 자산 간 상관구조를 기반으로 계층적 군집화를 수행하고, 클러스터 단위에서의 최적화 결과를 재귀적으로 결합하여 최종 가중치를 산출한다. 이러한 절차는 전통적 Markowitz 대비 분산 추정에 덜 민감하며, 샘플 외 (out-of-sample) 성과에서 개선된 결과를 제공하는 것으로 알려져 있다.

그러나 NCO 역시 한계가 존재한다. 무엇보다도 모든 정보가 과거 표본 데이터로부터만 도출된다는 점에서, 투자자의 주관적 견해(views)나 외생적 정보(external information)를 반영할 수 없다는 제약이 있다. 실무적으로는 매크로 이벤트(Macro Event), 섹터 전망, 혹은 특정 기업의 펀더멘털에 관한 애널리스트 견해 등 데이터 외적 정보가 자산 배분 의사결정에 중요한 역할을 한다. 하지만 기존의 NCO 는 이러한 견해를 반영할 수 있는 구조적 장치를 갖추지 못했다.

이를 해결하기 위해 본 연구는 Bayesian 업데이트를 활용하여 투자자의 견해를 정량적으로 통합할 수 있는 확률적 구조를 도입한다. 특히 Black-Litterman 모형이나 Entropy Pooling 과 같은 방법론은 사전적 시장균형정보(prior market equilibrium)를 투자자 견해(likelihood)와 결합해 사후적 기대수익률 및 공분산을 산출하는 틀을 제공한다. 이러한 posterior moments 는 데이터 기반 추정치를 보완하며, 견해의 불확실성까지 반영할 수 있다는 장점을 지닌다.

1.2 연구 목적 및 문제 제기

본 연구의 목적은 Posterior-NCO 라는 새로운 자산배분 프레임워크를 제안하고 그 성과를 검증하는 데 있다. Posterior-NCO 란, Bayesian 업데이트를 통해 산출된 사후 공분산(posterior covariance) 또는 사후 상관행렬(posterior correlation matrix)을 NCO 의 입력으로 사용하여, 투자자의 견해와 시장 데이터를 동시에 반영한 자산배분 결과를 도출하는 방법론이다. 이는 기존 NCO 의 구조적 안정성과 Black-Litterman 류 접근법의 견해 반영 능력을 결합한 모형으로 이해할 수 있다.

본 연구가 제기하는 핵심 문제는 다음과 같다. 첫째, 투자자의 견해를 반영한 posterior covariance 를 어떻게 효율적으로 NCO 프레임워크에 통합할 수 있는가? 둘째, 이렇게 구성된 Posterior-NCO 는 기존 Markowitz 모형, IVP(naïve equal risk budgeting), 표준 NCO 대비 어떠한 성과 특성을 보이는가?

이러한 문제를 해결하기 위해 본 연구는 몬테카를로 시뮬레이션을 수행하여 다양한 시장 시나리오를 재현하고, 각 방법론의 샘플 내 및 샘플 외(out-of-sample) 성과를 비교한다. 이를 통해 Posterior-NCO 가 단순히 이론적 확장에 그치는 것이 아니라, 불확실성이 높은 시장 환경에서 실질적 성과 개선 가능성을 지니는지를 검증하고자 한다.

결국 본 연구의 의의는 기존 NCO 의 강점인 분산 안정성을 유지하면서도, 투자자의 주관적 견해를 정량적으로 반영할 수 있는 확장된 자산배분 틀을 제시하는 데 있다. 이는 학문적으로는 Bayesian 업데이트와 기계학습(Machine Learning) 기반 최적화를 결합한 새로운 포트폴리오 최적화 방법론을 제안한다는 점에서 기여가 있으며, 실무적으로는 매니저 뷰를 체계적으로 반영한 자산배분 전략을 구현할 수 있다는 점에서 활용 가능성이 높다.

2. 선행 연구

2.1 Markowitz Mean-Variance Optimization

Markowitz(1952)가 제시한 평균-분산 최적화는 현대 포트폴리오 이론의 출발점으로, 투자자의 목표는 주어진 기대수익률을 달성하면서 분산을 최소화하는 것이다. N 개의 자산이 존재한다고 가정하고, $w = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ 는 포트폴리오 가중치 벡터, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ 는 기대수익률 벡터, Σ 는 $N \times N$ 공분산 행렬이라고 하자. 포트폴리오의 기대수익률은

$$\mu_p = w^T \mu$$

이고, 포트폴리오의 분산은

$$\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$$

으로 정의된다. 투자자는 μ_p 를 일정하게 고정한 상태에서 σ_p^2 를 최소화하는 문제를 푼다. 따라서 최적화 문제는

$$\begin{aligned} \min_w w^T \Sigma w \quad \text{subject to} \quad & w^T \mathbf{1} = 1, \\ & w^T \mu = \mu_p \end{aligned}$$

로 설정된다. 여기서 $w^T \mathbf{1} = 1$ 은 전체 투자 비중의 합이 1이라는 제약 조건이며, $w^T \mu = \mu_p$ 는 목표 기대수익률 제약이다. 라그랑지안(Lagrangian)을 설정하면

$$L(w, \lambda, \gamma) = w^T \Sigma w - \lambda(w^T \mu - \mu_p) - \gamma(w^T \mathbf{1} - 1)$$

이 된다. w 에 대해 일차 미분하면

$$\frac{\partial L}{\partial w} = 2\Sigma w - \lambda\mu - \gamma\mathbf{1} = 0$$

이고, 따라서

$$\Sigma w = \frac{\lambda}{2} \mu + \frac{\gamma}{2} 1$$

이라는 조건을 얻는다. 이 식을 풀기 위해 보통 보조 정의를 사용한다.

$$A = \mu^T \Sigma^{-1} \mu, \quad B = \mu^T \Sigma^{-1} 1, \quad C = 1^T \Sigma^{-1} 1, \quad D = AC - B^2$$

라고 하자. 이때 최적 가중치는

$$w^*(\mu_p) = \Sigma^{-1} \left[\frac{C\mu_p - B}{D} \mu + \frac{A - B\mu_p}{D} 1 \right]$$

으로 주어진다. 이 해는 μ_p 에 따라 달라지며, μ_p 의 가능한 범위를 변화시키면 효율적 투자선이 도출된다. 효율적 투자선의 포트폴리오 분산은

$$\sigma_p^2 = \frac{C\mu_p^2 - 2B\mu_p + A}{D}$$

으로 표현된다. 따라서 (σ_p^2, μ_p) 공간에서 효율적 투자선은 이차식 곡선 형태를 가지며, 투자자는 자신이 가진 위험 회피 계수 a 에 따라 최적의 점을 선택한다. 위험 회피적 효용함수는

$$U = \mu_p - \frac{a}{2} \sigma_p^2$$

로 나타낼 수 있고, a 가 클수록(즉 위험 회피 성향이 강할수록) 효율적 투자선 상에서 분산이 작은 포트폴리오를 선택한다. 무위험자산이 존재한다고 가정하면 상황은 단순화된다. 무위험 수익률을 r_f 라고 할 때, 포트폴리오의 기대수익은

$$\mu_c = r_f + \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} \sigma_c$$

로 확장되며, 이는 직선 형태의 자본시장선(CML)을 형성한다. 따라서 모든 투자자는 효율적 투자선 상의 특정 포트폴리오 대신, 시장 포트폴리오와 무위험자산을 조합하여 동일한 효용을 달성할 수 있다. 이때 시장 포트폴리오는 Sharpe ratio가 최대인 포트폴리오이며, 이는

$$\max_w \frac{w^T \mu - r_f}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

를 만족하는 w 로 정의된다. 결과적으로 평균-분산 최적화는 시장 포트폴리오와 무위험자산의 조합이 모든 합리적 투자자의 선택으로 귀결된다는 결론을 낳는다.

그러나 실제 적용에서는 여러 문제가 발생한다. 기대수익률 μ 와 공분산 행렬 Σ 는 표본 데이터에서 추정되는데, 작은 오차에도 최적화 해가 민감하게 반응한다. 특히 기대수익률은 추정오차가 크기 때문에 샘플 외(out-of-sample) 성과가 불안정하다. 또한 자산 수 N 이 표본 수 T 보다 커질 때, Σ 는 역행렬이 불안정하거나 존재하지 않는 경우가 많아 수치적 문제가 발생한다. 금융 데이터가 분포의 두꺼운 꼬리와 비정규성을 가지는 현실에서는 분산이 위험을 충분히 설명하지 못한다는 점도 제약이다. 최적화 결과가 특정 자산에 과도한 비중을 부여하는 집중 현상 또한 실무 적용의 걸림돌이다.

따라서 Markowitz 모형은 이론적으로는 효율적 투자선과 최적 포트폴리오의 개념을 정립하는 데 크게 기여했으나, 실무적으로는 추정오차와 고차원 문제로 인해 그대로 활용되기 어렵다. 이러한 한계를 극복하기 위해 이후 Black-Litterman 모형, shrinkage 추정치, 그리고 NCO 와 같은 새로운 방법론들이 등장하게 되었다.

2.2 Black-Litterman Optimization

Black 과 Litterman(1991, 1992)은 Markowitz 평균-분산 최적화가 가지는 극단적 해(extreme weights) 문제와 추정오차 불안정성을 완화하기 위해 Bayesian 적 접근을 적용한 자산배분 모형을 제안하였다. 핵심 아이디어는 시장균형에서 도출된 사전 기대수익률(prior mean)과 투자자의 견해(Views)를 결합하여 사후 기대수익률(posterior mean)과 사후 공분산(posterior covariance)을 추정하는 것이다. 먼저, 균형 상태에서의 기대수익률은 다음과 같이 정의된다.

$$\pi = \delta \Sigma w_{mkt}$$

여기서 π 는 N 차원 벡터로 균형 기대수익률, δ 는 위험회피계수, Σ 는 $N \times N$ 공분산 행렬, w_{mkt} 는 시장 포트폴리오의 가중치 벡터이다. 이 값이 Black-Litterman 모형에서의 사전 평균 역할을 한다. 투자자의 견해(Views)는 선형 제약식 형태로 표현된다.

$$P\mu = Q + \varepsilon$$

여기서 P 는 $k \times N$ 뷰 행렬(view matrix), Q 는 $k \times 1$ 뷰 기대수익률 벡터, ε 은 뷰의 오차항으로 가정하며 $\varepsilon \sim N(0, \Omega)$ 로 놓는다. Ω 는 뷰의 불확실성을 나타내는 $k \times k$ 공분산 행렬이다. 즉, 투자자는 자산들의 선형 조합에 대해 특정 기대수익률을 가진다는 형태로 견해를 표명한다.

Black-Litterman 모형은 Bayesian 업데이트 공식을 통해 사후 분포를 구한다. 사전 분포는 다음과 같다.

$$\mu \sim N(\pi, \tau\Sigma)$$

여기서 τ 는 스케일링 파라미터로, 사전 공분산의 불확실성 정도를 조절한다. 투자자의 견해가 주어졌을 때, 사후 분포는 다음과 같이 계산된다.

$$\mu|Q \sim N(\mu_{BL}, \Sigma_{BL})$$

사후 평균은

$$\mu_{BL} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\pi + P^T\Omega^{-1}Q)$$

사후 공분산은

$$\Sigma_{BL} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1}$$

이다. 이 식에서 보듯이, 시장 균형정보(π, Σ)와 투자자의 견해(P, Q, Ω)가 결합되어 새로운 기대수익률과 공분산이 산출된다. 이 과정의 직관은 다음과 같다. 투자자의 견해가 불확실성이 클 경우(Ω 가 큰 경우) 사후 평균은 시장 균형 수익률 π 에 가깝게 수렴한다. 반대로 견해의 불확실성이 작을 경우(Ω 가 작은 경우) 사후 평균은 Q 에 더 강하게 끌린다. 즉, 시장 정보와 투자자 견해 사이의 신뢰 수준을 조정하는 가중치 역할을 하는 것이 바로 Ω 와 τ 이다.

이후 Black-Litterman 모형에서 산출된 μ_{BL} 과 Σ_{BL} 을 Markowitz 평균-분산 최적화 문제에 대입하면, 극단적 가중치 문제를 완화하면서도 투자자의 신념을 반영한 합리적 자산배분 결과를 얻을 수 있다. 즉, 최적화 문제는

$$\min_w w^T \Sigma_{BL} w \quad \text{subject to} \quad w^T \mathbf{1} = 1, w^T \mu_{BL} = \mu_p$$

로 다시 쓸 수 있다. 여기서 제약 조건은 원래 Markowitz 문제와 동일하지만, 기대수익률과 공분산이 posterior 값으로 대체되었다는 점이 핵심이다.

라그랑지안을 설정하면

$$L(w, \lambda, \gamma) = w^T \Sigma_{BL} w - \lambda(w^T \mu_{BL} - \mu_p) - \gamma(w^T \mathbf{1} - 1)$$

이 되고, 일계 조건은

$$\frac{\partial L}{\partial w} = 2\Sigma_{BL} w - \lambda\mu_{BL} - \gamma\mathbf{1} = 0$$

이다. 따라서

$$\Sigma_{BL} w = \frac{\lambda}{2} \mu_{BL} + \frac{\gamma}{2} \mathbf{1}$$

이 되고, 이를 풀기 위해 보조 정의를 두면

$$A = \mu_{BL}^T \Sigma_{BL}^{-1} \mu_{BL}, \quad B = \mu_{BL}^T \Sigma_{BL}^{-1} \mathbf{1}, \quad C = \mathbf{1}^T \Sigma_{BL}^{-1} \mathbf{1}, \quad D = AC - B^2$$

이다. 이때 최적 가중치는

$$w^*(\mu_p) = \Sigma_{BL}^{-1} \left[\frac{C\mu_p - B}{D} \mu_{BL} + \frac{A - B\mu_p}{D} \mathbf{1} \right]$$

으로 표현된다. 즉, Markowitz 의 일반 해와 동일한 구조이지만, 기대수익률 벡터와 공분산 행렬이 posterior 값(μ_{BL}, Σ_{BL})으로 치환된 것이다. 효율적 투자선 역시 posterior 기반으로 새롭게 정의되며, 이는 투자자의 뷰를 반영한 “사후 효율적 투자선”이라고 부를 수 있다.

이 과정의 의미는 두 가지다. 첫째, 극단적 해(extreme weights)가 완화된다. 이는 μ_{BL} 이 균형 수익률 π 와 뷰 Q 사이에서 조정된 값이므로, 표본 평균을 직접 사용하는 것보다 안정적이기 때문이다. 둘째, 투자자의 견해

강도(Ω)와 시장 불확실성(τ)이 최적화 해에 직접 반영된다. 따라서 같은 제약 조건을 두더라도 결과 포트폴리오는 데이터 기반 정보와 투자자의 신념을 동시에 반영하는 균형점을 찾게 된다.

2.2.1 사후 추정량 기반 효율적 투자선

먼저 보조량을 사후 모멘트로 정의한다.

$$A = \mu_{BL}^T \Sigma_{BL}^{-1} \mu_{BL}, \quad B = \mu_{BL}^T \Sigma_{BL}^{-1} \mathbf{1}, \quad C = \mathbf{1}^T \Sigma_{BL}^{-1} \mathbf{1}, \quad D = AC - B^2$$

목표 기대수익률이 μ_p 인 효율적 포트폴리오의 분산은

$$\sigma_p^2 = \frac{C\mu_p^2 - 2B\mu_p + A}{D}$$

따라서 (σ_p^2, μ_p) 평면에서의 사후 효율적 투자선은 위 이차식으로 주어진다. 해당 효율적 포트폴리오의 가중치는

$$w^*(\mu_p) = \Sigma_{BL}^{-1} \left[\frac{C\mu_p - B}{D}, \mu_{BL}; +; \frac{A - B\mu_p}{D}, 1 \right]$$

이때 사후 글로벌 최소분산(GMV) 포트폴리오의 가중치, 기대수익, 분산은 각각

$$\begin{aligned} w_{GMV} &= \frac{\Sigma_{BL}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma_{BL}^{-1} \mathbf{1}} \\ \mu_{GMV} &= \frac{B}{C} \\ \sigma_{GMV}^2 &= \frac{1}{C} \end{aligned}$$

이다. 무위험수익률 r_f 가 존재할 때, 사후 최대 샤프 포트폴리오의 가중치는

$$w_{tan} \propto \Sigma_{BL}^{-1} (\mu_{BL} - r_f, 1) \quad (\text{normalization : } \mathbf{1}^T w_{tan} = 1)$$

이때 사후 최대 샤프 비율 포트폴리오의 샤프비율은

$$SR_{tan} = \frac{w_{tan}^T \mu_{BL} - r_f}{\sqrt{w_{tan}^T \Sigma_{BL} w_{tan}}}$$

이고, 무위험자산과의 조합으로 얻는 사후 자본시장선(CML)은 임의의 위험자산 조합의 표준편차 σ_c 에 대해

$$\mu_c = r_f + SR_{tan} \sigma_c$$

이다. 또는 포트폴리오 가중치 관점에서 (무위험자산과 최대 샤프비율 포트폴리오의 선형결합)

$$w_c = \alpha, w_{tan} + (1 - \alpha), 0 \quad (\text{여기서 } \alpha \text{는 위험자산 비중})$$

정리하면, Black-Litterman 에서 얻은 μ_{BL}, Σ_{BL} 을 사용하면 Markowitz 의 모든 단힌 해가 그대로 유지되며, 효율적 투자선, GMV, 최대 샤프 비율의 해, CML 이 모두 “사후 적률”로 재정의된다. 이를 통해 데이터 기반 표본 추정치 대신 시장균형과 뷰(및 그 불확실성)를 반영한 효율적 집합을 직접 구축할 수 있다. 그러나, Black-Litterman 모형에서 투자자의 견해가 업데이트 된다 하더라도 Markowitz 에서 수행하는 최적화 과정이 존재하기 때문에 특정 자산에 비중이 집중되는 문제가 여전히 존재한다.

2.3 Shrinkage 및 공분산 추정 기법

평균-분산 최적화 모형의 성과를 결정짓는 핵심 요소는 공분산 행렬의 추정치이다. 그러나 금융 데이터는 표본 수가 제한적인 경우가 많고, 자산 수가 증가할수록 표본 공분산 추정치의 불안정성은 심화된다. 이러한 상황에서 표본 공분산은 극단적인 고유치 분포를 보이며, 최적화 과정에서 역행렬 계산을 불안정하게 만들고, 결과적으로 극단적인 자산 비중을 산출한다. 이를 해결하기 위한 대표적 방법이 Shrinkage 추정과 랜덤행렬이론(Random Matrix Theory, RMT)을 활용한 정화(denoising) 기법이다.

우선, T 기간 동안의 수익률 벡터를 $x_t \in R^N$ 이라 할 때, 표본 공분산은 다음과 같이 정의된다.

$$S = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{\mu})(x_t - \bar{\mu})^T$$

여기서 μ 는 표본 평균이다. 이 추정치는 비편향적이지만, 고차원 환경($q = N/T$ 가 큰 경우)에서는 고유치 분포가 실제보다 과도하게 퍼지고, 진정한 신호(signal)보다 노이즈(noise)를 많이 반영하게 된다. 이를 완화하기 위해 Shrinkage 추정은 표본 공분산을 구조적 타깃 T 쪽으로 수축한다. 기본 형태는 다음과 같다.

$$\widehat{\Sigma}_{sh} = (1 - \alpha)S + \alpha T, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

여기서 T 는 안정적인 구조를 가정한 타깃 행렬이고, α 는 수축 강도이다. 가장 단순한 타깃은 스케일된 단위행렬(identity-scaled matrix)로, 이는 모든 자산의 분산을 동일하게 두는 것이다. 또 다른 대표적 타깃은 상수상관(constant-correlation) 구조로, 모든 자산쌍의 상관계수를 동일하게 가정한다. Ledoit 와 Wolf(2004)는 α 의 최적값을 Frobenius 위험 $E\|\widehat{\Sigma}_{sh} - \Sigma\|_F^2$ 을 최소화하는 값으로 제안하였으며, 이를 통해 닫힌형 근사치를 얻을 수 있다. 그 결과, Shrinkage 추정치는 조건수가 안정적이고 샘플 외 성과도 향상되는 것으로 알려져 있다. 선형 Shrinkage 가 모든 원소를 동일 비율로 수축한다면, 비선형 Shrinkage 는 고유치 단위에서 서로 다른 수축을 적용한다. 표본 공분산의 고유분해를 $S = U\Lambda U^T$ 라 할 때, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ 이다. 비선형 Shrinkage 는 각 고유치 λ_i 를 새로운 값 $\widehat{\delta}_i$ 로 변환하여 다음과 같이 정의한다.

$$\widehat{\Sigma}_{NLS} = U, \text{diag}(\widehat{\delta}_1, \dots, \widehat{\delta}_N), U^T$$

Ledoit 와 Wolf(2020)은 Stieltjes 변환을 활용하여 $\widehat{\delta}_i$ 의 닫힌형 근사식을 제시하였다. 이 접근은 노이즈로 오염된 작은 고유치들을 강하게 수축하고, 정보가 담긴 큰 고유치는 덜 수축함으로써 분산-편향 균형을 최적화한다. 랜덤행렬이론(Random Matrix Theory, RMT)은 Marcenko–Pastur 분포를 활용하여 고유치 분포의 이론적 지지구간을 제시한다. 수익률이 독립 동분산일 때, 표본 상관행렬의 고유치 분포는 다음 구간에 속한다.

$$\lambda_{\pm} = \sigma^2(1 \pm \sqrt{q})^2, \quad q = \frac{N}{T}$$

실제 표본에서 λ_i 가 λ_+ 이하인 고유치는 노이즈로 간주할 수 있으며, 이를 동일한 상수로 치환하거나 평균값으로 평활하는 과정을 거친다. 이를 고유치 정화(eigenvalue cleaning)라 하며, 최종적으로 얻어진 정화된 상관행렬을 다시 자산별 표준편차로 스케일링하여 공분산으로 복원한다.

$$\widehat{\Sigma}_{\text{clean}} = D^{1/2} \widehat{R}_{\text{clean}} D^{1/2}, \quad D = \text{diag}(\widehat{\sigma}_1^2, \dots, \widehat{\sigma}_N^2)$$

여기서 $\widehat{R_{clean}}$ 은 정화된 상관행렬이다. 또한 시장모드를 제거하기 위한 de-toning 절차도 자주 사용되며, 이는 가장 큰 고유치와 고유벡터에 해당하는 시장 공통요인을 분리하여 상관구조를 더욱 명확히 한다. 이외에도 정규화 기반 방법들이 존재한다. 대표적으로 Ridge 형태의 공분산 추정은

$$\widehat{\Sigma}_{ridge} = S + \lambda I$$

로 정의되며, $\lambda > 0$ 은 역행렬의 안정성을 보장한다. 한편, 공분산 대신 정밀도 행렬(precision matrix = Σ^{-1})의 회소성을 가정하는 방법도 있다. Graphical Lasso 는 다음 최적화 문제를 통해 정밀도 행렬을 추정한다.

$$\widehat{\Theta} = \arg \max_{\Theta \succ 0} \{\log \det \Theta - \text{tr}(S\Theta) - \lambda |\Theta|_1\}, \quad \widehat{\Sigma}_{gl} = \widehat{\Theta}^{-1}$$

이 방법은 조건부 독립성 구조를 유도할 수 있어 해석성과 안정성을 동시에 확보할 수 있다. 결론적으로, Shrinkage 및 공분산 추정 기법은 Markowitz 모형의 가장 큰 문제인 추정오차를 완화하는 핵심 도구로 자리 잡았다. 이러한 기법들은 Posterior-NCO 프레임워크에서도 중요한 역할을 한다. 즉, Shrinkage 를 통해 안정화된 사전 공분산을 출발점으로 삼고, Bayesian 업데이트를 통해 투자자의 견해를 반영한 사후 공분산을 도출한 뒤, 이를 NCO 구조에 적용함으로써 견해와 데이터 기반 정보를 동시에 반영할 수 있는 자산배분 전략을 구현할 수 있다.

2.4 Nested Clustered Optimization (NCO)

Lopez de Prado(2016, 2020)는 고차원 금융 데이터에서 표본 공분산 추정의 불안정성을 극복하기 위한 대안적 방법으로 Nested Clustered Optimization(NCO)을 제안하였다. NCO 는 전통적인 Markowitz 최적화와 달리, 자산들 간의 상관구조를 군집화하여 다단계 최적화(nested optimization)를 수행한다. 이 방식은 공분산 추정치의 노이즈에 덜 민감하며, 결과적으로 샘플 외(out-of-sample) 성과가 개선된다. 먼저, 자산의 상관행렬을 R 이라 하자. 이를 거리행렬 D 로 변환하면

$$d_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \rho_{ij})}, \quad R = (\rho_{ij})$$

여기서 ρ_{ij} 는 자산 i 와 j 의 상관관계수이다. 거리행렬 D 를 기반으로 계층적 군집화(hierarchical clustering)를 수행하면, 유사한 자산들이 동일 군집으로 묶인다. NCO는 크게 두 단계를 반복적으로 수행한다. 첫 번째는, 군집 내 최적화이다. 군집 C_k 에 포함된 자산들의 기대수익률과 공분산을 μ_{C_k}, Σ_{C_k} 라 하면, 군집 단위 최적화 문제는 다음과 같다.

$$\min_{w_{C_k}} w_{C_k}^T \Sigma_{C_k} w_{C_k} \quad \text{subject to} \quad w_{C_k}^T \mathbf{1} = 1$$

여기서 w_{C_k} 는 군집 내 자산들의 상대적 가중치 벡터이다. 이 문제의 해는 글로벌 최적화보다 훨씬 안정적이며, 군집 내 상관성이 높을수록 분산 최소화 효과가 커진다. 두 번째는, 군집 간 최적화이다. 각 군집의 대표 자산은 군집 내 최적화 결과를 기반으로 정의된다. 구체적으로, 군집 C_k 의 대표 포트폴리오 수익률은

$$r_{C_k} = w_{C_k}^T r_{assets}$$

으로 계산되며, 이들을 새로운 “자산”으로 간주하여 군집 간 최적화를 수행한다. 군집 간 최적화 문제는

$$\min_{w_{cluster}} w_{cluster}^T \Sigma_{cluster} w_{cluster} \quad \text{subject to} \quad w_{cluster}^T \mathbf{1} = 1$$

으로 주어지며, $\Sigma_{cluster}$ 는 군집 포트폴리오들 간의 공분산 행렬이다. 이 과정을 재귀적(nested)으로 반복하면, 최종적으로 전체 포트폴리오의 가중치가 산출된다. 즉, 자산 \rightarrow 클러스터 \rightarrow 상위 클러스터 순으로 최적화가 계층적으로 이루어진다.

NCO의 장점은 다음과 같이 요약된다. 첫째, 고차원 공분산 추정치의 불안정성을 군집 구조로 분해하여 완화한다. 둘째, 샘플 내에서 과적합(overfitting)되기 쉬운 Markowitz 해와 달리, NCO는 군집 내 분산 최소화를 통해 샘플 외 성과가 개선된다. 셋째, 군집화가 시각적으로 해석 가능하므로, 투자자에게 설명력이 높은 구조적 포트폴리오를 제공한다.

수학적으로, 최종 포트폴리오의 가중치는 다음과 같이 계층적으로 정의된다.

$$w^* = \bigotimes_{k=1}^K w_{C_k} \otimes w_{cluster}$$

여기서 \otimes 는 군집 내 가중치와 군집 간 가중치를 결합하는 연산이다. 예를 들어, 군집 C_k 에 속한 자산 i 의 최종 가중치는

$$w_i^* = w_{C_k,i} \cdot w_{cluster,k}$$

로 계산된다. NCO 는 효율적 투자선의 형태를 직접적으로 산출하지 않지만, 경험적으로는 Markowitz 최적화 대비 더 낮은 out-of-sample 분산을 제공한다. 이는 사실상 “군집 기반 효율적 투자선(clustered efficient frontier)”을 구성하는 것과 유사하다. 결론적으로, NCO 는 공분산 추정치의 한계와 최적화 불안정을 해결하기 위한 강력한 도구이며, Posterior-NCO 에서는 이 과정을 posterior 공분산 Σ_{BL} 또는 posterior 상관행렬 R_{BL} 에 적용함으로써 Bayesian 적 견해와 데이터 기반 구조를 동시에 반영할 수 있다.

3. Montecarlo Experiments

본 연구의 목적은 투자자 견해(Views)를 Bayesian 방식으로 통합한 사후 모멘트(posterior moments)를 NCO 에 입력하여 몬테카를로 시뮬레이션을 통해 포트폴리오 성과를 비교·검증하는 것이다. 이를 위해 본 연구는 다음과 같은 일련의 절차로 구성된 방법론을 적용한다. 우선 관찰 가능한 수익률 시계열로부터 사전(prior) 공분산을 안정적으로 추정하고, 그 위에 투자자의 견해를 반영하여 사후 공분산·사후 기대수익률을 산출한다. 이어서 사후 상관구조를 계층적 군집화에 입력하고, Nested Clustered Optimization(NCO) 절차를 통해 최종 포트폴리오 가중치를 산출한다. 마지막으로 몬테카를로 반복을 통해 여러 시나리오에서의 성과 지표를 집계·비교한다.

3.1 Methodology

표본 수익률 자료가 주어졌을 때 표본평균과 표본공분산은 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t$$

$$S = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu})(x_t - \hat{\mu})^T$$

현실에서 표본공분산 S 는 고차원인 상황에서 노이즈에 취약하므로, 본 연구에서는 shrinkage 및 denoising 기법을 적용하여 사전 공분산 $\widehat{\Sigma_{prior}}$ 를 얻는다. 선형 shrinkage 의 기본 형태는 다음과 같다.

$$\widehat{\Sigma_{prior}} = (1 - \alpha)S + \alpha T, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

여기서 T 는 구조적 타깃(예: constant-correlation, factor model)이고 $\forall \alpha$ 는 수축 강도이다. 필요시 고유치 기반 비선형 수축 또는 Marčenko–Pastur 기반의 고유치 정화(eigenvalue cleaning)를 병행하여 상관구조의 벌크 노이즈를 제거한다. 정화된 상관행렬을 \widehat{R}_{prior} 로 표기하고, 분산 스케일을 결합하여 공분산을 재구성한다.

$$\widehat{\Sigma}_{prior} = D_{prior}^{1/2} \widehat{R}_{prior} D_{prior}^{1/2}, \quad D_{prior} = \text{diag}(\widehat{\sigma}_1^2, \dots, \widehat{\sigma}_N^2)$$

다음 단계는 투자자의 견해를 반영하는 것이다. 본 연구는 두 유형의 뷰 체계를 사용한다. 첫째, Black–Litterman 스타일의 기대수익 뷰로서 시장균형 기대수익 π 를 출발점으로 한다.

$$\pi = \delta, \widehat{\Sigma_{prior}}, w_{mkt}$$

사전 분포는 $\mu \sim N(\pi, \tau \widehat{\Sigma_{prior}})$ 로 가정하고, 사용자는 선형 뷰 $P\mu = Q + \varepsilon, ; \varepsilon \sim N(0, \Omega)$ 를 제시한다. 이로부터 얻어지는 사후 평균과 사후 공분산은 다음과 같다.

$$\mu_{BL} = \left((\tau \widehat{\Sigma_{prior}})^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right)^{-1} \left((\tau \widehat{\Sigma_{prior}})^{-1} \pi + P^T \Omega^{-1} Q \right)$$

$$\Sigma_{BL} = \left((\tau \widehat{\Sigma_{prior}})^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right)^{-1}$$

둘째, 상관관계 행렬 블렌딩 접근에서는 prior 상관행렬과 view 상관행렬을 가중평균 형태로 결합한다.

$$R_{blend} = (1 - \kappa) \widehat{R}_{prior} + \kappa R_{view}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1$$

보다 세밀한 처리로는 항목별 신뢰도 κ_{ij} 를 도입하여

$$(R_{post})_{ij} = (1 - \kappa_{ij}) (\widehat{R}_{prior})_{ij} + \kappa_{ij} (\rho_{ij}^{view}), \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{1 + \eta_{ij}}$$

와 같이 정의할 수 있으며, 최종적으로는 양의 정부호(PSD)를 보장하기 위해 최근접 PSD 투영을 수행한다. PSD 보정 후 분산을 결합하면 사후 공분산 Σ_{post} 를 얻는다.

$$\Sigma_{post} = D_{post}^{1/2} R_{post} D_{post}^{1/2}, \quad D_{post} = \text{diag}(\Sigma_{post})$$

사후 모멘트(μ_{BL}, Σ_{BL}) 또는 (Σ_{post}, R_{post})가 확정되면, 본 연구의 핵심 절차인 NCO 를 적용한다. NCO 는 사후 상관행렬 R_{post} 로부터 거리행렬을 계산하여 계층적 군집화를 수행한다. 거리는 다음과 같이 정의된다.

$$d_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \rho_{ij})}$$

이로부터 얻어진 덴드로그램을 기반으로 적절한 컷-레벨에서 군집을 형성하고, 각 군집 C_k 내부에 대해 최소분산 포트폴리오를 구한다. 군집 내 최소분산 해는 다음과 같이 닫힌형태로 주어진다.

$$w_{C_k} = \frac{\Sigma_{C_k}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma_{C_k}^{-1} \mathbf{1}}$$

각 클러스터의 대표 포트폴리오 수익률은 클러스터 내 가중치로 산출한 합성 수익률로 정의되고, 이들을 새로운 자산으로 간주하여 상위 레벨에서 동일한 최소분산 최적화를 반복한다. 최종적으로 자산 i 의 전체 가중치는 클러스터 내 상대가중치와 클러스터 간 가중치의 곱으로 결정된다.

$$w_i^* = w_{C_k, i} \cdot w_{cluster, k}$$

벤치마크는 역분산 가중(IVP), 표준 Markowitz(MVO), 그리고 표준 NCO 로 설정한다. IVP 는 분산의 역수 기반으로 다음과 같이 정의된다.

$$w^{IVP} = \frac{D^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T D^{-1} \mathbf{1}}, \quad D = \text{diag}(\widehat{\Sigma_{prior}})$$

성과 평가는 롤링/몬테카를로 프레임워크 하에서 수행된다. 각 반복마다 학습구간 \mathcal{T}_{in} 에서 $\widehat{\Sigma_{prior}}$ 와 뷰를 설정하고 사후 모멘트를 계산한 뒤, 해당 기간의 평가구간 \mathcal{T}_{out} 에서 실현 포트폴리오 수익률 $r_{p,t} = w^T r_t$ 를

산출한다. 주요 성과지표는 샤프비율 SR_p , 표준편차 σ_p , 최대낙폭 MDD_p , 포트폴리오 집중도 HHI 및 벤치마크와 Posterior-NCO 간 승률(WinRate)이다. 샤프비율은 다음과 같이 정의된다.

$$SR_p = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p}$$

여기서 실험의 단순화를 위해 $r_f = 0$ 으로 가정한다. 표준편차는 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{|\mathcal{T}_{out}| - 1} \sum_{t \in \mathcal{T}_{out}} (r_{p,t} - \bar{r}_p)^2}$$

누적 수익과 낙폭은 $C_t = \prod_{s \leq t} (1 + r_{p,s})$ 및 $D_t = 1 - \frac{C_t}{\max_{u \leq t} C_u}$ 로 정의되고, MDD는 $\max_t D_t$ 로 계산된다. 집중도 지수는 $HHI = \sum_{i=1}^N (w_i^*)^2$ 로 정의한다. Monte Carlo 반복 $m = 1, \dots, M$ 에서의 승률은 다음과 같이 측정한다.

$$\text{WinRate}(\text{method} | b) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{1}_{SR_{\text{method}}^{(m)} > SR_b^{(m)}}$$

수치적 안정성 확보를 위해 모든 역행렬 연산에는 필요 시 릿지 보정 ($\hat{\Sigma} + \lambda I$)을 적용하며, 포트폴리오 제약(롱온리, 상한·하한)은 최적화 후 프로젝션 또는 Quadratic Program 으로 처리한다. 또한 상관행렬 병합 시 PSD 보정을 반드시 수행하여 군집화 및 최적화 단계의 수렴성과 일관성을 확보한다.

요약하면 본 방법론은 (i) 표본 기반 공분산의 노이즈를 줄이는 전처리, (ii) Black-Litterman 또는 상관 블렌딩을 통한 뷰의 베이지안 통합, (iii) 사후 모멘트 기반의 군집화 및 NCO 적용, (iv) 롤링 몬테카를로 평가를 통한 통계적 비교라는 일련의 흐름으로 설계되었다. 이 흐름은 Posterior-NCO 가 단순한 이론적 확장에 그치지 않고, 통제된 시뮬레이션 환경에서 기존 기법과 비교할 때 어떤 성능 특성을 보이는지를 엄밀히 검증하도록 고안되었다.

3.2 시뮬레이션 설계

본 연구의 몬테카를로 시뮬레이션은 Posterior-NCO 의 성능을 통제된 환경에서 비교·검증하기 위해 설계되었다. 시뮬레이션은 (1) 수익률 생성, (2) prior 공분산 추정(선형/비선형 shrinkage 및 denoising 포함),

(3) 뷰(View) 생성 및 posterior 계산(Black-Litterman 또는 correlation blending), (4) NCO/비교모형 적용 및 평가, (5) 반복 집계 순서로 진행된다. 각 단계의 구체적 설정은 다음과 같다.

자산 수익률의 생성 과정은 보다 현실적인 시계열 특성을 반영하기 위해 ARMA-GARCH 계열 모형을 사용하여 모사한다. 각 자산 i 에 대해 평균동학과 이분산성을 동시에 반영하는 다음의 $ARMA(p, q) - GARCH(1, 1)$ 구조를 기본으로 채택한다. 우선 수익률 과정은 $ARMA(1, 1)$ 형태로 모형화한다.

$$r_{i,t} = \mu_i + \phi_i(r_{i,t-1} - \mu_i) + \theta_i \varepsilon_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t}$$

여기서 잔차는 이분산성(조건부 분산)을 갖는 $GARCH(1, 1)$ 구조로 정의된다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,t} &= \sigma_{i,t} z_{i,t} \\ \sigma_{i,t}^2 &= \omega_i + \alpha_i \varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta_i \sigma_{i,t-1}^2 \end{aligned}$$

표준화된 잔차 벡터 $z_t = (z_{1,t}, \dots, z_{N,t})^T$ 는 다변량 분포로 모사하여 자산 간 동시상관을 부여한다. 구체적으로는 다음 두 가지 옵션을 지원한다.

- 정규공통상관: $z_t = Lu_t, u_t \sim N(0, I_N), LL^T = R_{true}$ (Cholesky 분해)
- heavy-tail 모델: $u_t \sim t_\nu(0, I_N)$ (다변량 Student-t)이고 $z_t = Lu_t$ 로 생성

이때 R_{true} 는 실험에서 설계한 진짜 상관구조(constant-correlation, factor, block 등)에 해당한다.

초기값과 워밍업(burn-in)은 안정적 시뮬레이션을 위해 중요하다. 각 반복마다 충분한 burn-in 기간(예: 500~1,000 시점)을 두고 초기값 $\sigma_{i,0}^2, \varepsilon_{i,0}$ 를 설정한 뒤, burn-in 을 버리고 이후 $T_{in} + T_{out}$ 길이의 시계열을 저장한다. $GARCH$ 계수는 안정성(약정합 조건) 확보를 위해 $\alpha_i + \beta_i < 1$ 을 만족하도록 설정하고, 대표 권장 파라미터 세트로는 $\omega = 1e-6, \alpha \in 0.03, 0.05, \beta \in 0.90, 0.94$ (높은 지속성 시나리오 포함), $ARMA$ 계수는 $\phi \in [0, 0.2], \theta \in [-0.2, 0.2]$ 등을 권장한다. 꼬리강도를 시험하려면 Student-t 자유도 $\nu \in 6, 8, 12$ (여기서는 5 사용) 등을 사용한다.

마지막으로 구현·재현 측면에서는 난수 생성의 시드 제어, 병렬처리의 시드 분리, 그리고 각 반복별로 사용된 파라미터 세트($ARMA \cdot GARCH$ 계수, ν, R_{true} 등)를 로그로 저장하여 결과의

재현성(reproducibility)을 확보한다. 본 논문에서는 위 $ARMA - GARCH$ 기반 생성 프로세스를 기본 시나리오로 채택하였다.

사전 공분산 추정 단계에서는 표본공분산 S 를 계산한 뒤 여러 정화/수축 절차를 적용한다.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T_{in}} \sum_{t=1}^{T_{in}} r_t$$

$$S = \frac{1}{T_{in} - 1} \sum_{t=1}^{T_{in}} (r_t - \hat{\mu})(r_t - \hat{\mu})^T$$

선택적 전처리(기본값과 권장 파라미터)는 아래와 같다.

선형 shrinkage: $\widehat{\Sigma}_{prior} = (1 - \alpha)S + \alpha T$ with $\alpha \in 0.0, 0.1, 0.2$ (권장 기본 0.1, T=constant-correlation).

비선형 shrinkage (Ledoit-Wolf 2020) 적용 또는 MP denoising (detone True/False, mp_constant) 적용.

상관행렬 정화 후 공분산 복원: $\widehat{\Sigma}_{prior} = D^{1/2} \widehat{R}_{clean} D^{1/2}$.

뷰(View) 생성은 두 채널로 수행한다. 첫째, Black-Litterman(BL)형 수익률 뷰를 사용하는 것으로, 사용자는 k 개의 선형 뷰 P , 뷰값 Q , 뷰의 불확실성 Ω 를 제시한다. π 는 시장균형 평균으로 설정하고 사전 분포는 $\mu \sim N(\pi, \tau \widehat{\Sigma}_{prior})$ 로 둔다. 사후 적률은 다음과 같이 계산한다.

$$\pi = \delta \widehat{\Sigma}_{prior} w_{mkt}$$

$$\mu_{BL} = \left((\tau \widehat{\Sigma}_{prior})^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right)^{-1} \left((\tau \widehat{\Sigma}_{prior})^{-1} \pi + P^T \Omega^{-1} Q \right)$$

$$\Sigma_{BL} = \left((\tau \widehat{\Sigma}_{prior})^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right)^{-1}$$

BL 파라미터 권장 기본값은 $\tau = 0.025$ 로, δ 는 2.5, Ω 는 $diag(P \tau \widehat{\Sigma}_{prior} P^T)$, $s = 0.5$ 로 지정한다.

둘째로, correlation view blending 방식은 prior correlation \widehat{R}_{prior} 과 view correlation R_{view} 를 가중합한다.

$$R_{blend} = (1 - \kappa) \widehat{R}_{prior} + \kappa R_{view}, \kappa \in 0.1, 0.3, 0.5$$

항목별 신뢰도 κ_{ij} 를 도입해 부분적 반영도 가능하다. 블렌딩 후에는 PSD 보정(최근접 PSD 투영)을 수행하고 분산을 결합해 Σ_{post} 를 얻는다.

NCO 적용 단계에서는 사후 상관 R_{post} 로부터 거리 $d_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \rho_{ij})}$ 를 계산하고, Ward 또는 average linkage로 계층적 군집화를 수행하여 컷 수준을 통해 K 개의 군집을 결정한다. 각 군집 C_k 에 대해 군집 내 최소분산 포트폴리오를 계산한다. 군집 내 해는

$$w_{C_k} = \frac{\Sigma_{C_k}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma_{C_k}^{-1} \mathbf{1}}$$

로 주어지며, 클러스터별 대표 수익률을 계산한 뒤 상위 레벨에서도 동일한 방식으로 반복한다. 최종 자산별 가중치는 클러스터 내 상대가중치와 클러스터 간 가중치의 곱으로 결정된다.

비교대상은 IVP, Markowitz(MVO), 표준 NCO, 그리고 Posterior-NCO 이다. IVP 는 $w^{IVP} = \frac{D^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T D^{-1}\mathbf{1}}$ 로 정의하고, MVO 는 prior 모멘트를 사용한 평균-분산 최적화(또는 GMV/최대 샤프비율 포트폴리오 특화)를 적용한다. 모든 포트폴리오 산출 과정에서는 숫자적 안정화를 위해 필요시 릿지 정규화($\hat{\Sigma} + \lambda I$, λ 는 작은 양수)를 적용하고, 룽온리 제약 등은 Quadratic Programming 으로 처리한다.

평가 메트릭은 샤프비율, 변동성, 최대낙폭(MDD), 집중도(HHI), 그리고 몬테카를로 기반 승률(WinRate)이다. 롤링 평가에서는 학습기간 T_{in} 과 평가기간 T_{out} 을 각각 252 일과 252 일로 지정하고, 각 반복에서는 학습구간에서 적률·분·가중치를 산출한 뒤 평가구간에서 실현 성과를 기록한다. 반복 수 M 은 통계적 안정성을 위해 3,000 회로 설정한다. 성능 검정은 t-검정을 사용하여 SR 차이의 유의성을 평가한다.

Algorithm 1. Monte Carlo simulation for Posterior-NCO

Input: 반복수 M, 자산수 N, 학습기간 T_{in} , 평가기간 T_{out} , 분포/시나리오 설정, prior 전처리 파라미터 (α , shrinkage target T , denoising flags), Black-Litterman 파라미터 ($\tau, \delta, P, Q, \Omega$), correlation-blend 파라미터 (κ 등), NCO 연결기준(예: Ward).

Output: 반복별 성과지표(샤프, vol, MDD, HHI, turnover 등), 방법별 요약통계(평균, 중위, ECDF), 승률 표(WinRate).

```
FOR m = 1 to M:
  1) Generate data (training + evaluation):
    - Draw  $T_{in} + T_{out}$  returns from chosen scenario:
      e.g.  $r_t \sim N(\mu_{true}, \Sigma_{true})$  OR  $r_t \sim t_{nu}(\mu_{true}, \Sigma_{true})$ 
    - Split into training  $r_{train}$  (length  $T_{in}$ ) and eval  $r_{eval}$  (length  $T_{out}$ )

  2) Compute sample moments on training window:
     $\mu_{hat} = (1 / T_{in}) * \sum_{t=1..T_{in}} r_{train}[t]$ 
     $S = (1 / (T_{in} - 1)) * \sum_{t=1..T_{in}} (r_{train}[t] - \mu_{hat})(r_{train}[t] - \mu_{hat})^T$ 
```

```

3) Prior covariance preprocessing:
  IF linear shrinkage:
    Sigma_prior = (1 - alpha) * S + alpha * T
  IF nonlinear shrinkage:
    Sigma_prior = nonlinear_shrink(S)    # e.g. Ledoit-Wolf 2020
  IF MP denoising:
    R_clean = MP_clean(corr(S), detone = True/False)
    Sigma_prior = D^{1/2} * R_clean * D^{1/2}
  IF needed: Sigma_prior = Sigma_prior + lambda * I    # ridge stabilization
  Compute R_prior = corr(Sigma_prior), D_prior = diag(Sigma_prior)

4) View creation (experiment configuration):
  - Option A: Black-Litterman views
    define P (k x N), Q (k x 1), Omega (k x k)
  - Option B: Correlation views
    define R_view and global kappa or elementwise kappa_ij

5) Posterior calculation:
  IF BL selected:
    pi = delta * Sigma_prior * w_mkt
    mu_BL = ((tau * Sigma_prior)^{-1} + P^T Omega^{-1} P)^{-1} * ((tau *
Sigma_prior)^{-1} pi + P^T Omega^{-1} Q)
    Sigma_BL = ((tau * Sigma_prior)^{-1} + P^T Omega^{-1} P)^{-1}
    Set Sigma_post = Sigma_BL, R_post = corr(Sigma_post), mu_post = mu_BL
  ELSE IF correlation blend selected:
    R_blend = (1 - kappa) * R_prior + kappa * R_view    # or elementwise blend
using kappa_ij
    R_post = Proj_PSD(R_blend)
    Sigma_post = D_post^{1/2} * R_post * D_post^{1/2}    # D_post chosen (prior
diags or updated)
    Set mu_post = mu_hat (or use other rule)

6) Portfolio construction (using training window moments):
  - IVP:
    w_IVP ∝ D^{-1} * 1
    normalize w_IVP so sum(w_IVP) = 1
  - MVO (using mu_hat and Sigma_prior):
    solve mean-variance (or compute closed form for given mu_p)
  - NCO (using Sigma_prior or R_prior):
    w_NCO = NCO_weights(R_input = R_prior, Sigma_input = Sigma_prior, linkage,
cut_level)
  - Posterior-NCO (using Sigma_post or R_post):
    w_PosteriorNCO = NCO_weights(R_input = R_post, Sigma_input = Sigma_post,
linkage, cut_level)

7) Out-of-sample evaluation on r_eval:
  For each portfolio w:
    r_p[t] = w^T * r_eval[t] for t = 1..T_out
    r_bar = (1 / T_out) * sum_t r_p[t]
    vol = sqrt( (1 / (T_out - 1)) * sum_t (r_p[t] - r_bar)^2 )
    SR = (r_bar - r_f) / vol
    C_t = cumulative product_{s<=t} (1 + r_p[s])
    D_t = 1 - C_t / max_{u<=t} C_u
    MDD = max_t D_t
    HHI = sum_i (w_i)^2
    turnover = sum_i |w_i_new - w_i_old|    (if tracking rebalancing)
  Store metrics in results[method][m]

END FOR

Aggregate results across m:
  - Compute mean, median, std for each metric and method

```



```

- Compute ECDFs and plot distributions
- WinRate(method | baseline) = (1/M) * sum_{m=1..M} 1{ SR_method^{(m)} >
SR_baseline^{(m)} }
- Statistical tests: paired t-test and/or bootstrap on SR differences
- Sensitivity tables for parameters (tau, alpha, kappa, detone, N/T)

SUBROUTINES:
  Proj_PSD(X):
    compute eigen decomposition  $X = U \Lambda U^T$ 
     $\Lambda_{\text{pos}} = \max(\Lambda, 0)$  (elementwise)
    return  $U \Lambda_{\text{pos}} U^T$ 

  MP_clean(R, detone):
    if detone:
      remove first principal component:  $R_{\text{detone}} = R - \text{lambda1} * u_1 u_1^T + \text{mean\_bulk}$ 
* I
    estimate lambda_plus via  $q = N / T_{\text{in}}$ 
    replace eigenvalues  $\leq \text{lambda\_plus}$  by bulk average or shrink toward bulk
    reconstruct  $R_{\text{clean}}$  and return

  NCO_weights(R_input, Sigma_input, linkage, cut_level):
    compute distances  $d_{ij} = \sqrt{0.5 * (1 - \rho_{ij})}$ 
    perform hierarchical clustering with chosen linkage
    cut tree at cut_level to get clusters  $\{C_k\}$ 
    for each cluster  $C_k$ :
       $\text{Sigma}_{Ck} = \text{Sigma\_input}$  restricted to assets in  $C_k$ 
       $w_{Ck} = \text{Sigma}_{Ck}^{-1} * 1 / (1^T * \text{Sigma}_{Ck}^{-1} * 1)$ 
      compute cluster return time series  $r_{Ck}[t] = \sum_{i \text{ in } C_k} w_{Ck}[i] * r_{\text{asset}_i}[t]$ 
    assemble cluster returns and covariances, then solve cluster-level minimum
    variance similarly
    propagate weights back to asset level by multiplication
    return final asset weights w

Notes:
- Apply ridge stabilization  $\text{Sigma} + \text{lambda} I$  when inverting
- Enforce long-only / box constraints via projection or constrained QP
- Save per-run raw weights for turnover and distributional diagnostics

```

시뮬레이션 재현성을 위해 난수 시드 제어를 하고, 결과 저장은 각 반복별로 요약 통계와 원시 가중치·수익 시계열을 별도 파일로 보관한다. 기본 파라미터 권장값을 요약하면 다음과 같다.

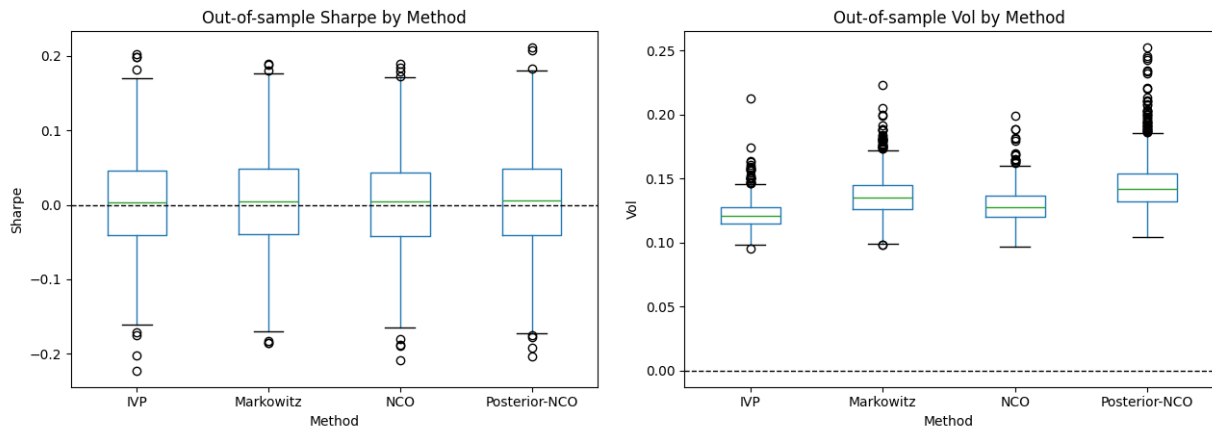
| PARAMETER | VALUE |
|-----------|------------------|
| M | 3000 |
| N | 50 |
| T (IN) | 252 |
| T (OUT) | 252 |
| TAU | 0.025 |
| ALPHA | 0.1 |
| KAPPA | 0.5 |
| DETONE | True |
| SHRINKAGE | lw_constant_corr |
| DENOISING | mp_constant |

마지막으로 결과 해석은 평균·중위수 비교뿐 아니라 분포 전체(예: SR 의 ECDF), 승률, 그리고 거래비용을 고려한 순효과를 함께 제시하여 Posterior-NCO 의 유효성과 실무 적용 가능성을 다층적으로 평가한다.

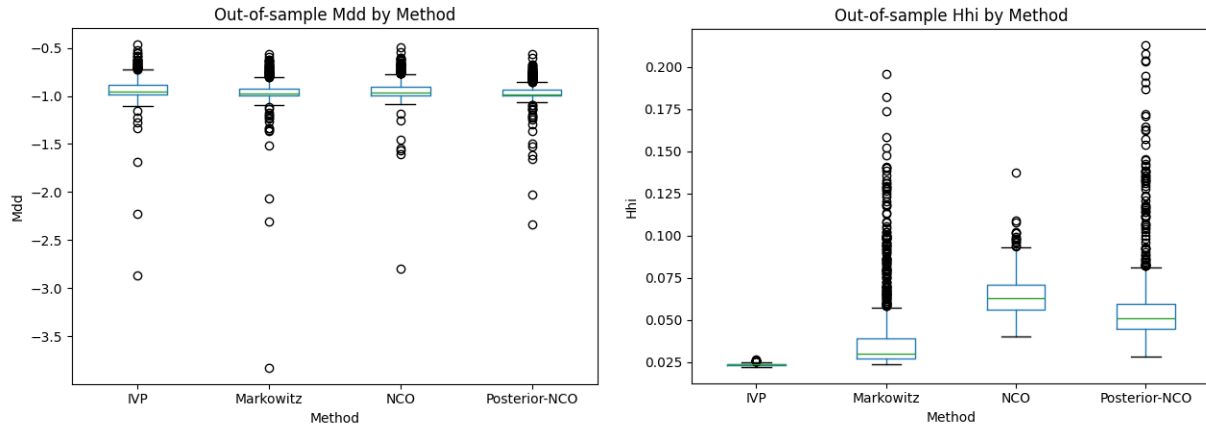
4. 실험 결과 (Results)

본 장에서는 Monte Carlo 실험에서 얻은 요약 통계를 제시하고, Posterior-NCO 의 성능을 IVP, Markowitz(MVO), 표준 NCO 와 비교한다.

| | Sharpe Ratio | Volatility | MDD | HHI |
|---------------|--------------|------------|-----------|----------|
| Markowitz | 0.002468 | 0.137299 | -0.954325 | 0.039694 |
| IVP | 0.001952 | 0.122639 | -0.931254 | 0.023617 |
| NCO | 0.002410 | 0.129773 | -0.943102 | 0.064098 |
| Posterior-NCO | 0.002550 | 0.146326 | -0.967769 | 0.057885 |



우선 Black & Litterman 스타일의 실험 결과를 보면, 평균 Sharpe(Mean Sharpe) 관점에서 Posterior-NCO 가 가장 높은 값을 기록하였다(Posterior-NCO: 0.002550, Markowitz: 0.002468, NCO: 0.002410, IVP: 0.001952). Posterior-NCO 는 Markowitz 대비 평균 Sharpe 가 약 +3.32%(0.002550 vs 0.002468), NCO 대비 약 +5.81% 향상되었다. 그러나 median(중위값) 관점에서는 Markowitz(0.003013)가 Posterior-NCO(0.002908)보다 다소 높아, 평균과 중위의 차이로부터 성과 분포의 비대칭성(꼬리 효과)을 시사한다.

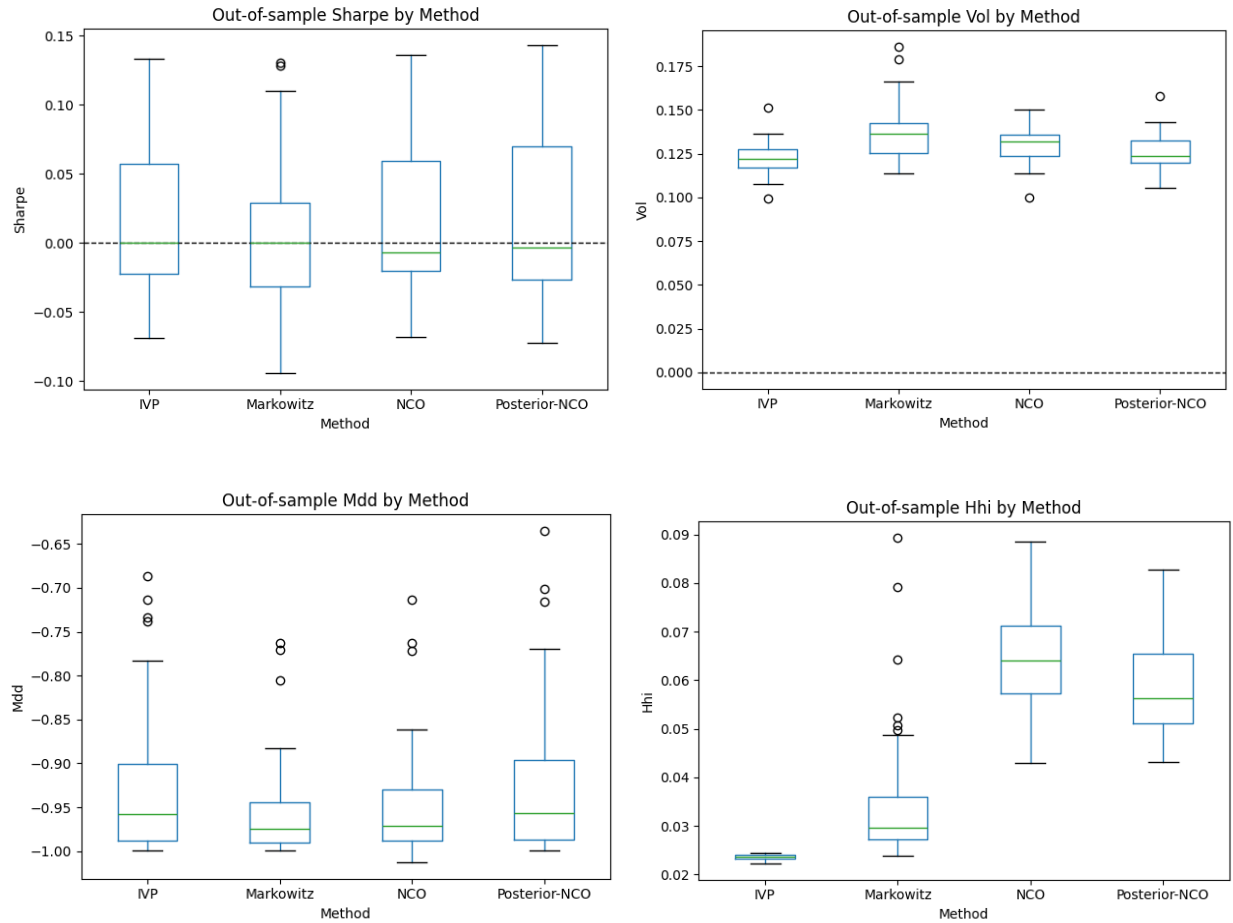


위험(Volatility) 및 최대낙폭(MDD) 측면에서 Posterior-NCO 는 트레이드오프를 나타낸다. Posterior-NCO 의 평균 변동성은 0.1463 로 표준 NCO 의 0.1298 대비 약 +12.76% 증가하였고, Markowitz(0.1373) 대비로도 약 +6.57% 높았다. 평균 최대낙폭은 Posterior-NCO 가 -0.9678 로 Markowitz(-0.9543)보다 더 큰(더 악화된) 낙폭을 보였다(약 +1.41%의 상대적 악화). 반면 포트폴리오 집중도(HHI)는 Posterior-NCO 가 NCO 보다 낮아(Posterior-NCO 0.0579 vs NCO 0.0641) 상대적으로 분산(분산화)이 개선되었다(약 -9.69%). 요약하면 Black-Litterman 케이스에서는 Posterior-NCO 가 평균 샤프를 소폭 끌어올리면서 포트폴리오 집중도를 낮추지만, 그 대가로 변동성 및 MDD 가 증가하는 특성이 관찰되었다.

| 대상(BLACK LITTERMAN) | 벤치마크 | 승률(WIN RATE) |
|---------------------|-----------|--------------|
| NCO | Markowitz | 47.9% |
| POSTERIOR-NCO | Markowitz | 51.1% |
| POSTERIOR-NCO | NCO | 52.8% |

승률(Win rate) 관점에서도 흥미로운 양상이 나타난다. 동일한 전처리(lw_constant_corr, mp_constant, detone=True) 조건하에서 NCO_vs_Markowitz 의 승률은 0.479 으로 NCO 가 Markowitz 보다 다소 낮았고, Posterior-NCO_vs_Markowitz 의 승률은 0.511, Posterior-NCO_vs_NCO 의 승률은 0.528 을 기록했다. 즉 Posterior-NCO 는 Markowitz 대비 약간(51.1%) 우위를 보였고, NCO 대비에는 약간 더 큰 우위(52.8%)를 보였다.

| | Sharpe Ratio | Volatility | MDD | HHI |
|---------------|--------------|------------|-----------|----------|
| Markowitz | 0.001783 | 0.137478 | -0.960875 | 0.039662 |
| IVP | 0.001254 | 0.122779 | -0.933410 | 0.023621 |
| NCO | 0.001422 | 0.129832 | -0.946440 | 0.064350 |
| Posterior-NCO | 0.001518 | 0.128305 | -0.943855 | 0.063690 |



다음으로 Correlation View Blending 시나리오 결과를 살펴보면, 평균 Sharpe 는 Markowitz 가 0.001783 으로 가장 높고, Posterior-NCO 는 0.001518, NCO 는 0.001422, IVP 는 0.001254 로 나타났다. Posterior-NCO 는 같은 시나리오에서 표준 NCO 대비 평균 Sharpe 가 약 +6.75% 높았으나, Markowitz 대비로는 약 -14.86% 낮았다. 변동성 측면에서는 Posterior-NCO(0.1283)가 NCO(0.1298)보다 소폭 낮아(약 -1.18%) 안정성을 약간 개선하였고, 최대낙폭도 NCO 보다 약간 개선되었다(평균 MDD: Posterior-NCO -0.9439 vs NCO -0.9464, 약 -0.27% 개선). HHI 는 NCO 에 비해 소폭 낮아 포트폴리오 분산도가 조금 개선된 모습을 보였다(약 -1.03%).

| 대상(CORR BLEND) | 벤치마크 | 승률(WIN RATE) |
|----------------|-----------|--------------|
| NCO | Markowitz | 50.0% |
| POSTERIOR-NCO | Markowitz | 50.0% |
| POSTERIOR-NCO | NCO | 53.3% |

두 시나리오를 종합하면 다음과 같은 결론적 관찰이 가능하다. 첫째, Posterior-NCO 는 뷰의 형태와 전처리(정화·수축) 설정에 민감하다. Black-Litterman 스타일의 기대수익 뷰를 반영했을 때는 평균 샤프가

가장 높아지는 반면 변동성·MDD가 동반 상승했고, 상관 블렌딩 시나리오에서는 NCO 대비 평균 샤프와 위험을 동시에 개선하는 경향을 보였으나 Markowitz에는 못 미쳤다. 둘째, 평균(Mean)과 중앙값(Median)의 불일치는 성과 분포의 비대칭성을 의미하며, 단순 평균만으로 성과를 판단하는 것은 위험할 수 있다. 셋째, Posterior-NCO의 승률($\approx 0.51-0.53$)은 기존 배분방법에 비해서 Posterior-NCO의 우위를 시사한다.

실무적 시사점으로는 Posterior-NCO가 투자자의 뷰를 체계적으로 반영하면서도 클러스터 기반의 분산 효과를 유지한다는 점에서 유용하다는 것이다. 특히 뷰가 비교적 정확하고(또는 뷰가 상관구조에 대한 정보일 때) 전처리(denoising, detone)가 적절히 적용되면 표준 NCO보다 전반적 성과와 안정성이 개선될 가능성이 있다. 반면 뷰가 수익률 수준에서 강하게 긍정적으로 작동하거나(Black-Litterman형), 뷰 신뢰도를 과도하게 높게 설정하면 변동성 및 낙폭이 증가할 수 있음을 주의해야 한다.

마지막으로 본 실험은 몬테카를로 시뮬레이션 결과에 기반하므로, 실제 시장 데이터 적용 시(거래비용·실현적 제약·비정상적 이벤트 등) 결과가 달라질 수 있다. 따라서 본 연구의 발견은 모의환경에서의 경향을 제시하는 것이며, 실제 적용 가능성을 검증하기 위해서는 추가적인 실증분석(롤링 실제시장 데이터 실험, 거래비용 반영, 뷰 생성의 실무적 절차 등)이 필요하다.

5. 결론

본 연구의 몬테카를로 실험은 Posterior-NCO, 표준 NCO, Markowitz(MVO), IVP 네 방법을 두 가지 뷰 처리 시나리오(Black & Litterman 스타일, Correlation View Blending)에서 비교하였다. Black & Litterman 스타일 실험에서 평균 Sharpe는 Posterior-NCO가 0.002550로 네 방법 중 가장 높았고, Markowitz(0.002468) 대비 약 +3.32%, 표준 NCO(0.002410) 대비 약 +5.81%의 상대적 향상을 보였다. 그러나 위험 지표 관점에서는 트레이드오프가 관찰되었다. Posterior-NCO의 평균 변동성은 0.146326으로 표준 NCO(0.129773)보다 약 +12.8% 높았고, Markowitz(0.137299)보다 약 +6.6% 높은 수준이었다. 평균 최대낙폭(MDD)은 Posterior-NCO가 -0.967769로 Markowitz(-0.954325)보다 절대치 기준 약 0.0134(약 1.41%) 더 악화되었다. 포트폴리오 집중도(HHI)는 Posterior-NCO(0.057885)가 NCO(0.064098)보다 낮아(약 -9.7%) 분산투자가 상대적으로 개선되는 특성도 확인되었다. 승률(WinRate) 관점에서는 동일 전처리 설정(lw_constant_corr, mp_constant, detone=True) 하에 Posterior-NCO가 Markowitz 대비 0.511, NCO 대비 0.528의 승률을 기록하여 우위를 나타냈다.

Correlation View Blending 시나리오에서는 결과의 양상이 일부 달라진다. 평균 Sharpe는 Markowitz(0.001783)가 가장 높고, Posterior-NCO는 0.001518로 표준 NCO(0.001422) 대비 약 +6.75%

향상되었으나 Markowitz 대비로는 약 -14.86% 낮았다. 변동성 측면에서는 Posterior-NCO(0.128305)가 NCO(0.129832)보다 소폭 낮아(약 -1.18%) 더 낮은 위험을 보였고, 평균 MDD 도 NCO 대비 약 0.27% 개선되었다. HHI 역시 NCO 보다 소폭 낮아 포트폴리오 집중도가 약간 개선되는 경향을 보였다.

요약하면, Posterior-NCO 는 (i) Black-Litterman 형 기대수익 뷰를 적용했을 때 평균 샤프를 소폭 개선하고 포트폴리오 집중도를 낮추는 장점이 있으나 그 대가로 변동성 및 최대낙폭이 증가하는 경향이 있으며, (ii) 상관행렬 블렌딩 뷰를 적용했을 때는 표준 NCO 대비 Sharpe·위험 지표가 개선되지만 Markowitz 에는 항상 우위에 있지는 않다는 점이 확인되었다. 전반적으로 Posterior-NCO 는 뷰의 형태(기댓값 뷰 vs 상관 뷰) 및 전처리(denoising/shrinkage, detone) 설정에 민감하게 반응하며, 일관된 소폭의 성능 개선(평균 기준)과 함께 특정 리스크 항목의 악화(특히 Black-Litterman 케이스에서의 변동성·MDD 증가)를 동반할 수 있음을 시사한다.

5.1 해석 및 시사점

실험 결과를 통해 얻은 주요 해석은 다음과 같다. 첫째, Black-Litterman(이하 BL) 스타일의 기대수익 뷰를 Posterior-NCO 에 반영하면 평균 샤프가 소폭 개선되는 경향이 관찰되었으나, 동시에 포트폴리오 변동성과 최대낙폭(MDD)이 증가하는 트레이드오프가 분명히 드러났다. 이는 BL 업데이트가 기대수익 벡터를 시장균형(또는 prior)으로부터 뷰(Q) 쪽으로 끌어당기면서 포트폴리오가 특정 자산군(또는 뷰에 의해 강조된 자산)에 더 노출되기 때문으로 해석할 수 있다. 즉, 뷰는 기대수익의 방향성을 부여하여 샤프를 끌어올리지만, 만약 뷰가 고변동성 자산 또는 상관구조상 리스크가 높은 조합을 지지하면 사후 공분산의 구조적 변화로 인해 전체 위험이 커질 수 있다. 따라서 BL 형 뷰를 사용할 때는 뷰의 품질(정확성)과 불확실성의 신중한 보정이 필요하며, 뷰 신뢰도를 과대평가하면 위험상승을 초래할 수 있다.

둘째, 상관(View) 블렌딩 방식은 Posterior-NCO 의 장점이 보다 안정적으로 발현될 수 있는 경우를 제시한다. 상관 블렌딩은 직접적으로 상관행렬 R 을 조정하여 군집화 결과와 NCO 의 내부구조에 영향을 주므로, 노이즈가 많은 표본 상관을 합리적으로 정제하면 군집이 더 의미 있게 구성되고 그 결과 클러스터 내·간 최적화가 더 안정적으로 작동한다. 본 실험에서 상관 블렌딩 시나리오에서는 Posterior-NCO 가 표준 NCO 대비 샤프와 위험 지표(변동성, MDD)를 동시에 개선하는 경우가 관찰되었는데, 이는 “상관 정보(구조적 의존성)”가 포트폴리오 안정성에 직접적으로 기여할 수 있다는 점을 시사한다. 실무적으로는 수익률 뷰보다 상관 뷰가 더 견고한 정보원으로 작용할 가능성이 있으므로, 뷰가 불확실하거나 주기성이 강한 환경에서는 상관 블렌딩 접근을 우선 고려하는 것이 바람직하다.

셋째, Posterior-NCO 의 성능은 전처리(denoising, shrinkage, detone)와 뷰 파라미터에 민감하게 반응한다. 실험 결과와 로직을 종합하면, 적절한 denoising-shrinkage 는 사전 공분산의 노이즈를 줄여 NCO 의 군집화 품질을 높이고, 결과적으로 posterior 업데이트의 안정성을 증대시킨다. 반대로 전처리를 소홀히 하면 posterior 가 과도하게 불안정해져 포트폴리오 리스크가 커질 수 있다. 따라서 Posterior-NCO 를 설계할 때는 (i) 상관행렬 정화(MP-clean, NLS 등)를 우선 적용하고, (ii) tau 와 Omega 같은 BL 파라미터를 보수적으로 초기화한 뒤 민감도 분석을 통해 점진 조정하는 절차를 권장한다.

넷째, 승률(WinRate)이 0.5 내외에 머무르는 점은 실용적 의미에서 “일관된 대폭 우위”가 아니라 “소폭의 개선·일관성”을 의미한다. 즉, Posterior-NCO 는 평균 성과를 소폭 개선하면서 포트폴리오 집중도(HHI)를 낮추는 장점을 제공하지만, 그 효과는 상황(뷰의 정확성, 데이터 노이즈 수준, N/T 비율)에 따라 달라진다. 따라서 실무 적용 시에는 단일 시나리오 결과에 의존하기보다 뷰의 품질 향상과 신뢰도 향상 또한 염두에 두어야 할 것이다.

다섯째, 구현·운용 관점의 시사점이다. Posterior-NCO 는 posterior 계산(예: BL 의 행렬역 연산)과 NCO 의 계층적 군집화·중첩 최적화 때문에 계산비용과 복잡도가 Markowitz 나 IVP 보다 높다. 따라서 대규모 자산군(N 대형) 또는 빈번한 리밸런싱을 계획할 경우, PSD 투영·릿지 정규화·병렬 처리 및 캐싱을 통해 수치적·계산적 효율을 확보해야 한다. 또한 포트폴리오 회전율과 거래비용을 함께 고려하지 않으면 평균 샤프 개선분이 거래비용에 의해 상쇄될 위험이 있으므로, 실제 운영에선 거래비용을 목적함수나 제약으로 명시적으로 포함시키는 것이 중요하다.

마지막으로 연구적·정책적 제언을 제시하면 다음과 같다. Posterior-NCO 는 뷰의 성격(상관 vs 수익률)과 품질에 따라 유효리가 크게 달라지므로, 기관투자자는 뷰 생성 프로세스(전문가신념·모델적 신호·알고리즘적 예측)를 엄격히 검증하고 뷰 신뢰도를 계량화할 필요가 있다. 또한 본 연구의 결과는 모의환경에서의 경향을 보여줄 뿐이므로, 실제 시장 적용 전에는 롤링 실증검증, 거래비용·제약 포함 시나리오, 스트레스 테스트를 통한 안전성 평가를 권장한다. 후속 연구로는 다기간(동적) 포트폴리오 최적화에서 Posterior-NCO 의 재균형정책, 거래비용 내생화, 그리고 베이지안 계층모형을 통한 뷰의 동적 추정 등으로 확장하는 것이 유망하다.

5.2 한계 및 향후 연구 과제

본 연구는 Posterior-NCO 의 개념적 타당성과 모의환경(Monte Carlo)을 통한 성능 경향을 제시하는 데 중점을 두었으나, 다음과 같은 한계가 존재하며 이는 후속 연구의 중요한 출발점이 된다. 첫째, 본 논문은 주로 통제된 시뮬레이션 환경에서 결과를 도출하였으므로 실제 시장 데이터에 대한 일반화 가능성에는 제약이 있다. 실거래 환경에서는 거래비용, 유동성 제약, 슬리피지, 실행지연 등 현실적 요인이 성과를 크게

변경할 수 있으므로 롤링 실증백테스트와 거래비용을 비용함수에 내생화한 실험이 필요하다. 둘째, 본 연구에서 사용한 뷰(Black-Litterman 의 P, Q, Ω 또는 correlation blend)의 신뢰도와 형태는 연구자에 의해 설계된 것이며, 뷰 생성과정의 실무적 불확실성(모형리스크)이 성과에 큰 영향을 미친다. 따라서 뷰의 오차구조를 추정·학습하는 계층적 베이지안(Hierarchical Bayes) 접근이나, 뷰 가중치를 데이터로부터 추정하는 경험적 베이즈(empirical Bayes) 기법의 도입이 요구된다.

셋째, 본 실험에서 제시한 통계적 검정(성능 차이의 유의성)은 제한적으로 다루었거나 생략한 경우가 있어 결과 해석에 주의가 필요하다. 향후 연구에서는 paired test 와 페어드 부트스트랩, 다중비교 보정(FDR/Bonferroni) 등을 일관되게 적용하여 결과의 통계적 견고성을 확보해야 한다. 넷째, 본 모형은 단기간(단일-시점) 평균-분산 프레임에서 검토되었으나, 실제 포트폴리오 운용은 다기간(dynamic) 의사결정과 리밸런싱을 수반한다. 따라서 동적 포트폴리오 최적화(예: 다기간 베이지안 업데이트, 거래비용 포함 최적 리밸런싱 정책)로 확장하여 시간축에서의 성능과 안정성을 검증할 필요가 있다.

다섯째, 공분산 전처리(denoising, shrinkage), 군집화(linkage, cut level), NCO 구현 세부(예: 클러스터 대표 정의 방식)에 따라 성과가 달라지는 민감성이 관찰되었다. 후속 연구에서는 (i) 다양한 denoising 방법(NL shrinkage, alternative RMT 처리), (ii) 서로 다른 계층적 군집화 알고리즘(ward/average/complete), (iii) 클러스터 컷 수준 자동선택 기준(e.g. silhouette, gap statistic) 등을 체계적으로 비교·교차검증하고, 최적화 성능을 안정화시키기 위한 하이퍼파라미터 튜닝(교차검증 기반)을 수행해야 한다. 또한 고차원 환경에서의 계산복잡도를 줄이기 위한 근사 알고리즘(예: 랜덤 프로젝션 기반 전처리, 병렬화) 연구도 필요하다.

끝으로 방법론적·응용적 확장 과제를 제안하면 다음과 같다. (1) 실제시장(다수의 자산군) 롤링 백테스트 및 거래비용 내생화, (2) 뷰의 자동생성·검증(머신러닝 신호, 전문가 앙상블)과 뷰 신뢰도(Ω, τ)의 데이터 기반 추정, (3) 계층적·동적 베이지안 모델을 통한 뷰의 시계열적 업데이트, (4) copula·요인모형·정밀도(precision) 회소화(Graphical Lasso) 등 대체적 의존모형과의 비교, (5) 통계적 유의성 검정(페어드 t, 부트스트랩, 다중검정 보정)을 논문 표준으로 포함, (6)코드·데이터 공개를 통한 재현성 확보 및 실무자 검증. 이들 연구는 Posterior-NCO 의 실무적 적용 가능성을 검증하고 방법의 신뢰성을 높이는 데 필수적이다.

참고문헌 (References)

- Black, F., & Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5), 28–43.
- Black, F., & Litterman, R. (1991). Asset allocation: Combining investor views with market equilibrium. *The Journal of Fixed Income*, 1(2), 7–18.
- DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *The Review of Financial Studies*, 22(5), 1915–1953.
- Jagannathan, R., & Ma, T. (2003). Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps. *The Journal of Finance*, 58(4), 1651–1683.
- Ledoit, O., & Wolf, M. (2004). Honey, I shrunk the sample covariance matrix. *The Journal of Portfolio Management*, 30(4), 110–119.
- Ledoit, O., & Wolf, M. (2020). Analytical nonlinear shrinkage of large-dimensional covariance matrices. *The Annals of Statistics*, 48(5), 3043–3065.
- Lopez de Prado, M. (2016). Building diversified portfolios that outperform out of sample. *The Journal of Portfolio Management*, 42(4), 59–69.
- Lopez de Prado, M. (2020). *Machine learning for asset managers*. Cambridge University Press.
- Lopez de Prado, M. (2018). *Advances in financial machine learning*. John Wiley & Sons.
- Meucci, A. (2005). *Risk and asset allocation*. Springer Finance.
- Meucci, A. (2008). The Black-Litterman approach: Original model and extensions. *Mathematical Finance*, 18(4), 529–551.
- Meucci, A. (2010). The Black-Litterman approach: Risk budgeting and conditioning on scenarios. *Risk*, 23(2), 98–102.
- Michaud, R. O. (1989). The Markowitz optimization enigma: Is ‘optimized’ optimal? *Financial Analysts Journal*, 45(1), 31–42.
- Muirhead, R. J. (1982). *Aspects of multivariate statistical theory*. John Wiley & Sons.
- Laloux, L., Cizeau, P., Bouchaud, J. P., & Potters, M. (1999). Noise dressing of financial correlation matrices. *Physical Review Letters*, 83(7), 1467–1470.
- Plerou, V., Gopikrishnan, P., Rosenow, B., Amaral, L. A. N., & Stanley, H. E. (1999). Universal and nonuniversal properties of cross correlations in financial time series. *Physical Review Letters*, 83(7), 1471–1474.

- Avramov, D., & Zhou, G. (2010). Bayesian portfolio analysis. *Annual Review of Financial Economics*, 2(1), 25–47.
- Pastor, L., & Stambaugh, R. F. (2000). Comparing asset pricing models: An investment perspective. *Journal of Financial Economics*, 56(3), 335–381.
- Kan, R., & Zhou, G. (2007). Optimal portfolio choice with parameter uncertainty. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 42(3), 621–656.
- Tu, J., & Zhou, G. (2011). Markowitz meets Talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies. *Journal of Financial Economics*, 99(1), 204–215.
- He, G., & Litterman, R. (1999). The intuition behind Black-Litterman model portfolios. Goldman Sachs Investment Management Research.
- Martellini, L., & Ziemann, V. (2010). Improved estimates of higher-order comoments and implications for portfolio selection. *Review of Financial Studies*, 23(4), 1467–1502.
- Jorion, P. (1986). Bayes-Stein estimation for portfolio analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21(3), 279–292.