

2025 Fall

# 사후 공분산과 베이지안 업데이트를 활용한 NCO 자산배분 개선 방안 제안

Posterior-NCO: Improving NCO Portfolio Allocation  
via Posterior Covariance and Bayesian Updating

Quantifi Sogang

서강대학교 경제대학  
경제학부 이정훈

2025.09.14

## 초 록

본 연구는 투자자의 주관적 견해(view)를 베이지안으로 반영해 사후 공분산(posterior covariance)을 구성하고, 이를 기반으로 계층적 군집화와 Nested Clustered Optimization(NCO)을 수행하는 Posterior-NCO 자산배분 모형을 제안한다. 구체적으로 Black–Litterman(BL) 접근법으로 시장균형(prior)과 뷔행렬을 결합해 사후 평균·공분산을 도출한 뒤, 상관행렬 변환, 노이즈 제거(마르첸코–파스퇴르 적합, detone 포함), 계층적 군집화, NCO의 순서로 최종 배분을 산출한다. 본 방법의 성능은 Monte Carlo 모의실험과 실제 데이터 기반 실증분석을 병행해 검증하였다.

모의실험에서는 동일 전처리(lw\_constant\_corr, mp\_constant, detone=True) 하에 Markowitz(MVO), 표준 NCO, IVP, Posterior-NCO를 비교했다. BL 스타일 시나리오에서 Posterior-NCO의 평균 Sharpe는 0.002550으로 가장 높았고, Markowitz(0.002468) 대비 +3.32%, 표준 NCO(0.002410) 대비 +5.81% 개선을 보였다. 다만 위험지표에서는 Posterior-NCO의 평균 변동성(0.146326)이 NCO(0.129773) 대비 +12.8%, Markowitz(0.137299) 대비 +6.6% 높았으며, 평균 최대낙폭(MDD)도 Markowitz(−0.954325) 대비 절대치 기준 약 0.0134(≈1.41%) 악화되었다. 포트폴리오 집중도(HHI)는 Posterior-NCO(0.057885)가 NCO(0.064098)보다 낮아(≈−9.7%) 상대적으로 더 분산되는 특성이 확인되었고, 승률(WinRate)은 Markowitz 대비 0.511, NCO 대비 0.528로 우위를 나타냈다. Correlation View Blending 시나리오에서는 평균 Sharpe가 Markowitz(0.001783)가 가장 높고 Posterior-NCO는 0.001518으로 NCO(0.001422) 대비 +6.75% 개선되었으나 Markowitz 대비 −14.86% 낮았다. 이 경우 Posterior-NCO의 변동성(0.128305)은 NCO(0.129832)보다 낮았고, 평균 MDD와 HHI도 소폭 개선되어 안정성 측면의 이점이 관찰되었다.

실증분석은 S&P 100 유니버스를 사용하여 수행되었다. BL의 view로 Market Neutral(=market cap)을 기본 적용하고, 기본 하이퍼파라미터를  $\tau = 0.02$ ,  $\kappa = 2.00$ (confidence=0.5)로 두었을 때, Posterior-NCO의 연환산 Sharpe Ratio는 0.7045로 NCO/IVP(≈0.644) 및 Markowitz(0.4752)를 상회하였다. 또한 PSR=0.9741, DSR=0.7465로 통계적 견고성 지표에서도 일관된 우위를 보였으며, 누적수익 1.4991(149.91%), MDD −0.3250(−32.5%)로 네 방법 중 가장 양호했다. 반면 연환산 Turnover 2.9007로 거래활동이 증가하는 대가가 확인되었다. 뷔 민감도 측면에서  $\kappa$ 는 Market Cap, Forward 12M PER, FY01/PBR 세 뷔 모두에서 위험–수익 트레이드오프를 주도적으로 조절하는 파라미터로 작동했으며,  $\kappa$  하향(=뷰 신뢰도 상향) 시 Sharpe·수익률은 상승하나 변동성·MDD가 확대되었다. 반대로  $\kappa$  상향 시 변동성·MDD와 HHI가 낮아지며 분산이 확대되는 대신 Sharpe는 완만히 하락했다.  $\tau$ 는 0.02–0.10

범위에서 상대 성과 순서를 바꿀 정도의 영향은 보이지 않았다. 뷰별로는 Forward 12M PER 가 성장·모멘텀 환경에서 가장 높은 Sharpe(예:  $\tau = 0.02$ ,  $\kappa = 0.25$  에서 Sharpe  $\approx 1.0039$ , 연환산 수익률  $\approx 25.55\%$ )을 시현했으나 MDD  $-0.4208$ 로 공격적 성향이 뚜렷했고, FY0 1/PBR 은 변동성  $\approx 0.1958$ , MDD  $-0.3753$  수준으로 방어적 효용이 컸다. Market Cap 뷰는  $\kappa$  조절을 통해 공격성/분산도(HHI)를 매끄럽게 제어하는 베이스라인으로 유용했다.

종합하면, Posterior-NCO 는 평균-분산 추정의 취약점을 NCO 의 구조적 리스크 안정화와 BL 의 견해 반영으로 보완하여, Markowitz 와 표준 NCO 대비 Sharpe, PSR, DSR, MDD, HHI 등 핵심 지표에서 동시 개선 가능성을 모의실험과 실증에서 확인하였다. 다만  $\kappa$  를 낮춰 공격적으로 운용할수록 턴오버와 하방 리스크가 함께 커지므로 거래비용·세금·위험 제약 하에서는  $\kappa$  상향, 리밸런싱 간격 조절, 극단값 완화(winsorization) 등으로 구현비용과 리스크를 관리해야 한다. 본 연구는 뷰의 성격(기댓값 vs 상관), 하이퍼파라미터( $\kappa$ ,  $\tau$ ), 전처리(denoising/shrinkage, detone)에 민감하게 반응하는 실행 프레임워크의 설계·운용 기준을 제시하며, 향후 PBO 기반 과최적화 진단, 거래비용 내생화, 동적 베이지안 뷰 업데이트, 다자산 확장을 통해 실무 적용력을 더욱 높일 수 있을 것이다.

Keywords: Posterior Covariance, Nested Clustered Optimization (NCO), Bayesian Update, Black-Litterman, Portfolio Optimization, Monte Carlo Simulation, Asset Allocation, Machine Learning

## Abstract

This study proposes a Posterior-NCO asset allocation model that incorporates investors' subjective views via a Bayesian framework to construct posterior covariance, and then applies hierarchical clustering and Nested Clustered Optimization (NCO) based on it. Specifically, using the Black–Litterman (BL) approach, we combine the market equilibrium (prior) with a view matrix to derive posterior means and posterior covariance, then produce final portfolio weights through a sequence of correlation-matrix transformation, noise reduction (Marchenko–Pastur fitting, including detoning), hierarchical clustering, and NCO. The performance of the proposed method is validated through both Monte Carlo simulations and an empirical analysis using real data.

In the simulations, we compare Markowitz (MVO), standard NCO, IVP, and Posterior-NCO under identical preprocessing (`lw_constant_corr`, `mp_constant`, `detone=True`). In the BL-style scenario, Posterior-NCO achieves the highest average Sharpe ratio of 0.002550, improving upon Markowitz (0.002468) by +3.32% and standard NCO (0.002410) by +5.81%. However, in terms of risk metrics, Posterior-NCO's average volatility (0.146326) is higher than NCO (0.129773) by +12.8% and Markowitz (0.137299) by +6.6%, and its average maximum drawdown (MDD) worsens by approximately 0.0134 ( $\approx 1.41\%$ ) in absolute value relative to Markowitz ( $-0.954325$ ). Portfolio concentration (HHI) for Posterior-NCO (0.057885) is lower than for NCO (0.064098) by about  $-9.7\%$ , indicating a relatively more diversified allocation, and its win rate shows an advantage of 0.511 over Markowitz and 0.528 over NCO. In the Correlation View Blending scenario, Markowitz records the highest average Sharpe (0.001783), while Posterior-NCO posts 0.001518, improving over NCO (0.001422) by +6.75% but falling short of Markowitz by  $-14.86\%$ . In this case, Posterior-NCO's volatility (0.128305) is lower than NCO's (0.129832), and average MDD and HHI also improve slightly, indicating an advantage on the stability front.

The empirical analysis uses the S&P 100 universe. With Market Neutral (=market cap) as the default BL view and hyperparameters  $\tau = 0.02$  and  $\kappa = 2.00$  (`confidence=0.5`), the annualized Sharpe ratio of Posterior-NCO is 0.7045, exceeding NCO/IVP ( $\approx 0.644$ ) and Markowitz (0.4752). It also shows consistent superiority in statistical robustness metrics with PSR=0.9741 and DSR=0.7465, and delivers the best cumulative return of 1.4991 (149.91%) and MDD of  $-0.3250$  ( $-32.5\%$ ) among the four methods. On the other hand, the

annualized turnover of 2.9007 indicates a cost of increased trading activity. Regarding view sensitivity,  $\kappa$  serves as the dominant parameter governing the risk–return trade-off across the three views (Market Cap, Forward 12M PER, FY0 1/PBR): lowering  $\kappa$  (i.e., increasing view confidence) raises Sharpe and returns but also expands volatility and MDD; raising  $\kappa$  reduces volatility, MDD, and HHI (greater diversification) at the expense of a gradual decline in Sharpe.  $\tau$  does not show an influence large enough to change the relative performance ranking within the range of 0.02–0.10. By view, Forward 12M PER achieves the highest Sharpe in growth/momentum regimes (e.g., at  $\tau = 0.02$ ,  $\kappa = 0.25$ , Sharpe  $\approx 1.0039$  and annualized return  $\approx 25.55\%$ ) but with an expanded MDD of  $-0.4208$ , exhibiting an aggressive profile; FY0 1/PBR shows strong defensive utility with volatility  $\approx 0.1958$  and MDD  $-0.3753$ . The Market Cap view is useful as a baseline for smoothly controlling aggressiveness and diversification (HHI) via  $\kappa$  adjustments.

In sum, Posterior-NCO mitigates the weaknesses of mean–variance estimation by combining NCO’s structural risk stabilization with BL’s incorporation of investor views, and demonstrates, in both simulations and empirical tests, the potential for simultaneous improvement in key metrics—Sharpe, PSR, DSR, MDD, and HHI—over Markowitz and standard NCO. However, operating more aggressively by lowering  $\kappa$  increases both turnover and downside risk; therefore, under constraints related to transaction costs, taxes, and risk limits, it is necessary to manage implementation costs and risks through higher  $\kappa$ , adjustment of rebalancing frequency, and outlier attenuation (winsorization). This study provides design and operational guidelines for an execution framework that is sensitive to the nature of views (expected return vs. correlation), hyperparameters ( $\kappa$ ,  $\tau$ ), and preprocessing (denoising/shrinkage, detone), and suggests that future work incorporating PBO-based overfitting diagnostics, endogenous transaction costs, dynamic Bayesian view updates, and multi-asset extensions can further strengthen practical applicability.

Keywords: Posterior Covariance, Nested Clustered Optimization (NCO), Bayesian Update, Black-Litterman, Portfolio Optimization, Monte Carlo Simulation, Asset Allocation, Machine Learning

## 목 차

### 1. 서론

1.1 연구 배경 및 필요성

1.2 연구 목적 및 문제 제기

### 2. 선행 연구

2.1 Markowitz Mean-Variance Optimization

2.2 Black-Litterman Optimization

2.3 Shrinkage 및 공분산 추정 기법

2.4 Nested Clustered Optimization (NCO)

### 3. Montecarlo Experiments

3.1 Methodology

3.2 시뮬레이션 설계

### 4. Montecarlo 실험 결과

### 5. 실증 분석

5.1 시뮬레이션 방법 및 가정

5.2 View 의 지정

5.3 성과 지표

5.4 실증분석 결과

5.4.1 기본 분석

5.4.2 Black Litterman parameter 민감도 분석

### 6. 결론

6.1 해석 및 시사점

6.2 한계 및 연구 과제

### 참고 문헌

## 1. 서론 (Introduction)

### 1.1 연구 배경 및 필요성

현대 포트폴리오 이론의 출발점인 Markowitz(1952)의 평균-분산 모형은 자산의 기대수익률과 공분산 행렬을 기반으로 최적화 문제를 설정함으로써 투자자의 효용을 극대화하는 이론적 틀을 제공하였다. 그러나 실제 금융시장에서 이 모형을 적용하는 과정에서는 심각한 추정오차(estimation error) 문제가 발생한다. 특히 포트폴리오 내의 자산의 개수가 증가할수록 표본 공분산 행렬은 불안정하게 추정되며, 두꺼운 꼬리 분포가 빈번하게 관측되는 금융 데이터의 특성상 분산 추정치가 극단적으로 왜곡되는 경우도 빈번하다. 이러한 이유로 고전적 Markowitz 모형은 실무적으로는 포트폴리오 분산을 과소 추정하거나 특정 자산군에 과도한 비중을 부여하는 등 실질적 활용에 제약이 크다.

이러한 문제를 보완하기 위해 다양한 연구들이 공분산 행렬의 추정 방식을 개선하는 데 집중해 왔다. shrinkage estimator, factor model 기반 공분산 추정, random matrix theory를 이용한 denoising 기법 등이 그 대표적 예이다. Lopez de Prado(2016, 2020)는 기존의 공분산 추정치가 가지는 불안정성 자체를 피하기 위해 새로운 최적화 알고리즘인 Nested Clustered Optimization(NCO)을 제안하였다. NCO는 자산 간 상관구조를 기반으로 계층적 군집화를 수행하고, 클러스터 단위에서의 최적화 결과를 재귀적으로 결합하여 최종 가중치를 산출한다. 이러한 절차는 전통적 Markowitz 대비 분산 추정에 덜 민감하며, 샘플 외 (out-of-sample) 성과에서 개선된 결과를 제공하는 것으로 알려져 있다.

그러나 NCO 역시 한계가 존재한다. 무엇보다도 모든 정보가 과거 표본 데이터로부터만 도출된다는 점에서, 투자자의 주관적 견해(views)나 외생적 정보(external information)를 반영할 수 없다는 제약이 있다. 실무적으로는 매크로 이벤트(Macro Event), 섹터 전망, 혹은 특정 기업의 펀더멘털에 관한 애널리스트 견해 등 데이터 외적 정보가 자산 배분 의사결정에 중요한 역할을 한다. 하지만 기존의 NCO는 이러한 견해를 반영할 수 있는 구조적 장치를 갖추지 못했다.

이를 해결하기 위해 본 연구는 Bayesian 업데이트를 활용하여 투자자의 견해를 정량적으로 통합할 수 있는 확률적 구조를 도입한다. 특히 Black-Litterman 모형이나 Entropy Pooling과 같은 방법론은 사전적 시장균형정보(prior market equilibrium)를 투자자 견해(likelihood)와 결합해 사후적 기대수익률 및 공분산을 산출하는 틀을 제공한다. 이러한 posterior moments는 데이터 기반 추정치를 보완하며, 견해의 불확실성까지 반영할 수 있다는 장점을 지닌다.

### 1.2 연구 목적 및 문제 제기

본 연구의 목적은 Posterior-NCO라는 새로운 자산배분 프레임워크를 제안하고 그 성과를 검증하는 데 있다. Posterior-NCO란, Bayesian 업데이트를 통해 산출된 사후 공분산(posterior covariance) 또는 사후 상관행렬(posterior correlation matrix)을 NCO의 입력으로 사용하여, 투자자의 견해와 시장 데이터를 동시에 반영한 자산배분 결과를 도출하는 방법론이다. 이는 기존 NCO의 구조적 안정성과 Black-Litterman 류 접근법의 견해 반영 능력을 결합한 모형으로 이해할 수 있다.

본 연구가 제기하는 핵심 문제는 다음과 같다. 첫째, 투자자의 견해를 반영한 posterior covariance를 어떻게 효율적으로 NCO 프레임워크에 통합할 수 있는가? 둘째, 이렇게 구성된 Posterior-NCO는 기존 Markowitz 모형, IVP(naïve equal risk budgeting), 표준 NCO 대비 어떠한 성과 특성을 보이는가?

이러한 문제를 해결하기 위해 본 연구는 몬테카를로 시뮬레이션을 수행하여 다양한 시장 시나리오를 재현하고, 각 방법론의 샘플 내 및 샘플 외(out-of-sample) 성과를 비교한다. 이를 통해 Posterior-NCO가 단순히 이론적 확장에 그치는 것이 아니라, 불확실성이 높은 시장 환경에서 실질적 성과 개선 가능성을 지니는지를 검증하고자 한다.

결국 본 연구의 의의는 기존 NCO의 강점인 분산 안정성을 유지하면서도, 투자자의 주관적 견해를 정량적으로 반영할 수 있는 확장된 자산배분 틀을 제시하는 데 있다. 이는 학문적으로는 Bayesian 업데이트와 기계학습(Machine Learning) 기반 최적화를 결합한 새로운 포트폴리오 최적화 방법론을 제안한다는 점에서 기여가 있으며, 실무적으로는 매니저 뷰를 체계적으로 반영한 자산배분 전략을 구현할 수 있다는 점에서 활용 가능성이 높다.

## 2. 선행 연구

### 2.1 Markowitz Mean-Variance Optimization

Markowitz(1952)가 제시한 평균-분산 최적화는 현대 포트폴리오 이론의 출발점으로, 투자자의 목표는 주어진 기대수익률을 달성하면서 분산을 최소화하는 것이다.  $N$  개의 자산이 존재한다고 가정하고,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ 은 포트폴리오 가중치 벡터,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ 은 기대수익률 벡터,  $\Sigma$ 는  $N \times N$  공분산 행렬이라고 하자. 포트폴리오의 기대수익률은

$$\mu_p = w^T \mu$$

이고, 포트폴리오의 분산은

$$\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$$

으로 정의된다. 투자자는  $\mu_p$ 를 일정하게 고정한 상태에서  $\sigma_p^2$ 를 최소화하는 문제를 푼다. 따라서 최적화 문제는

$$\begin{aligned} \min_w w^T \Sigma w &\quad \text{subject to} & w^T 1 = 1, \\ && w^T \mu = \mu_p \end{aligned}$$

로 설정된다. 여기서  $w^T 1 = 1$ 은 전체 투자 비중의 합이 1이라는 제약 조건이며,  $w^T \mu = \mu_p$ 는 목표 기대수익률 제약이다. 라그랑지안(Lagrangian)을 설정하면

$$L(w, \lambda, \gamma) = w^T \Sigma w - \lambda(w^T \mu - \mu_p) - \gamma(w^T 1 - 1)$$

이 된다.  $w$ 에 대해 일차 미분하면

$$\frac{\partial L}{\partial w} = 2\Sigma w - \lambda\mu - \gamma 1 = 0$$

이고, 따라서

$$\Sigma w = \frac{\lambda}{2} \mu + \frac{\gamma}{2} \mathbf{1}$$

이라는 조건을 얻는다. 이 식을 풀기 위해 보통 보조 정의를 사용한다.

$$A = \mu^T \Sigma^{-1} \mu, \quad B = \mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}, \quad C = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}, \quad D = AC - B^2$$

라고 하자. 이때 최적 가중치는

$$w^*(\mu_p) = \Sigma^{-1} \left[ \frac{C\mu_p - B}{D} \mu + \frac{A - B\mu_p}{D} \mathbf{1} \right]$$

으로 주어진다. 이 해는  $\mu_p$ 에 따라 달라지며,  $\mu_p$ 의 가능한 범위를 변화시키면 효율적 투자선이 도출된다. 효율적 투자선의 포트폴리오 분산은

$$\sigma_p^2 = \frac{C\mu_p^2 - 2B\mu_p + A}{D}$$

으로 표현된다. 따라서  $(\sigma_p^2, \mu_p)$  공간에서 효율적 투자선은 이차식 곡선 형태를 가지며, 투자자는 자신이 가진 위험 회피 계수  $a$ 에 따라 최적의 점을 선택한다. 위험 회피적 효용함수는

$$U = \mu_p - \frac{a}{2} \sigma_p^2$$

로 나타낼 수 있고,  $a$ 가 클수록(즉 위험 회피 성향이 강할수록) 효율적 투자선 상에서 분산이 작은 포트폴리오를 선택한다. 무위험자산이 존재한다고 가정하면 상황은 단순화된다. 무위험 수익률을  $r_f$ 라고 할 때, 포트폴리오의 기대수익은

$$\mu_c = r_f + \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} \sigma_c$$

로 확장되며, 이는 직선 형태의 자본시장선(CML)을 형성한다. 따라서 모든 투자자는 효율적 투자선 상의 특정 포트폴리오 대신, 시장 포트폴리오와 무위험자산을 조합하여 동일한 효용을 달성할 수 있다. 이때 시장 포트폴리오는 Sharpe ratio 가 최대인 포트폴리오이며, 이는

$$\max_w \frac{w^T \mu - r_f}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

를 만족하는  $w$ 로 정의된다. 결과적으로 평균–분산 최적화는 시장 포트폴리오와 무위험자산의 조합이 모든 합리적 투자자의 선택으로 귀결된다는 결론을 낳는다.

그러나 실제 적용에서는 여러 문제가 발생한다. 기대수익률  $\mu$  와 공분산 행렬  $\Sigma$  는 표본 데이터에서 추정되는데, 작은 오차에도 최적화 해가 민감하게 반응한다. 특히 기대수익률은 추정오차가 크기 때문에 샘플 외(out-of-sample) 성과가 불안정하다. 또한 자산 수  $N$  이 표본 수  $T$  보다 커질 때,  $\Sigma$  는 역행렬이 불안정하거나 존재하지 않는 경우가 많아 수치적 문제가 발생한다. 금융 데이터가 분포의 두꺼운 꼬리와 비정규성을 가지는 현실에서는 분산이 위험을 충분히 설명하지 못한다는 점도 제약이다. 최적화 결과가 특정 자산에 과도한 비중을 부여하는 집중 현상 또한 실무 적용의 걸림돌이다.

따라서 Markowitz 모형은 이론적으로는 효율적 투자선과 최적 포트폴리오의 개념을 정립하는 데 크게 기여했으나, 실무적으로는 추정오차와 고차원 문제로 인해 그대로 활용되기 어렵다. 이러한 한계를 극복하기 위해 이후 Black–Litterman 모형, shrinkage 추정치, 그리고 NCO 와 같은 새로운 방법론들이 등장하게 되었다.

## 2.2 Black–Litterman Optimization

Black 과 Litterman(1991, 1992)은 Markowitz 평균–분산 최적화가 가지는 극단적 해(extreme weights) 문제와 추정오차 불안정성을 완화하기 위해 Bayesian 적 접근을 적용한 자산배분 모형을 제안하였다. 핵심 아이디어는 시장균형에서 도출된 사전 기대수익률(prior mean)과 투자자의 견해(Views)를 결합하여 사후 기대수익률(posterior mean)과 사후 공분산(posterior covariance)을 추정하는 것이다. 먼저, 균형 상태에서의 기대수익률은 다음과 같이 정의된다.

$$\pi = \delta \Sigma w_{mkt}$$

여기서  $\pi$ 는  $N$  차원 벡터로 균형 기대수익률,  $\delta$ 는 위험회피계수,  $\Sigma$ 는  $N \times N$  공분산 행렬,  $w_{mkt}$ 는 시장 포트폴리오의 가중치 벡터이다. 이 값이 Black–Litterman 모형에서의 사전 평균 역할을 한다. 투자자의 견해(Views)는 선형 제약식 형태로 표현된다.

$$P \mu = Q + \varepsilon$$

여기서  $P$ 는  $k \times N$  뷔 행렬(view matrix),  $Q$ 는  $k \times 1$  뷔 기대수익률 벡터,  $\varepsilon$ 은 뷔의 오차항으로 가정하며  $\varepsilon \sim N(0, \Omega)$ 로 놓는다.  $\Omega$ 는 뷔의 불확실성을 나타내는  $k \times k$  공분산 행렬이다. 즉, 투자자는 자산들의 선형 조합에 대해 특정 기대수익률을 가진다는 형태로 견해를 표명한다.

Black–Litterman 모형은 Bayesian 업데이트 공식을 통해 사후 분포를 구한다. 사전 분포는 다음과 같다.

$$\mu \sim N(\pi, \tau \Sigma)$$

여기서  $\tau$ 는 스케일링 파라미터로, 사전 공분산의 불확실성 정도를 조절한다. 투자자의 견해가 주어졌을 때, 사후 분포는 다음과 같이 계산된다.

$$\mu | Q \sim N(\mu_{BL}, \Sigma_{BL})$$

사후 평균은

$$\mu_{BL} = ((\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P)^{-1} ((\tau \Sigma)^{-1} \pi + P^T \Omega^{-1} Q)$$

사후 공분산은

$$\Sigma_{BL} = ((\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P)^{-1}$$

이다. 이 식에서 보듯이, 시장 균형정보( $\pi, \Sigma$ )와 투자자의 견해( $P, Q, \Omega$ )가 결합되어 새로운 기대수익률과 공분산이 산출된다. 이 과정의 직관은 다음과 같다. 투자자의 견해가 불확실성이 클 경우( $\Omega$ 가 큰 경우) 사후 평균은 시장 균형 수익률  $\pi$ 에 가깝게 수렴한다. 반대로 견해의 불확실성이 작을 경우( $\Omega$ 가 작은 경우) 사후 평균은  $Q$ 에 더 강하게 끌린다. 즉, 시장 정보와 투자자 견해 사이의 신뢰 수준을 조정하는 가중치 역할을 하는 것이 바로  $\Omega$ 와  $\tau$ 이다.

이후 Black–Litterman 모형에서 산출된  $\mu_{BL}$ 과  $\Sigma_{BL}$ 을 Markowitz 평균–분산 최적화 문제에 대입하면, 극단적 가중치 문제를 완화하면서도 투자자의 신념을 반영한 합리적 자산배분 결과를 얻을 수 있다. 즉, 최적화 문제는

$$\min_w w^T \Sigma_{BL} w \quad \text{subject to} \quad w^T \mathbf{1} = 1,; w^T \mu_{BL} = \mu_p$$

로 다시 쓸 수 있다. 여기서 제약 조건은 원래 Markowitz 문제와 동일하지만, 기대수익률과 공분산이 posterior 값으로 대체되었다는 점이 핵심이다.

라그랑지안을 설정하면

$$L(w, \lambda, \gamma) = w^T \Sigma_{BL} w - \lambda(w^T \mu_{BL} - \mu_p) - \gamma(w^T \mathbf{1} - 1)$$

이 되고, 일계 조건은

$$\frac{\partial L}{\partial w} = 2\Sigma_{BL}w - \lambda\mu_{BL} - \gamma\mathbf{1} = 0$$

이다. 따라서

$$\Sigma_{BL}w = \frac{\lambda}{2}\mu_{BL} + \frac{\gamma}{2}\mathbf{1}$$

이 되고, 이를 풀기 위해 보조 정의를 두면

$$A = \mu_{BL}^T \Sigma_{BL}^{-1} \mu_{BL}, \quad B = \mu_{BL}^T \Sigma_{BL}^{-1} \mathbf{1}, \quad C = \mathbf{1}^T \Sigma_{BL}^{-1} \mathbf{1}, \quad D = AC - B^2$$

이다. 이때 최적 가중치는

$$w^*(\mu_p) = \Sigma_{BL}^{-1} \left[ \frac{C\mu_p - B}{D} \mu_{BL} + \frac{A - B\mu_p}{D} \mathbf{1} \right]$$

으로 표현된다. 즉, Markowitz 의 일반 해와 동일한 구조이지만, 기대수익률 벡터와 공분산 행렬이 posterior 값( $\mu_{BL}, \Sigma_{BL}$ )으로 치환된 것이다. 효율적 투자선 역시 posterior 기반으로 새롭게 정의되며, 이는 투자자의 뷔를 반영한 “사후 효율적 투자선”이라고 부를 수 있다.

이 과정의 의미는 두 가지다. 첫째, 극단적 해(extreme weights)가 완화된다. 이는  $\mu_{BL}$ 이 균형 수익률  $\pi$ 와 뷔  $Q$  사이에서 조정된 값이므로, 표본 평균을 직접 사용하는 것보다 안정적이기 때문이다. 둘째, 투자자의 견해

강도( $\Omega$ )와 시장 불확실성( $\tau$ )이 최적화 해에 직접 반영된다. 따라서 같은 제약 조건을 두더라도 결과 포트폴리오는 데이터 기반 정보와 투자자의 신념을 동시에 반영하는 균형점을 찾게 된다.

### 2.2.1 사후 추정량 기반 효율적 투자선

먼저 보조량을 사후 모멘트로 정의한다.

$$A = \mu_{BL}^T \Sigma_{BL}^{-1} \mu_{BL}, \quad B = \mu_{BL}^T \Sigma_{BL}^{-1} \mathbf{1}, \quad C = \mathbf{1}^T \Sigma_{BL}^{-1} \mathbf{1}, \quad D = AC - B^2$$

목표 기대수익률이  $\mu_p$ 인 효율적 포트폴리오의 분산은

$$\sigma_p^2 = \frac{C\mu_p^2 - 2B\mu_p + A}{D}$$

따라서  $(\sigma_p^2, \mu_p)$  평면에서의 사후 효율적 투자선은 위 이차식으로 주어진다. 해당 효율적 포트폴리오의 가중치는

$$w^*(\mu_p) = \Sigma_{BL}^{-1} \left[ \frac{C\mu_p - B}{D}, \mu_{BL}; +; \frac{A - B\mu_p}{D}, 1 \right]$$

이때 사후 글로벌 최소분산(GMV) 포트폴리오의 가중치, 기대수익, 분산은 각각

$$\begin{aligned} w_{GMV} &= \frac{\Sigma_{BL}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma_{BL}^{-1} \mathbf{1}} \\ \mu_{GMV} &= \frac{B}{C} \\ \sigma_{GMV}^2 &= \frac{1}{C} \end{aligned}$$

이다. 무위험수익률  $r_f$ 가 존재할 때, 사후 최대 샤프 포트폴리오의 가중치는

$$w_{tan} \propto \Sigma_{BL}^{-1} (\mu_{BL} - r_f, 1) \quad (\text{normalization : } \mathbf{1}^T w_{tan} = 1)$$

이때 사후 최대 샤프 비율 포트폴리오의 샤프비율은

$$SR_{tan} = \frac{w_{tan}^T \mu_{BL} - r_f}{\sqrt{w_{tan}^T \Sigma_{BL} w_{tan}}}$$

이고, 무위험자산과의 조합으로 얻는 사후 자본시장선(CML)은 임의의 위험자산 조합의 표준편차  $\sigma_c$ 에 대해

$$\mu_c = r_f + SR_{tan}, \sigma_c$$

이다. 또는 포트폴리오 가중치 관점에서 (무위험자산과 최대 샤프비율 포트폴리오의 선형결합)

$$w_c = \alpha, w_{tan} + (1 - \alpha), 0 \quad (\text{여기서 } \alpha \text{는 위험자산 비중})$$

정리하면, Black–Litterman에서 얻은  $\mu_{BL}, \Sigma_{BL}$ 을 사용하면 Markowitz의 모든 닫힌 해가 그대로 유지되며, 효율적 투자선, GMV, 최대 샤프비율의 해, CML이 모두 “사후 적률”로 재정의된다. 이를 통해 데이터 기반 표본 추정치 대신 시장균형과 뷰(및 그 불확실성)를 반영한 효율적 집합을 직접 구축할 수 있다. 그러나, Black-Litterman 모형에서 투자자의 견해가 업데이트 된다 하더라도 Markowitz에서 수행하는 최적화 과정이 존재하기 때문에 특정 자산에 비중이 집중되는 문제가 여전히 존재한다.

### 2.3 Shrinkage 및 공분산 추정 기법

평균–분산 최적화 모형의 성과를 결정짓는 핵심 요소는 공분산 행렬의 추정치이다. 그러나 금융 데이터는 표본 수가 제한적인 경우가 많고, 자산 수가 증가할수록 표본 공분산 추정치의 불안정성은 심화된다. 이러한 상황에서 표본 공분산은 극단적인 고유치 분포를 보이며, 최적화 과정에서 역행렬 계산을 불안정하게 만들고, 결과적으로 극단적인 자산 비중을 산출한다. 이를 해결하기 위한 대표적 방법이 Shrinkage 추정과 랜덤 행렬이론(Random Matrix Theory, RMT)을 활용한 정화(denoising) 기법이다.

우선,  $T$ 기간 동안의 수익률 벡터를  $x_t \in R^N$ 이라 할 때, 표본 공분산은 다음과 같이 정의된다.

$$S = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{\mu})(x_t - \bar{\mu})^T$$

여기서  $\mu$ 는 표본 평균이다. 이 추정치는 비편향적이지만, 고차원 환경( $q = N/T$ 가 큰 경우)에서는 고유치 분포가 실제보다 과도하게 펴지고, 진정한 신호(signal)보다 노이즈(noise)를 많이 반영하게 된다. 이를 완화하기 위해 Shrinkage 추정은 표본 공분산을 구조적 타깃  $T$  쪽으로 수축한다. 기본 형태는 다음과 같다.

$$\widehat{\Sigma_{sh}} = (1 - \alpha)S + \alpha T, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

여기서  $T$ 는 안정적인 구조를 가정한 타깃 행렬이고,  $\alpha$ 는 수축 강도이다. 가장 단순한 타깃은 스케일된 단위 행렬(identity-scaled matrix)로, 이는 모든 자산의 분산을 동일하게 두는 것이다. 또 다른 대표적 타깃은 상수상관(constant-correlation) 구조로, 모든 자산쌍의 상관계수를 동일하게 가정한다. Ledoit 와 Wolf(2004)는  $\alpha$ 의 최적값을 Frobenius 위험  $E|\widehat{\Sigma_{sh}} - \Sigma|_F^2$ 을 최소화하는 값으로 제안하였으며, 이를 통해 닫힌형 근사치를 얻을 수 있다. 그 결과, Shrinkage 추정치는 조건수가 안정적이고 샘플 외 성과도 향상되는 것으로 알려져 있다. 선형 Shrinkage 가 모든 원소를 동일 비율로 수축한다면, 비선형 Shrinkage 는 고유치 단위에서 서로 다른 수축을 적용한다. 표본 공분산의 고유분해를  $S = U\Lambda U^T$ 라 할 때,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ 이다. 비선형 Shrinkage 는 각 고유치  $\lambda_i$ 를 새로운 값  $\widehat{\delta}_i$ 로 변환하여 다음과 같이 정의한다.

$$\widehat{\Sigma_{NLS}} = U, \text{diag}(\widehat{\delta}_1, \dots, \widehat{\delta}_N), U^T$$

Ledoit 와 Wolf(2020)은 Stieljes 변환을 활용하여  $\widehat{\delta}_i$ 의 닫힌형 근사식을 제시하였다. 이 접근은 노이즈로 오염된 작은 고유치들을 강하게 수축하고, 정보가 담긴 큰 고유치는 덜 수축함으로써 분산-편향 균형을 최적화한다. 랜덤 행렬이론(Random Matrix Theory, RMT)은 Marcenko-Pastur 분포를 활용하여 고유치 분포의 이론적 지지구간을 제시한다. 수익률이 독립 동분산일 때, 표본 상관행렬의 고유치 분포는 다음 구간에 속한다.

$$\lambda_{\pm} = \sigma^2 (1 \pm \sqrt{q})^2, \quad q = \frac{N}{T}$$

실제 표본에서  $\lambda_i$  가  $\lambda_+$  이하인 고유치는 노이즈로 간주할 수 있으며, 이를 동일한 상수로 치환하거나 평균값으로 평활하는 과정을 거친다. 이를 고유치 정화(eigenvalue cleaning)라 하며, 최종적으로 얻어진 정화된 상관행렬을 다시 자산별 표준편차로 스케일링하여 공분산으로 복원한다.

$$\widehat{\Sigma}_{clean} = D^{1/2} \widehat{\Lambda}_{clean} D^{1/2}, \quad D = \text{diag}(\widehat{\sigma}_1^2, \dots, \widehat{\sigma}_N^2)$$

여기서  $\widehat{R_{clean}}$ 은 정화된 상관행렬이다. 또한 시장모드를 제거하기 위한 de-toning 절차도 자주 사용되며, 이는 가장 큰 고유치와 고유벡터에 해당하는 시장 공통요인을 분리하여 상관구조를 더욱 명확히 한다. 이외에도 정규화 기반 방법들이 존재한다. 대표적으로 Ridge 형태의 공분산 추정은

$$\widehat{\Sigma_{ridge}} = S + \lambda I$$

로 정의되며,  $\lambda > 0$ 은 역행렬의 안정성을 보장한다. 한편, 공분산 대신 정밀도 행렬(precision matrix =  $\Sigma^{-1}$ )의 희소성을 가정하는 방법도 있다. Graphical Lasso 는 다음 최적화 문제를 통해 정밀도 행렬을 추정한다.

$$\widehat{\Theta} = \arg \max_{\Theta > 0} \{ \log \det \Theta - \text{tr}(S\Theta) - \lambda |\Theta|_1 \}, \quad \widehat{\Sigma gl} = \widehat{\Theta}^{-1}$$

이 방법은 조건부 독립성 구조를 유도할 수 있어 해석성과 안정성을 동시에 확보할 수 있다. 결론적으로, Shrinkage 및 공분산 추정 기법은 Markowitz 모형의 가장 큰 문제인 추정오차를 완화하는 핵심 도구로 자리 잡았다. 이러한 기법들은 Posterior-NCO 프레임워크에서도 중요한 역할을 한다. 즉, Shrinkage 를 통해 안정화된 사전 공분산을 출발점으로 삼고, Bayesian 업데이트를 통해 투자자의 견해를 반영한 사후 공분산을 도출한 뒤, 이를 NCO 구조에 적용함으로써 견해와 데이터 기반 정보를 동시에 반영할 수 있는 자산배분 전략을 구현할 수 있다.

## 2.4 Nested Clustered Optimization (NCO)

Lopez de Prado(2016, 2020)는 고차원 금융 데이터에서 표본 공분산 추정의 불안정성을 극복하기 위한 대안적 방법으로 Nested Clustered Optimization(NCO)을 제안하였다. NCO 는 전통적인 Markowitz 최적화와 달리, 자산들 간의 상관구조를 군집화하여 다단계 최적화(nested optimization)를 수행한다. 이 방식은 공분산 추정치의 노이즈에 덜 민감하며, 결과적으로 샘플 외(out-of-sample) 성과가 개선된다. 먼저, 자산의 상관행렬을  $R$  이라 하자. 이를 거리행렬  $D$  로 변환하면

$$d_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \rho_{ij})}, \quad R = (\rho_{ij})$$

여기서  $\rho_{ij}$ 는 자산  $i$ 와  $j$ 의 상관계수이다. 거리 행렬  $D$ 를 기반으로 계층적 군집화(hierarchical clustering)를 수행하면, 유사한 자산들이 동일 군집으로 묶인다. NCO는 크게 두 단계를 반복적으로 수행한다. 첫 번째는, 군집 내 최적화이다. 군집  $C_k$ 에 포함된 자산들의 기대수익률과 공분산을  $\mu_{C_k}, \Sigma_{C_k}$ 라 하면, 군집 단위 최적화 문제는 다음과 같다.

$$\min_{w_{C_k}} w_{C_k}^T \Sigma_{C_k} w_{C_k} \quad \text{subject to} \quad w_{C_k}^T \mathbf{1} = 1$$

여기서  $w_{C_k}$ 는 군집 내 자산들의 상대적 가중치 벡터이다. 이 문제의 해는 글로벌 최적화보다 훨씬 안정적이며, 군집 내 상관성이 높을수록 분산 최소화 효과가 커진다. 두 번째는, 군집 간 최적화이다. 각 군집의 대표 자산은 군집 내 최적화 결과를 기반으로 정의된다. 구체적으로, 군집  $C_k$ 의 대표 포트폴리오 수익률은

$$r_{C_k} = w_{C_k}^T r_{assets}$$

으로 계산되며, 이들을 새로운 “자산”으로 간주하여 군집 간 최적화를 수행한다. 군집 간 최적화 문제는

$$\min_{w_{cluster}} w_{cluster}^T \Sigma_{cluster} w_{cluster} \quad \text{subject to} \quad w_{cluster}^T \mathbf{1} = 1$$

으로 주어지며,  $\Sigma_{cluster}$ 는 군집 포트폴리오들 간의 공분산 행렬이다. 이 과정을 재귀적(nested)으로 반복하면, 최종적으로 전체 포트폴리오의 가중치가 산출된다. 즉, 자산  $\rightarrow$  클러스터  $\rightarrow$  상위 클러스터 순으로 최적화가 계층적으로 이루어진다.

NCO의 장점은 다음과 같이 요약된다. 첫째, 고차원 공분산 추정치의 불안정성을 군집 구조로 분해하여 완화한다. 둘째, 샘플 내에서 과적합(overfitting)되기 쉬운 Markowitz 해와 달리, NCO는 군집 내 분산 최소화를 통해 샘플 외 성과가 개선된다. 셋째, 군집화가 시각적으로 해석 가능하므로, 투자자에게 설명력이 높은 구조적 포트폴리오를 제공한다.

수학적으로, 최종 포트폴리오의 가중치는 다음과 같이 계층적으로 정의된다.

$$w^* = \bigotimes_{k=1}^K w_{C_k} \otimes w_{cluster}$$

여기서  $\otimes$ 는 군집 내 가중치와 군집 간 가중치를 결합하는 연산이다. 예를 들어, 군집  $C_k$ 에 속한 자산  $i$ 의 최종 가중치는

$$w_i^* = w_{C_k,i} \cdot w_{cluster,k}$$

로 계산된다. NCO 는 효율적 투자선의 형태를 직접적으로 산출하지 않지만, 경험적으로는 Markowitz 최적화 대비 더 낮은 out-of-sample 분산을 제공한다. 이는 사실상 “군집 기반 효율적 투자선(clustered efficient frontier)”을 구성하는 것과 유사하다. 결론적으로, NCO 는 공분산 추정치의 한계와 최적화 불안정을 해결하기 위한 강력한 도구이며, Posterior-NCO 에서는 이 과정을 posterior 공분산  $\Sigma_{BL}$  또는 posterior 상관행렬  $R_{BL}$ 에 적용함으로써 Bayesian 적 견해와 데이터 기반 구조를 동시에 반영할 수 있다.

### 3. Montecarlo Experiments

본 연구의 목적은 투자자 견해(Views)를 Bayesian 방식으로 통합한 사후 모멘트(posterior moments)를 NCO 에 입력하여 몬테카를로 시뮬레이션을 통해 포트폴리오 성과를 비교·검증하는 것이다. 이를 위해 본 연구는 다음과 같은 일련의 절차로 구성된 방법론을 적용한다. 우선 관찰 가능한 수익률 시계열로부터 사전(prior) 공분산을 안정적으로 추정하고, 그 위에 투자자의 견해를 반영하여 사후 공분산·사후 기대수익률을 산출한다. 이어서 사후 상관구조를 계층적 군집화에 입력하고, Nested Clustered Optimization(NCO) 절차를 통해 최종 포트폴리오 가중치를 산출한다. 마지막으로 몬테카를로 반복을 통해 여러 시나리오에서의 성과 지표를 집계·비교한다.

#### 3.1 Methodology

표본 수익률 자료가 주어졌을 때 표본평균과 표본공분산은 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t$$

$$S = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu})(x_t - \hat{\mu})^T$$

현실에서 표본공분산  $S$ 는 고차원인 상황에서 노이즈에 취약하므로, 본 연구에서는 shrinkage 및 denoising 기법을 적용하여 사전 공분산  $\widehat{\Sigma_{prior}}$ 를 얻는다. 선형 shrinkage 의 기본 형태는 다음과 같다.

$$\widehat{\Sigma_{prior}} = (1 - \alpha)S + \alpha T, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

여기서  $T$ 는 구조적 타깃(예: constant-correlation, factor model)이고  $\alpha$ 는 수축 강도이다. 필요시 고유치 기반 비선형 수축 또는 Marčenko–Pastur 기반의 고유치 정화(eigenvalue cleaning)를 병행하여 상관구조의 벌크 노이즈를 제거한다. 정화된 상관행렬을  $\widehat{R}_{prior}$ 로 표기하고, 분산 스케일을 결합하여 공분산을 재구성한다.

$$\widehat{\Sigma}_{prior} = D_{prior}^{1/2}, \widehat{R}_{prior}, D_{prior}^{1/2}, \quad D_{prior} = \text{diag}(\widehat{\sigma_1^2}, \dots, \widehat{\sigma_N^2})$$

다음 단계는 투자자의 견해를 반영하는 것이다. 본 연구는 두 유형의 뷰 체계를 사용한다. 첫째, Black–Litterman 스타일의 기대수의 뷰로서 시장균형 기대수의  $\pi$ 를 출발점으로 한다.

$$\pi = \delta, \widehat{\Sigma_{prior}}, w_{mkt}$$

사전 분포는  $\mu \sim N(\pi, \tau \widehat{\Sigma_{prior}})$ 로 가정하고, 사용자는 선형 뷰  $P\mu = Q + \varepsilon; \varepsilon \sim N(0, \Omega)$ 를 제시한다. 이로부터 얻어지는 사후 평균과 사후 공분산은 다음과 같다.

$$\mu_{BL} = \left( (\tau \widehat{\Sigma_{prior}})^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right)^{-1} \left( (\tau \widehat{\Sigma_{prior}})^{-1} \pi + P^T \Omega^{-1} Q \right)$$

$$\Sigma_{BL} = \left( (\tau \widehat{\Sigma_{prior}})^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right)^{-1}$$

둘째, 상관관계 행렬 블렌딩 접근에서는 prior 상관행렬과 view 상관행렬을 가중평균 형태로 결합한다.

$$R_{blend} = (1 - \kappa) \widehat{R}_{prior} + \kappa R_{view}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1$$

보다 세밀한 처리로는 항목별 신뢰도  $\kappa_{ij}$ 를 도입하여

$$(R_{post})_{ij} = (1 - \kappa_{ij})(\widehat{R}_{prior})_{ij} + \kappa_{ij}(\rho_{ij}^{view}), \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{1 + \eta_{ij}}$$

와 같이 정의할 수 있으며, 최종적으로는 양의 정부호(PSD)를 보장하기 위해 최근접 PSD 투영을 수행한다. PSD 보정 후 분산을 결합하면 사후 공분산  $\Sigma_{post}$ 를 얻는다.

$$\Sigma_{post} = D_{post}^{1/2}, R_{post}, D_{post}^{1/2}, \quad D_{post} = \text{diag}(\Sigma_{post})$$

사후 모멘트( $\mu_{BL}, \Sigma_{BL}$ ) 또는  $(\Sigma_{post}, R_{post})$ 가 확정되면, 본 연구의 핵심 절차인 NCO 를 적용한다. NCO 는 사후 상관행렬  $R_{post}$ 로부터 거리행렬을 계산하여 계층적 군집화를 수행한다. 거리는 다음과 같이 정의된다.

$$d_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \rho_{ij})}$$

이로부터 얻어진 텐드로그램을 기반으로 적절한 컷-레벨에서 군집을 형성하고, 각 군집  $C_k$  내부에 대해 최소분산 포트폴리오를 구한다. 군집 내 최소분산 해는 다음과 같이 닫힌형태로 주어진다.

$$w_{C_k} = \frac{\Sigma_{C_k}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma_{C_k}^{-1} \mathbf{1}}$$

각 클러스터의 대표 포트폴리오 수익률은 클러스터 내 가중치로 산출한 합성 수익률로 정의되고, 이들을 새로운 자산으로 간주하여 상위 레벨에서 동일한 최소분산 최적화를 반복한다. 최종적으로 자산  $i$ 의 전체 가중치는 클러스터 내 상대가중치와 클러스터 간 가중치의 곱으로 결정된다.

$$w_i^* = w_{C_k,i} \cdot w_{cluster,k}$$

벤치마크는 역분산 가중(IPV), 표준 Markowitz(MVO), 그리고 표준 NCO 로 설정한다. IPV 는 분산의 역수 기반으로 다음과 같이 정의된다.

$$w^{IVP} = \frac{D^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T D^{-1} \mathbf{1}}, \quad D = \text{diag}(\widehat{\Sigma_{prior}})$$

성과 평가는 룰링/몬테카를로 프레임워크 하에서 수행된다. 각 반복마다 학습구간  $\mathcal{T}_{in}$ 에서  $\widehat{\Sigma_{prior}}$ 와 뷰를 설정하고 사후 모멘트를 계산한 뒤, 해당 기간의 평가구간  $\mathcal{T}_{out}$ 에서 실현 포트폴리오 수익률  $r_{p,t} = w^T r_t$ 를

산출한다. 주요 성과지표는 샤프비율  $SR_p$ , 표준편차  $\sigma_p$ , 최대낙폭  $MDD_p$ , 포트폴리오 집중도  $HHI$  및 벤치마크와 Posterior-NCO 간 승률(WinRate)이다. 샤프비율은 다음과 같이 정의된다.

$$SR_p = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p}$$

여기서 실험의 단순화를 위해  $r_f = 0$ 으로 가정한다. 표준편차는 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{|\mathcal{T}_{out}| - 1} \sum_{t \in \mathcal{T}_{out}} (r_{p,t} - \bar{r}_p)^2}$$

누적 수익과 낙폭은  $C_t = \prod_{s \leq t} (1 + r_{p,s})$  및  $D_t = 1 - \frac{c_t}{\max_{u \leq t} c_u}$ 로 정의되고, MDD는  $\max_t D_t$ 로 계산된다. 집중도 지수는  $HHI = \sum_{i=1}^N (w_i^*)^2$ 로 정의한다. Monte Carlo 반복  $m = 1, \dots, M$ 에서의 승률은 다음과 같이 측정한다.

$$\text{WinRate}(method | b) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{1} SR_{method}^{(m)} > SR_b^{(m)}$$

수치적 안정성 확보를 위해 모든 역행렬 연산에는 필요 시 럿지 보정 ( $\hat{\Sigma} + \lambda I$ )을 적용하며, 포트폴리오 제약(롱온리, 상한·하한)은 최적화 후 프로젝션 또는 Quadratic Program으로 처리한다. 또한 상관행렬 병합 시 PSD 보정을 반드시 수행하여 군집화 및 최적화 단계의 수렴성과 일관성을 확보한다.

요약하면 본 방법론은 (i) 표본 기반 공분산의 노이즈를 줄이는 전처리, (ii) Black–Litterman 또는 상관블렌딩을 통한 뷔의 베이지안 통합, (iii) 사후 모멘트 기반의 군집화 및 NCO 적용, (iv) 룰링 몬테카를로 평가를 통한 통계적 비교라는 일련의 흐름으로 설계되었다. 이 흐름은 Posterior-NCO 가 단순한 이론적 확장에 그치지 않고, 통제된 시뮬레이션 환경에서 기존 기법과 비교할 때 어떤 성능 특성을 보이는지를 염밀히 검증하도록 고안되었다.

### 3.2 시뮬레이션 설계

본 연구의 몬테카를로 시뮬레이션은 Posterior-NCO 의 성능을 통제된 환경에서 비교·검증하기 위해 설계되었다. 시뮬레이션은 (1) 수익률 생성, (2) prior 공분산 추정(선형/비선형 shrinkage 및 denoising 포함),

(3) 뷔(View) 생성 및 posterior 계산(Black–Litterman 또는 correlation blending), (4) NCO/비교모형 적용 및 평가, (5) 반복 집계의 순서로 진행된다. 각 단계의 구체적 설정은 다음과 같다.

자산 수익률의 생성 과정은 보다 현실적인 시계열 특성을 반영하기 위해 ARMA–GARCH 계열 모형을 사용하여 모사한다. 각 자산  $i$ 에 대해 평균동학과 이분산성을 동시에 반영하는 다음의  $ARMA(p, q) - GARCH(1,1)$  구조를 기본으로 채택한다. 우선 수익률 과정은  $ARMA(1,1)$  형태로 모형화한다.

$$r_{i,t} = \mu_i + \phi_i(r_{i,t-1} - \mu_i) + \theta_i \varepsilon_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t}$$

여기서 잔차는 이분산성(조건부 분산)을 갖는  $GARCH(1,1)$  구조로 정의된다.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i,t} &= \sigma_{i,t} z_{i,t} \\ \sigma_{i,t}^2 &= \omega_i + \alpha_i \varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta_i \sigma_{i,t-1}^2\end{aligned}$$

표준화된 잔차 벡터  $z_t = (z_{1,t}, \dots, z_{N,t})^T$  는 다변량 분포로 모사하여 자산 간 동시상관을 부여한다. 구체적으로는 다음 두 가지 옵션을 지원한다.

- 정규공통상관:  $z_t = Lu_t, u_t \sim N(0, I_N), LL^T = R_{true}$  (Cholesky 분해)
- heavy-tail 모델:  $u_t \sim t_\nu(0, I_N)$  (다변량 Student-t)이고  $z_t = Lu_t$ 로 생성

이때  $R_{true}$ 는 실험에서 설계한 진짜 상관구조(constant-correlation, factor, block 등)에 해당한다.

초기값과 워밍업(burn-in)은 안정적 시뮬레이션을 위해 중요하다. 각 반복마다 충분한 burn-in 기간(예: 500~1,000 시점)을 두고 초기값  $\sigma_{i,0}^2, \varepsilon_{i,0}$ 를 설정한 뒤, burn-in 을 버리고 이후  $T_{in} + T_{out}$  길이의 시계열을 저장한다.  $GARCH$  계수는 안정성(약정합 조건) 확보를 위해  $\alpha_i + \beta_i < 1$  을 만족하도록 설정하고, 대표 권장 파라미터 세트로는  $\omega = 1e-6, \alpha \in 0.03, 0.05, \beta \in 0.90, 0.94$ (높은 지속성 시나리오 포함),  $ARMA$  계수는  $\phi \in [0, 0.2], \theta \in [-0.2, 0.2]$  등을 권장한다. 꼬리강도를 시험하려면 Student-t 자유도  $\nu \in 6, 8, 12$  (여기서는 5 사용) 등을 사용한다.

마지막으로 구현·재현 측면에서는 난수 생성의 시드 제어, 병렬처리시의 시드 분리, 그리고 각 반복별로 사용된 파라미터 세트( $ARMA \cdot GARCH$  계수,  $\nu, R_{true}$  등)를 로그로 저장하여 결과의

재현성(reproducibility)을 확보한다. 본 논문에서는 위 *ARMA – GARCH* 기반 생성 프로세스를 기본 시나리오로 채택하였다.

사전 공분산 추정 단계에서는 표본공분산  $S$ 를 계산한 뒤 여러 정화/수축 절차를 적용한다.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T_{in}} \sum_{t=1}^{T_{in}} r_t$$

$$S = \frac{1}{T_{in}-1} \sum_{t=1}^{T_{in}} (r_t - \hat{\mu})(r_t - \hat{\mu})^T$$

선택적 전처리(기본값과 권장 파라미터)는 아래와 같다.

선형 shrinkage:  $\widehat{\Sigma_{prior}} = (1 - \alpha)S + \alpha T$  with  $\alpha \in 0.0, 0.1, 0.2$  (권장 기본 0.1, T=constant-correlation).

비선형 shrinkage (Ledoit–Wolf 2020) 적용 또는 MP denoising (detone True/False, mp\_constant) 적용.

상관행렬 정화 후 공분산 복원:  $\widehat{\Sigma_{prior}} = D^{1/2} \widehat{R_{clean}} D^{1/2}$ .

뷰(View) 생성은 두 챕터로 수행한다. 첫째, Black–Litterman(BL)형 수익률 뷰를 사용하는 것으로, 사용자는  $k$ 개의 선형 뷰  $P$ , 뷰값  $Q$ , 뷰의 불확실성  $\Omega$ 를 제시한다.  $\pi$ 는 시장균형 평균으로 설정하고 사전 분포는  $\mu \sim N(\pi, \tau \widehat{\Sigma_{prior}})$ 로 둔다. 사후 적률은 다음과 같이 계산한다.

$$\pi = \delta \widehat{\Sigma_{prior}} w_{mkt}$$

$$\mu_{BL} = \left( (\tau \widehat{\Sigma_{prior}})^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right)^{-1} \left( (\tau \widehat{\Sigma_{prior}})^{-1} \pi + P^T \Omega^{-1} Q \right)$$

$$\Sigma_{BL} = \left( (\tau \widehat{\Sigma_{prior}})^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right)^{-1}$$

BL 파라미터 권장 기본값은  $\tau = 0.025$ 로,  $\delta$ 는 2.5,  $\Omega$ 는  $diag(P \tau \widehat{\Sigma_{prior}} P^T)$ ,  $s = 0.5$ 로 지정한다.

둘째로, correlation view blending 방식은 prior correlation  $\widehat{R_{prior}}$  과 view correlation  $R_{view}$ 를 가중합한다.

$$R_{blend} = (1 - \kappa) \widehat{R_{prior}} + \kappa R_{view}, \kappa \in 0.1, 0.3, 0.5$$

항목별 신뢰도  $\kappa_{ij}$ 를 도입해 부분적 반영도 가능하다. 블렌딩 후에는 PSD 보정(최근접 PSD 투영)을 수행하고 분산을 결합해  $\Sigma_{post}$ 를 얻는다.

NCO 적용 단계에서는 사후 상관  $R_{post}$ 로부터 거리  $d_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \rho_{ij})}$ 를 계산하고, Ward 또는 average linkage로 계층적 군집화를 수행하여 첫 수준을 통해 K 개의 군집을 결정한다. 각 군집  $C_k$ 에 대해 군집 내 최소분산 포트폴리오를 계산한다. 군집 내 해는

$$w_{C_k} = \frac{\Sigma_{C_k}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma_{C_k}^{-1} \mathbf{1}}$$

로 주어지며, 클러스터별 대표 수익률을 계산한 뒤 상위 레벨에서도 동일한 방식으로 반복한다. 최종 자산별 가중치는 클러스터 내 상대가중치와 클러스터 간 가중치의 곱으로 결정된다.

비교대상은 IVP, Markowitz(MVO), 표준 NCO, 그리고 Posterior-NCO 이다. IVP 는  $w^{IVP} = \frac{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{1}}$ 로 정의하고, MVO 는 prior 모멘트를 사용한 평균-분산 최적화(또는 GMV/최대 샤프비율 포트폴리오 특화)를 적용한다. 모든 포트폴리오 산출 과정에서는 숫자적 안정화를 위해 필요시 럿지 정규화( $\hat{\Sigma} + \lambda I$ ,  $\lambda$ 는 작은 양수)를 적용하고, 통온리 제약 등은 Quadratic Programming 으로 처리한다.

평가 메트릭은 샤프비율, 변동성, 최대낙폭(MDD), 집중도(HHI), 그리고 몬테카를로 기반 승률(WinRate)이다. 롤링 평가에서는 학습기간  $T_{in}$ 과 평가기간  $T_{out}$ 을 각각 252 일과 252 일로 지정하고, 각 반복에서는 학습구간에서 적률·류·가중치를 산출한 뒤 평가구간에서 실현 성과를 기록한다. 반복 수 M 은 통계적 안정성을 위해 3,000 회로 설정한다. 성능 검정은 t-검정을 사용하여 SR 차이의 유의성을 평가한다.

### Algorithm 1. Monte Carlo simulation for Posterior-NCO

Input: 반복수 M, 자산수 N, 학습기간 T\_in, 평가기간 T\_out, 분포/시나리오 설정, prior 전처리 파라미터 ( $\alpha$ , shrinkage target  $T$ , denoising flags), Black–Litterman 파라미터 ( $\tau, \delta, P, Q, \Omega$ ), correlation-blend 파라미터 ( $\kappa$  등), NCO 연결기준(예: Ward).

Output: 반복별 성과지표(샤프, vol, MDD, HHI, turnover 등), 방법별 요약통계(평균, 중위, ECDF), 승률 표(WinRate).

```

FOR m = 1 to M:
    1) Generate data (training + evaluation):
        - Draw T_in + T_out returns from chosen scenario:
            e.g. r_t ~ N(mu_true, Sigma_true) OR r_t ~ t_nu(mu_true, Sigma_true)
        - Split into training r_train (length T_in) and eval r_eval (length T_out)

    2) Compute sample moments on training window:
        mu_hat = (1 / T_in) * sum_{t=1..T_in} r_train[t]
        S = (1 / (T_in - 1)) * sum_{t=1..T_in} (r_train[t] - mu_hat)(r_train[t] - mu_hat)^T

```

```

3) Prior covariance preprocessing:
IF linear shrinkage:
    Sigma_prior = (1 - alpha) * S + alpha * T
IF nonlinear shrinkage:
    Sigma_prior = nonlinear_shrink(S)    # e.g. Ledoit-Wolf 2020
IF MP denoising:
    R_clean = MP_clean(corr(S), detone = True/False)
    Sigma_prior = D^{1/2} * R_clean * D^{1/2}
IF needed: Sigma_prior = Sigma_prior + lambda * I    # ridge stabilization
Compute R_prior = corr(Sigma_prior), D_prior = diag(Sigma_prior)

4) View creation (experiment configuration):
- Option A: Black-Litterman views
    define P (k x N), Q (k x 1), Omega (k x k)
- Option B: Correlation views
    define R_view and global kappa or elementwise kappa_ij

5) Posterior calculation:
IF BL selected:
    pi = delta * Sigma_prior * w_mkt
    mu_BL = ((tau * Sigma_prior)^{-1} + P^T Omega^{-1} P)^{-1} * ((tau * Sigma_prior)^{-1} pi + P^T Omega^{-1} Q)
    Sigma_BL = ((tau * Sigma_prior)^{-1} + P^T Omega^{-1} P)^{-1}
    Set Sigma_post = Sigma_BL, R_post = corr(Sigma_post), mu_post = mu_BL
ELSE IF correlation blend selected:
    R_blend = (1 - kappa) * R_prior + kappa * R_view      # or elementwise blend
using kappa_ij
    R_post = Proj_PSD(R_blend)
    Sigma_post = D_post^{1/2} * R_post * D_post^{1/2}      # D_post chosen (prior
diags or updated)
    Set mu_post = mu_hat (or use other rule)

6) Portfolio construction (using training window moments):
- IVP:
    w_IVP ∝ D^{-1} * 1
    normalize w_IVP so sum(w_IVP) = 1
- MVO (using mu_hat and Sigma_prior):
    solve mean-variance (or compute closed form for given mu_p)
- NCO (using Sigma_prior or R_prior):
    w_NCO = NCO_weights(R_input = R_prior, Sigma_input = Sigma_prior, linkage,
cut_level)
- Posterior-NCO (using Sigma_post or R_post):
    w_PosteriorNCO = NCO_weights(R_input = R_post, Sigma_input = Sigma_post,
linkage, cut_level)

7) Out-of-sample evaluation on r_eval:
For each portfolio w:
    r_p[t] = w^T * r_eval[t]   for t = 1..T_out
    r_bar = (1 / T_out) * sum_t r_p[t]
    vol = sqrt( (1 / (T_out - 1)) * sum_t (r_p[t] - r_bar)^2 )
    SR = (r_bar - r_f) / vol
    C_t = cumulative product_{s<=t} (1 + r_p[s])
    D_t = 1 - C_t / max_{u<=t} C_u
    MDD = max_t D_t
    HHI = sum_i (w_i)^2
    turnover = sum_i |w_i_new - w_i_old|    (if tracking rebalancing)
Store metrics in results[method] [m]

END FOR

Aggregate results across m:
- Compute mean, median, std for each metric and method

```

```

- Compute ECDFs and plot distributions
- WinRate(method | baseline) = (1/M) * sum_{m=1..M} 1{ SR_method^{(m)} >
SR_baseline^{(m)} }
- Statistical tests: paired t-test and/or bootstrap on SR differences
- Sensitivity tables for parameters (tau, alpha, kappa, detone, N/T)

SUBROUTINES:
Proj_PSD(X):
    compute eigen decomposition X = U Λ U^T
    Λ_pos = max(Λ, 0) (elementwise)
    return U Λ_pos U^T

MP_clean(R, detone):
    if detone:
        remove first principal component: R_detone = R - lambda1 * u1 u1^T + mean_bulk
    * I
    estimate lambda_plus via q = N / T_in
    replace eigenvalues <= lambda_plus by bulk average or shrink toward bulk
    reconstruct R_clean and return

NCO_weights(R_input, Sigma_input, linkage, cut_level):
    compute distances d_ij = sqrt( 0.5 * (1 - rho_ij) )
    perform hierarchical clustering with chosen linkage
    cut tree at cut_level to get clusters {C_k}
    for each cluster C_k:
        Sigma_Ck = Sigma_input restricted to assets in C_k
        w_Ck = Sigma_Ck^{-1} * 1 / (1^T * Sigma_Ck^{-1} * 1)
        compute cluster return time series r_Ck[t] = sum_{i in C_k} w_Ck[i] *
r_asset_i[t]
        assemble cluster returns and covariances, then solve cluster-level minimum
        variance similarly
        propagate weights back to asset level by multiplication
    return final asset weights w

```

#### Notes:

- Apply ridge stabilization  $\Sigma + \lambda I$  when inverting
- Enforce long-only / box constraints via projection or constrained QP
- Save per-run raw weights for turnover and distributional diagnostics

시뮬레이션 재현성을 위해 난수 시드 제어를 하고, 결과 저장은 각 반복별로 요약 통계와 원시 가중치·수익 시계열을 별도 파일로 보관한다. 기본 파라미터 권장값을 요약하면 다음과 같다.

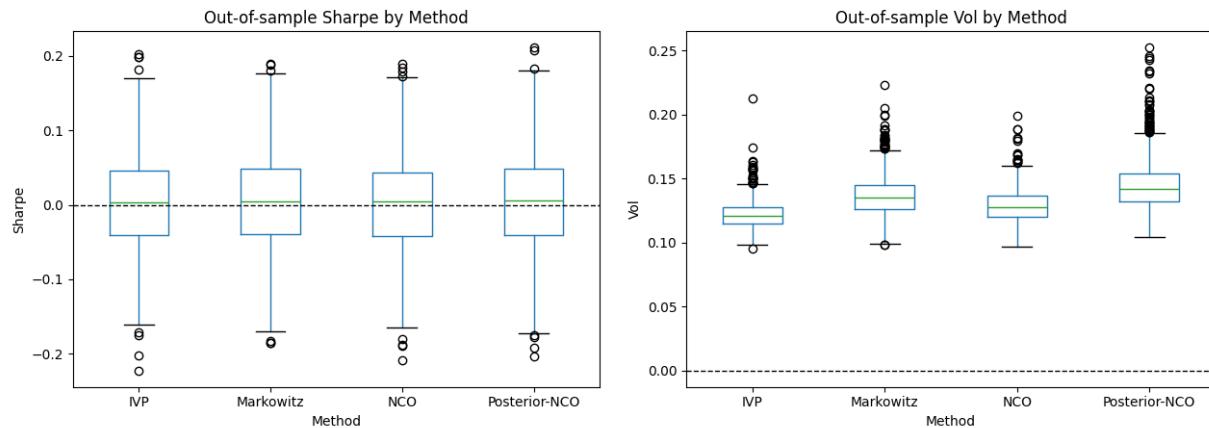
PARAMETER	VALUE
M	3000
N	50
T (IN)	252
T (OUT)	252
TAU	0.025
ALPHA	0.1
KAPPA	0.5
DETONE	True
SHRINKAGE	lw_constant_corr
DENOISING	mp_constant

마지막으로 결과 해석은 평균·중위수 비교뿐 아니라 분포 전체(예: SR 의 ECDF), 승률, 그리고 거래비용을 고려한 순효과를 함께 제시하여 Posterior-NCO 의 유효성과 실무 적용 가능성을 다층적으로 평가한다.

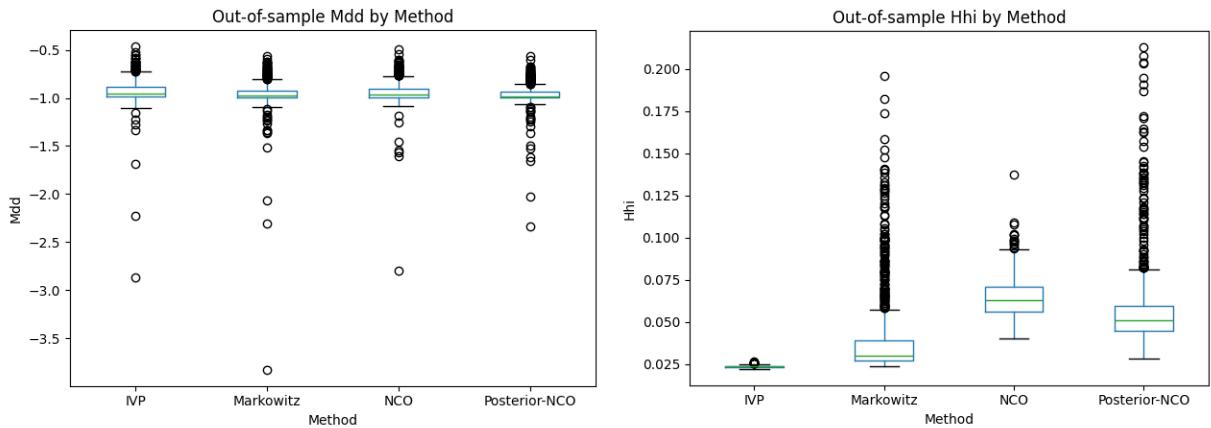
#### 4. Montecarlo 실험 결과

본 장에서는 Monte Carlo 실험에서 얻은 요약 통계를 제시하고, Posterior-NCO 의 성능을 IVP, Markowitz(MVO), 표준 NCO 와 비교한다.

	Sharpe Ratio	Volatility	MDD	HHI
Markowitz	0.002468	0.137299	-0.954325	0.039694
IVP	0.001952	0.122639	-0.931254	0.023617
NCO	0.002410	0.129773	-0.943102	0.064098
Posterior-NCO	0.002550	0.146326	-0.967769	0.057885



우선 Black & Litterman 스타일의 실험 결과를 보면, 평균 Sharpe(Mean Sharpe) 관점에서 Posterior-NCO 가 가장 높은 값을 기록하였다(Posterior-NCO: 0.002550, Markowitz: 0.002468, NCO: 0.002410, IVP: 0.001952). Posterior-NCO 는 Markowitz 대비 평균 Sharpe 가 약 +3.32%(0.002550 vs 0.002468), NCO 대비 약 +5.81% 향상되었다. 그러나 median(중위값) 관점에서는 Markowitz(0.003013)가 Posterior-NCO(0.002908)보다 다소 높아, 평균과 중위의 차이로부터 성과 분포의 비대칭성(꼬리 효과)을 시사한다.

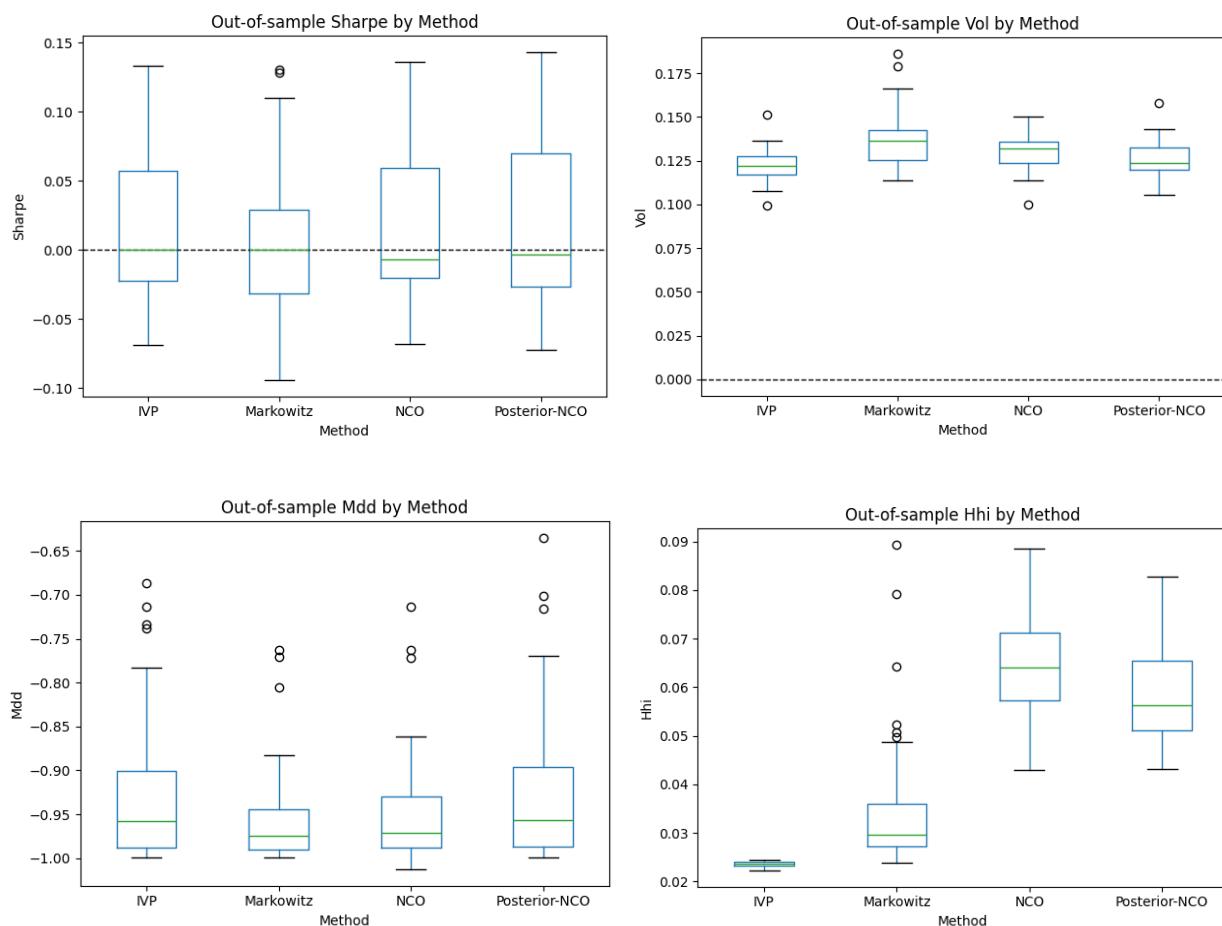


위험(Volatility) 및 최대낙폭(MDD) 측면에서 Posterior-NCO 는 트레이드오프를 나타낸다. Posterior-NCO 의 평균 변동성은 0.1463로 표준 NCO 의 0.1298 대비 약 +12.76% 증가하였고, Markowitz(0.1373) 대비로도 약 +6.57% 높았다. 평균 최대낙폭은 Posterior-NCO 가 -0.9678로 Markowitz(-0.9543)보다 더 큰(더 악화된) 낙폭을 보였다(약 +1.41%의 상대적 악화). 반면 포트폴리오 집중도(HHI)는 Posterior-NCO 가 NCO 보다 낮아(Posterior-NCO 0.0579 vs NCO 0.0641) 상대적으로 분산(분산화)이 개선되었다(약 -9.69%). 요약하면 Black-Litterman 케이스에서는 Posterior-NCO 가 평균 샤프를 소폭 끌어올리면서 포트폴리오 집중도를 낮추지만, 그 대가로 변동성 및 MDD 가 증가하는 특성이 관찰되었다.

대상(BLACK LITTERMAN)	벤치마크	승률(WIN RATE)
NCO	Markowitz	47.9%
POSTERIOR-NCO	Markowitz	51.1%
POSTERIOR-NCO	NCO	52.8%

승률(Win rate) 관점에서도 흥미로운 양상이 나타난다. 동일한 전처리( `lw_constant_corr`, `mp_constant`, `detone=True` ) 조건하에서 NCO\_vs\_Markowitz 의 승률은 0.479 으로 NCO 가 Markowitz 보다 다소 낮았고, Posterior-NCO\_vs\_Markowitz 의 승률은 0.511, Posterior-NCO\_vs\_NCO 의 승률은 0.528 을 기록했다. 즉 Posterior-NCO 는 Markowitz 대비 약간(51.1%) 우위를 보였고, NCO 대비에는 약간 더 큰 우위(52.8%)를 보였다.

	Sharpe Ratio	Volatility	MDD	HHI
Markowitz	0.001783	0.137478	-0.960875	0.039662
IVP	0.001254	0.122779	-0.933410	0.023621
NCO	0.001422	0.129832	-0.946440	0.064350
Posterior-NCO	0.001518	0.128305	-0.943855	0.063690



다음으로 Correlation View Blending 시나리오 결과를 살펴보면, 평균 Sharpe는 Markowitz 가 0.001783 으로 가장 높고, Posterior-NCO 는 0.001518, NCO 는 0.001422, IVP 는 0.001254 로 나타났다. Posterior-NCO 는 같은 시나리오에서 표준 NCO 대비 평균 Sharpe 가 약 +6.75% 높았으나, Markowitz 대비로는 약 -14.86% 낮았다. 변동성 측면에서는 Posterior-NCO(0.1283)가 NCO(0.1298)보다 소폭 낮아(약 -1.18%) 안정성을 약간 개선하였고, 최대낙폭도 NCO 보다 약간 개선되었다(평균 MDD: Posterior-NCO -0.9439 vs NCO -0.9464, 약 -0.27% 개선). HHI 는 NCO 에 비해 소폭 낮아 포트폴리오 분산도가 조금 개선된 모습을 보였다(약 -1.03%).

대상(CORR BLEND)	벤치마크	승률(WIN RATE)
NCO	Markowitz	50.0%
POSTERIOR-NCO	Markowitz	50.0%
POSTERIOR-NCO	NCO	53.3%

두 시나리오를 종합하면 다음과 같은 결론적 관찰이 가능하다. 첫째, Posterior-NCO 는 뷰의 형태와 전처리(정화·수축) 설정에 민감하다. Black-Litterman 스타일의 기대수익 뷰를 반영했을 때는 평균 샤프가 가장 높아지는 반면 변동성·MDD 가 동반 상승했고, 상관 블렌딩 시나리오에서는 NCO 대비 평균 샤프와

위험을 동시에 개선하는 경향을 보였으나 Markowitz 에는 못 미쳤다. 둘째, 평균(Mean)과 중앙값(Median)의 불일치는 성과 분포의 비대칭성을 의미하며, 단순 평균만으로 성과를 판단하는 것은 위험할 수 있다. 셋째, Posterior-NCO 의 승률( $\approx 0.51\text{--}0.53$ )은 기존 배분방법에 비해서 Posterior-NCO 의 우위를 시사한다.

실무적 시사점으로는 Posterior-NCO 가 투자자의 뷔를 체계적으로 반영하면서도 클러스터 기반의 분산 효과를 유지한다는 점에서 유용하다는 것이다. 특히 뷔가 비교적 정확하고(또는 뷔가 상관구조에 대한 정보일 때) 전처리(denoising, detone)가 적절히 적용되면 표준 NCO 보다 전반적 성과와 안정성이 개선될 가능성이 있다. 반면 뷔가 수익률 수준에서 강하게 긍정적으로 작동하거나(Black-Litterman 형), 뷔 신뢰도를 과도하게 높게 설정하면 변동성 및 낙폭이 증가할 수 있음을 주의해야 한다.

## 5. 실증분석

본 연구의 실증분석은 S&P100 구성 종목 100개를 투자 유니버스로 삼아 2018년 1월부터 2025년 9월까지의 월말 자료를 사용한다. S&P100의 종목은 2025년 9월 기준 100종목으로, 생존편향은 존재하지만 본 연구의 핵심은 자산 선택이 아니라 배분 방식의 상대 비교이므로 생존편향을 통제변수로 간주한다. 모든 가격 및 재무지표는 월말 기준으로 정렬하고, 시장의 view 를 적용하기 위해 PER 에는 12month forward 값을, Boot to Price Ratio (PBR 역수)는 이미 발표된 FY0 기준 PBR 을 사용한다. 결측은 사전에 정한 규칙에 따라 일관되게 자산을 존재하지 않는다고 가정하였고, 재무지표가 음수인 구간에서는 해당 종목을 편입하지 않는 방법을 사용한다. 데이터는 Refinitive 에서 제공하는 재무비율 및 가격을 사용하였다.

### 5.1 시뮬레이션 방법 및 가정

연구에서 사용한 뷔는 시가총액 기반의 중립 뷔(market neutral), 12 month forward-PER 의 크기에 비례하여 성장 기대가 높은 종목을 선호하는 뷔(market bull), 그리고 Book-to-Price 의 크기에 비례하여 가치 성향을 반영하는 뷔(market contrarian)로 정의한다. 각 뷔는 월별로 계산되며 분포의 비정상성과 이상치 민감도를 낮추기 위해 순위 기반 정규화와 함께 1의 정규화를 적용한다.

View	사용 데이터	기준시점
Market Bull	Price to Earnings Ratio	forward 12months
Market Neutral	Market Capitalization	Daily
Market Contrarian	Book to Price Ratio	Fiscal Year 0

제안하는 Posterior-NCO 는 가중치 뷰를 기대수익 뷰로 사상한 후 Black-Litterman 사후 분포를 구하고, 그 사후 공분산을 이용해 NCO 로 배분을 결정하는 절차이다. 가중치 뷰의 기대수익 뷰로의 사상은 He-Litterman 의 아이디어를 따르며 다음과 같이 정의한다.

$$\mu_{view} = \delta \Sigma \omega_{view}$$

여기서  $\delta$ 는 위험회피도,  $\Sigma$ 는 샘플 내 공분산,  $w_{view}$ 는 각 월에 산출한 가중치 뷰이다. Black Litterman 업데이트는  $P = Q = \mu_{view}$ ,  $\Omega = \kappa \cdot \text{diag}(\tau \Sigma)$ 를 사용하며, 기본 파라미터는  $\delta = 3.0$ ,  $\tau = 0.05$ ,  $\kappa = 0.5$ 로 둔다. 민감도 분석에서는  $\tau \in [0.02, 0.05, 0.10]$ ,  $\kappa \in [0.25, 0.5, 1.0, 2.0]$ 을 보고한다. 비교 벤치마크는 Markowitz, NCO, IVP 로 설정한다.

시뮬레이션은 매월 말 샘플 내 구간을 고정 길이로 설정하여 추정을 수행하고, 다음 달 한 달 동안 해당 가중으로 보유하는 방식으로 진행한다. 기본 샘플 내 구간의 길이는 12 개월이며, 이 기간의 일별 수익률로 기대수익과 공분산을 추정한다. 기대수익과 공분산은 일간 데이터의 빈도에서 추정하되 성과지표 비교를 위해 연율화 값을 병기한다. 배분은 short position 으로 인한 왜곡을 방지하기 위해 long position only 로 제한되며, 거래비용은 기본적으로 왕복 15bp 를 가정한다. 리밸런싱은 월말 종가 기준 체결로 가정한다.

## 5.2 View 의 지정

본 연구에서 시가총액, forward PER, B/P로부터 얻은 가중치 벡터가 곧 매니저의 배분목표가 될 수 있다는 점은 평균-분산 모형의 최적조건에서 직접 도출된다. 예산 제약  $1^T w = 1$  하에서 효용 극대화 문제

$$\max_w \mu^T w - \frac{\delta}{2} w^T \Sigma w$$

의 1 차 조건은

$$\mu = \delta, \Sigma, w^* + \lambda, 1$$

로 주어진다. 따라서 매니저가 원하는 목표 보유비중  $w^*$ 를 먼저 정하면, 그와 정합적인 기대수익 벡터는 상수항  $\lambda$  를 포함한 동치류

$$\mu: \mu = \delta \Sigma w^* + \lambda 1$$

로 표현된다. 특히 1방향의 상수 이동은 예산 제약 하에서 최적해를 바꾸지 않으므로, 실무에서는  $\mu_{\text{view}} = \delta, \Sigma, w_{\text{view}}$  만으로도 원하는  $w^*$ 를 암묵적으로 지정하는 효과를 갖는다. 이 관찰이 가중치 뷰를 기대수의 뷰로 사상하는 He–Litterman 변환의 수학적 근거이다.

시가총액 가중  $w_{\text{mkt}}$ 은 정책 포트폴리오이자 시장 중립 포트폴리오로서 자연스러운 포트폴리오 매니저의 배분목표이며, 위 식에서  $w^* = w_{\text{mkt}}$ 로 두면

$$\pi = \delta, \Sigma, w_{\text{mkt}} + \lambda, 1$$

을 얻는다. 이는 Black–Litterman 의 균형 내재수익(implied returns)과 동일한 형태로, 시총 기반 뷰가 “중립(prior)”로서 타당함을 보여준다. 성장과 가치에 대한 매니저의 배분 목표 역시 목표 비중의 선형결합으로 표현할 수 있다. 예를 들어

$$w^* = (1 - \alpha - \beta), w_{\text{mkt}} + \alpha, w_{\text{PER}} + \beta, w_{\text{BP}}$$

와 같이 정책 포트폴리오에 forward PER, B/P 특성 포트폴리오를 가법적으로 없으면, 그에 상응하는 기대수익 뷰는

$$\mu_{\text{view}} = \delta, \Sigma, w^* + \lambda, 1$$

로 일관되게 정의된다. BL 갱신 단계에서는  $P = I, Q = \mu_{\text{view}}, \Omega = \kappa \cdot \text{diag}(\tau\Sigma)$ 를 사용하되, 1 방향 상수  $\lambda$ 는 최적해에 영향을 주지 않으므로 관습적으로 생략해  $Q = \delta, \Sigma, w^*$ 를 쓰는 것이 무방하다. 이렇게 하면 시가총액은 중립 기준을 제공하고, forward PER(성장)과 1/PBR(가치)는 공개 재무정보로부터 재현 가능하며 랭크 정규화만으로 스케일 문제를 회피할 수 있으므로, 다수 애널리스트의 절대  $\mu$  추정을 수합해야 하는 현실적 제약 없이 매니저의 배분목표를 투명하게 구현한다. BL의 불확실도 행렬  $\Omega$ 는 이러한 특성 기반 뷰의 신뢰도를 보정하며, 사후 공분산을 이용한 NCO 는 결과 배분의 안정성과 분산화를 추가적으로 확보한다.

### 5.3 성과 지표

성과 평가는 일별 수익률 시계열을 기반으로 산출하며, 비교의 일관성을 위해 필요 시 연율화 값을 함께 제시한다. Sharpe ratio 는 전략의 초과수익 대비 변동성 효율을 측정하는 지표로서, 일간 빈도에서의 표본

평균 초과수익  $\bar{r}_d$ , 무위험수익률의 일 평균  $\bar{r}_{f,d}$ , 일 표준편차  $\sigma_d$ 에 대해  $SR_d = (\bar{r}_d - \bar{r}_{f,d})/\sigma_d$ 로 정의하고, 연율화 값은  $SR_{ann} = \sqrt{252} SR_d$ 로 보고한다. 무위험수익률은 계산상의 편의를 위해 0%로 가정한다. 연율화 변동성은 월 표준편차  $\sigma_d$ 를  $\sigma_{ann} = \sigma_d\sqrt{252}$ 로 변환하여 제시한다. 변동성은 수익률 분포의 산포를 나타내므로, 리밸런싱 규칙이 동일한 조건 하에서 비교한다.

최대낙폭(MDD)은 자본곡선  $V_t$ 에 대해 시점별 Drawdown 을  $DD_t = 1 - V_t / \max_{s \leq t} V_s$ 로 정의하고, 표본구간에서의 최댓값  $MDD = \max_t DD_t$ 로 보고한다. 필요 시 Draw down의 지속기간 (peak-to-recovery 기간)도 함께 제시하여 위험의 시간적 프로파일을 보완한다.

포트폴리오 집중도는 Herfindahl–Hirschman Index(HHI)로 평가한다. 월말 가중치 벡터  $w = (w_1, \dots, w_N)$ 에 대해  $HHI = \sum_{i=1}^N w_i^2$ 로 정의하며, 값이 클수록 보유가 소수 종목에 집중되어 있음을 의미한다. 해석의 투명성을 위해 유효보유수  $N_{\text{eff}} = 1/\sum_i w_i^2$ 를 병기할 수 있다.

Probabilistic Sharpe Ratio(PSR)는 표본 Sharpe  $\widehat{SR}$ 가 사용자가 정한 기준치  $SR^*$ 를 초과할 확률을 추정하는 지표로서, 비정규성(왜도  $\gamma_3$ , (초과)첨도  $\gamma_4$ )과 표본 길이  $N$ 을 보정한다. 표준적 근사식은 David H. Bailey 와 Marcos Lopez de Prado(2012)의 제안에 따라

$$PSR = \Phi \left( \frac{(\widehat{SR} - SR^*)\sqrt{N - 1}}{\sqrt{1 - \gamma_3, \widehat{SR} + (\gamma_4 - 1), \widehat{SR}^2}} \right)$$

으로 주어지며, 여기서  $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규 분포의 누적분포함수이고,  $\gamma_3$ 과  $\gamma_4$ 는 각각 수익률의 표본 왜도와 표본 첨도이다. 본 연구에서는 일간 빈도 수익률을 사용하여  $\widehat{SR}, \gamma_3, \gamma_4$ 를 추정하고, 목표치  $SR^*$ 는 0 또는 벤치마크 Sharpe 등 사전 정의된 기준을 사용한다.

Deflated Sharpe Ratio(DSR)는 다중 비교에 따른 선택편향을 보정한 유의성 지표다. PSR의  $SR^*$ 를 deflated 된 임계치  $SR_d^*$ 로 치환하여 David H. Bailey 와 Marcos Lopez de Prado(2015)의 제안에 따라

$$DSR = \Phi \left( \frac{(\widehat{SR} - SR_d^*)\sqrt{N - 1}}{\sqrt{1 - \gamma_3 \widehat{SR} + (\gamma_4 - 1) \widehat{SR}^2}} \right)$$

로 계산한다. 여기서  $SR_d^*$ 는 후보 전략 수  $N_s$ , 표본 길이, 비정규성에 기반한 기대 최대 Sharpe Ratio의 보수적 상계로부터 산출되며, 실증에서는 탐색 규모( $N_s$ )와 동일한 데이터에서의 추정 불확실성을 반영하여 실행한 전략 수를 10 개로 가정하고 각 배분별 Deflated Sharpe Ratio를 보고한다. DSR은 PSR 대비 과최적화 위험을

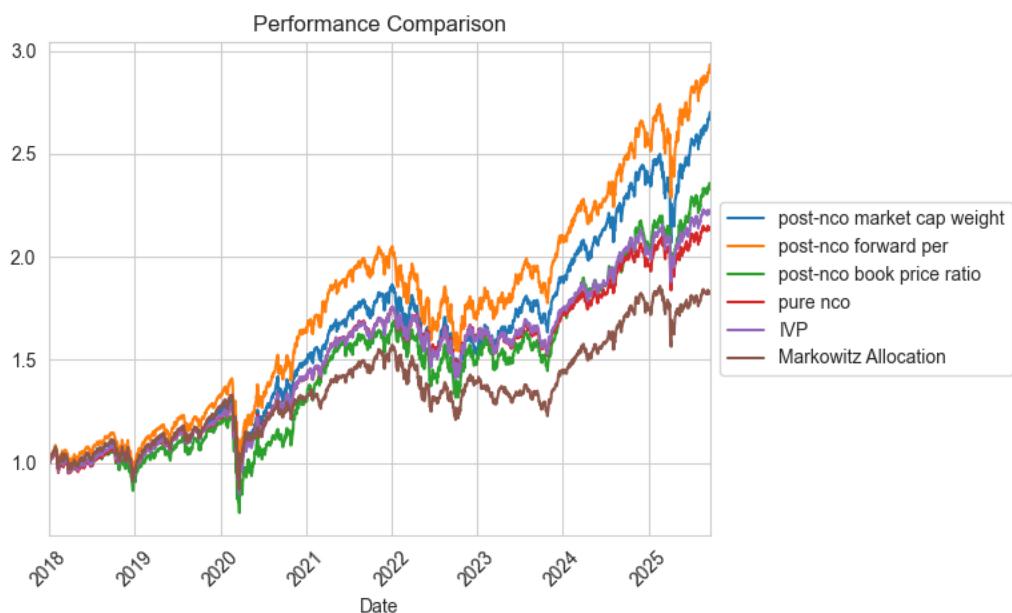
더 엄격히 통제하므로, 본문에서는 PSR 과 DSR 을 함께 제시하여 성과의 통계적 유의성과 재현 가능성을 평가한다.

#### 5.4 실증분석 결과

본 절에서는 S&P 100 구성 종목을 유니버스로 하여, 동일 리밸런싱 주기와 거래비용 가정 하에 네 가지 자산배분법을 비교하였다. 첫 번째 벤치마크는 Markowitz 평균-분산 최적화이며, 두 번째 벤치마크는 IVP (Inverse Variance Portfolio)이다. 두 배분 방법은 전통적으로 가장 많이 사용되는 배분 방법이기에 벤치마크로 선정하였다. 본 연구의 선행 모형이라고 볼 수 있는 NCO(Noise-cleaned Clustering-based Optimization)는 세 번째 벤치마크로 지정하였다. 마지막으로 비교 대상은 본 연구에서 제안하는 Posterior NCO 모형이다. Posterior NCO 모형의 기본 실험에서는 Market Neutral view (market cap)를 사용하였고, Black-Litterman 하이퍼파라미터는  $\tau = 0.02$ ,  $\kappa = 2.00$  (Confidence = 0.5)로 설정하였다.

##### 5.4.1 기본 분석

동일한 데이터와 리밸런싱 조건 하에서 Markowitz, IVP, NCO, Posterior NCO 를 비교한 결과, Posterior NCO 가 전반적인 성과지표에서 가장 우수하였다.



	Markowitz	IVP	NCO	Posterior NCO
Cumulative Return	0.720165	1.138587	1.138694	1.499085
Annualized Mean	0.083159	0.109515	0.109513	0.132092
Annualized Volatility	0.174980	0.170111	0.170061	0.187510
Annualized Sharpe Ratio	0.475245	0.643787	0.643963	0.704453
PSR(SR* = 0)	0.906639	0.961823	0.961860	0.974119

DSR(n = 10)	0.515470	0.688178	0.688335	0.746512
Maximum Drawdown	-0.341564	-0.330570	-0.330529	-0.325040
Annualized Turnover	1.552003	0.937328	0.937498	2.900687
Average HHI	0.016491	0.012823	0.014768	0.015512
Average N efficient	79.427889	78.098141	68.004089	65.087447

연환산 수익률은 Posterior NCO 가 0.1321(13.21%)로 가장 높았고, NCO 와 IVP 가 각각 0.1095 (10.95%)수준으로 비슷했으며, Markowitz 는 0.0832(8.32%)로 가장 낮았다. 위험 조정 성과에서도 동일한 우위가 확인되었다. 무위험수익률을 0 으로 가정한 연환산 샤프비율은 Posterior NCO 가 0.7045 로, NCO(0.6440 전후)와 IVP(0.6438), Markowitz(0.4752)를 상회하였다. 누적수익 역시 Posterior NCO 가 1.4991(149.91%)로 가장 높아, NCO·IVP(약 1.139, 113.9%) 및 Markowitz(0.7202, 72.02%) 대비 월별 누적 성과를 기록하였다.

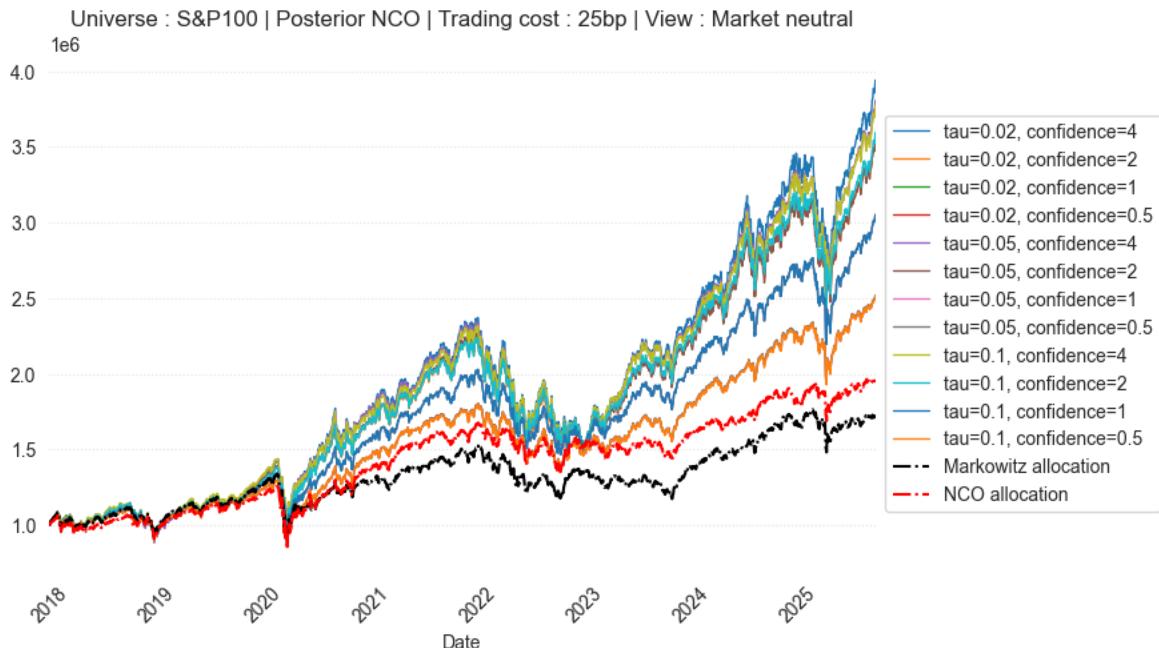
통계적 유의성 측면에서의 검증 또한 일관된다. PSR(Sharpe > 0 의 확률)은 Posterior NCO 가 0.9741 로 NCO·IVP(각 0.9619, 0.9618) 및 Markowitz(0.9066)보다 높았으며, Deflated Sharpe Ratio(표본 수 n = 10 가정)도 Posterior NCO 가 0.7465 로 대안 대비 우수했다. 위험 측면에서는 최대낙폭(MDD)이 Posterior NCO 에서 -0.3250(-32.5%)으로 가장 작아 하방 리스크 관리가 양호했다. 다만 구현상의 비용 지표인 연환산 턴오버는 Posterior NCO 가 2.9007 로 가장 높아, 거래비용 제약이 있는 환경 혹은 운용자금이 큰 투자 환경에서는 비용 관리가 필요함을 시사한다. 평균 HHI 와 효율종목수는 Posterior NCO 가 각각 0.0155, 65.09 로 나타나, Markowitz·IVP 대비 약간 더 집중된 포지션을 형성하면서도 NCO 와 유사한 분산 수준을 유지하는 것으로 해석된다. 종합적으로 Posterior NCO 는 수익·위험·유의성 지표에서 연산 비용 및 복잡성 대비 투자 성과들의 동시 개선을 보였고, 이는 공분산 구조의 안정화와 뷰 반영을 결합한 설계의 효과로 볼 수 있다.

#### 5.4.2 Black Litterman parameter 민감도 분석

Black–Litterman 하이퍼파라미터( $\tau, \kappa$ )에 대한 민감도 분석은 세 가지 상이한 뷰인 시장중립(Market Cap), 성장 지향(Forward 12M PER), 가치 역발상(FY0 기준 1/PBR)으로 총 세 가지 경우를 가정하여 수행하였다. Market Capitalization 을 View Matrix 로 구성하는 경우 (Market Neutral)  $\kappa$  가 작아질수록 수익성과 샤프비율이 상승하고, 동시에 변동성과 낙폭이 커지는 전형적 위험–수익 교환이 관찰되었다. 여기서  $\kappa$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\kappa = \frac{1}{confidence}$$

즉, 투자자의 뷔에 신뢰도를 강하게 둘 수록  $\kappa$ 의 값은 비례적으로 작아진다. 반면에, 투자자의 뷔에 신뢰도를 약하게 둘 수록  $\kappa$ 의 값은 비례적으로 커진다. 예컨대  $\tau = 0.02$ 에서 샤프비율은  $\kappa = 0.25$ 일 때 0.8330 으로 최고였으나,  $\kappa = 2.00$ 에서는 0.7045 로 낮아졌다. 반대로 변동성과 MDD 는 각각 0.2376, -0.3636 에서 0.1875, -0.3250 으로 감소하였다. HHI 는  $\kappa$  증가에 따라 0.0735 에서 0.0155 로 낮아져 더 분산된 포트폴리오가 형성되었다.  $\tau$  변화(0.02–0.10)는 같은  $\kappa$  내에서 성과의 상대적 순위를 바꾸지 않을 정도로 영향이 제한적이었다.



Annualized return mean

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	0.197914	0.182397	0.158885	0.132092
$\tau = 0.05$	0.192691	0.182345	0.158885	0.132459
$\tau = 0.10$	0.191600	0.183710	0.158885	0.132083

Annualized Volatility

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	0.237593	0.227147	0.202671	0.187510
$\tau = 0.05$	0.234006	0.227962	0.202671	0.187634
$\tau = 0.10$	0.233654	0.225455	0.202671	0.187775

Annualized Sharpe Ratio

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	0.832996	0.802991	0.783959	0.704453
$\tau = 0.05$	0.823447	0.799894	0.783959	0.705942

$\tau = 0.10$	0.820018	0.814843	0.783959	0.703411
---------------	----------	----------	----------	----------

PSR( $SR^* = 0$ )

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	0.989848	0.987223	0.984969	0.974119
$\tau = 0.05$	0.989031	0.987049	0.984969	0.974366
$\tau = 0.10$	0.988733	0.988275	0.984969	0.973971

MDD

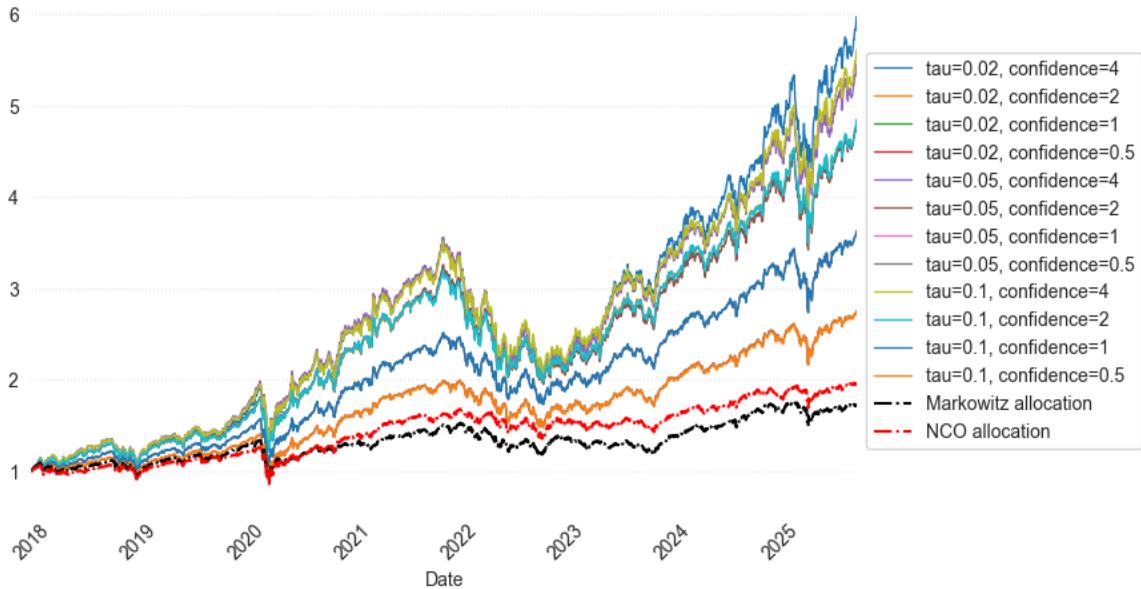
$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	-0.363571	-0.335597	-0.312824	-0.325040
$\tau = 0.05$	-0.362621	-0.338231	-0.312824	-0.325044
$\tau = 0.10$	-0.351923	-0.321705	-0.312824	-0.325051

Average HHI

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	0.073544	0.058097	0.028210	0.015512
$\tau = 0.05$	0.072768	0.058267	0.028210	0.015497
$\tau = 0.10$	0.070243	0.057547	0.028210	0.015516

forward 12month PER 을 View Matrix 로 구성하는 경우에서는 공격적인 성장 베팅이 명확히 드러났다.  $\tau = 0.02, \kappa = 0.25$ 에서 연환산 수익률과 샤프비율이 각각 0.2555, 1.0039로 가장 높았고,  $\kappa$ 가 커질수록 0.7577 까지 완만히 하락하였다. 다만 높은 성과는 더 큰 위험의 대가와 동행하였다. 동일 조건에서 변동성과 MDD 는 0.2545, -0.4208로 커졌으며,  $\kappa$ 를 0.5–1.0 으로 높이면 성과는 다소 낮아지지만 변동성과 낙폭이 완화되어 보다 균형적인 성과를 제공하였다. PSR 은 전 구간에서 0.98 이상으로 유지되어, 성장 뷔 하의 Posterior NCO 가 통계적으로도 견조함을 보여준다.

1e6 Universe : S&P100 | Posterior NCO | Trading cost : 25bp | View : Market Bull



Annualized return mean

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	0.255454	0.224709	0.182504	0.144333
$\tau = 0.05$	0.242772	0.224749	0.182504	0.144694
$\tau = 0.10$	0.245782	0.224989	0.182504	0.144318

Annualized Volatility

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	0.254473	0.237391	0.207746	0.190493
$\tau = 0.05$	0.248653	0.238774	0.207746	0.190619
$\tau = 0.10$	0.246233	0.235717	0.207746	0.190722

Annualized Sharpe Ratio

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	1.003854	0.946578	0.878498	0.757681
$\tau = 0.05$	0.976348	0.941261	0.878498	0.759075
$\tau = 0.10$	0.998169	0.954488	0.878498	0.756691

PSR(SR\* = 0)

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	0.997254	0.995503	0.992091	0.981369
$\tau = 0.05$	0.996508	0.995385	0.992091	0.981545
$\tau = 0.10$	0.997067	0.995792	0.992091	0.981266

MDD

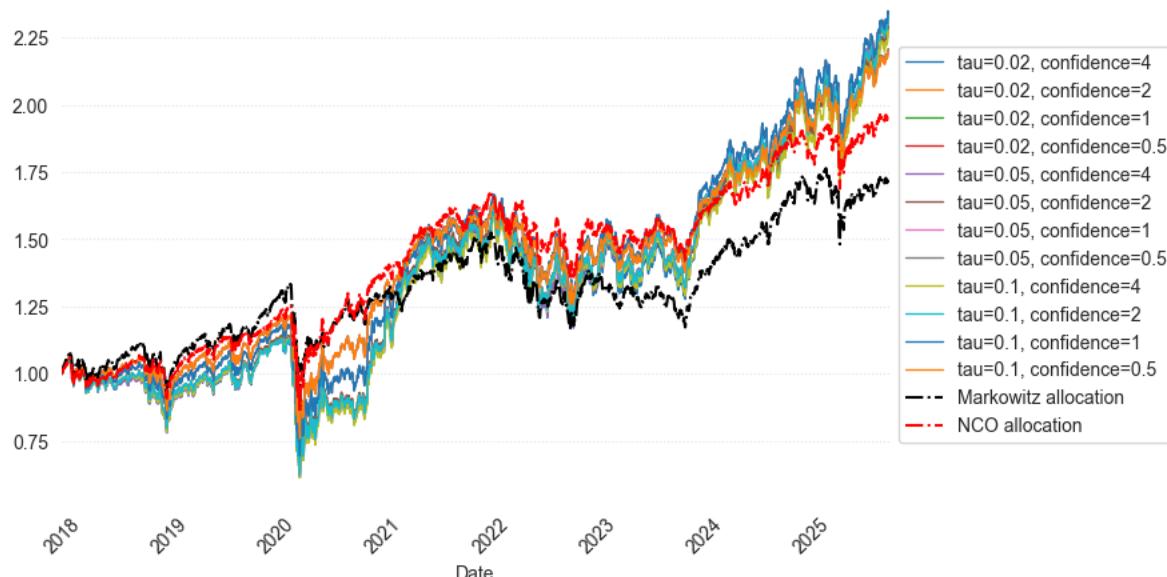
$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	-0.420785	-0.396670	-0.331723	-0.334490
$\tau = 0.05$	-0.437678	-0.402472	-0.331723	-0.334495
$\tau = 0.10$	-0.412480	-0.384983	-0.331723	-0.334501

Average HHI

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	0.068015	0.052226	0.025305	0.014570
$\tau = 0.05$	0.066298	0.052756	0.025305	0.014559
$\tau = 0.10$	0.064658	0.051996	0.025305	0.014564

반면, Fiscal Year 0 기준 PBR 역수(Contrarian)를 View Matrix로 구성하는 경우는 수익 극대화보다는 방어적 특성이 두드러졌다. 샤프비율은  $\kappa$  증가에 따라 소폭 개선되어  $\kappa = 2.00$ 에서 0.6014에 이르렀고, 변동성과 MDD는 각각 0.1958, -0.3753으로 유의미하게 축소되었다. HHI 또한 0.0439에서 0.0144로 하락하여 포지션 분산이 확대되었다. 즉, 가치 역발상 뷰는 성장 뷰 대비 수익은 낮지만 하방 위험을 의미 있게 절감하는 특성이 있어, 전체 포트폴리오의 리스크 총량을 제약받는 상황에서 유용한 선택지로 해석된다.

Universe : S&P100 | Posterior NCO | Trading cost : 25bp | View : Market Contrarian  
1e6



Annualized return mean

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	0.136642	0.133459	0.130217	0.117746
$\tau = 0.05$	0.136249	0.132162	0.130217	0.118119
$\tau = 0.10$	0.132626	0.133699	0.130217	0.117736

Annualized Volatility

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	0.247076	0.239708	0.218064	0.195791
$\tau = 0.05$	0.245481	0.240146	0.218064	0.195903
$\tau = 0.10$	0.245287	0.239200	0.218064	0.196025

Annualized Sharpe Ratio

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	0.553035	0.556757	0.597152	0.601386
$\tau = 0.05$	0.555027	0.550342	0.597152	0.602946
$\tau = 0.10$	0.540695	0.558942	0.597152	0.600618

PSR(SR\* = 0)

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	0.938897	0.939888	0.951537	0.952098
$\tau = 0.05$	0.939443	0.937855	0.951537	0.952526
$\tau = 0.10$	0.934446	0.940642	0.951537	0.951915

MDD

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	-0.456346	-0.447612	-0.413374	-0.375307
$\tau = 0.05$	-0.457431	-0.446721	-0.413374	-0.375311
$\tau = 0.10$	-0.460082	-0.448528	-0.413374	-0.375317

Average HHI

$\tau \setminus \kappa$	$\kappa = 0.25$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 1.00$	$\kappa = 2.00$
$\tau = 0.02$	0.043931	0.037461	0.023473	0.014445
$\tau = 0.05$	0.043897	0.037468	0.023473	0.014454
$\tau = 0.10$	0.043019	0.037198	0.023473	0.014486

전반적으로 세 뷰 모두에서  $\kappa$  가 위험-수익 트레이드오프를 실질적으로 조절하는 주요 파라미터로 작동하였다.  $\kappa$  는 뷰 공분산  $\Omega$  의 스케일을 조절하므로,  $\kappa$  가 작은 값일수록  $H = \tau\Sigma^{-1} + P^\top\Omega^{-1}P$  에서  $P^\top\Omega^{-1}P$  항의 상대적 비중이 커지고, posterior 평균  $\mu^+ = H^{-1}(\tau\Sigma^{-1}\pi + P^\top\Omega^{-1}q)$  가 뷰 방향으로 더 강하게 당겨진다. 실증적으로도  $\kappa$  를 낮출수록 연환산 수익률과 샤프비율이 상승했으나, 동시에 변동성과 최대낙폭(MDD)이 확대되어 보다 공격적인 성향이 나타났다. 이는 특히 Market Cap 및 PER 뷰에서 두드러지는 것으로 나타났다. 반대로  $\kappa$ 의 값이 높은 경우에는 Black Litterman 의 뷰 반영 강도를 약화시켜 변동성과 낙폭을 유의미하게 축소하고, 평균 집중도(HHI)를 낮춰 포지션 분산을 확대하는 대신 수익과 샤프비율을 완만히 감소시키는 보수적 성향을 보였다. 예컨대 PER(성장) 뷰에서는  $\kappa$ 의 정도를 낮출시 Sharpe 가 크게 개선되는 반면 MDD 가  $-0.40 \sim -0.43$  수준까지 확대되었고, 1/PBR(가치) 뷰에서는  $\kappa$ 의 정도가 커짐에 따라

Sharpe 가 소폭 개선되면서 MDD 가 -0.38 대까지 완화되어 방어력이 강화되었다. 또한  $\kappa$ 가 낮은 구간에서는 연환산 회전율이 동반 상승하는 패턴이 관찰되어, 거래비용, 포트폴리오 리스크의 총량 제약이 존재하는 실무 환경 혹은 AUM 이 충분히 큰 상황에서는  $\kappa$  를 통해 목표 변동성과 낙폭, 비용 한도를 만족하도록 포트폴리오의 공격성을 직접 튜닝할 수 있음을 시사한다.

반면  $\tau$  의 영향은 본 연구에서 고려한 범위( $0.02 \leq \tau \leq 0.10$ )에서 상대적으로 제한적이었다.  $\tau$  는 사전(mean) 불확실성을 스케일링 하는 항으로서,  $\tau \Sigma^{-1}$  가  $P^T \Omega^{-1} q$ 에 의해 작게 유지되는 한 posterior 평균  $\mu^+$  는 시장 균형  $\pi$  보다 뷰  $q$  에 의해 주도된다. 본 실증에서도 동일한  $\kappa$  내에서  $\tau$  를 변화시켜도 Sharpe Ratio, 변동성, MDD 의 변화는 미세한 수준에 머물렀으며, 성과의 상대적 순서를 바꿀 정도는 아니었다. 요컨대 본 데이터와 뷰 스펙에서는 포트폴리오 성격을 결정하는 핵심 다이얼은  $\kappa$  이고,  $\tau$  는 2 차 조정 변수로 기능한다. 실무 가이드로는 첫째, 목표 연간 포트폴리오 리스크와 거래비용 제약에 맞춰  $\kappa$  를 우선 결정하고,  $\tau$  는 0.02 ~ 0.10 의 안정 구간에서 강건성 점검 차원으로만 조정하는 것이 합리적이다. 추가로,  $\kappa$  가 지나치게 작으면 집중도와 텐오버가 과도해질 수 있고, 지나치게 크면 뷰 신호가 희석되어 시장 포트폴리오로 수렴하는 경향이 있으므로, 뷰 신뢰도와 데이터 품질, 비용 구조를 함께 고려한 중간값 선택이 바람직하다. 최적의  $\tau$ 값과  $\kappa$ 값을 탐색하기 위해 4 장에서 진행한 몬테카를로 시뮬레이션의 구조를 활용하면 아직 발생하지 않은 미래 시장 상황에 대해서도 충분히 대응할 수 있을 것으로 기대된다.

## 6. 결론

본 연구는 Monte Carlo 모의실험과 실제 데이터 기반 실증분석을 병행하여 Posterior-NCO, 표준 NCO, Markowitz(MVO), IVP 네 방법을 두 가지 뷰 처리 시나리오(Black & Litterman 스타일, Correlation View Blending)에서 비교하였다. Monte Carlo 환경에서 Black–Litterman(이하 BL) 스타일 실험의 평균 Sharpe 는 Posterior-NCO 가 0.002550 으로 가장 높았으며, Markowitz(0.002468) 대비 +3.32%, 표준 NCO(0.002410) 대비 +5.81% 개선을 보였다. 다만 위험 지표 관점에서 Posterior-NCO 의 평균 변동성(0.146326)은 NCO(0.129773) 대비 +12.8%, Markowitz(0.137299) 대비 +6.6% 높았고, 평균 최대낙폭(MDD)도 Markowitz(-0.954325) 대비 절대치 기준 약 0.0134(약 1.41%) 악화되었다. 포트폴리오 집중도(HHI)는 Posterior-NCO(0.057885)가 NCO(0.064098)보다 낮아(약 -9.7%) 상대적으로 더 분산되는 특성이 확인되었고, 동일 전처리(lw\_constant\_corr, mp\_constant, detone=True) 하에서 승률(WinRate)은 Posterior-NCO 가 Markowitz 대비 0.511, NCO 대비 0.528 로 우위를 나타냈다. Correlation View Blending 시나리오에서는 평균 Sharpe 가 Markowitz(0.001783)가 가장 높고 Posterior-NCO 는 0.001518 으로 NCO(0.001422) 대비 +6.75% 개선되었으나 Markowitz 대비 -14.86% 낮았다. 변동성은 Posterior-

NCO(0.128305)가 NCO(0.129832)보다 낮았고, 평균 MDD 역시 NCO 대비 약 0.27% 개선되었으며, HHI 도 소폭 낮아 집중도 측면에서 개선이 관찰되었다.

추가로 수행한 실증분석(실제 시장 데이터, S&P 100 유니버스)에서는 Posterior-NCO 의 우수성이 더욱 명확히 드러났다. Market Neutral view(= market cap)를 BL 의 view 로 사용하고  $\tau = 0.02, \kappa = 2.00$  (confidence=0.5)을 기본값으로 두었을 때, 연환산 Sharpe Ratio 는 Posterior-NCO 가 0.7045 로 NCO/IVP( $\approx 0.644$ ) 및 Markowitz(0.4752)를 상회하였고, PSR 과 DSR 또한 Posterior-NCO 가 각각 0.9741, 0.7465 로 일관된 우위를 보였다. 누적수익(1.4991, 149.91%)과 MDD(-0.3250, -32.5%) 역시 Posterior-NCO 가 네 방법 중 가장 양호하였다. 다만 이러한 성과는 연환산 턴오버가 2.9007 로 상승하는 대가를 동반했다. BL 민감도 측면에서  $\kappa$  는 세 뷰(Market Cap, Forward 12M PER, FY0 1/PBR) 모두에서 위험-수익 트레이드오프를 주도적으로 조절하는 파라미터로 작동했다.  $\kappa$  가 감소할 시 Sharpe Ratio 와 수익률이 상승하나 변동성과 MDD 가 확대되었고,  $\kappa$  가 증가할 시 변동성과 MDD 가 유의미하게 축소되며 HHI 가 낮아져 분산이 확대되는 대신 Sharpe Ratio 가 완만히 감소하였다. 반면  $\tau$  는 0.02–0.10 범위에서 성과의 상대적 순서를 바꿀 정도로 큰 영향은 보이지 않았다.

View 별로는 성장 지향(Market Bull)의 Forward 12M PER view 가 가장 높은 Sharpe Ratio 를 기록했다( $\tau = 0.02, \kappa = 0.25$ 에서 Sharpe Ratio  $\approx 1.0039$ , 연환산 수익률  $\approx 0.2555$ (25.55%)) 그러나 MDD 가 -0.4208(-42.08%)로 확대되어 공격적 성향이 뚜렷하였다. 반대로 Contrarian View 인 FY0 기준 1/PBR view 는 Sharpe Ratio 가 중간 수준(예:  $\kappa = 2.00$  에서  $\approx 0.6014$ )인 대신 변동성과 MDD 가 각각  $\approx 0.1958$ (19.58%), -0.3753(-37.53%) 수준으로 유의하게 낮아 방어적 효용이 우수했다. Market Cap view 는 baseline 으로서  $\kappa$  조절을 통해 공격성/분산도(= HHI)를 매끄럽게 제어할 수 있었다. 종합하면 Posterior-NCO 는 평균-분산의 전통적 약점(표본 수익률의 추정오차)에 NCO 의 리스크 구조 안정화와 BL 의 뷰를 결합함으로써 Markowitz 및 표준 NCO 대비 Sharpe Ratio, PSR(Probabilistic Sharpe Ratio), DSR(Deflated Sharpe Ratio), MDD (Maximum Drawdown)등 주요 지표에서 동시 개선 가능성을 실증적으로 제시했다. 다만  $\kappa$  를 낮출수록 (즉, 뷰의 신뢰도를 더 높일수록) Turnover 와 하방 리스크가 함께 커지므로, 거래비용과 세금 제약, 포트폴리오 총 위험의 제약이 존재하는 하에서는  $\kappa$  상향, 리밸런싱 간격 조절, 극단값 완화(winsorization) 등을 통해 구현 비용과 위험을 관리할 필요가 있다.

요약하면, Posterior-NCO 는 (i) BL 형 기대수익 뷰를 적용했을 때 평균 성과(Sharpe)의 유의미한 개선과 함께 포트폴리오 집중도(HHI)의 하락(분산 확대)을 달성하나,  $\kappa$  를 낮춘 공격 세팅에서는 변동성과 MDD 가 증가하는 트레이드오프가 존재하고, (ii) 상관(View) 블렌딩에서는 표준 NCO 대비 Sharpe 및 위험 지표의 동시 개선이 가능하나 Markowitz 에 대한 우위는 환경과 전처리 설정(denoising/shrinkage, detone)에 따라 달라질 수 있음을 확인하였다. 전반적으로 Posterior-NCO 는 뷰의 성격(기댓값 vs 상관)과

하이퍼파라미터( $\kappa, \tau$ ) 및 데이터 전처리에 민감하게 반응하며, 평균 기준의 일관된 소폭 개선과 함께 특정 리스크 항목(특히 BL 케이스에서의 변동성, MDD 증가)을 동반할 수 있다.

## 6.1 해석 및 시사점

본 연구의 실증결과는 Posterior-NCO 가 “평균( $\mu$ )과 공분산( $\Sigma$ )의 동시 개선”이라는 설계적 강점을 통해 전통적 Markowitz 와 표준 NCO 를 상회할 수 있음을 보여준다. BL 업데이트는 posterior 평균  $\mu^+$  를 시장균형(prior)으로부터 뷰( $Q$ ) 방향으로 끌어당겨 장기 우상향 환경에서 기대수익의 방향 정렬을 개선하고, NCO 는 공분산 추정의 잡음을 정화(denoise)하고 구조화(clustering)하여 리스크 예산 배분의 안정성을 높인다. 이 두 요소가 결합된 Posterior-NCO 는 실제 데이터(S&P 100)에서도 Sharpe Ratio, PSR, DSR, MDD 의 동시 개선을 재현했다. 다만  $\kappa$  의 설정은 위험-수익 및 비용(Turnover)을 좌우하는 핵심 다이얼이므로,  $\kappa$ 를 낮추는 것으로 공격력을 높일수록 하방 리스크와 회전율이 동반 상승한다. 따라서 실무적으로는  $\kappa$ 를 목표 연간 포트폴리오 변동성, MDD, 거래비용 제약에 맞추어 조절하고,  $\tau$ 는 0.02–0.10 의 안정 구간에서 강건성 점검 차원의 2 차 조정 변수로 운용하는 것이 합리적이다.

뷰 선택의 관점에서는, Forward 12M PER view 가 “성장-모멘텀 환경”에서 가장 높은 성과를 제공하면서도 리스크가 커지는 전형적 성장주 프로파일을 보였고, 반대로 1/PBR(FY0) view 는 방어적 성향을 강화하여 변동성과 낙폭을 낮추는 데 효과적이었다. Market Cap view 는 baseline 으로서 운용자의 뷰 신뢰도( $\kappa$ )에 따라 공격성과 분산도를 세밀하게 정렬할 수 있는 장점이 있다. 따라서 운용 목적이 초과수익 극대화인지, 하방위험 통제인지, 혹은 두 요소의 균형인지에 따라 view 와  $\kappa$ 를 조합해 의도된 스타일 노출(Growth vs Value vs Neutral)을 구현하는 것이 바람직하다.

## 6.2 한계 및 향후 연구 과제

본 연구는 Monte Carlo 와 실제 데이터 실증을 통해 Posterior-NCO 의 유효성을 제시했으나, 몇 가지 한계가 존재한다. 첫째, S&P 100 기반 실증은 현 시점 구성 종목을 사용함에 따른 승자편향(survivorship bias) 가능성을 내포한다. 다만 본 연구의 목적은 “배분 방법 간 상대 비교”에 있고, 동일 유니버스·동일 조건 하에서의 상대 성과를 평가했으므로 결론의 방향성에는 제한적 영향을 미치는 것으로 판단된다. 둘째, 거래비용과 세금, 유동성 제약, 거래에 따른 Slippage 등 현실적 요인을 명시적으로 목적함수/제약에 포함하지 않았기 때문에,  $\kappa$ 를 낮춘 구간에서의 높은 Turnover 가 실제 초과성과를 상쇄할 위험이 있다. 향후 연구에서는 거래비용 내생화, 리밸런싱 정책 최적화, PSD 투영, 럿지 정규화 및 병렬화 등을 통한 계산 효율화가 필요하다. 셋째, 본문에서 제시한 BL 민감도 결과는  $\kappa$  가 핵심 조절변수,  $\tau$  는 제한적 영향이라는 결론을 제공하지만, 이는 뷰의 품질과 데이터 노이즈 수준에 따라 달라질 수 있다. 뷰 신뢰도( $\Omega$ ),  $\tau$ 의 데이터

기반 추정(예: empirical Bayes), 계층적 베이지안 혹은 Time Varying Parameter Model 을 통한 뷰의 동적 업데이트가 유망한 확장이다.

넷째, 본 연구는 PBO(Probability of Backtest Overfitting)를 전면적으로 계산하지 못했다. PBO 는 복수 후보전략 집합( $K$  가 충분히 큼)과 CPCV(조합형 교차검증)를 요구하므로, 향후에는  $\kappa$ , winsor 수준, 리밸런싱 주기 등 Hyper Parameter 변형을 통해 후보전략 풀을 확장( $K \geq 20$ )하고 CPCV 를 적용하여 PBO 를 정량화할 필요가 있다. 다섯째, 통계적 유의성 검정은 DSR/PSR 을 중심으로 보고되었으며, 후속 연구에서는 paired test, 부트스트랩, 다중비교 보정을 표준화해 결과의 견고성을 강화해야 한다. 여섯째, 몬테카를로 실험에서는 사용되었지만 실증 분석에서는 사용되지 않은 Correlation Blending method sms Correlation View Matrix 생성에 현실적으로 어려움이 있어 누락되었으나, 이 방법의 비교 또한 후속 연구로 진행되어야 한다. 마지막으로, Correlation View 블렌딩의 성과는 전처리(denoising/shrinkage, detone)와 군집화 설정에 민감하므로, 다양한 RMT/NLS 기반 정화, linkage 전략(ward/average/complete), 컷 수준 자동선택 기준(silhouette/gap statistic)의 체계적 비교가 요구된다.

결론적으로, 본 연구는 Posterior-NCO 가 평균-분산 추정의 취약점을 보완하여 전통적 방법 대비 실질적 성과 개선을 달성할 수 있음을 Monte Carlo 와 실제 데이터 모두에서 보였다. 동시에, 그 효과는 뷰의 성격(기댓값 vs 상관),  $\kappa/\tau$ , 전처리 설정, 비용 제약에 민감하므로, 향후 연구는 PBO 를 포함한 Overfitting 진단, 거래비용 내생화, 동적 베이지안 프레임을 통한 뷰 업데이트, 자산의 다양화 및 마켓의 확장 등을 통해 결과의 외연과 신뢰도를 한층 높여야 한다.

## 참고문헌 (References)

- Black, F., & Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5), 28–43.
- Black, F., & Litterman, R. (1991). Asset allocation: Combining investor views with market equilibrium. *The Journal of Fixed Income*, 1(2), 7–18.
- DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *The Review of Financial Studies*, 22(5), 1915–1953.
- Jagannathan, R., & Ma, T. (2003). Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps. *The Journal of Finance*, 58(4), 1651–1683.
- Ledoit, O., & Wolf, M. (2004). Honey, I shrunk the sample covariance matrix. *The Journal of Portfolio Management*, 30(4), 110–119.
- Ledoit, O., & Wolf, M. (2020). Analytical nonlinear shrinkage of large-dimensional covariance matrices. *The Annals of Statistics*, 48(5), 3043–3065.
- Lopez de Prado, M. (2016). Building diversified portfolios that outperform out of sample. *The Journal of Portfolio Management*, 42(4), 59–69.
- Lopez de Prado, M. (2020). Machine learning for asset managers. Cambridge University Press.
- Lopez de Prado, M. (2018). Advances in financial machine learning. John Wiley & Sons.
- Meucci, A. (2005). Risk and asset allocation. Springer Finance.
- Meucci, A. (2008). The Black-Litterman approach: Original model and extensions. *Mathematical Finance*, 18(4), 529–551.
- Meucci, A. (2010). The Black-Litterman approach: Risk budgeting and conditioning on scenarios. *Risk*, 23(2), 98–102.
- Michaud, R. O. (1989). The Markowitz optimization enigma: Is ‘optimized’ optimal? *Financial Analysts Journal*, 45(1), 31–42.
- Muirhead, R. J. (1982). Aspects of multivariate statistical theory. John Wiley & Sons.
- Laloux, L., Cizeau, P., Bouchaud, J. P., & Potters, M. (1999). Noise dressing of financial correlation matrices. *Physical Review Letters*, 83(7), 1467–1470.
- Plerou, V., Gopikrishnan, P., Rosenow, B., Amaral, L. A. N., & Stanley, H. E. (1999). Universal and nonuniversal properties of cross correlations in financial time series. *Physical Review Letters*, 83(7), 1471–1474.

- Avramov, D., & Zhou, G. (2010). Bayesian portfolio analysis. *Annual Review of Financial Economics*, 2(1), 25–47.
- Pastor, L., & Stambaugh, R. F. (2000). Comparing asset pricing models: An investment perspective. *Journal of Financial Economics*, 56(3), 335–381.
- Kan, R., & Zhou, G. (2007). Optimal portfolio choice with parameter uncertainty. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 42(3), 621–656.
- Tu, J., & Zhou, G. (2011). Markowitz meets Talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies. *Journal of Financial Economics*, 99(1), 204–215.
- He, G., & Litterman, R. (1999). The intuition behind Black-Litterman model portfolios. *Goldman Sachs Investment Management Research*.
- Martellini, L., & Ziemann, V. (2010). Improved estimates of higher-order comoments and implications for portfolio selection. *Review of Financial Studies*, 23(4), 1467–1502.
- Jorion, P. (1986). Bayes-Stein estimation for portfolio analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21(3), 279–292.
- Bailey, D. H., & López de Prado, M. (2012). The Sharpe ratio efficient frontier. *Journal of Risk*, 15(2), 3–44.
- Bailey, D. H., & López de Prado, M. (2014). The deflated Sharpe ratio: Correcting for selection bias, backtest overfitting and non-normality. *Journal of Portfolio Management*, 40(5), 94–107.