Taller de Álgebra I

Clase 1 - Primeras funciones

Segundo cuatrimestre 2022

Taller de Álgebra I

- ¿De qué se trata el taller de Álgebra I?
  - Dar una introducción a la computación y a la programación.

Taller de Álgebra I

- ¿De qué se trata el taller de Álgebra I?
  - Dar una introducción a la computación y a la programación.
  - Programar los algoritmos que se ven en las teóricas y prácticas...

- ¿De qué se trata el taller de Álgebra I?
  - Dar una introducción a la computación y a la programación.
  - Programar los algoritmos que se ven en las teóricas y prácticas...
  - ...usando programación funcional.

- ¿De qué se trata el taller de Álgebra I?
    - Dar una introducción a la computación y a la programación.
    - Programar los algoritmos que se ven en las teóricas y prácticas. . .
    - . . . usando programación funcional.
        - ¿qué? ¿por qué?

Taller de Álgebra I

- ¿De qué se trata el taller de Álgebra I?
  - Dar una introducción a la computación y a la programación.
  - Programar los algoritmos que se ven en las teóricas y prácticas...
  - ...usando programación funcional.
    - ¿qué? ¿por qué?
- 3 horas semanales de clase teórico-práctica (modalidad taller).
- En los laboratorios de computadoras.
- En todos los laboratorios se da la misma clase, pueden asistir a cualquiera.
- Régimen de evaluación:
  - Dos trabajos prácticos en grupo.
  - **Importante:** En las instancias de evaluación solo podrán utilizarse las técnicas y herramientas vistas en clase.

Listas de correo del taller

- Si te inscribiste por el SIU, deberías haber recibido un mail de bienvenida.
- **Importante**: si no te llegan los mails o necesitás usar otra dirección, comunicate con nuestro *listmaster*: sfigueir (arroba) dc.uba.ar (Santiago Figueira).

- Anuncios para alumnos $\longrightarrow$ `algebra1-alu (arroba) dc.uba.ar`
  - Anuncios importantes sobre la cursada (¡leé tu mail seguido!).
  - Entre ustedes: para buscar grupo de TP, armar grupos de estudio, etc.
- Consultas para docentes $\longrightarrow$ `algebra1-doc (arroba) dc.uba.ar`
  - **No enviar consultas a** `-alu`.
  - Cuando la respuesta es de interés general, nosotros lo re-enviamos a `-alu`.
  - Es mejor enviar tu consulta a `-doc` que a un docente en privado.

Página del Campus

- Allí pueden encontrar información general de la materia, los slides de las clases y los videos que se grabaron durante la pandemia (por si quieren re-ver las clases)
- También publicamos novedades en su portada
- Pide login. Hay dos alternativas:
  - Usar DNI + password de SIU/Guaraní
  - Entrar como *Invitado* (Cuando pregunta por un "Site Policy", dar **Yes**)

Resolviendo problemas con una computadora

La resolución de un problema en computación requiere de al menos los siguientes pasos:

- identificar y aislar el problema a resolver,
- pensar una descripción de la solución (algoritmo) para resolver el problema,
- implementar el algoritmo en un lenguaje de programación y en una plataforma determinada, obteniendo así un programa ejecutable.

Resolviendo problemas con una computadora

La resolución de un problema en computación requiere de al menos los siguientes pasos:

- identificar y aislar el problema a resolver,
- pensar una descripción de la solución (algoritmo) para resolver el problema,
- implementar el algoritmo en un lenguaje de programación y en una plataforma determinada, obteniendo así un programa ejecutable.

Un programa es la descripción de un algoritmo en un lenguaje de programación.

- Es una descripción precisa, de modo tal que pueda ser ejecutada por una computadora.
- Un lenguaje de programación tiene una sintaxis y una semántica bien definidas.

Resolviendo problemas con una computadora

La resolución de un problema en computación requiere de al menos los siguientes pasos:

- identificar y aislar el problema a resolver,
- pensar una descripción de la solución (algoritmo) para resolver el problema,
- implementar el algoritmo en un lenguaje de programación y en una plataforma determinada, obteniendo así un programa ejecutable.

Un programa es la descripción de un algoritmo en un lenguaje de programación.

- Es una descripción precisa, de modo tal que pueda ser ejecutada por una computadora.
- Un lenguaje de programación tiene una sintaxis y una semántica bien definidas.

Al programar, es importante preguntarse:

- si el programa implementa correctamente el algoritmo propuesto,
- si puede pasar que el programa no termine en algunos casos,
- cuánto va a tardar la ejecución,
- etc.

¿La computación es útil a la matemática?

Las computadoras permiten realizar cálculos muy rapidamente, y esto permite:

- hacer cuentas que llevarían años de manera manual,
- chequear todos los casos en un teorema,
- testear conjeturas,
- y más...

¿La computación es útil a la matemática?

Las computadoras permiten realizar cálculos muy rapidamente, y esto permite:

- hacer cuentas que llevarían años de manera manual,
- chequear todos los casos en un teorema,
- testear conjeturas,
- y más...

Además, pensar algorítmicamente permite atacar los problemas desde un punto de vista totalmente distinto y muchas veces nos lleva a organizar mejor las ideas.

¿La computación es útil a la matemática?

Las computadoras permiten realizar cálculos muy rapidamente, y esto permite:

- hacer cuentas que llevarían años de manera manual,
- chequear todos los casos en un teorema,
- testear conjeturas,
- y más...

Además, pensar algorítmicamente permite atacar los problemas desde un punto de vista totalmente distinto y muchas veces nos lleva a organizar mejor las ideas.

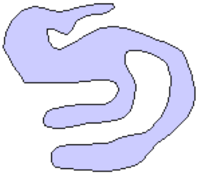
Ejemplo: Queremos una fórmula para la cantidad de subconjuntos de un conjunto de n elementos. Hacemos un programa que los cuente y vemos los resultados:

- 0 elementos $\to$ 1 subconjunto
- 1 elemento $\to$ 2 subconjuntos
- 2 elementos $\to$ 4 subconjuntos
- 3 elementos $\to$ 8 subconjuntos

Ah... ¡es 2^n! ¿Por qué?

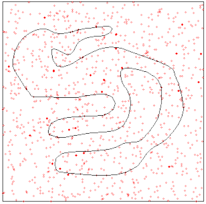
Estimaciones

Queremos calcular el área de la figura.



Estimaciones

Tiramos 1000 puntos al azar en un cuadrado que contiene a la figura y contamos cuántos caen adentro de la figura.



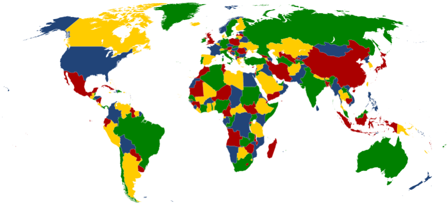
Por ejemplo, si caen 280 y el tamaño del cuadrado es de $100cm^2$, podemos estimar el área de la figura como

$$\frac{280}{1000}100cm^2 = 28cm^2$$

Otros ejemplos de aplicaciones a la matemática

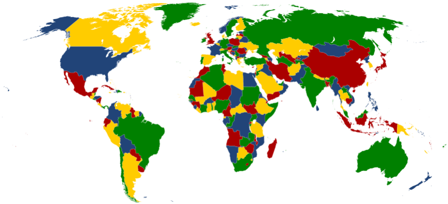
¿Cuántos colores hacen falta para colorear un mapa de tal manera que siempre dos regiones limítrofes tengan distintos colores?

Ejemplo: el mapa del mundo se puede colorear con 4 colores.



¿Cuántos colores hacen falta para colorear un mapa de tal manera que siempre dos regiones limítrofes tengan distintos colores?

Ejemplo: el mapa del mundo se puede colorear con 4 colores.



En 1852, Francis Guthrie le preguntó a su hermano matemático si 4 colores alcanzarían para cualquier mapa.

Ni el hermano de Guthrie, ni su profesor (Augustus de Morgan) ni otros matemáticos de la época pudieron demostrar que fuese así, ni encontrar un contraejemplo. La pregunta quedó planteada sin respuesta por mucho tiempo.

Recién en 1977, Appel y Haken demostraron que era cierto, que 4 colores bastaban para cualquier mapa.

Otros ejemplos de aplicaciones a la matemática

Recién en 1977, Appel y Haken demostraron que era cierto, que 4 colores bastaban para cualquier mapa.

Pero la demostración de Appel y Haken dividió a la comunidad matemática. ¿Por qué?:

- Redujeron los mapas a unos 10.000 casos prototípicos.
- Luego, Appel y Haken probaron que en estos últimos 10.000 casos 4 colores bastaban... pero lo hicieron usando una computadora.

Otros ejemplos de aplicaciones a la matemática

Recién en 1977, Appel y Haken demostraron que era cierto, que 4 colores bastaban para cualquier mapa.

Pero la demostración de Appel y Haken dividió a la comunidad matemática. ¿Por qué?:

- Redujeron los mapas a unos 10.000 casos prototípicos.
- Luego, Appel y Haken probaron que en estos últimos 10.000 casos 4 colores bastaban... pero lo hicieron usando una computadora.

Un programa, decían los críticos de la computación entre los matemáticos, puede

- fallar al momento de la ejecución (algo que se descarta corriendo el mismo programa varias veces y en distintas máquinas),
- y mucho más importante: estar mal hecho (tener *bugs*).

Pero... ¿una persona, no puede equivocarse en una demostración escrita en papel?

Otros ejemplos de aplicaciones a la matemática

Recién en 1977, Appel y Haken demostraron que era cierto, que 4 colores bastaban para cualquier mapa.

Pero la demostración de Appel y Haken dividió a la comunidad matemática. ¿Por qué?:

- Redujeron los mapas a unos 10.000 casos prototípicos.
- Luego, Appel y Haken probaron que en estos últimos 10.000 casos 4 colores bastaban... pero lo hicieron usando una computadora.

Un programa, decían los críticos de la computación entre los matemáticos, puede

- fallar al momento de la ejecución (algo que se descarta corriendo el mismo programa varias veces y en distintas máquinas),
- y mucho más importante: estar mal hecho (tener *bugs*).

Pero... ¿una persona, no puede equivocarse en una demostración escrita en papel?

En 2004, Georges Gonthier demostró *formalmente* el teorema de los cuatro colores. Lo hizo con una computadora (no los sólo los 10.000 casos, sino todo el teorema), escribiendo la demostración en un lenguaje que sirve para verificar demostraciones: Coq.

Programación funcional

- Un programa en un lenguage funcional es un conjunto de ecuaciones orientadas que definen una o más funciones.

  Por ejemplo:

  ```
  doble x = 2 * x
  ```

- La ejecución de un programa en este caso corresponde a la evaluación de una expresión, habitualmente solicitada desde la consola del entorno de programación.

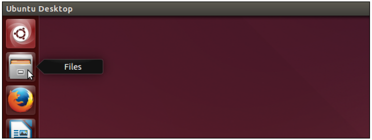
  ```
  Prelude> doble 10
  20
  ```

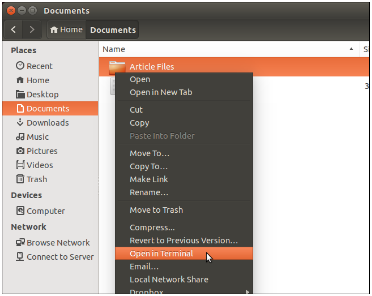
- La expresión se evalúa usando las ecuaciones definidas en el programa, hasta llegar a un resultado. Las ecuaciones orientadas junto con el mecanismo de reducción describen algoritmos (definición de los pasos para resolver un problema).

Linux: Terminal (o Consola)

¿Qué es una terminal? Es una interfaz desde la cual podemos escribir y ejecutar comandos.

¿Cómo abrimos una terminal? Mediante la interfaz gráfica de Ubuntu, o mediante el atajo `Ctrl + Alt + T`.





Para hacer ahora...

1. Abrir una terminal.
2. Crear un archivo de texto usando *alguno* de los siguientes comandos:
   - `gedit clase1.hs`
   - `atom clase1.hs`
   - `subl clase1.hs`
3. Escribir dentro del archivo `f x y = x * x + y * y` y guardarlo.
4. Abrir el intérprete de Haskell: Abrir una nueva terminal y ejecutar `ghci`.
5. Ejecutar alguna operación simple, por ejemplo `8 * 7`.
6. Cargar el archivo: `:l clase1.hs`.
7. Dentro de GHCI, ejecutar lo siguiente: `f 2 3`
8. Agregar al código la función `g x y z = x + y + z * z` y volver a guardar.
9. En `ghci`, recargar el programa: `:r`
10. Ejecutar `g 2 3 4`
11. Si quieren, pueden cerrar el intérprete ejecutando: `:q`

Programación funcional

¡Manos a la obra! Programar las siguientes funciones

- $doble(x) = 2x$
- $suma(x, y) = x + y$
- $||(x_1, x_2)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
- $f(x) = 8$

- `doble x = ??`
- `suma x y = ??`
- `normaVectorial x1 x2 = ??`
- `funcionConstante8 x = ??`

Ejecutar las siguientes expresiones en el intérprete

```
*Main> doble 10
*Main> doble (-1)
*Main> doble -1
*Main> suma 3 4
*Main> suma(3, 4)
*Main> suma (-1) 4
*Main> normaVectorial 3 5
*Main> funcionConstante8 0
*Main> suma (doble 10) 5
```

Machete

- Números
  - `1` (números)
  - `1.3, 1e-10, 6.022140857e23` (números con decimales)
  - `(-1)` (números negativos)
- Funciones básicas
  - `+, *, /, -`
  - `div, mod` (cociente y resto en la división entera)
  - `sqrt, **, ^`
- Uso de funciones
  - Para aplicar una función, utilizamos el nombre de la función seguido de parametros con espacios entre medio:
    - `f x1 x2 x3 x4 x5 x6`
    - Equivalente a $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ en matemática
    - Ejemplo: `sqrt 4`
    - Ejemplo: `div 2 3`
  - Para indicar que un parámetro es resultado de otra operación, usamos paréntesis:
    - `f (g x1) (h x2 x3) x3 x4 x5 x6`
    - Equivalente a $f(g(x_1), h(x_2, x_3), x_3, x_4, x_5, x_6)$ en matemática
    - Ejemplo: `sqrt ((sqrt 10) - 3)`
    - Ejemplo: `div (mod 3 5) (mod 4 3)`

Definiciones de funciones por casos

Podemos usar guardas para definir funciones por casos:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

```
f n | n == 0 = 1
    | n /= 0 = 0
```

Palabra clave “si no”.

```
f n | n == 0 = 1
    | otherwise = 0
```

La función signo

$$signo(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

```
signo n | n > 0 = 1
        | n == 0 = 0
        | n < 0 = -1
```

```
signo n | n > 0 = 1
        | n == 0 = 0
        | otherwise = -1
```

La función máximo

```
maximo x y | x >= y = x
           | otherwise = y
```

¿Qué hacen las siguientes funciones?

```
f1 n | n >= 3 = 5
```

```
f2 n | n >= 3 = 5
     | n <= 1 = 8
```

```
f3 n | n >= 3 = 5
     | n == 2 = undefined
     | otherwise = 8
```

¿Qué hacen las siguientes funciones?

```
f4 n | n >= 3 = 5
     | n <= 9 = 7
```

```
f5 n | n <= 9 = 7
     | n >= 3 = 5
```

Prestar atención al orden de las guardas. ¡Cuando las condiciones se solapan, el orden de las guardas cambia el comportamiento de la función!

Otra posibilidad usando *pattern matching*

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

```
  f n | n == 0 = 1
      | n /= 0 = 0
```

También se puede hacer:

```
f 0 = 1
f n = 0
```

Otra posibilidad usando *pattern matching*

$$signo(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

```
signo n | n > 0 = 1
        | n == 0 = 0
        | n < 0 = -1
```

También se puede hacer:

```
signo 0 = 0
signo n | n > 0 = 1
        | otherwise = -1
```

Otro ejemplo

Implementar la función `cantidadDeSoluciones`, que dados dos números b y c, calcula la cantidad de soluciones reales la ecuación cuadrática

$$X^2 + bX + c = 0.$$

```
cantidadDeSoluciones b c | b^2 - 4*c > 0 = 2
                         | b^2 - 4*c == 0 = 1
                         | otherwise = 0
```

Otra posibilidad:

```
cantidadDeSoluciones b c | d > 0 = 2
                         | d == 0 = 1
                         | otherwise = 0
                         where d = b^2 - 4*c
```

Tipos de datos

Tipo de dato

Un **conjunto de valores** a los que se les puede aplicar un **conjunto de funciones**.

Ejemplos

1. $\texttt{Int} = (\mathbb{Z}, \{+, -, *, \texttt{div}, \texttt{mod}\})$ es el tipo de datos que representa a los enteros con las operaciones aritméticas habituales.
2. $\texttt{Float} = (\mathbb{Q}, \{+, -, *, /\})$ es el tipo de datos que representa a los racionales, con la aritmética de punto flotante.
3. $\texttt{Bool} = (\{\texttt{True}, \texttt{False}\}, \{\texttt{\&\&}, \texttt{||}, \texttt{not}\})$ representa a los valores lógicos.

Podemos especificar explícitamente el tipo de datos del *dominio* y *codominio* de las funciones que definimos. A esto lo llamamos dar la *signatura* de la función.

No es estrictamente necesario hacerlo, pero suele ser una buena práctica.

Ejemplos

```
maximo :: Int -> Int -> Int
maximo x y | x >= y = x
           | otherwise = y
```

```
maximoRac :: Float -> Float -> Float
maximoRac x y | x >= y = x
              | otherwise = y
```

```
esMayorA9 :: Int -> Bool
esMayorA9 n | n > 9 = True
            | otherwise = False
```

```
esPar :: Int -> Bool
esPar n | mod n 2 == 0 = True
        | otherwise = False
```

```
esPar2 :: Int -> Bool
esPar2 n = mod n 2 == 0
```

```
esImpar :: Int -> Bool
esImpar n = not (esPar n)
```

Otro ejemplo mas raro:

```
funcionRara :: Float -> Float -> Bool -> Bool
funcionRara x y z = (x >= y) || z
```

Otras posibilidades, usando *pattern matching*:

```
funcionRara :: Float -> Float -> Bool -> Bool
funcionRara x y True = True
funcionRara x y False = x >= y
```

```
funcionRara :: Float -> Float -> Bool -> Bool
funcionRara _ _ True = True
funcionRara x y False = x >= y
```

Ejercicios

Implementar las siguientes funciones, especificando su signatura.

1. `absoluto`: calcula el valor absoluto de un número entero.
2. `maximoabsoluto`: devuelve el máximo entre el valor absoluto de dos números enteros.
3. `maximo3`: devuelve el máximo entre tres números enteros.
4. `algunoEs0`: dados dos números racionales, decide si alguno de los dos es igual a 0 (hacerlo dos veces, una sin usar y otra usando *pattern matching*).
5. `ambosSon0`: dados dos números racionales, decide si ambos son iguales a 0 (hacerlo dos veces, una sin usar y otra usando *pattern matching*).
6. `esMultiploDe`: dados dos números naturales, decidir si el primero es múltiplo del segundo.
7. `digitoUnidades`: dado un número natural, extrae su dígito de las unidades.
8. `digitoDecenas`: dado un número natural, extrae su dígito de las decenas.

Observación: Cuando el problema en cuestión trata sobre números naturales, se puede simplemente usar el tipo `Int` e ignorar el comportamiento del programa si el usuario decide ejecutarlo usando para los parámetros enteros negativos o 0.