数値計算の基本的な考え方・使い方

–定量的マクロ経済学の数値計算手法と応用–

山田 知明

明治大学
tyamada@meiji.ac.jp

2021 年 5 月 15 日@日本経済学会 2021 年度春季大会
日本学術会議・経済学委員会 数量的経済・政策分析分科会主催チュートリアルセッション

概要

イントロダクション

数値計算 (Numerical Methods) の基本的な考え方

- いつ数値計算が必要になるのか?
- 1990 年代は色々な意見があった：Bona and Santos (1997)
  - 数値例からモデルの定量的含意へ
  - 解析的に解けないモデルを近似的に解く
    - 近似的に解いた均衡に対する解釈：Kubler and Schmedders (2005)
- 政策評価のツールとしての経済モデル
  - 例：消費税を〇%減税すると GDP が△%上昇する

今回やらないこと

- 定常状態近傍で線形近似
  - 伝統的な RBC モデル：King, Plosser and Rebelo (1998,2002)
  - 基本的な考え方：Blanchard and Kahn (1980)、Sims (2002)
- 不向きな領域
  - 強い非線形性や定常状態から離れたところでの現象
  - 流動性制約、ゼロ金利制約、異質性 (極端な富裕層と貧困層) など
- 線形近似を全面否定しているわけではない
  - 今でも New Keynesian DSGE モデルなどで現役!
  - 一般化：摂動法 (Perturbation Method)
    - McKay and Reis (2016) など

今回 (山田) のチュートリアルの目的

政策関数 (Policy Function) を計算したい

なぜ政策関数を計算する必要があるのか?

- 動学的一般均衡モデルのパーツになる
  1. ある価格のもとで意思決定問題を解く：政策関数を計算
  2. 各市場における需給のバランスをチェック
  3. 需給のバランスが取れていなければ価格をアップデートして再度、意思決定問題を解く ⇒ 不動点を探す
- 構造推計 (Structural Estimation) のパーツになる
  1. あるパラメータのもとで意思決定問題を解く
  2. モデルから生成されたデータと実際のデータを “距離” を比較：Simulated Method of Moments
  3. フィットが悪ければパラメータをアップデートして再度、意思決定問題を解く

- 今日のチュートリアルはどちらも前者 (一般均衡モデル)
  - 後者に関心がある場合：French (2005), De Nardi et al. (2016) など

チュートリアルセッションの概要

- 砂川さん (一橋大学)：
  - ニューケインジアン DSGE モデルの新展開
- 北尾さん (東京大学)：
  - 不完備市場
  - ライフサイクルモデル

チュートリアル用マテリアル

- 本セッションで使用したスライドとコードは報告者 (山田) の HP からダウンロード可能
  - Julia のインストール方法 & Julia コード & Jupyter notebook

動的計画法

基本モデル

- 目的関数

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

- 予算制約

$$c_t + a_{t+1} = (1 + r_t)a_t + w_t$$

  - t：時間、c_t：t 期の消費、β：割引因子、a_t：t 期の資産保有量
  - r_t：利子率、w_t：賃金
- 要素価格 (利子率、賃金) は所与
  - 前のスライドのステップ 1 に対応

動的計画法 (Dynamic Programming)

- ベルマン方程式 (Bellman Equation) の形で記述

$$V(a) = \max\{u(c) + \beta V(a')\}$$
$$\text{subject to}$$
$$c + a' = (1 + r)a + w$$

- $V(\cdot)$：価値関数 (Value Function)、a：状態変数 (State Variable)、a'：操作変数 (Control Variable)
  - 詳しく知りたい人は Stokey, Lucas, with Prescott (1989) や Sargent and Ljungqvist (2018) を参照

応用例

- 多くの動学的最適化問題がベルマン方程式の形で記述・拡張可能
  - 消費者問題に限らない
- 例えば、
  - 生産性ショックのような状態変数を追加
  - 家購入のような離散的意思決定を追加
  - 企業の投資に関する意思決定と (S,s) ルール：Khan and Thomas (2008)
  - 退職金と雇用ダイナミクス：Alvarez and Veracierto (2001)
  - etc,

我々が知りたいこと

- 政策関数

$$a' = g(a)$$

オイラー方程式 (Euler Equation)

- 緩やかな条件のもと、オイラー方程式を解く場合と一致

$$u'(c) = \beta(1+r)u'(c')$$

  - 予算制約式に政策関数を代入

$$u'((1+r)a + w - g(a)) = \beta(1+r)u'((1+r)g(a) + w - g(g(a)))$$

実際に解いてみる

どうやって解くか?

- 知りたいのは何かの数字ではなく "関数"
- 大雑把にわけるとベルマン方程式を解く方法とオイラー方程式 (一階条件) を解く方法がある

1. ベルマン方程式を解く方法
   - 価値関数反復法 (Value Function Iteration)⇐ 次スライド
   - 政策関数反復法 (Policy Function Iteration)
2. オイラー方程式を解く方法
   - 時間反復法 (Time Iteration) ⇐ 砂川さんが説明
   - 射影法 (Projection Method)
   - 内点格子法 (Endogenous Gridpoint Method)
   - Parametrized Expectations Algorithm
   - etc.

カリブレーション

- 関数を特定化してパラメータを設定

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

- $\beta = 0.99$、$\gamma = 2$、$r = 0.01$、$w = 1$
  - 今回の目的はデモンストレーションなので適当に設定

アルゴリズム：ステップ (1)

- 状態変数 a に関するグリッド (Grid) を生成する
- $a^i \in \{a^1_{min}, \dots, a^I_{max}\}$
  - a_{min}、a_{max}：グリッドの最小値、最大値
    - コンピュータなので当然、無限は扱えない
  - I：グリッドの個数
    - 数が多いほど精度は高まるけど計算時間は増加する
- 価値関数や政策関数は点の組み合わせとして表現
  - $\{a^i, V(a^i)\}_{i=1}^I$、$\{a^i, g(a^i)\}_{i=1}^I$

アルゴリズム：ステップ (2)

- 価値関数は繰り返し計算で収束する

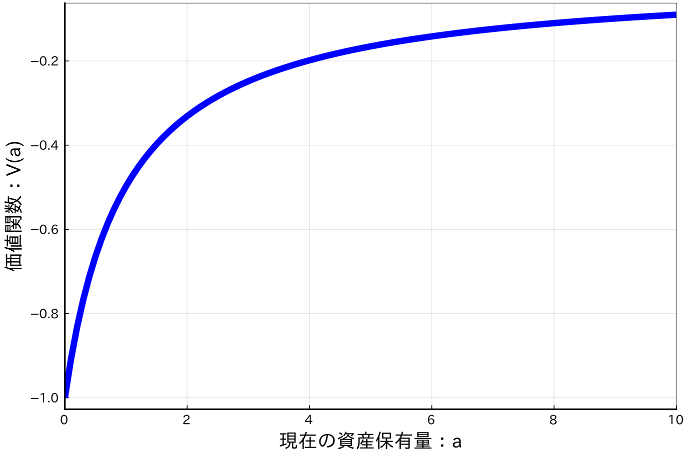
$$V^{(1)}(a) = \max\{u(c) + \beta V^{(0)}(a')\}$$

  - 縮小写像定理 (Contraction Mapping Theorem)
- 価値関数の初期推測 (Initial Guess)
  - 持っている資産をすべて消費したときの効用

$$V^{(0)}(a^i) = \frac{(1+r)a^i + w}{1-\gamma} \text{ for all } i = 1, \ldots, I$$

  - 他の値でも良い：良い Initial Guess の方が収束が早い

価値関数の Initial Guess



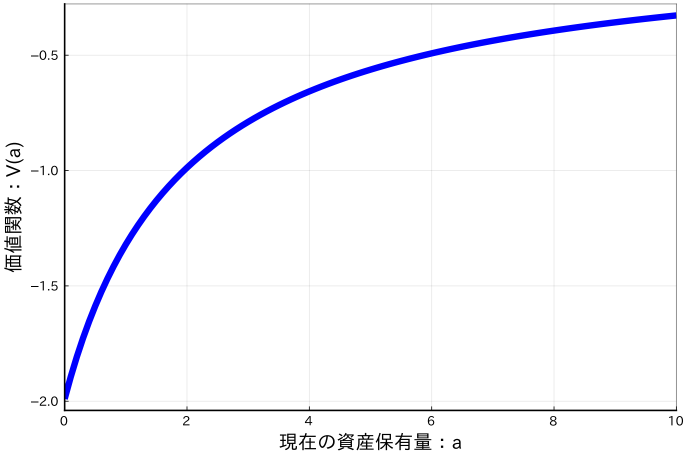
アルゴリズム：ステップ (3)

- $V^{(0)}(a)$ を所与として、各グリッド a^i 上で最適化問題を解く

$$V^{(1)}(a^i) = \max\left\{\frac{(1+r)a^i + w - a'}{1-\gamma} + \beta V^{(0)}(a')\right\}$$

- 必要になる知識
  - Optimization
  - Interpolation
  - 詳細は Jupyter notebook や北尾・砂川・山田 (2018-2020) を参照

1 回だけ Optimization：$V^{(1)}(a)$



アルゴリズム：ステップ (4)

- 価値関数をアップデート
  - 右辺の $V^{(0)}(a)$ に計算した $V^{(1)}(a)$ を代入

アルゴリズム：ステップ (5)

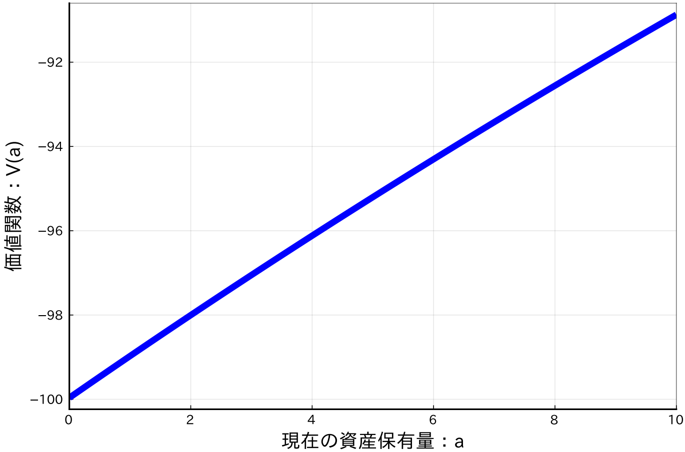
- アルゴリズム (3)–(4) を繰り返す
- 価値関数の繰り返し計算誤差が十分に小さくなったらストップ

$$||V^1(a) - V^0(a)|| < \varepsilon$$

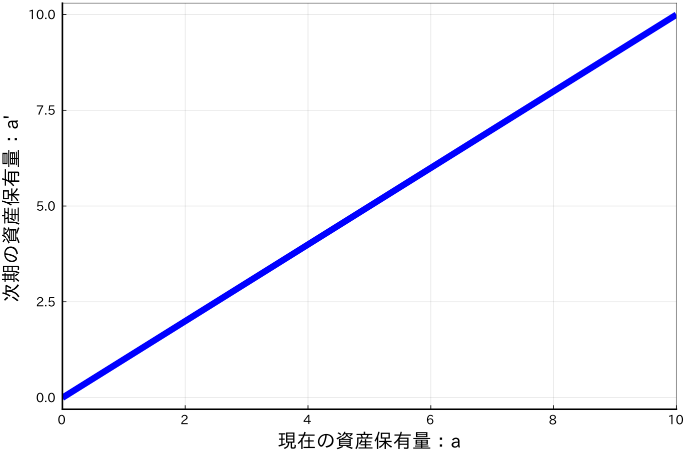
  - 政策関数の繰り返し計算誤差をストップの基準に使ってもよい

計算結果

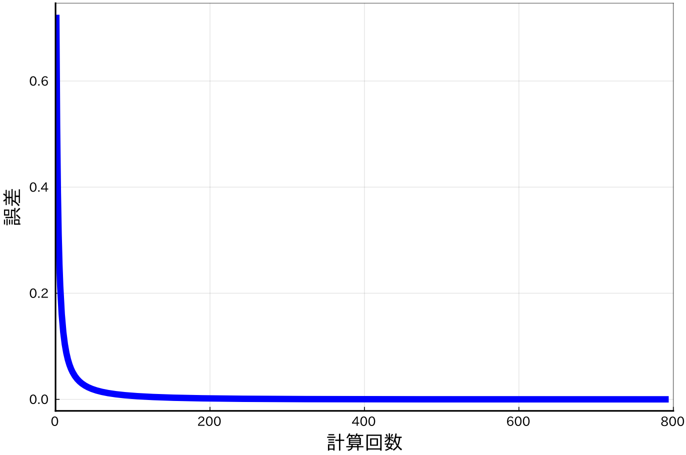
価値関数



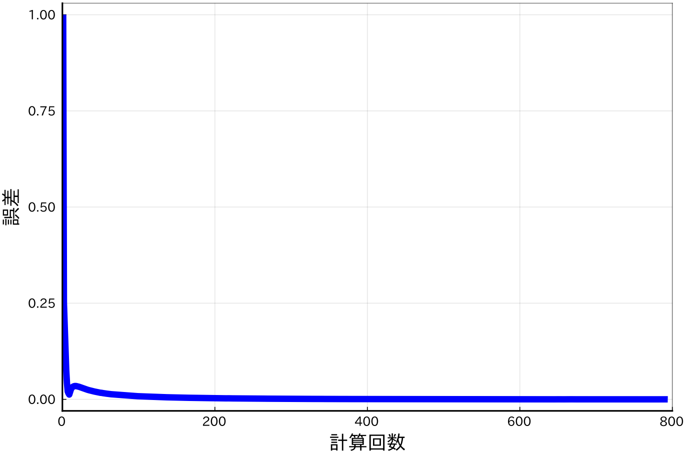
政策関数



価値関数の収束



政策関数の収束



今後の学習に向けて

- VFI ですべて事足りる?⇒NO!
  - VFI は安定的に収束するけど遅い
  - 様々な方法が考案されている
- テキスト：Judd (1998)、Adda and Cooper (2003)、Miranda and Fackler (2004)、Heer and Maussner (2009) など

参考文献

参考文献

- Adda. J. and R. Cooper (2003): *Dynamic Economics: Quantitative Methods and Applications*, The MIT Press.
- Alvarez, F. and M. Veracierto (2001): "Severance Payments in an Economy with Frictions," *Journal of Monetary Economics*, 47, 477-498.
- Blanchard, O.J. and C.M. Kahn (1980): "The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations," *Econometrica*, 48, 1305-1312.
- Bona, J.L. and M. Santos (1997): "On the Role of Computation in Economic Theory," *Journal of Economic Theory*, 72, 241-281.
- De Nardi, M., E. French, and J.B. Jones (2016): "Medicaid Insurance in Old Age," *American Economic Review*, 106, 3480-3520.
- French, E. (2005): "The Effects of Health, Wealth, and Wages on Labour Supply and Retirement Behaviour," *Review of Economic Studies*, 72, 395-427.
- Heer, B. and A. Maussner (2009): *Dynamic General Equilibrium Modeling*, Springer.
- Judd, K. (1998): *Numerical Methods in Economics*, The MIT Press.
- Khan, A. and J.K. Thomas (2008): "Idiosyncratic Shocks and the Role of Nonconvexities in Plant and Aggregate Investment Dynamics," *Econometrica*, 77, 395-436.

参考文献

- King, R.G, C.I. Plosser, and S.T. Rebelo (1988): "Production, Growth and Business Cycle I. The Basic Neoclassical Model," *Journal of Monetary Economics*, 21, 195-232.
- King, R.G, C.I. Plosser, and S.T. Rebelo (2002): "Production, Growth and Business Cycle: Technical Appendix," *Computational Economics*, 20, 87-116.
- Kubler, F. and K. Schmedders (2005): "Approximate Versus Exact Equilibria in Dynamic Economies," *Econometrica*, 73, 1205-1235.
- McKay, A. and R. Reis (2016): "The Role of Automatic Stabilizers in the U.S. Business Cycle," *Econometrica*, 84, 141-194.
- Miranda, M.J. and P.L. Fackler (2004): *Applied Computational Economics and Finance*, The MIT Press.
- Sims, C. (2002): "Solving Linear Rational Expectations Models," *Journal of Computational Economics*, 20, 1-20.
- Sargent, T. and L. Ljungqvist (2018): *Recursive Macroeconomic Theory*, The MIT Press.
- Stokey, N., R.E. Lucas Jr., with E.C. Prescott (1989): *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press.
- 北尾早霧氏・砂川武貴・山田知明「定量的マクロ経済学と数値計算」、経済セミナー (2018 年 12 月・2019 年 1 月号〜2020 年 2・3 月号)、全 8 回