厚肉球

20D4104016H　森智紀

2022 年 11 月 9 日

1　応力による力のつり合い

力のつり合いを考えると以下のようになる。

$$-\sigma_t \times 2\pi r dr - \sigma_r \times \pi r^2 + (\sigma_r + d\sigma_r) \times \pi (r + dr)^2 = 0 \tag{1}$$

$$-2\sigma_t r dr - \sigma_r \times r^2 + \sigma_r r^2 + r^2 d\sigma_r + 2\sigma_r dr = 0$$

$$r^2 d\sigma_r + 2r(\sigma_r - \sigma_t) dr = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_t)}{r} = 0 \tag{2}$$

2　変位とひずみ

半径方向ひずみを ϵ_r, 円周方向ひずみを ϵ_t とする。

$$\epsilon_r = \frac{u(r + \mathrm{d}r) - u(r))}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} \tag{3}$$

$$\epsilon_t = \frac{2\pi(r + u(r)) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r} \tag{4}$$

3　応力を変位で表す

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left\{(1-\nu)\epsilon_r + \nu(\epsilon_\theta + \epsilon_\phi)\right\} \tag{5}$$

$$\sigma_t = \sigma_\phi = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left\{(1-\nu)\epsilon_t + \nu(\epsilon_r + \epsilon_\phi)\right\} \tag{6}$$

ここで (4),(5) 式に (2),(3) 式を代入する。球の対称性から $\epsilon_\theta = \epsilon_\phi = \epsilon_t$ である。

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left\{(1-\nu)\epsilon_r + \nu(\epsilon_\theta + \epsilon_\phi)\right\} && (7)\\
&= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left\{(1-\nu)\epsilon_r + 2\nu\epsilon_t\right\} && (8)\\
&= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left\{(1-\nu)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + 2\nu\frac{u}{r}\right\} && (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_t &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left\{(1-\nu)\epsilon_t + \nu(\epsilon_r + \epsilon_\phi)\right\} && (10)\\
&= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left(\epsilon_t + \nu\epsilon_r\right) && (11)\\
&= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) && (12)
\end{aligned}$$

4　微分方程式

式 (2) の微分方程式に式 (9) 式 (12) を代入する

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{(1-\nu)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + 2\nu\frac{u}{r}\right\} + \frac{2}{r}\left\{(1-2\nu)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - (1-2\nu)\frac{u}{r}\right\} = 0 \tag{13}$$

$$(1-\nu)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + 2\nu(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}r - \frac{1}{r^2}u) + \frac{2}{r}(1-2\nu)(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - \frac{u}{r}) = 0 \tag{14}$$

$$(1-\nu)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}(1-\nu)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - 2(1-\nu)\frac{u}{r^2} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - 2\frac{u}{r^2} = 0 \tag{16}$$

5 境界条件

球の外側表面の微小領域と、球の内側表面の微小領域を考えれば以下の境界条件が導かれる。

$$\sigma_r(r_i) = -p \tag{17}$$

$$\sigma_r(r_0) = 0 \tag{18}$$

6 微分方程式をとく

式 (16) を解く。両辺 r^2 倍する。

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + 2r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - 2u = 0 \tag{19}$$

ここで、$t = \ln r \leftrightarrow r = e^t$ の変数変換を施す。よって、$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r} = e^{-t}$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}e^{-t} \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}^2r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}e^{-t}) = (\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t})e^{-2t} \tag{21}$$

ここで、式 (20),(21) を式 (19) に代入すると

$$(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}) + 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - 2u = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - 2u = 0 \tag{23}$$

を得る。ここで微分演算子 D を用いて式 (23) を書き換えると、

$$(D^2 + D - 2)u = 0 \tag{24}$$

となる。ここで特性方程式 $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$ を解くと、$\lambda = -2, 1$ となる。
よって求める一般解は、

$$u = C_1e^t + C_2e^{-2t} \tag{25}$$

$$= C_1r + C_2r^{-2} \tag{26}$$

である。

7　変位、応力を表す関数を求めよ

式 (26) を σ_r, σ_t に代入する。

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left\{(1-\nu)\frac{u}{r} + 2\nu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right\} \tag{27}$$
$$= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left\{(1-\nu)(C_1 + C_2 r^{-3}) + 2\nu(C_1 + C_2 r^{-3})\right\} \tag{28}$$
$$= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left\{(1+\nu)C_1 - 2C_2(1-2\nu)r^{-3}\right\} \tag{29}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) \tag{30}$$
$$= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left\{C_1 + C_2 r^{-3} + \nu(C_1 - 2C_2 r^{-3})\right\} \tag{31}$$
$$= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left\{(1+\nu)C_1 + (1-2\nu)C_2 r^{-3}\right\} \tag{32}$$

境界条件より $\frac{1}{A} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ とすると、

$$\sigma_r(r_i) = \frac{1}{A}\left\{(1+\nu)C_1 - 2C_2(1-2\nu)r_i^{-3}\right\} = -p \tag{33}$$

$$\sigma_r(r_0) = \frac{1}{A}\left\{(1+\nu)C_1 - 2(1-2\nu)C_2 r_0^{-3}\right\} = 0 \tag{34}$$

よって、変形すると

$$\begin{cases} (1+\nu)C_1 - 2C_2(1-2\nu)r_i^{-3} = -pA \\ (1+\nu)C_1 - 2(1-2\nu)C_2 r_0^{-3} = 0 \end{cases} \tag{35}$$

を得る。この連立方程式を解くと、

$$C_1 = -\frac{pA}{1+\nu}\frac{r_0^{-3}}{r_0^{-3} - r_i^{-3}} \tag{36}$$

$$C_2 = -\frac{pA}{2(1-2\nu)(r_0^{-3} - r_i^{-3})} \tag{37}$$

となる。

よってこれらを式 (29),(32) に代入すると、

$$\sigma_r = -\frac{r_0^{-3} - r^{-3}}{r_0^{-3} - r_i^{-3}} p \tag{38}$$

$$\sigma_t = -\frac{2r_0^{-3} + r^{-3}}{2(r_0^{-3} - r_i^{-3})} p \tag{39}$$

を得る。

よって、半径方向応力、円周方向応力、変位は以下のようになる。

$$\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{r_0^{-3} - r^{-3}}{r_0^{-3} - r_i^{-3}} p \\ \sigma_t = -\dfrac{2r_0^{-3} + r^{-3}}{2(r_0^{-3} - r_i^{-3})} p \\ u = -\dfrac{p}{E(r_0^{-3} - r_i^{-3})} \left\{ (1-2\nu) r_0^{-3} r + \dfrac{r^{-2}}{2}(1+\nu) \right\} \end{cases} \tag{40}$$

8　薄肉へ帰着

$$\begin{aligned} \sigma_t &= -\frac{2r_0^{-3} + r^{-3}}{2(r_0^{-3} - r_i^{-3})} p \qquad (41) \\ &= \frac{2r_i^3 + r^{-3} r_0^3 r_i^3}{2(r_0^3 - r_i^3)} p \\ &= \frac{2r_i^3 + r^{-3} r_0^3 r_i^3}{2(r_0 - r_i)(r_0^2 + r_i r_0 + r_i^2)} p \\ &\xrightarrow[r_i \to r_0]{} \frac{3r_0^3}{2t \times 3r_0^2} p \qquad (42) \\ &= \frac{pr_0}{2t} \qquad (43) \end{aligned}$$