第11回演習課題

1. $\varphi = x + y + z$

$= a\cos u + a\sin u + bu.$ と表せる。

φ が u の関数であるから.

$$\int_C \varphi\, ds = \int_S \varphi \frac{ds}{du} du \cdots ①$$ のように変形できる。

弧長 S は

$$S = \int_0^u \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du$$ と表せるので

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}$$ である。

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{(-a\sin u)^2 + (a\cos u)^2 + b^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2}$$

よって ① 式 は.

$$\int_C \varphi\, ds = \int_C \varphi \frac{ds}{du} \cdot du$$
$$= \sqrt{a^2+b^2} \int_C \varphi\, du$$
$$= \sqrt{a^2+b^2} \int_0^\pi (a\cos u + a\sin u + bu)\, du.$$
$$= \sqrt{a^2+b^2} \left[a\sin u - a\cos u + \frac{b}{2} u^2 \right]_0^\pi$$
$$= \sqrt{a^2+b^2} \left(a + \frac{b}{2}\pi^2 + a \right)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2} \left(2a + \frac{b}{2}\pi^2 \right)$$

$$\therefore \int_C \varphi\, ds = \sqrt{a^2+b^2} \left(2a + \frac{b}{2}\pi^2 \right)$$ //

2.

(a) $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$ である。

線分OA上の点 $P(x,y,z)$ を考える。

ここで媒介変数 u $(u\in\mathbb{R})$ を考えると.

$\overrightarrow{OP}=u\cdot\overrightarrow{OA}$ $(0\leq u\leq 1)$ が成り立つ。

成分表示させると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって求める線分の方程式は.

$$\begin{cases} x=u \\ y=2u \\ z=3u \end{cases} \quad (0\leq u\leq 1)$$

2.

(b)

(a)より.

$$\begin{cases} x = u \\ y = 2u \\ z = 3u \quad (0 \leq u \leq 1) \end{cases}$$

であるから. φ は u の関数で表せる。

$$\varphi = yz + zx + xy$$
$$= 6u^2 + 3u^2 + 2u^2$$
$$= 11u^2$$

φ が u の関数であるから $\displaystyle\int_C \varphi \, ds = \int_C \varphi \frac{ds}{du} du$ である。

ここで $\dfrac{ds}{du}$ は.

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 4 + 9}$$
$$= \sqrt{14}$$

である。

$$\therefore \int_C \varphi \, ds = \int_C \varphi \frac{ds}{du} du$$
$$= \sqrt{14} \int_0^1 11u^2 \, du$$
$$= 11\sqrt{14} \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_0^1$$
$$= \frac{11}{3} \sqrt{14}$$

$$\therefore \int_C \varphi \, ds = \frac{11}{3} \sqrt{14} \quad //$$

3. (1ページ目)

$$\begin{cases} x = a\cos u \\ y = a\sin u \\ z = bu \quad (0 \leqq u \leqq \pi) \end{cases}$$

と表されるので

$\boldsymbol{A} = a\sin u\,\boldsymbol{i} - bu\,\boldsymbol{j} + a\cos u\,\boldsymbol{k}$ となる。

ここで $\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds$ において

$$\boldsymbol{t}\,ds = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot ds$$
$$= d\boldsymbol{r}$$
$$= (dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k})$$

と表せるので

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds = \int_C (a\sin u\,\boldsymbol{i} - bu\,\boldsymbol{j} + a\cos u\,\boldsymbol{k})\cdot(dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k})$$
$$= \int_0^\pi a\sin u\,dx - \int_0^\pi bu\,dy + \int_0^\pi a\cos u\,dz$$
$$= \int_0^\pi a\sin u\frac{dx}{du}du - \int_0^\pi bu\frac{dy}{du}du + \int_0^\pi a\cos u\frac{dz}{du}du$$
$$= -a\int_0^\pi \sin^2 u\,du - b\int_0^\pi u\cos u\,du + ab\int_0^\pi \cos u\,du$$

項に分けて計算する。

$$\int_0^\pi \sin^2 u\,du = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2u}{2}du$$
$$= \frac{1}{2}\left[u - \frac{1}{2}\sin 2u\right]_0^\pi$$
$$= \frac{\pi}{2} \quad \cdots ①$$

3. (2ページ目)

$$\int_0^{\pi} u\cos u\,du = [u\sin u]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin u\,du$$
$$= [\cos u]_0^{\pi}$$
$$= -1-1$$
$$= -2 \quad \cdots ②$$

$$\int_0^{\pi}\cos u\,du = [\sin u]_0^{\pi}$$
$$= 0 \quad \cdots ③$$

よって ①〜③より

$$\int_C \mathbf{A}\cdot\mathbf{t}\,ds = -a\cdot\frac{\pi}{2} - b\cdot(-2)$$
$$= 2b - \frac{a}{2}\pi.$$

$$\therefore \int_C \mathbf{A}\cdot\mathbf{t}\,ds = \underline{2b - \frac{a}{2}\pi} \quad //$$