No.3 Airry の応力関数

20D4104016H　森智紀

2022 年 11 月 9 日

1　適合条件式 2 次元 ver

ひずみ $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ は $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ であるから、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} \\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y}
\end{aligned} \tag{1}
$$

さらに両辺 y で偏微分をすると、

$$
\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} \tag{2}
$$

2　適合条件式　3 次元 ver

(2) 式と同様に考えると、

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} \\
\dfrac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} \\
\dfrac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2}
\end{cases} \tag{3}
$$

である。

3　応力の適合条件式に変換　2 次元 ver

(2) 式をフックの法則を用いて応力の適合条件式に変換する。フックの法則により、$\epsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E, \epsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E, \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$ であるからこれを (2) に代入して、

$$\frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{E}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y)\right\} \tag{4}$$

4　Airry の応力関数

Airry の応力関数は次のように表される。$\sigma_x = \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$
よってこれらを (4) 式に代入すると、

$$\frac{1}{G}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(-\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}\right) = \frac{1}{E}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}\right)\right\}$$

$$-\frac{E}{G}\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} - 2\nu\left(\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2}\right) \tag{5}$$

ここで、$E = 2G(1+\nu)$ を (5) 式に代入する。

$$-2(1+\nu)\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\nu\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \tag{7}$$

ここで、$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ であるから

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{8}$$

$$\Delta^2 = \nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \tag{9}$$

のように表せる。(9) 式を用いると (7) 式は、

$$\Delta^2 \chi = \nabla^4 \chi = 0 \tag{10}$$

と変形できる。