応用数学レポート

第一章　線形代数

本章では、今後の機械学習を進めるにあたって必要となる線形代数について学習した。

1. 行列の基本演算について、以下の(1)～(4)の内容について学習した。
   (1) 行列の積の計算手法(3 行 3 列の場合)
   (2) 行列を用いた連立一次方程式の解き方
   (3) 掃き出し法による逆行列の求め方
   但し、逆行列が存在しない条件として
   $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$という行列があった時、ad-bc=0 の場合は逆行列を持たない。
   (4) 行列式の求め方と行列式の特徴

2. 固有値と固有値ベクトルについて以下の内容を学んだ
   (1) 固有値とは、ある行列 A に対して、以下の式が成り立つような特殊なベクトル$\vec{x}$と右辺の係数λがある。

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

この特殊なベクトル$\vec{x}$と係数λを行列 A に対する固有ベクトルと固有値という。

また、この中で固有値ベクトルと固有値の求め方も学習した

(2) ある実数を正方形に並べて作られた行列 A が固有値$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$と固有ベクトル$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots$を持ったとする。

この固有値を対角線上に並べた行列

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

と、それに対応する固有ベクトルを並べた行列

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

を用意した時、以下のように変形でき、このように正方形の行列を 3 つの行列の積に変換することを固有値分解という。この変換によって行列の累乗の計算が容易になるという利点がある。

$$\mathrm{A} = \mathrm{V}\Lambda V^{-1}$$

(3) また正方行列以外の場合、以下のような特殊な単位ベクトルがあるならば、

$$M\vec{v} = \sigma\vec{u}$$

$$M^{\intercal}\vec{v} = \sigma\vec{u}$$

特異値分解が可能である。

$$M = USV^{-1}$$

特異値は、$MM^{\intercal}$を固有値分解すると、特異値の 2 乗が求められる。

第二章　確率・統計

本章では、今後の機械学習を進めるにあたって必要となる確率・統計について学習した。

(1) 頻度確率(客観確率)は、発生する頻度から求める確率である。

例えば、10 本のうち 1 本だけあたりが存在する場合の当選確率は 10%である。

(2) ベイズ確率は、主観的な確率のことを指し、必ずしも頻度確率のようにデータから基づいた算出を行うものではない。

(3) 条件付確率はある事象 X=x が与えられた条件下で、異なる事象 Y=y となる確率のこと。

(4) 独立な事象の同時確率は、事象 X=x,と事象 Y=y が同時に発生する確率は、以下の式が成り立つ

$$P(X=x,Y=y)=P(X=x)\ P(Y=y)=P(Y=y,X=x)$$

(5) ベイズ則では以下の式が成り立つ

$$P(X=x|Y=y)\ P(Y=y)=P(Y=y|X=x)\ P(X=x)$$

(6) 事象 X が n 個の事象$x_1, x_2, \dots, x_n$を取るとき、またその時の確率変数を f(X)、確率 P(X)とするとき、期待値は、$\sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) f(X = x_k)$で求められる。

(7) データの分布や散らばり具合を示すとき用いるのは、分散である。

これはデータの各々の値が期待値からどれから離れているかを平均したものである。

さらに分散の平方根を求めたものが標準偏差である。

(8) 2 つのデータがあった時にデータ系列の傾向を示すのは共分散である。

(9) 確率分布として、主に、以下の分布があることを学んだ。

ベルヌーイ分布　事象数が 2 で、その事象それぞれが発生する確率が等しくなくても扱える。

マルチヌーイ分布　事象数が 2 より多く、

これも、ベルヌーイ分布同様それぞれの事象の発生する確率が等しくなくても扱える。

二項分布はベルヌーイ分布の多試行を定義したものである。

ガウス分布は、釣り鐘型の連続分布である。

第三章　情報理論

情報量は、事象の発生確率により、起こりにくい事象の場合は小さく、逆の場合は大きくなる。
自己情報量は次式で定義される。

$$I(x) = -\log\left(P(x)\right)$$

また、自己情報量の期待値シャノンエントロピーは次式で表される。

$$H(x) = E\left(I(x)\right)$$

$$= -E\left(\log\left(P(x)\right)\right) = -\sum\left(P(x)\log\left(P(x)\right)\right)$$

カルバック・ライブラー ダイバージェンスは、確率分布の形が不明の時に、得られたデータから真の確率分布を推定するときに利用される。ここで、P(x)は実際の確率分布、Q(x)は、見積もっていた確率分布とし、P(x)と Q(x)間の確率分布の違いの尺度として利用する。

$$D_{KL}(P||Q) = \sum P(x)\, log\, \frac{P(x)}{Q(x)}$$

応用数学

新

プログラム

固有値分解

特異値分解

条件付同時 頻度ベイズ

ガウス分布 ベルヌーイ・二項

エントロピー KL 自己情報量

演習

No.

Date

応用数学演習問題

$\boxed{1.1}$ $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\6\\3\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$

1.1.1 $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\6\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\\7\end{pmatrix}$

1.1.2 $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\6\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\-1\end{pmatrix}$

1.1.3 $7\vec{a}=7\begin{pmatrix}1\\6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\42\\21\end{pmatrix}$

1.1.4 $8(\vec{a}+\vec{b})=8\begin{pmatrix}6\\8\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}48\\64\\56\end{pmatrix}$

$\boxed{1.2}$ $A=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&4\\1&5\end{pmatrix}$

1.2.1 $A+B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&4\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\6&8\end{pmatrix}$ //

1.2.2 $A-3B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&4\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&12\\3&15\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&-11\\2&-12\end{pmatrix}$ //

$\boxed{2.1}$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\5&9&0\\3&1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&5\end{pmatrix}$

2.1.1 $A\vec{v}=\begin{pmatrix}1&3&4\\5&9&0\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\5\\9\end{pmatrix}$ //

2.2.2 $B\vec{v}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}10\\15\end{pmatrix}$ //

2.1.3 $BA=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&4\\5&9&0\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&6&10\\25&23&10\end{pmatrix}$ //

2.1.4 $B^T=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&5\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\3&5\end{pmatrix}$

$\boxed{2.2}$ $A=\begin{pmatrix}2&1\\4&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$

2.2.1 $AB=\begin{pmatrix}2&1\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&7\\7&13\end{pmatrix}$

2.2.2 $A^{-1}\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\4&1&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}-①\\-②\end{matrix}$

$\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\0&-1&-2&1\end{array}\right)\begin{matrix}①\\②-2\times①\end{matrix}$

$\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&-1&1\\0&-1&-2&1\end{array}\right)$ ①+②

$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&2&-1\end{array}\right)$

$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\2&-1\end{pmatrix}$

2.2.3 $B^{-1} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ ②−3×①

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & 1 \end{array}\right)$ ①$+\frac{3}{8}\times$②

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3+\frac{3}{8}(-8) & 1+\frac{3}{8}\times(-3) & 0+\frac{3}{8} \\ 0 & -8 & -3 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & -8 & -3 & 1 \end{array}\right)$ $(-\frac{1}{8})\times$②

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$ //

2.2.4 $BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -\frac{14}{8}+\frac{12}{8} & \frac{3\times14}{8}-\frac{4}{8} \\ -\frac{10}{8}+\frac{12}{8} & \frac{30}{8}-\frac{4}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{8} & \frac{38}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{26}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{19}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{13}{4} \end{pmatrix}$ //

3.1 確率変数 = 試行の結果として起こる事象に整数が結びつけられている

a さいころをふった時に出る目の数

~~b~~

d

3.2

事象	裏0 表4	1 3	2 2	3 1	4 0
確率変数	4	3	2	1	0
発生回数	75	300	450	$\boxed{300}$	75
確率	$\frac{75}{1200}$	$\frac{300}{1200}$	$\frac{450}{1200}$	$\frac{300}{1200}$	$\frac{75}{1200}$
	$=\frac{1}{16}$	$\boxed{\frac{1}{4}}$	$\boxed{\frac{3}{8}}$	$\boxed{\frac{1}{4}}$	$\boxed{\frac{1}{16}}$

$1200-(75+300+450+75)$

900

No.
Date

応用数学

情報量

$\boxed{4.1}$ $I = \log_2\left(\frac{1}{p(x)}\right) = -\log_2(p(x))$

4.1.1 $-\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 2 = 1$

4.1.2 $-\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 4 = 2$

4.1.3 n枚のコインを1回

${}_nC_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $-\log\left(n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

nまいから 1ほい

$-\log_2 n + n$ $-\log_2(n) + n$

○○ ○× ×○ ××

$\frac{2}{4} =$

000 001 010 011 100 101 110

$\frac{3}{\cancel{3}\,2}$ ${}_3C_1$

全部 2^n

2

$-\log\left(\frac{{}_nC_1}{2^n}\right)$

${}_nC_1$

${}_nC_1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$

$\boxed{5.1}$ 事象Aが起こった条件下でBが起こる確率

$p(B|A)$

$p(\underset{B}{雨降日} | \underset{A}{洗濯物を干した日}) = \frac{せんたく干す\ かつ\ 雨がふった}{すべてのせんたく干す日}$

$P(A, B) = \frac{洗たく \times 雨}{すべての日数}$

$P(A, B) = \frac{12}{36\cancel{6}5} = \frac{1}{30}$ //

洗たくをほした日数 60日

〃 かつ雨 12

$P(B|A) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ //

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$

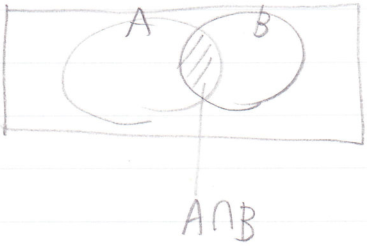
$\boxed{5.2}$ 赤 3 A B C

白 2 A B

事象Aは赤 $P(A) = \frac{3}{5}$

〃 Bは文字B $P(B) = \frac{2}{5}$

$P(A \cap B)$ $\frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$



5.2.1 出てきたまが赤で文字が
A

$\therefore P(B|A) = \frac{AとBの同時}{赤の確率\ P(A)}$

$= \frac{\frac{6}{25} \cancel{\times 25}}{\frac{3}{5} \cancel{\times 25}\,5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ //

$\frac{1}{3}$

No.

Date . .

5.2.2 出てきた玉がAで白

A ↑出てきた玉がA　B ↑白

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{6}{25} \times 25}{\frac{2}{5} \times 25} = \frac{6}{10}$$

$$= \frac{3}{5}$$ //

?

$\frac{1}{2}$

$\boxed{6.1}$ $X = AB$

$\log(X) = \log(AB) = \log A + \log B$ //

$\boxed{6.2}$ $X = \frac{A}{B}$

$\log(X) = \log A - \log B$ //

$\boxed{6.3}$ $X = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ $\log(X) = \sum_{k=1}^{4} \log(x_k)$ //

$\boxed{7.1}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ //

$\boxed{7.2}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$

$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

$\vec{x} \neq \vec{0}$ より

$|A - \lambda I| = 0$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$

$\lambda = 5, \text{ or } -1$

$x_1 + 4x_2 = 5x_1$

$2x_1 + 3x_2 = 5x_2$

$\therefore x_1 = x_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

こっ5だけ

$\lambda = 5$ のとき $\vec{x}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍

$\lambda = -1$ 〃 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 〃

$\boxed{7.3}$ 離散的な確率分布 $P(x)$ の F
期待値 $E(f) = \sum P(x) f(x)$

ア

$\boxed{7.4}$ 確率変数 $Var(f) = E\left(\left(f(x) - E(f(x))\right)^2\right)$
$= E(f(x)^2) - E(f(x))^2$

ア

$\boxed{7.5}$ シャノンのエントロピー
$-\sum P(x) \log P(x))$

イ

$\boxed{\text{順列}}$
異なるnコの中から r個とりだしてならべる
A, B, C, D, E の中から 2人ならべる
AB と BA はちがう

$_nP_r = n \cdot (n-1) \cdots (n$
$= \dfrac{n!}{(n-r)!}$

$\boxed{\text{くみあわせ}}$ r個をえらぶ
ABとBAは同じ

$\dfrac{5\,4\,3\,2\,1}{5-2!}$

$_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)}$

$_nC_r = {}_nC_{n-r}$

応用数学
分解
条件付同
ガウス分布 ベルヌーイ・二項
エントロピーKL 自己情報量
演習