Équations d'Euler-Lagrange pour la restauration d'images

Caractérisation de l'énergie à minimiser

Pour se ramener au problème de la minimisation d'une énergie E, on définit ici une image sous la forme d'une fonction u, définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (coordonnées spatiales notées $\mathbf{c} = (x, y)^\top$) et à valeurs dans Ψ (valeur du point de l'image : scalaire pour une image en niveaux de gris ou vectorielle pour une image en couleur). On cherche le minimiseur u^* de l'énergie E à partir de l'image détériorée u_0, énergie qui s'écrit sous la forme de l'intégrale d'un lagrangien :

$$E(u) = \iint_\Omega \mathcal{L}\left(u_0(x,y), u(x,y), \nabla u(x,y), \nabla^2 u(x,y), ...\right) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

qui implique que u et ses différentes dérivées soient intégrables au sens de Lebesgue. Minimiser cette énergie nécessite de trouver un compromis sur le choix d'un modèle qui soit suffisamment adapté au problème, mais que l'on puisse manipuler facilement. Cela amène à se limiter dans un premier temps aux dérivées d'ordre 1 de la fonction u dans le modèle (1) :

$$E(u) = \iint_\Omega \mathcal{L}\left(u_0(x,y), u(x,y), \nabla u(x,y)\right) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{2}$$

Notions de normes de vecteurs et fonctions

Dans le cas de la dimension finie pour un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, on utilise le produit scalaire et la norme qui en découle au sens discret :

	norme 1	norme 2	norme ∞
vecteur $\mathbf{v}$	$\lVert\mathbf{v}\rVert_1 = \sum_{i=1}^{d} \lvert v_i\rvert$	$\lVert\mathbf{v}\rVert_2 = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (v_i)^2}$	$\lVert\mathbf{v}\rVert_\infty = \max_{i \in [\![1,d]\!]} \{\lvert v_i\rvert\}$

Table 1 – Normes usuelles en dimensions finies. Alors que les normes 1 et ∞ dépendent de la base dans laquelle sont exprimés les éléments, la norme 2 est quant à elle invariante par changement de base (ou isotrope).

Dans le cas de la dimension infinie pour une fonction $\mathbf{f} \in L^p\big(\Omega, \mathbb{R}^d\big)$, on définit cette fois le produit scalaire usuel et la norme qui en découle au sens de Lebesgue :

	norme 1 de $\mathbf{f}(x,y)$	norme 2 de $\mathbf{f}(x,y)$
norme L^1 de $\mathbf{f}$	$\lVert\mathbf{f}\rVert_{L^1(\Omega)^1} = \iint_\Omega \sum_{i=1}^{d} \lvert f_i(x,y)\rvert \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$\lVert\mathbf{f}\rVert_{L^1(\Omega)^2} = \iint_\Omega \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (f_i(x,y))^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
norme L^2 de $\mathbf{f}$	$\lVert\mathbf{f}\rVert_{L^2(\Omega)^1} = \sqrt{\iint_\Omega \left(\sum_{i=1}^{d} \lvert f_i(x,y)\rvert\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$	$\lVert\mathbf{f}\rVert_{L^2(\Omega)^2} = \sqrt{\langle f \mid f \rangle} = \sqrt{\iint_\Omega \sum_{i=1}^{d} (f_i(x,y))^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$

Table 2 – Normes 1 et 2 vectorielles en dimension infinie.

Différents exemples d'énergies

Afin d'obtenir l'équation d'Euler-Lagrange, on passe par le calcul de la dérivée directionnelle de l'énergie $E(u)$ défini de la manière suivante :

$$D_h E(u) = \lim_{t \to 0} \frac{E(u + t\,h) - E(u)}{t} = \langle\, \nabla E(u) \,|\, h \,\rangle_\Omega = \iint_\Omega \nabla E(u(x,y)) \cdot h(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{3}$$

Modèle de débruitage de Tikhonov :

$$E(u) = \frac{1}{2} \iint_\Omega |u(x,y) - u_0(x,y)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \frac{\lambda}{2} \iint_\Omega |\nabla u(x,y)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{4}$$

Le modèle est constitué d'une attache aux données $E_A(u)$ en norme L^2 associée à une régularisation $E_{Tik}(u)$ avec la norme L^2 du gradient. Le calcul du gradient de l'énergie peut s'effectuer de manière séparée pour les deux parties explicitées ci-avant, en commençant par l'attache aux données :

$$\begin{aligned}
D_h E_A(u) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{2\,t} \iint_\Omega |u(x,y) - u_0(x,y) + t\,h(x,y)|^2 - |u(x,y) - u_0(x,y)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{2\,t} \iint_\Omega 2\,t\,[u(x,y) - u_0(x,y)] \cdot h(x,y) + t^2\,|h(x,y)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \lim_{t \to 0} \iint_\Omega [u(x,y) - u_0(x,y)] \cdot h(x,y) + \frac{t}{2}\,|h(x,y)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \iint_\Omega [u(x,y) - u_0(x,y)] \cdot h(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \langle\, u - u_0 \,|\, h \,\rangle_\Omega
\end{aligned} \tag{5}$$

puis la régularisation :

$$\begin{aligned}
D_h E_{Tik}(u) &= \lim_{t \to 0} \frac{\lambda}{2\,t} \iint_\Omega |\nabla u(x,y) + t\,\nabla h(x,y)|^2 - |\nabla u(x,y)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\lambda}{2\,t} \iint_\Omega 2\,t\,\nabla u(x,y) \cdot \nabla h(x,y) + t^2\,|\nabla h(x,y)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \lim_{t \to 0} \lambda \iint_\Omega \nabla u(x,y) \cdot \nabla h(x,y) + \frac{t}{2}\,|\nabla h(x,y)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \lambda \iint_\Omega \nabla u(x,y) \cdot \nabla h(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= -\lambda \iint_\Omega [\nabla \cdot \nabla u(x,y)] \cdot h(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \langle\, -\lambda\,\triangle u \,|\, h \,\rangle_\Omega
\end{aligned} \tag{6}$$

Pour minimiser $E(u)$, on annule la somme des deux gradient calculés précédemment, ce qui donne :

$$\begin{gathered}
u(x,y) - u_0(x,y) - \lambda\,\triangle u(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega \\
(I - \lambda\,\triangle)\,u(x,y) = u_0(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega
\end{gathered} \tag{7}$$

Modèle de débruitage par approximation différentiable de la variation totale :

$$E(u) = \frac{1}{2} \iint_\Omega |u(x,y) - u_0(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\lambda}{2} \iint_\Omega \sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{8}$$

Le modèle est constitué d'une attache aux données $E_A(u)$ en norme L^2 associée à une régularisation $E_{TV}(u)$ avec la variation totale de u. Le calcul du gradient pour l'attache aux données a déjà été effectué précédemment, il reste celui de la régularisation. Pour cela, on cherche à isoler $\sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}$ dans $\sqrt{|\nabla u(x,y) + t\,\nabla h(x,y)|^2 + \varepsilon}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{|\nabla u(x,y) + t\,\nabla h(x,y)|^2 + \varepsilon} &= \sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + 2\,t\,\nabla u(x,y)\cdot\nabla h(x,y) + t^2\,|\nabla h(x,y)|^2 + \varepsilon} \\
&= \sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}\,\sqrt{1 + \frac{2\,t\,\nabla u(x,y)}{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}\cdot\nabla h(x,y) + \frac{t^2}{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}|\nabla h(x,y)|^2} \\
&= \sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}\,\left(1 + \frac{t\,\nabla u(x,y)}{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}\cdot\nabla h(x,y) + \frac{t^2}{2(|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon)}|\nabla h(x,y)|^2\right) \\
&= \sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon} + \frac{t\,\nabla u(x,y)}{\sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}}\cdot\nabla h(x,y) + \frac{t^2}{2\sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}}|\nabla h(x,y)|^2
\end{aligned} \tag{9}$$

ce qui permet d'écrire la dérivée directionnelle de l'énergie de régularisation :

$$\begin{aligned}
D_h E_{TV}(u) &= \lim_{t\to 0} \frac{\lambda}{t} \iint_\Omega \sqrt{|\nabla u(x,y) + t\,\nabla h(x,y)|^2 + \varepsilon} - \sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\lambda}{t} \iint_\Omega \frac{t\,\nabla u(x,y)}{\sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}}\cdot\nabla h(x,y) + \frac{t^2}{2\sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}}|\nabla h(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \lim_{t\to 0} \lambda \iint_\Omega \frac{\nabla u(x,y)}{\sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}}\cdot\nabla h(x,y) + \frac{t}{2\sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}}|\nabla h(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \lambda \iint_\Omega \frac{\nabla u(x,y)}{\sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}}\cdot\nabla h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\lambda \iint_\Omega \left[\nabla\cdot\left(\frac{\nabla u(x,y)}{\sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}}\right)\right]\cdot h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left\langle -\lambda\,\nabla\cdot\left(\frac{\nabla u(x,y)}{\sqrt{|\nabla u(x,y)|^2 + \varepsilon}}\right)\middle|\, h \right\rangle_\Omega
\end{aligned} \tag{10}$$

Pour minimiser $E(u)$, on annule la somme des deux gradient calculés précédemment, ce qui donne la résolution itérative suivante :

$$\begin{aligned}
&u^{k+1}(x,y) - u_0(x,y) - \lambda\,\nabla\cdot\left(\frac{\nabla u^{k+1}(x,y)}{\sqrt{|\nabla u^k(x,y)|^2 + \varepsilon}}\right) = 0 \quad \forall (x,y)\in\Omega \\
&\left(I - \lambda\,\nabla\cdot\left(\frac{\nabla}{\sqrt{|\nabla u^k(x,y)|^2 + \varepsilon}}\right)\right) u^{k+1}(x,y) = u_0(x,y) \quad \forall (x,y)\in\Omega
\end{aligned} \tag{11}$$

Pour le cas de l'*inpainting*, il suffit de rajouter des opérateurs masquages pour la zone D à restaurer. Les écritures des équations d'Euler-Lagrange ne varient qu'à ce niveau :

$$\left(\chi_{\Omega\setminus D} - \lambda\,\nabla\cdot\left(\frac{\nabla}{\sqrt{|\nabla u^k(x,y)|^2+\varepsilon}}\right)\right) u^{k+1}(x,y) = \chi_{\Omega\setminus D}\,u_0(x,y) \quad \forall (x,y)\in\Omega \tag{12}$$

Démonstration du calcul de l'adjonction de l'opérateur gradient :.

Soient $\mathbf{f}\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^2)$ et $h\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$. On a :

$$\int_\Omega \nabla\cdot(h(\mathbf{c})\,\mathbf{f}(\mathbf{c}))\;\mathrm{d}\mathbf{c} = \int_\Omega \nabla h(\mathbf{c})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{c})\,\mathrm{d}\mathbf{c} + \int_\Omega [\nabla\cdot\mathbf{f}(\mathbf{c})]\;h(\mathbf{c})\,\mathrm{d}\mathbf{c} \tag{13}$$

D'après le théorème de flux-divergence (ou théorème de Green-Ostrogradski), on a également :

$$\int_\Omega \nabla\cdot(h(\mathbf{c})\,\mathbf{f}(\mathbf{c}))\;\mathrm{d}\mathbf{c} = \oint_{\partial\Omega} h(\mathbf{c})\,\mathbf{f}(\mathbf{c})\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{s}} \tag{14}$$

En choisissant h tel que $h(\mathbf{c})=0$ sur $\partial\Omega$, l'égalité (13) devient :

$$\int_\Omega \nabla h(\mathbf{c})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{c})\,\mathrm{d}\mathbf{c} = \int_\Omega [-\nabla\cdot(\mathbf{f}(\mathbf{c}))]\;h(\mathbf{c})\,\mathrm{d}\mathbf{c} \tag{15}$$

$\square$