Rapport de Projet

EDP : Analyse mathématique et principes de la méthode des éléments finis

Parcours : Multimédia

Année universitaire 2022-2023

Clémentine Grethen et **Tom Bonetto**
Groupe M1

Table des matières

0.1 Equations aux dérivées partielles elliptiques

0.1.1 Position du problème : partie théorique à traiter

(Nous ne savions pas que cette partie était optionnelle, nous l'avons quand même traité)

Nous allons définir dans un premier temps , par la méthode des éléments finis, une approximation de la solution d'un problème dit de Laplace en deux dimensions muni de conditions aux limites mixtes (Dirichlet et Neumann).

Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$ et $\partial\Omega$ sa frontière partitionnée en deux sous-ensembles $\partial\Omega_n \cup \partial\Omega_d = \partial\Omega$. Étant donné $f \in L^2(\Omega)$, $u_d \in H^1(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega_n)$, le problème de Laplace revient à déterminer u solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y) & \text{sur } \Omega, \\ u(x,y) = u_d(x,y) & \text{sur } \partial\Omega_d, \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = g(x,y) & \text{sur } \partial\Omega_n, \end{cases}$$

où Δ est l'opérateur laplacien, u_d est la condition de Dirichlet, $\frac{\partial u}{\partial n}$ est la dérivée normale de u, et g est la condition de Neumann.

* Formulation variationnelle du problème : En multipliant la première équation du système par $w \in H^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega -\Delta u w \, dx = \int_\Omega f w \, dx$$

Or, $u \in H^1(\Omega)$, Δu(x,y) = f(x,y) et on a $f \in L^2(\Omega)$, donc on peut supposer pour simplifier que $u \in H^2(\Omega)$. On peut alors appliquer la formule de Green :

on obtient :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u)\gamma_0(w) \, d\partial\Omega(x) = \int_\Omega fw \, dx$$

De plus, nous savons que $\partial\Omega_n \cup \partial\Omega_d = \partial\Omega$, on a alors :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega_n} \gamma_1(u)\gamma_0(w) \, d\partial\Omega_n(x) - \int_{\partial\Omega_d} \gamma_1(u)\gamma_0(w) \, d\partial\Omega_d(x) = \int_\Omega fw \, dx$$

Nous pouvons dès lors utiliser les deux autres équations du problème de Laplace, en prenant $u \in H^1(\Omega)$. Premièrement, nous avons : γ_0((u(x,y))=g(x,y) par définition de la fonction gamma, pour tout $(x, y) \in \partial\Omega_n$

De plus, nous avons pour tout $(x, y) \in \partial\Omega_d$

$$u_d(x, y) = u(xy, y)$$

On peut donc poser $v = u - u_d$ qui appartient à $H_1^0(\Omega)$ car v est nul sur Ω_d, et par définition de cet espace.

Prenons alors w dans $H_1^0(\Omega)$, on aura alors $\gamma_0(w)$ qui vaut 0 par définition sur $\partial\Omega_d$, par définition, et donc on peut réécrire l'équation en utilisant ces propriétés :

$$\int_\Omega \nabla(v + u_d) \cdot \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w) \, d\partial\Omega_n(x) = \int_\Omega fw \, dx$$

$$\int_\Omega \nabla(v) \cdot \nabla w \, dx = \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w) \, d\partial\Omega_n(x) + \int_\Omega fw \, dx - \int_\Omega \nabla(u_d) \cdot \nabla w \, dx$$

pour tout (w, v) dans $H_1^0(\Omega)$

Ainsi, on retrouve le résultat demandé et le problème de formulation variationnelle est donc :

Résoudre $a(v, w) = L(w)$ avec $a : H_1^0(\Omega) \times H_1^0(\Omega) \to \mathbb{R}$ défini par $a(v, w) = \int_\Omega \nabla v.\nabla w \, dx$.

Avec $L : H_1^0(\Omega) \to \mathbb{R}$ défini par $L(w) = \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w) \, d\partial\Omega_n(x) + \int_\Omega fw \, dx - \int_\Omega \nabla(u_d) \cdot \nabla w \, dx$

* Montrons maintenant que le problème admet une unique solution.

–> Montrons dans un premier temps que a est une forme bilinéaire coercive et continue sur son ensemble de déifnition :

La bilinéarité de a est évidente par linéarité de l'intégrale. C'est donc une forme bilinéaire, R étant un corps.

Ainsi, pour montrer la continuité il faut montrer qu'il existe M>0 dans R tel que Pour tout $(w, v) \in H_0^1(\Omega)$, $|a(v, w)| < M|w|1, \Omega \cdot |v|1, \Omega$.

Par Cauchy-Schwarz nous avons : | $\int_\Omega \nabla v.\nabla w \, dx$ |=|$\langle w, v\rangle|_{1,\Omega}$<|w|1,$\Omega \cdot |v|1, \Omega$

D'où la continuité de a.

Pour la coercivité de a : pour tout $(v) \in H_0^1(\Omega)$, $a(v,v) = \int_\Omega \nabla v.\nabla v\, dx =|v|_{1,\Omega}^2$ D'où le résultat.

–> Dans un deuxième temps montrons que L est une forme linéaire continue.

L est linéaire par continuité de l'intégrale et R est un corps donc c'est une forme linéaire.

$|L(w)| = |\int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\, d\partial\Omega_n(x) + \int_\Omega fw\, dx - \int_\Omega \nabla(u_d) \cdot \nabla w\, dx|$
$|L(w)| <\langle g, \gamma_0(w)\rangle_{L^2(\partial\Omega_n)} + \langle f, w\rangle_{L^2(\Omega)} + |\langle u_d, w\rangle|_{1,\Omega}|$
$|L(w)| < |g|_{L^2(\partial\Omega_n)} \cdot |\gamma_0(w)|_{L^2(\partial\Omega_n)} + |f|_{L^2(\Omega)} \cdot |w|_{L^2(\Omega)} + |u_d|_{1,\Omega} \cdot |w|_{1,\Omega}$

Omega est un fermé, on peut alors utiliser l'inégalité de pointCarré : Il existe C>0 une constante positive telle que $\|w\|_{L^2(\Omega)} < C \cdot \|w\|_{1,\Omega}$

De plus, par défintiion, γ_0 est une fonction continue, donc il existe M>0 telle que : $\|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega_n)} \leq M \cdot \|w\|_{1,\Omega}$

Ainsi on a : $|L(w)| < |g|_{L^2(\partial\Omega_n)} \cdot M|(w)|_{1,\Omega} + |f|_{L^2(\Omega)} \cdot C|w|_{1,\Omega} + |u_d|_{1,\Omega} \cdot |w|_{1,\Omega}$
D'où L est continue.

CONCLUSION : avec les hypothèses sur a et L, et que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, d'après de théorème de Lax-Milgram on a une unique solutioon au problème de formulation variationnelle.

FORME VARIATIONNELLE DISCRETE :

On note (η_k) la suite des fonctions de base des éléments finis, donc pour toutes fonctions h dans $H_1^0(\Omega)$, on a alors :

$h = \sum_{i=1}^n h_i\eta_i$ avec les (h_i) uniques.
On peut donc noter : $v_h = \sum_{i=1}^n v_i\eta_i$ et $w_h = \sum_{i=1}^n w_i\eta_i$. Ce sont les fonctions discrète de la base.
On pose alors le nouveau problème noté (PVFH) : on cherche v_h tel que pour tout w_h , $a(v_h, w_h) = L(w_h)$.
Le problème équivaut à : $a\left(\sum_{i=1}^n v_i\eta_i, \sum_{j=1}^n w_j\eta_j\right) = L\left(\sum_{j=1}^n w_j\eta_j\right)$

Ce qui donne : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_iw_ja(\eta_i, \eta_j) - \sum_{i=1}^n w_jL(\eta_j) = 0$

Ceci donne pour tout i dans [1 :n], $L(\eta_i) - \sum_{j=1}^n v_ja(\eta_j, \eta_i) = 0$

Et donc : $L(\eta_i) = \sum_{j=1}^n v_ja(\eta_j, \eta_i)$,

On a bien un système linéiare Ax=b. A dans $H^{n,n}(\Omega)$ et b dans $H^n(\Omega)$.
On peut donc écrire que a(η_j, η_i)= $\int_\Omega \nabla\eta_i.\nabla\eta_j\, dx$= a$_{ij}$, et par définition du produit

scalaire, on passe à la transposée(en expliciatant le pds) et on retrouve bien le résultat attendu.

Et on a également :

$b_i = L(\eta_i) = \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(\eta_i)\, d\partial\Omega_n(x) + \int_\Omega f\eta_i\, dx - \int_\Omega \nabla(u_d)\cdot\nabla\eta_i\, dx$
Or, $u_d = \sum_{k=1}^n U_k\eta_k$

Donc : $b_i = L(\eta_i) = \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(\eta_i)\, d\partial\Omega_n(x) + \int_\Omega f\eta_i\, dx - \int_\Omega \nabla(\sum_{k=1}^n U_k\eta_k\ )\cdot\nabla\eta_i\, dx$

et donc : $b_i = L(\eta_i) = \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(\eta_i)\, d\partial\Omega_n(x) + \int_\Omega f\eta_i\, dx - \sum_{k=1}^n U_k \int_\Omega \nabla\eta_k\cdot\nabla\eta_i\, dx$

De la même manière en explicitant le calcul du produit scalaire, on fait apparaître un produit avec une transposée et on a le résultat.

Existence et unicité : On peut également appliquer Lax-Milgram dans le sous espace vectoreil donc η_k est une base. Ainsi v_h est unique, et donc le système admet une unique solution car x est défini de manière unique par rapport à v_h.

0.1.2 Compléments : introduction d'un nouveau terme dans l'EDP

Avec les notation précédentes, nous nous intéressons au problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + c_0 u(x,y) = f(x,y) & \text{sur } \Omega \\ u(x,y) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

* Formulation variationnelle du problème : En multipliant la première équation du système par $w \in H^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega (-\Delta u + c_0 u) w\, dx = \int_\Omega f w\, dx$$

Or, $-\Delta u(x,y) + c_0 u(x,y) = f(x,y)$ et on a $f \in L^2(\Omega)$, donc on peut supposer pour simplifier que $u \in H^2(\Omega)$. On peut alors appliquer la formule de Green :
on obtient :

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w\, dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\, d\partial\Omega(x) + \int_\Omega c_0 u w\, dx = \int_\Omega f w\, dx$$

Enfin, comme nous n'avons pas utilisé la condition aux bords de u dans la formulation variationnelle, on va intégrer cette condition dans l'espace dans lequel nous recherchons la solution, c'est-à-dire $H_0^1(\Omega)$.
Nous avons donc :

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w\, dx + \int_\Omega c_0 u w\, dx = \int_\Omega f w\, dx$$

pour $w \in H^{1,0}(\Omega)$ Ainsi, on retrouve le résultat demandé et le problème de formulation variationnelle est donc :

Résoudre $a(u,w) = L(w)$

Avec $a : H_1^0(\Omega) \times H_1^0(\Omega) \to \mathbb{R}$ défini par $a(u,w) = \int_\Omega \nabla(u) \cdot \nabla w \, dx + \int_\Omega c_0 uw \, dx$

Avec $L : H_1^0(\Omega) \to \mathbb{R}$ défini par $L(w) = \int_\Omega fw \, dx$

* Montrons maintenant que le problème admet une unique solution.

–> Montrons dans un premier temps que a est une forme bilinéaire coercive et continue sur son ensemble de déifnition :

La bilinéarité de a est évidente par linéarité de l'intégrale. C'est donc une forme bilinéaire, R étant un corps.

Ainsi, pour montrer la continuité il faut montrer qu'il existe M>0 dans R tel que Pour tout $(u,w) \in H_0^1(\Omega)$, $|a(u,w)| < M|u|1,\Omega \cdot |w|1,\Omega$.

Par Cauchy-Schwarz nous avons :

$| \int_\Omega \nabla u \nabla w \, dx + \int_\Omega c_0 uw \, dx| <= |\langle u, w\rangle|_{1,\Omega} + c_0|u|_{L^2(\Omega)}|w|_{L^2(\Omega)} < |u|1,\Omega \cdot |w|1,\Omega + c_0|u|_{L^2(\Omega)}|w|_{L^2(\Omega)}$

On applique l'inégalité de point carré sur u et v :

–> Comme (u,w)$\in H^{1,0}(\Omega)$, alors, (u,v)$\in L^2(\Omega)$. Ainsi il existe C_Ω une constante postive telle que $\|u\|_{L^2(\Omega)} < C_\Omega \cdot \|u\|_{1,\Omega}$ et $\|w\|_{L^2(\Omega)} < C_\Omega \cdot \|w\|_{1,\Omega}$

Alors $|a(u,w)| < (1 + C_\Omega * C_\Omega * c_0)|u|1,\Omega \cdot |w|1,\Omega)$

D'où la continuité de a.

Pour la coercivité de a : pour tout $(u) \in H_0^1(\Omega)$, $a(u,u) = \int_\Omega \nabla u \nabla u \, dx + \int_\Omega c_0 uu \, dx$ =$|\mathrm{u}|_{1,\Omega}^2 + \int_\Omega c_0 uu \, dx$

Or ,$\int_\Omega c_0 uu \, dx > 0 P.P$ car $c_0 > 0$ donc $a(u,u) >|\mathrm{u}|_{1,\Omega}^2$

D'où la coercivité.

–> Dans un deuxième temps montrons que L est une forme linéaire continue.

L est linéaire par continuité de l'intégrale et R est un corps donc c'est une forme linéaire.

$|L(w)| = | \int_\Omega fw \, dx|$

$|L(w)| =\langle f, w\rangle_{L^2(\Omega)}$

$|L(w)| < |f|_{L^2(\Omega)} \cdot |w|_{L^2(\Omega)}$

Omega est un ouvert borné, on peut alors utiliser l'inégalité de pointCarré :

$\|w\|_{L^2(\Omega)} < C_\Omega \cdot \|w\|_{1,\Omega}$

Ainsi on a : $|L(w)| < |f|_{L^2(\Omega)} \cdot C_\Omega |w|_{1,\Omega}$

Donc L est bien une forme linéaire continue.

CONCLUSION : avec les hypothèses sur a et L, et que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, d'après de théorème de Lax-Milgram on a une unique solution au problème de formulation variationnelle.

FORME VARIATIONNELLE DISCRETE :

On note (η_k) la suite des fonctions de base des éléments finis, donc pour toutes fonctions h dans $H_1^0(\Omega)$, on a alors :

$h = \sum_{i=1}^n h_i \eta_i$ avec les (h_i) uniques.

On peut donc noter : $u_h = \sum_{i=1}^n v_i \eta_i$ et $w_h = \sum_{i=1}^n w_i \eta_i$. Ce sont les fonctions discrète de la base.

On pose alors le nouveau problème noté (PVFH) : on cherche u_h tel que pour tout w_h , $a(u_h, w_h) = L(w_h)$.

Le problème équivaut à : $a\left(\sum_{i=1}^n u_i \eta_i, \sum_{j=1}^n w_j \eta_j\right) = L\left(\sum_{j=1}^n w_j \eta_j\right)$

Ce qui donne : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i w_j a(\eta_i, \eta_j) - \sum_{i=1}^n w_j L(\eta_j) = 0$

Ceci donne pour tout i dans [1 :n], $L(\eta_i) - \sum_{j=1}^n u_j a(\eta_j, \eta_i) = 0$

Et donc : $L(\eta_i) = \sum_{j=1}^n u_j a(\eta_j, \eta_i)$,

On a bien un système linéiare Ax=b. A dans $H^{n,n}(\Omega)$ et b dans $H^n(\Omega)$.

On peut donc écrire que a(η_j, η_i)=$\int_\Omega \nabla(\eta_j) \cdot \nabla \eta_i \, dx + \int_\Omega c_0 \eta_j \eta_i \, dx = a_{ij}$, et par définition du produit scalaire, on passe à la transposée(en expliciatant le pds) et on retrouve bien le résultat attendu.

Et on a également :

$b_i = L(\eta_i) = \int_\Omega f \eta_i \, dx$

–> Existence et unicité : On peut également appliquer Lax-Milgram dans le sous espace vectoreil donc η_k est une base. Ainsi u_h est unique, et donc le système admet une unique solution car x est défini de manière unique par rapport à u_h.

–> Calcul de la matrice A :

On va ici calculer $c0 \int_\Omega \eta_i \eta_j dx$ le second membre de la matrice A pour pouvoir l'assembler :

$$\int_\Omega \eta_i \eta_j dx = \sum_T \int_T \eta_i \eta_j dx = \sum_T \int_T \phi_i(\Phi^{-1}(x,y)) \phi_j(\Phi^{-1}(x,y)) dx = \sum_T \int_U \phi_i(u,v) \phi_j(u,v) \, |J| \, dudv$$

$$\int_U \phi_i(u,v) \phi_j(u,v) dudv = \int_0^1 \int_0^{1-v} \phi_i(u,v) \phi_j(u,v) dudv$$

Sur un triangle, on a les fonctions de bases :

$$\phi_1(u,v) = 1 - u - v,$$

$$\phi_2(u,v) = u,$$

$$\phi_3(u,v) = v$$

On va expliciter le calcul pour un élément de la diagonale et pour un élément en dehors :

$$[M_2]_{33} = \int_0^1 \int_0^{1-v} v^2 dudv = \int_0^1 [v^2 u]_0^{1-v} dv = \int_0^1 v^2(1-v)dv = \int_0^1 v^2 - v^3 dv =$$

$$[\frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4}]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$[M_2]_{13} = \int_0^1 \int_0^{1-v} (1-u-v)vdudv = \int_0^1 \int_0^{1-v} v-uv-v^2 dudv = \int_0^1 [uv - v\frac{u^2}{2} - uv^2]_0^{1-v} =$$

$$\int_0^1 v - \frac{5}{2}v^2 + \frac{3}{2}v^3 dv = [\frac{v^2}{2} - \frac{5}{6}v^3 + \frac{3}{8}v^4]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{1}{24}$$

Finalement on obtient la matrice M_2 :

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & * & * \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & * \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Ce sont les éléments de cette matrice qui seront ajoutés à la matrice A de la partie précédente pour obtenir le nouvel assemblage prenant en compte le nouveau terme dans l'EDP ($A_{ij} = |T| \nabla\eta_i^T \nabla\eta_j + c0 \,|J|\, [M_2]_{ij}$).

0.2 Quadrangle : Construction de la matrice de raideur élémentaire

Pour déduire la forme de la matrice raideur sur un élément de type quadrangle, on utilise la fonction affine Φ_Q qui transforme le carré de côté unitaire $[0,1]^2$ en un parallélogramme de sommets (x_i, y_i), $i = 1,2,3,4$.

$$x = (x_2 - x_1)\xi + (x_4 - x_1)\zeta + x_1$$

$$y = (y_2 - y_1)\xi + (y_4 - y_1)\zeta + y_1$$

On pose :

$$J_T = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix}$$

De plus :

$$(J_\Phi^T J_\Phi) = \begin{pmatrix} (x_2-x_1)^2 + (x_4-x_1)^2 & (x_2-x_1)(y_2-y_1) + (x_4-x_1)(y_4-y_1) \\ (x_2-x_1)(y_2-y_1) + (x_4-x_1)(y_4-y_1) & (y_2-y_1)^2 + (y_4-y_1)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

Et enfin :

$$(J_\Phi^T J_\Phi)^{-1} = \frac{1}{\alpha\gamma - \beta^2} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

D'autre part, via l'application de la formule de changement de variables, on obtient l'expression suivante pour la matrice de raideur :

$$M_{ij} = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \nabla_{\phi_i}^T (J_\phi^T J_\phi)^{-1} \nabla_{\phi_j}^T \, |J_\phi| \, d\xi d\zeta$$

Matrice de raideur associée à un élément de type quadrangle :

$$\nabla_\phi(\xi, \zeta) = \begin{pmatrix} \zeta - 1 & \xi - 1 \\ 1 - \zeta & -\xi \\ \zeta & \xi \\ -\zeta & 1 - \xi \end{pmatrix}$$

On a :

$$\nabla_\phi^T (J_\phi^T J_\phi)^{-1} = \begin{pmatrix} (\zeta - 1)a + b(\xi - 1) & b(\zeta - 1) + c(\xi - 1) \\ a(1 - \zeta) - b\xi & b(1 - \zeta) - c\xi \\ a\zeta + b\xi & b\zeta + c\xi \\ -a\zeta + b(1 - \xi) & -b\zeta + c(1 - \xi) \end{pmatrix}$$

À partir de là, les termes deviennent longs à écrire, on va donc détailler les calculs pour un seul terme de la matrice de raideur.

Pour l'élément (3,1) on a :

$$\nabla_{\phi_1}^T (J_\phi^T J_\phi)^{-1} \nabla_{\phi_3}^T = a\zeta(\zeta - 1) + b\xi(\zeta - 1) + b\zeta(\xi - 1) + c\xi(\xi - 1)$$

On intègre ensuite deux fois sur [0,1] :

$$\int_0^1 \int_0^1 a\zeta(\zeta - 1) + b\xi(\zeta - 1) + b\zeta(\xi - 1) + c\xi(\xi - 1) d\xi d\zeta =$$

$$\int_0^1 [a\zeta(\zeta - 1)\xi + b\zeta\xi^2 - b\zeta\xi - \frac{b}{2}\xi^2 + \frac{c}{3}\xi^3 - \frac{c}{2}\xi^2]_0^1 d\zeta =$$

$$\int_0^1 a\zeta(\zeta - 1) - \frac{b}{2} - \frac{c}{6} d\zeta =$$

$$[\frac{a}{3}\zeta^3 - \frac{a}{2}\zeta^2 - \frac{b}{2}\zeta - \frac{c}{6}\zeta]_0^1 =$$

$$\frac{1}{6}[-a - 3b - c]$$

La matrice de raideur étant symétrique, on calcule les 9 autres termes de la même manière et on obtient :

$$M = \frac{|J_\phi|}{6} \begin{pmatrix} 2a + 3b + 2c & * & * & * \\ -2a + c & 2a - 3b + 2c & * & * \\ -a - 3b - c & a - 2c & 2a + 3b + 2c & * \\ a - 2c & -a + 3b - c & -2a + c & 2a - 3b + 2c \end{pmatrix}$$

0.3 Vérification de l'implémentation

Pour tester la bonne implémentation de nos algorithmes, nous sommes partis de la solution suivante :

$$f(x, y) = sin(\pi x)sin(\pi y)$$

pour laquelle il était facile d'obtenir la fonction en dérivant deux fois :

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi^2}sin(\pi x)sin(\pi y)$$

On calcule ensuite la norme de la différence entre la solution exacte et notre solution approchée pour obtenir l'erreur. Ceci nous permet de vérifier la qualité de notre implémentation du maillage triangulaire et du maillage mixte (triangle + quadrangle) avec des conditions de Dirichlet et Neumann homogènes. Pour le maillage triangulaire, on obtient une erreur de 10e-2 pour n = 4 et 10e-4 pour n = 50. Pour le maillage mixte, on obtient une erreur de 10e-2.

Pour vérifier si les conditions de Dirichlet sont correctement implémentées, il suffit d'observer que la courbe est bien translatée verticalement de sorte que l'ordonnée des valeurs aux bords correspond à la valeur donnée à u_d.

Les conditions de Neumann se vérifient également graphiquement, il suffit de regarder que la valeur de l'ordonnée des points concernés correspond à la valeur donnée à g.