

東京大学工学系研究科 機械工学専攻 大学院入試解答

T.Oku

目次

第 1 章	テーマ	2
第 2 章	熱工学	3
第 3 章	流体力学	4
第 4 章	材料力学	5
第 5 章	機械力学	6
5.1	2024(R5) 年度	6
第 6 章	制御工学	8
6.1	2024(R5) 年度	8

第 1 章

テーマ

	熱工学	流体工学	材料力学	機械力学	制御工学	機械設計・生産工学
2024(R5)					限界感度法	
2023(R4)						

第 2 章

熱工学

第 3 章

流体工学

第 4 章

材料力学

第 5 章

機械力学

5.1 2024(R5) 年度

(1) 略

(2) (1) の式において $F = A \sin \omega t$ とすると,

$$\ddot{x} + 2p\zeta\dot{x} + p^2x = \frac{A}{m} \sin \omega t \quad (5.1)$$

となる. ここで,

$$\ddot{z} + 2p\zeta\dot{z} + p^2z = \frac{A}{m} e^{i\omega t} \quad (5.2)$$

を考え, $z = Ze^{i\omega t}$ を代入すると,

$$\{(p^2 - \omega^2) + 2ip\zeta\omega\} Z = \frac{A}{m} \quad (5.3)$$

を得る. よって,

$$Z = \frac{A}{m} \frac{1}{(p^2 - \omega^2) + 2ip\zeta\omega} = \frac{A}{m} \frac{(p^2 - \omega^2) - 2ip\zeta\omega}{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2} \quad (5.4)$$

ここで, $x = \text{Im}(z)$ であるから,

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (5.5)$$

ただし,

$$C_1 = \frac{A}{m} \frac{-2p\zeta\omega}{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2}, \quad C_2 = \frac{A}{m} \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2} \quad (5.6)$$

である. この振幅 X は, 合成により,

$$X = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \frac{A}{m} \frac{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2}}{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2} = \frac{A/m}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2}} \quad (5.7)$$

と求まる.

(3) (2) で位相遅れ ϕ は以下のように求められる.

$$\phi = \arctan \frac{C_2}{C_1} = \frac{p^2 - \omega^2}{-2p\zeta\omega} \quad (5.8)$$

したがって,

$$x = X \cos(\omega t - \phi) \quad (5.9)$$

と書け, このとき

$$\dot{x} = -\omega X \sin(\omega t - \phi) \quad (5.10)$$

である. $T = c\dot{x} + kx$ より,

$$T = -c\omega X \sin(\omega t - \phi) + kX \cos(\omega t - \phi) \quad (5.11)$$

よって, T の振幅 T_0 は以下ようになる.

$$\begin{aligned} T_0 &= \sqrt{(-c\omega X)^2 + (kX)^2} \\ &= X \sqrt{(c\omega)^2 + k^2} \\ &= \frac{A/m \sqrt{(c\omega)^2 + k^2}}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2}} \\ &= \frac{A \sqrt{(2p\zeta\omega)^2 + p^4}}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

したがって, F に対する T の伝達率 T_r はこれを A で割って,

$$T_r = \frac{\sqrt{(2p\zeta\omega)^2 + p^4}}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2}} \quad (5.13)$$

となる.

(4) $T_r = 1$ で一定となるときを考えると,

$$\begin{aligned} (2p\zeta\omega)^2 + p^4 &= (p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2 \\ p^4 - (p^2 - \omega^2)^2 &= 0 \\ \{p^2 + (p^2 - \omega^2)\}\{p^2 - (p^2 - \omega^2)\} &= 0 \\ 2p^2 - \omega^2 &= 0 \\ \therefore \omega &= \sqrt{2}p \end{aligned} \quad (5.14)$$

となる.

第 6 章

制御工学

6.1 2024(R5) 年度

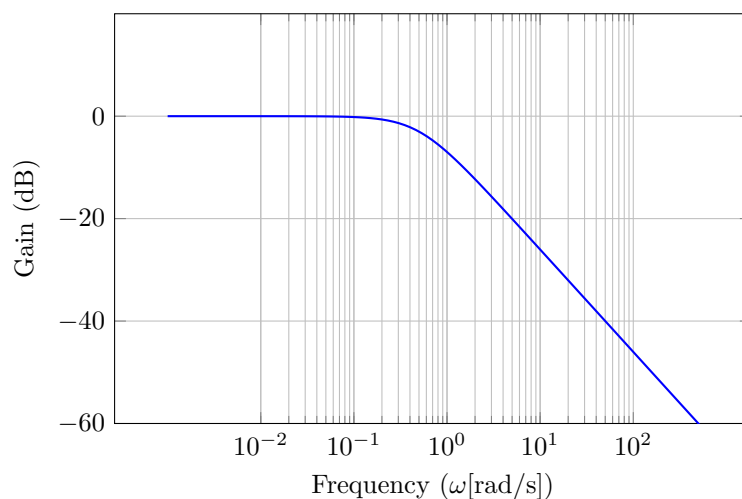
(1) 途中略

$$|G_0(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\omega^2}} \quad (6.1)$$

$$\angle G_0(j\omega) = -\arctan(2\omega) \quad (6.2)$$

(2) 途中略

$$\omega = 0.5[\text{rad/s}] \quad (6.3)$$



(3) r から y への伝達関数 $G_{yr}(s)$ は, P ゲインを K_p として,

$$G_{yr}(s) = \frac{K_p}{16s^4 + 32s^3 + 24s^2 + 8s + k_p + 1} \quad (6.4)$$

この分母多項式についての Routh 表は以下.

s^4	16	24	$K_p + 1$
s^3	32	8	0
s^2	R_{31}	R_{32}	0
s^1	R_{41}	0	0
s^0	R_{51}	0	0

ただし,

$$R_{31} = \frac{-\begin{vmatrix} 16 & 24 \\ 32 & 8 \end{vmatrix}}{32} = 20 \quad (6.5)$$

$$R_{32} = \frac{-\begin{vmatrix} 16 & K_p + 1 \\ 32 & 0 \end{vmatrix}}{32} = K_p + 1 \quad (6.6)$$

$$R_{41} = \frac{-\begin{vmatrix} 32 & 8 \\ R_{31} & R_{32} \end{vmatrix}}{R_{31}} = \frac{32 - 8K_p}{5} \quad (6.7)$$

$$R_{51} = \frac{-\begin{vmatrix} R_{31} & R_{32} \\ R_{41} & 0 \end{vmatrix}}{R_{41}} = K_p + 1 \quad (6.8)$$

であるから, Routh 数列が全て正になる条件は,

$$0 < K_p < 4 \quad (6.9)$$

したがって, 限界感度 K_u は,

$$K_u = 4 \quad (6.10)$$

このとき,

$$G_{yr}(s) = \frac{4}{16s^4 + 32s^3 + 24s^2 + 8s + 5} \quad (6.11)$$

であり, 分母多項式 $D(s)$ とすると,

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= 16(j\omega)^4 + 32(j\omega)^3 + 24(j\omega)^2 + 8(j\omega) + 5 \\ &= (16\omega^4 - 24\omega^2 + 5) + j(-32\omega^3 + 8\omega) \end{aligned} \quad (6.12)$$

であり, 虚部が 0 となる ω を求めると,

$$\begin{aligned} -32\omega^3 + 8\omega &= 0 \\ \omega(1 - 4\omega^2) &= 0 \\ \therefore \omega &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (6.13)$$

したがって, 限界周期 T_u は,

$$T_u = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \quad (6.14)$$

(4) $K_p = 0.5K_u = 2$ で, $R(s)$ が単位ステップ入力するとき $R(s) = \frac{1}{s}$ より,

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)R(s) \\ &= \frac{2}{16s^4 + 32s^3 + 24s^2 + 8s + 3} \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (6.15)$$

よって, 最終値の定理から定常偏差 $1 - y(\infty)$ は,

$$\begin{aligned} 1 - y(\infty) &= 1 - \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \\ &= 1 - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{16s^4 + 32s^3 + 24s^2 + 8s + 3} \\ &= 1 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (6.16)$$

一方, PID 制御の場合,

$$H(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (6.17)$$

と書ける. このとき,

$$\begin{aligned} G_{yr}(s) &= \frac{H(s)G(s)}{1 + H(s)G(s)} \\ &= \frac{K_p(1 + T_i s + T_i T_d s^2)}{T_i s(2s + 1)^4 + K_p(1 + T_i s + T_i T_d s^2)} \end{aligned} \quad (6.18)$$

よって, 同様に最終値の定理から, 定常偏差 $1 - y(\infty)$ は,

$$\begin{aligned} 1 - y(\infty) &= 1 - \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \\ &= 1 - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_p(1 + T_i s + T_i T_d s^2)}{T_i s(2s + 1)^4 + K_p(1 + T_i s + T_i T_d s^2)} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

となる.