東京大学工学系研究科 機械工学専攻 大学院入試解答

T.Oku

目次

第 1 章

テーマ

	熱工学	流体工学	材料力学	機械力学	制御工学	機械設計・生産工学
2024(R5)	Brayton サイクル				限界感度法	
2023(R4)						

第 2 章

熱工学

2.1　2024(R5) 年度

I.

Brayton サイクルの基礎的な内容は省略する．

(1)

$$\eta = 1 - \frac{T_c - T_d}{T_b - T_a} \tag{2.1}$$

(2)

$$\eta = 1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \tag{2.2}$$

(3) 最高温度: b，最低温度: d，Ts 線図は省略する．

(4) (2) の導出過程から，(1) で求めた Brayton サイクルの熱効率 η は,

$$\eta = 1 - \frac{T_d}{T_a} = 1 - \frac{T_c}{T_b} \tag{2.3}$$

と書くことができる．また，Carnot サイクルの熱効率 η_C は以下で与えられる．

$$\eta_\mathrm{C} = 1 - \frac{T_d}{T_b} \tag{2.4}$$

したがって,

$$\eta_\mathrm{C} - \eta = \frac{T_c}{T_b} - \frac{T_d}{T_b} > 0 \tag{2.5}$$

これより，Carnot サイクルの熱効率の方が Brayton サイクルの熱効率よりも大きいことが示された．

第 3 章

流体工学

第 4 章

材料力学

第 5 章

機械力学

5.1　2024(R5) 年度

(1) 略

(2) (1) の式において $F = A\sin\omega t$ とすると，

$$\ddot{x} + 2p\zeta\dot{x} + p^2x = \frac{A}{m}\sin\omega t \tag{5.1}$$

となる．ここで，

$$\ddot{z} + 2p\zeta\dot{z} + p^2z = \frac{A}{m}e^{i\omega t} \tag{5.2}$$

を考え，$z = Ze^{i\omega t}$ を代入すると，

$$\left\{(p^2 - \omega^2) + 2ip\zeta\omega\right\} Z = \frac{A}{m} \tag{5.3}$$

を得る．よって，

$$Z = \frac{A}{m}\frac{1}{(p^2 - \omega^2) + 2ip\zeta\omega} = \frac{A}{m}\frac{(p^2 - \omega^2) - 2ip\zeta\omega}{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2} \tag{5.4}$$

ここで，$x = \mathrm{Im}\,(z)$ であるから，

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \tag{5.5}$$

ただし，

$$C_1 = \frac{A}{m}\frac{-2p\zeta\omega}{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2}, \quad C_2 = \frac{A}{m}\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2} \tag{5.6}$$

である．この振幅 X は，合成により，

$$X = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \frac{A}{m}\frac{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2}}{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2} = \frac{A/m}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2}} \tag{5.7}$$

と求まる．

(3) (2) で位相遅れ ϕ は以下のように求められる．

$$\phi = \arctan \frac{C_2}{C_1} = \frac{p^2 - \omega^2}{-2p\zeta\omega} \tag{5.8}$$

したがって，

$$x = X \cos(\omega t - \phi) \tag{5.9}$$

と書け，このとき

$$\dot{x} = -\omega X \sin(\omega t - \phi) \tag{5.10}$$

である．$T = c\dot{x} + kx$ より，

$$T = -c\omega X \sin(\omega t - \phi) + kX \cos(\omega t - \phi) \tag{5.11}$$

よって，T の振幅 T_0 は以下のようになる．

$$\begin{aligned} T_0 &= \sqrt{(-c\omega X)^2 + (kX)^2} \\ &= X\sqrt{(c\omega)^2 + k^2} \\ &= \frac{A/m\sqrt{(c\omega)^2 + k^2}}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2}} \\ &= \frac{A\sqrt{(2p\zeta\omega)^2 + p^4}}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2}} \end{aligned} \tag{5.12}$$

したがって，F に対する T の伝達率 T_r はこれを A で割って，

$$T_r = \frac{\sqrt{(2p\zeta\omega)^2 + p^4}}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2}} \tag{5.13}$$

となる．

(4) $T_r = 1$ で一定となるときを考えると，

$$\begin{aligned} (2p\zeta\omega)^2 + p^4 &= (p^2 - \omega^2)^2 + (2p\zeta\omega)^2 \\ p^4 - (p^2 - \omega^2)^2 &= 0 \\ \{p^2 + (p^2 - \omega^2)\}\{p^2 - (p^2 - \omega^2)\} &= 0 \\ 2p^2 - \omega^2 &= 0 \\ \therefore \omega &= \sqrt{2}p \end{aligned} \tag{5.14}$$

となる．

第 6 章

制御工学

6.1　2024(R5) 年度

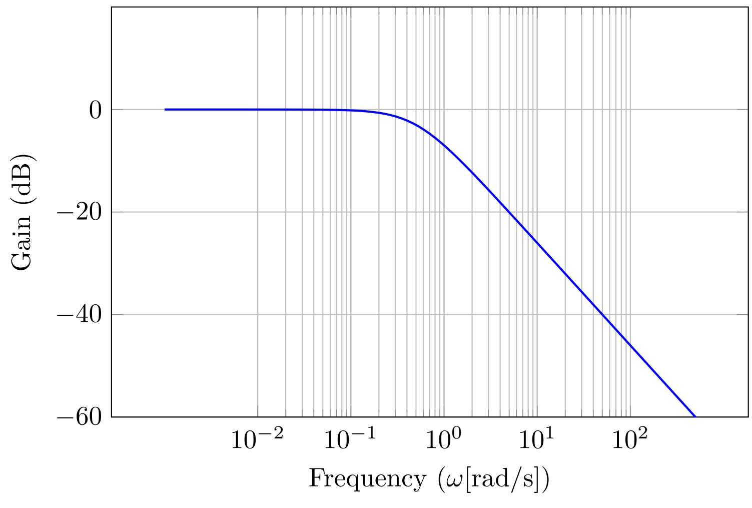
(1) 途中略

$$|G_0(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}} \tag{6.1}$$

$$\angle G_0(j\omega) = -\arctan(2\omega) \tag{6.2}$$

(2) 途中略

$$\omega = 0.5[\mathrm{rad/s}] \tag{6.3}$$



(3) r から y への伝達関数 $G_{yr}(s)$ は，P ゲインを K_p として，

$$G_{yr}(s) = \frac{K_p}{16s^4+32s^3+24s^2+8s+k_p+1} \tag{6.4}$$

この分母多項式についての Routh 表は以下.

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 16 & 24 & K_p+1 \\
s^3 & 32 & 8 & 0 \\
\hline
s^2 & R_{31} & R_{32} & 0 \\
s^1 & R_{41} & 0 & 0 \\
s^0 & R_{51} & 0 & 0
\end{array}
$$

ただし,

$$
R_{31} = \frac{-\begin{vmatrix} 16 & 24 \\ 32 & 8 \end{vmatrix}}{32} = 20 \tag{6.5}
$$

$$
R_{32} = \frac{-\begin{vmatrix} 16 & K_p+1 \\ 32 & 0 \end{vmatrix}}{32} = K_p+1 \tag{6.6}
$$

$$
R_{41} = \frac{-\begin{vmatrix} 32 & 8 \\ R_{31} & R_{32} \end{vmatrix}}{R_{31}} = \frac{32-8K_p}{5} \tag{6.7}
$$

$$
R_{51} = \frac{-\begin{vmatrix} R_{31} & R_{32} \\ R_{41} & 0 \end{vmatrix}}{R_{41}} = K_p+1 \tag{6.8}
$$

であるから，Routh 数列が全て正になる条件は,

$$
0 < K_p < 4 \tag{6.9}
$$

したがって，限界感度 K_u は,

$$
K_u = 4 \tag{6.10}
$$

このとき,

$$
G_{yr}(s) = \frac{4}{16s^4+32s^3+24s^2+8s+5} \tag{6.11}
$$

であり，分母多項式 $D(s)$ とすると,

$$
\begin{aligned}
D(j\omega) &= 16(j\omega)^4+32(j\omega)^3+24(j\omega)^2+8(j\omega)+5 \\
&= (16\omega^4-24\omega^2+5)+j(-32\omega^3+8\omega)
\end{aligned} \tag{6.12}
$$

であり，虚部が 0 となる ω を求めると,

$$
\begin{aligned}
-32\omega^3+8\omega &= 0 \\
\omega(1-4\omega^2) &= 0 \\
\therefore \omega &= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{6.13}
$$

したがって，限界周期 T_u は,

$$
T_u = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \tag{6.14}
$$

(4) $K_p = 0.5K_u = 2$ で，$R(s)$ が単位ステップ入力のとき $R(s) = \dfrac{1}{s}$ より，

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)R(s) \\ &= \frac{2}{16s^4 + 32s^3 + 24s^2 + 8s + 3}\frac{1}{s} \end{aligned} \tag{6.15}$$

よって，最終値の定理から定常偏差 $1 - y(\infty)$ は，

$$\begin{aligned} 1 - y(\infty) &= 1 - \lim_{s \to 0} sY(s) \\ &= 1 - \lim_{s \to 0} \frac{2}{16s^4 + 32s^3 + 24s^2 + 8s + 3} \\ &= 1 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{6.16}$$

一方，PID 制御の場合，

$$H(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \tag{6.17}$$

と書ける．このとき，

$$\begin{aligned} G_{yr}(s) &= \frac{H(s)G(s)}{1 + H(s)G(s)} \\ &= \frac{K_p(1 + T_i s + T_i T_d s^2)}{T_i s(2s+1)^4 + K_p(1 + T_i s + T_i T_d s^2)} \end{aligned} \tag{6.18}$$

よって，同様に最終値の定理から，定常偏差 $1 - y(\infty)$ は，

$$\begin{aligned} 1 - y(\infty) &= 1 - \lim_{s \to 0} sY(s) \\ &= 1 - \lim_{s \to 0} \frac{K_p(1 + T_i s + T_i T_d s^2)}{T_i s(2s+1)^4 + K_p(1 + T_i s + T_i T_d s^2)} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.19}$$

となる．