$\Delta_B(j) = \{ i \mid p\{x := y a_j\} \leq q_i \}$

$Q_B(i) = \{ j \mid p\{x := y a_j\} \leq q_i \}$ 不要かも

σ_B で代用できる

Fact: $\# Q_B(i) \leq 1$

$\exists i$ s.t. $\# Q_B(i) \geq 2$ ならば $p\{x := xy\} \leq q_i$

(1) $\# A = \# B = \# Q = k$ $\quad A' \cap B' = \phi$

W.l.o.g., $A' = \{a_{k+1}, a_{k+2}\}$, $B' = \{a_1, a_2\}$

$3 \leq \forall j \leq k+2$ に対して $\# \Delta_B(j) = 1$

$1 \leq \forall i \leq k$ に対して $\# Q_B(i) = 1$

$\sigma_B : \{1, \cdots, k\} \longrightarrow \{3, \cdots, k+2\}$

$Q_B(i) = \{\sigma_B(i)\}$

(2) $\# A = k$, $\# Q = k$, $\# B = k - 1$ $\quad A' \cap B' = \phi$

$A' = \{a_{k+1}, a_{k+2}\}$, $B' = \{a_1, a_2, a_3\}$

$Q_B = \{ q_i \mid \exists j \text{ s.t. } p\{x := y a_j\} \leq q_i \}$

(2-1) $\# Q_B = k$

$\sigma_B : \{1, \cdots, k\} \to \{4, \cdots, k+2\}$

(2-2) $\# Q_B = k - 1$ $\quad$ W.l.o.g., $q_k \notin Q_B$

$\sigma_B : \{1, \cdots, k-1\} \to \{4, \cdots, k+2\}$

$i \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad k$ w.l.o.g. $\boxed{1}$

$\sigma_A(i) \quad \sigma_A(1) \quad \sigma_A(2) \quad \cdots \quad \sigma_A(k) \qquad A' = \{k+1, k+2\}$

$\sigma_B(i) \quad \sigma_B(1) \quad \sigma_B(2) \quad \cdots \quad \sigma_B(k) \qquad B' = \{1, 2\}$

$\sigma_A : \{1, 2, \cdots, k\} \to \{1, 2, \cdots, k\}$

$\sigma_B : \{1, 2, \cdots, k\} \to \{3, \cdots, k+1, k+2\}$

$A = \{a_j \in \Sigma \mid \exists i \text{ s.t. } p\{x := a_j y\} \preceq f_i\}$

$B = \{a_j \in \Sigma \mid \exists i \text{ s.t. } p\{x := y a_j\} \preceq f_i\}$

$R = \{a_{k+1}a_1, a_{k+1}a_2, a_{k+2}a_1, a_{k+2}a_2\}$ とする

$r \in R$ に対して $i(r)$ を $1 \le i(r) \le k$ で

$p\{x := r\} \preceq f_{i(r)}$ となるものとする,

$i(r)$ 1) $3 \le \sigma_A(\overset{\exists}{i(r)}), \sigma_B(i(r)) \le k$ Lem 6

$\sigma_A(i(r))$ 2-1) $1 \le \sigma_A(\overset{\exists}{i(r)}) \le 2$ & $\overset{3 \le}{\sigma_B}(i(r)) \le k$

$\sigma_B(i(r))$ 2-2) $3 \le \underset{\le k}{\sigma_A(i(r))}, k+1 \le \sigma_B(i(r)) \le k+2$ Lem 7

$$\begin{cases} p\{x := a_{\sigma_A(i(r))} y\} \preceq f_{i(r)} \\ p\{x := y a_{\sigma_B(i(r))}\} \preceq f_{i(r)} \\ p\{x := r\} \preceq f_{i(r)} \end{cases}$$

3) $1 \le \sigma_A(i(r)) \le 2$ & $k+1 \le \sigma_B(i(r)) \le k+2$

σ_A, σ_B が bij. なので起こらない.

$i \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad k$ w.l.o.g. $\boxed{2}$

$\sigma_A(i) \quad \sigma_A(1) \quad \sigma_A(2) \quad \cdots \quad \sigma_A(k) \qquad A' = \{k+1, k+2\}$

$\sigma_B(i) \quad \sigma_B(1) \quad \sigma_B(2) \quad \cdots \quad \sigma_B(k) \qquad B' = \{1, 2, 3\}$

$\sigma_A : \{1, 2, \cdots, k\} \to \{1, 2, \cdots, k\}$

$\boxed{2-1}$ $\sigma_B : \{1, 2, \cdots, k\} \to \{4, \cdots, k+1, k+2\}$

$A = \{a_j \in \Sigma \mid \exists i \text{ s.t. } P\{x := a_j y\} \preceq q_i\}$

$B = \{a_j \in \Sigma \mid \exists i \text{ s.t. } P\{x := y a_j\} \preceq q_i\}$

$R = \{a_{k+1}a_1, a_{k+1}a_2, a_{k+1}a_3, a_{k+2}a_1, a_{k+2}a_2, a_{k+2}a_3\}$ とする

$r \in R$ に対して $i(r)$ を $1 \leq i(r) \leq k$ で

$P\{x := r\} \preceq q_{i(r)}$ となるものとする。

$i(r)$ 1) $4 \leq \sigma_A(i(r)),\ \sigma_B(i(r)) \leq k$ Lem 6

$\sigma_A(i(r))$ 2-1) $1 \leq \sigma_A(i(r)) \leq 3$ & $4 \leq \sigma_B(i(r)) \leq k$

$\sigma_B(i(r))$ 2-2) $3 \leq \underbrace{\sigma_A(i(r))}_{\leq k},\ k+1 \leq \sigma_B(i(r)) \leq k+2$ Lem 7

$$\begin{cases} P\{x := a_{\sigma_A(i(r))} y\} \preceq q_{i(r)} \\ P\{x := y\, a_{\sigma_B(i(r))}\} \preceq q_{i(r)} \\ P\{x := r\} \preceq q_{i(r)} \end{cases}$$

3) $1 \leq \sigma_A(i(r)) \leq 3$ &
$k+1 \leq \sigma_B(i(r)) \leq k+2$

$\boxed{1}$ のときと同様に×

$r_1 = a_{k+1} a_1$　　$r_4 = a_{k+2} a_1$

$r_2 = a_{k+1} a_2$　　$r_5 = a_{k+2} a_2$

$r_3 = a_{k+1} a_3$　　$r_6 = a_{k+2} a_3$

$$\begin{cases} p\{x := a_{\sigma_A(i(r))}\, y\} \preceq f_{i(r)} \\ p\{x := y\, a_{\sigma_B(i(r))}\} \preceq f_{i(r)} \\ p\{x := r\} \preceq f_{i(r)} \end{cases}$$

例えば

$(\sigma_A(i(r_1)),\ \sigma_B(i(r_1))) = (1,\ k+1)$ ……①　とすれば

$p\{x := xy\} \preceq f_{i(r_1)}$ となる.

同様に

$(\sigma_A(i(r_4)),\ \sigma_B(i(r_4))) = (1,\ k+2)$ ……②　とすれば

$p\{x := xy\} \preceq f_{i(r_4)}$ となる.

①②が成立するとすると

$\sigma_A(i(r_1)) = \sigma_A(i(r_4))$ であるから

σ_A が bij. であることより　$i(r_1) = i(r_4)$

一方 $\sigma_B(i(r_1)) \neq \sigma_B(i(r_4))$ である.

これは σ_B が function であることに反する.

2-2

$\sigma_A : \{1, 2, \cdots, k\} \to \{1, 2, \cdots, k\}$

$\sigma_B : \{1, 2, \cdots, k-1\} \to \{4, \cdots, k+1, k+2\}$

$A' = \{k+1, k+2\}$

$B' = \{1, 2, 3\}$

$r_1 = a_{k+1} a_1$ $\quad$ $r_4 = a_{k+2} a_1$

$r_2 = a_{k+1} a_2$ $\quad$ $r_5 = a_{k+2} a_2$

$r_3 = a_{k+1} a_3$ $\quad$ $r_6 = a_{k+2} a_3$

$1 \le i(\forall r) \le k-1$ のとき　σ_Aとσ_Bのdomainが同じ

1) $4 \le \sigma_A(i(\exists r)), \sigma_B(i(r)) \le k$　Lem 6

2-1) $1 \le \sigma_A(i(\exists r)) \le 3$ & $4 \le \sigma_B(i(r)) \le k$

2-2) $4 \le \sigma_A(i(\exists r)) \le k$, $k+1 \le \sigma_B(i(r)) \le k+2$　Lem 7

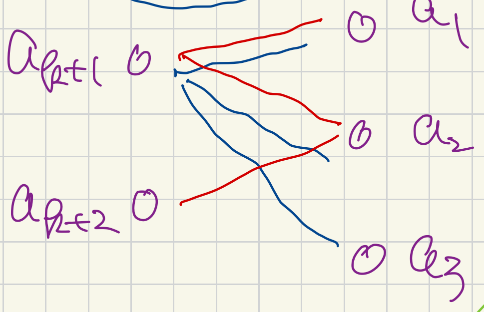
※ 3) $1 \le \sigma_A(i(r)) \le 3$ & $k+1 \le \sigma_B(i(r)) \le k+2$

このようなrが存在しても2つしかない　※が重要

$i(\exists r) = k$ のとき

q_{k+1} が R に含まれる r のうち3つを含めば

$p\{x := x_4\} \preceq q_{k+1}$ となる



6辺

全ての辺が必要

図 23 のように，$\tilde{G}_i^{(1,\,0)}$ に 3 本の辺が含まれるパターンは，4 つ存在する．パターン 1 の場合，補題 5(abc) より，$p\{x := xy\} \preceq q_i$ となる．パターン 2 とパターン 3 の場合，互いに隣接しない辺が 2 本存在するため，補題 5(d) より，$p\{x := xy\} \preceq q_i$ となる．パターン 4 の場合，$p\{x := a_1 a_j\} \preceq q_i$ $(j = 1, 2, 3)$ となる．$p' = p\{x := a_1 y\} = p_1 a_1 y p_2$ とおくと，$p\{x := a_1 a_j\} \preceq q_i$ より，$p'\{y := a_j\} \preceq q_i$ となる．a_j は互いに異なる定数記号であるため，補題[redacted]より，$p' \preceq q_i$ となり，$p\{x := a_1 y\} \preceq q_i$ となる．これは，A_i の定義に矛盾する．よって，$\tilde{G}_i^{(1,\,0)}$ に含まれる辺は 2 本以下となる．したがって，

$\boxed{2\text{-}3}$

$\sigma_A : \{1, 2, \cdots, k\} \to \{1, 2, \cdots, k\}$

$\sigma_B : \{1, 2, \cdots, k-2\} \to \{5, \cdots, k+1, k+2\}$

$A' = \{k+1, k+2\}$

$B' = \{1, 2, 3, 4\}$

$(k \geq 4)$

$r_1 = a_{k+1} a_1$ $\quad$ $r_5 = a_{k+2} a_1$

$r_2 = a_{k+1} a_2$ $\quad$ $r_6 = a_{k+2} a_2$

$r_3 = a_{k+1} a_3$ $\quad$ $r_7 = a_{k+2} a_3$

$r_4 = a_{k+1} a_4$ $\quad$ $r_8 = a_{k+2} a_4$

$1 \leq i(\overset{\forall}{r}) \leq k-2$ のとき

1) $5 \leq \sigma_A(i(\overset{\exists}{r})),\ \sigma_B(i(r)) \leq k$ Lem 6

2-1) $1 \leq \sigma_A(i(\overset{\exists}{r})) \leq 4$ & $\overset{5 \leq}{\sigma_B}(i(r)) \leq k$

2-2) $5 \leq \sigma_A(i(\overset{\exists}{r}))_{\leq k},\ k+1 \leq \sigma_B(i(r)) \leq k+2$ Lem 7

3) $1 \leq \sigma_A(i(\overset{\forall}{r})) \leq 4$ &
$k+1 \leq \sigma_B(i(r)) \leq k+2$ $\quad$ σ_B が function であることに反する。

$k-1 \leq i(\overset{\exists}{r}) \leq k$ のとき

a b c d Lem 6

1 a b c a Lem 6

2 a a c d Lem 7

3 a b b d Lem 6

4 a b c c Lem 7

5 a b b a Lem 6

a b a d

a b c b

1) a a c b Lem 7

a c a b

a c c b Lem 6

2) 2 a a b c Lem 7

a c b a Lem 6

a c b c

3) a c b b Lem 7

4) a b a c

1 a b c a Lem 6

4 a b c c Lem 7

5) a b c b

6) 3 a b b c Lem 6

a a a a

1) a a a b

2) a a b a

3) a a b b Lem 7 x

4) a b a a

5) a b a b

6) 5 a b b a Lem 6

7) a b b b

$Q \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad k$

$\sigma_A(1) \quad \sigma_A(2) \quad \sigma_A(3) \quad \cdots \quad \sigma_A(k)$

$\sigma_B(1) \quad \sigma_B(2) \quad \sigma_B(3) \quad \cdots \quad \sigma_B(k)$

$$\sigma_A : \underbrace{\{1,2,\cdots,k\}}_{I_Q} \longrightarrow \underbrace{\{0,1,2,\cdots,k,k+1,k+2\}}_{I_\Sigma \cup \{0\}}$$

$$\sigma_B : \{1,2,\cdots,k\} \longrightarrow \{0,1,2,\cdots,k,k+1,k+2\}$$

$$\sigma_A, \sigma_B : I_Q \longrightarrow I_\Sigma \cup \{0\}$$

$$A = \sigma_A(I_Q)\setminus\{0\} \qquad A' = I_\Sigma \setminus (A \cup \{0\})$$

$$B = \sigma_B(I_Q)\setminus\{0\} \qquad B' = I_\Sigma \setminus (B \cup \{0\})$$

3) $\#A \leq k-2, \quad \#B \leq k-2 \qquad |A' \cap B'| = 0$

$l_A = k - \#\sigma_A^{-1}(0) - \#A$ 重複している記号数

$l_B = k - \#\sigma_B^{-1}(0) - \#B$

$\exists\, i_1, i_2, i_3 \in I_Q \,;\, \sigma_A(i_1) = \sigma_A(i_2) = \sigma_A(i_3)$

$\exists\, i_1, i_2, i_3, i_4 \in I_Q \,;\, \sigma_A(i_1) = \sigma_A(i_2)\ \&\ \sigma_A(i_3) = \sigma_A(i_4)$

$\#A' \geq 4 \qquad \#B' \geq 4$

$\#A = k - \#\sigma_A^{-1}(0) - l_A \leq k-2$

$\#\sigma_A^{-1}(0) + l_A \geq 2 \quad (l_A \geq 0)$ ⋯論えては $l_A = 0$ で $\sigma_A^{-1}(0) = \{i_0, i_1\}$ としている,

同様に $\#\sigma_B^{-1}(0) + l_B \geq 2$

$$I_Q^{(0,0)} = \{ i \in I_Q \mid i \in \sigma_A^{-1}(0) \cap \sigma_B^{-1}(0) \}$$

$(1,0)$ $\quad \sigma_B^{-1}(0) \setminus \sigma_A^{-1}(0)$

$$I_Q^{(0,1)} = \{ i \in I_Q \mid i \in \sigma_A^{-1}(0) \setminus \sigma_B^{-1}(0) \}$$

$$I_\alpha^{(0,0)} = \{ i \in I_\alpha \mid i \in \sigma_A^{-1}(0) \cap \sigma_B^{-1}(0) \}$$
$$I_\alpha^{(0,1)} = \{ i \in I_\alpha \mid i \in \sigma_A^{-1}(0) \setminus \sigma_B^{-1}(0) \}$$
$$I_\alpha^{(1,0)} = \{ i \in I_\alpha \mid i \in \sigma_B^{-1}(0) \setminus \sigma_A^{-1}(0) \}$$

$\# A' \geq 4$, $\# B' \geq 4$

$R = \{ a_\alpha a_\beta \mid \alpha \in A' \;\&\; \beta \in B' \}$ $\quad (A' \cap B' = \phi)$

$\forall a_\alpha a_\beta \in R$ について

$$i(\alpha, \beta) = \{ i \in I_\alpha \mid p\{x == a_\alpha a_\beta\} \preceq q_i \}$$

$\exists i \in i(\alpha, \beta)$ s.t. $i \in A$ or $i \in B$

i.e. $p\{ x == a_{\sigma_A(i)} y \} \preceq q_i$

or $p\{ x == y a_{\sigma_B(i)} \} \preceq q_i$

これとま $p\{ x == xy \} \preceq q_i$ となる.

$\forall i \in i(\alpha, \beta) \Rightarrow i \notin A$ and $i \notin B$