$\Delta_B(j) = \{ i \mid p\{x := y a_j\} \le q_i \}$

$Q_B(i) = \{ j \mid p\{x := y a_j\} \le q_i \}$ 不要かも
σ_B で代用できる

Fact: $\# Q_B(i) \le 1$

$\exists i$ s.t. $\# Q_B(i) \ge 2$ ならば $p\{x := xy\} \le q_i$

(1) $\# A = \# B = \# Q = k$ $\quad A' \cap B' = \phi$

W.l.o.g., $A' = \{a_{k+1}, a_{k+2}\}$, $B' = \{a_1, a_2\}$

$3 \le \forall j \le k+2$ に対して $\# \Delta_B(j) = 1$

$1 \le \forall i \le k$ に対して $\# Q_B(i) = 1$

$$\sigma_B : \{1, \cdots, k\} \longrightarrow \{3, \cdots, k+2\}$$

$$Q_B(i) = \{ \sigma_B(i) \}$$

(2) $\# A = k$, $\# Q = k$, $\# B = k-1$ $\quad A' \cap B' = \phi$

$A' = \{a_{k+1}, a_{k+2}\}$, $B' = \{a_1, a_2, a_3\}$

$$Q_B = \{ q_i \mid \exists j \text{ s.t. } p\{x := y a_j\} \le q_i \}$$

(2-1) $\# Q_B = k$

$$\sigma_B : \{1, \cdots, k\} \to \{4, \cdots, k+2\}$$

(2-2) $\# Q_B = k-1$ $\quad$ W.l.o.g., $q_k \notin Q_B$

$$\sigma_B : \{1, \cdots, k-1\} \to \{4, \cdots, k+2\}$$

i 1 2 $\ldots$ k w.l.o.g. $\boxed{1}$

$\sigma_A(i)$ $\sigma_A(1)$ $\sigma_A(2)$ $\cdots$ $\sigma_A(k)$ $A' = \{k+1, k+2\}$

$\sigma_B(i)$ $\sigma_B(1)$ $\sigma_B(2)$ $\cdots$ $\sigma_B(k)$ $B' = \{1, 2\}$

$$\sigma_A : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

$$\sigma_B : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{3, \ldots, k+1, k+2\}$$

$$A = \{a_j \in \Sigma \mid \exists i \text{ s.t. } p\{x := a_j y\} \preceq f_i\}$$

$$B = \{a_j \in \Sigma \mid \exists i \text{ s.t. } p\{x := y a_j\} \preceq f_i\}$$

$R = \{a_{k+1}a_1, a_{k+1}a_2, a_{k+2}a_1, a_{k+2}a_2\}$ とする

$r \in R$ に対して $i(r)$ を $1 \le i(r) \le k$ で

$p\{x := r\} \preceq f_{i(r)}$ となる (仮定より) とする。

$i(r)$ 1) $3 \le \sigma_A(i(r))$, $\sigma_B(i(r)) \le k$ Lem 6

$\sigma_A(i(r))$ 2-1) $1 \le \sigma_A(i(r)) \le 2$ & $3 \le \sigma_B(i(r)) \le k$

$\sigma_B(i(r))$ 2-2) $3 \le \sigma_A(i(r))$ $\le k$, $k+1 \le \sigma_B(i(r)) \le k+2$ Lem 7

3) $1 \le \sigma_A(i(r)) \le 2$ & $k+1 \le \sigma_B(i(r)) \le k+2$

$$\begin{cases} p\{x := a_{\sigma_A(i(r))}\, y\} \preceq f_{i(r)} \\ p\{x := y\, a_{\sigma_B(i(r))}\} \preceq f_{i(r)} \\ p\{x := r\} \preceq f_{i(r)} \end{cases}$$

σ_A, σ_B が

bij. なので 起こらない。

$i \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad k$ w.l.o.g. $\boxed{2}$

$\sigma_A(i) \quad \sigma_A(1) \quad \sigma_A(2) \quad \cdots \quad \sigma_A(k) \qquad A' = \{k+1, k+2\}$

$\sigma_B(i) \quad \sigma_B(1) \quad \sigma_B(2) \quad \cdots \quad \sigma_B(k) \qquad B' = \{1, 2, 3\}$

$\sigma_A : \{1, 2, \cdots, k\} \to \{1, 2, \cdots, k\}$

$\boxed{2-1}$ $\sigma_B : \{1, 2, \cdots, k\} \to \{4, \cdots, k+1, k+2\}$

$A = \{a_j \in \Sigma \mid \exists i \text{ s.t. } P\{x := a_j y\} \preceq q_i\}$

$B = \{a_j \in \Sigma \mid \exists i \text{ s.t. } P\{x := y a_j\} \preceq q_i\}$

$R = \{a_{k+1}a_1, a_{k+1}a_2, a_{k+1}a_3, a_{k+2}a_1, a_{k+2}a_2, a_{k+2}a_3\}$ とする

$r \in R$ に対して $i(r)$ を $1 \leq i(r) \leq k$ で

$P\{x := r\} \preceq q_{i(r)}$ となるものとする。

$i(r)$ 1) $4 \leq \sigma_A(i(r)), \sigma_B(i(r)) \leq k$ Lem 6

$\sigma_A(i(r))$ 2-1) $1 \leq \sigma_A(i(r)) \leq 3$ & $\overset{4\leq}{}\sigma_B(i(r)) \leq k$

$\sigma_B(i(r))$ 2-2) $3 \leq \underset{\leq k}{\sigma_A(i(r))}, k+1 \leq \sigma_B(i(r)) \leq k+2$ Lem 7

3) $1 \leq \sigma_A(i(r)) \leq 3$ & $k+1 \leq \sigma_B(i(r)) \leq k+2$

$$\begin{cases} P\{x := a_{\sigma_A(i(r))} y\} \preceq q_{i(r)} \\ P\{x := y a_{\sigma_B(i(r))}\} \preceq q_{i(r)} \\ P\{x := r\} \preceq q_{i(r)} \end{cases}$$

$\boxed{1}$ のときと同様に ×

$r_1 = a_{k+1} a_1$　　$r_4 = a_{k+2} a_1$

$r_2 = a_{k+1} a_2$　　$r_5 = a_{k+2} a_2$

$r_3 = a_{k+1} a_3$　　$r_6 = a_{k+2} a_3$

$$\begin{cases} p\{x := a_{\sigma_A(i(r))}\, y\} \preceq q_{i(r)} \\ p\{x := y\, a_{\sigma_B(i(r))}\} \preceq q_{i(r)} \\ p\{x := r\} \preceq q_{i(r)} \end{cases}$$

例えば

$(\sigma_A(i(r_1)), \sigma_B(i(r_1))) = (1, k+1)$ とすれば ······ ①

$p\{x := xy\} \preceq q_{i(r_1)}$ となる.

同様に

$(\sigma_A(i(r_4)), \sigma_B(i(r_4))) = (1, k+2)$ となれば ······ ②

$p\{x := xy\} \preceq q_{i(r_4)}$ となる.

①②が成立するとすると

$\sigma_A(i(r_1)) = \sigma_A(i(r_4))$ であるから

σ_A が bij. であることより $i(r_1) = i(r_4)$

一方 $\sigma_B(i(r_1)) \neq \sigma_B(i(r_4))$ である.

これは σ_B が function であることに反する.

2-2

$\sigma_A : \{1, 2, \cdots, k\} \to \{1, 2, \cdots, k\}$

$\sigma_B : \{1, 2, \cdots, k-1\} \to \{4, \cdots, k+1, k+2\}$

$A' = \{k+1, k+2\}$

$B' = \{1, 2, 3\}$

$r_1 = a_{k+1} a_1$ $\quad r_4 = a_{k+2} a_1$

$r_2 = a_{k+1} a_2$ $\quad r_5 = a_{k+2} a_2$

$r_3 = a_{k+1} a_3$ $\quad r_6 = a_{k+2} a_3$

$1 \leq i(\forall r) \leq k-1$ のとき　σ_A と σ_B の domain が同じ

1) $4 \leq \sigma_A(i(\exists r)), \sigma_B(i(r)) \leq k$ Lem 6

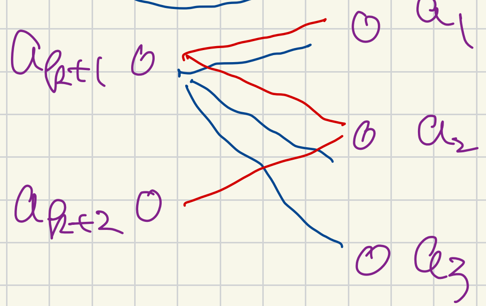
2-1) $1 \leq \sigma_A(i(\exists r)) \leq 3$ & $4 \leq \sigma_B(i(r)) \leq k$

2-2) $4 \leq \sigma_A(i(\exists r)) \leq k$, $k+1 \leq \sigma_B(i(r)) \leq k+2$ Lem 7

* 3) $1 \leq \sigma_A(i(r)) \leq 3$ & $k+1 \leq \sigma_B(i(r)) \leq k+2$

このような r が存在しても 2つしかない *が重要

$i(\exists r) = k$ のとき



$\{k+1\}$ が R に含まれる r のうち 3つを含めば

$p\{x := x_4\} \preceq \{k+1\}$ となる

6辺

全ての辺が必要

図 23 のように，$\tilde{G}_i^{(1,\,0)}$ に 3 本の辺が含まれるパターンは，4 つ存在する．パターン 1 の場合，補題 5(abc) より，$p\{x := xy\} \preceq q_i$ となる．パターン 2 とパターン 3 の場合，互いに隣接しない辺が 2 本存在するため，補題 5(d) より，$p\{x := xy\} \preceq q_i$ となる．パターン 4 の場合，$p\{x := a_1 a_j\} \preceq q_i$ $(j = 1, 2, 3)$ となる．$p' = p\{x := a_1 y\} = p_1 a_1 y p_2$ とおくと，$p\{x := a_1 a_j\} \preceq q_i$ より，$p'\{y := a_j\} \preceq q_i$ となる．a_j は互いに異なる定数記号であるため，補題[redacted]より，$p' \preceq q_i$ となり，$p\{x := a_1 y\} \preceq q_i$ となる．これは，A_i の定義に矛盾する．よって，$\tilde{G}_i^{(1,\,0)}$ に含まれる辺は 2 本以下となる．したがって，

$\boxed{2\text{-}3}$

$\sigma_A : \{1, 2, \cdots, k\} \to \{1, 2, \cdots, k\}$

$\sigma_B : \{1, 2, \cdots, k-2\} \to \{5, \cdots, k+1, k+2\}$

$A' = \{k+1, k+2\}$

$B' = \{1, 2, 3, 4\}$

$(k \geq 4)$

$r_1 = a_{k+1} a_1$ $\quad$ $r_5 = a_{k+2} a_1$

$r_2 = a_{k+1} a_2$ $\quad$ $r_6 = a_{k+2} a_2$

$r_3 = a_{k+1} a_3$ $\quad$ $r_7 = a_{k+2} a_3$

$r_4 = a_{k+1} a_4$ $\quad$ $r_8 = a_{k+2} a_4$

$1 \leq i(\overset{\forall}{r}) \leq k-2$ のとき

1) $5 \leq \sigma_A(i(\overset{\exists}{r})), \ \sigma_B(i(r)) \leq k$ $\quad$ Lem 6

2-1) $1 \leq \sigma_A(i(\overset{\exists}{r})) \leq 4$ & $\overset{5 \leq}{\sigma_B}(i(r)) \leq k$

2-2) $5 \leq \underset{\leq k}{\sigma_A(i(\overset{\exists}{r}))}$, $k+1 \leq \sigma_B(i(r)) \leq k+2$ $\quad$ Lem 7

3) $1 \leq \sigma_A(i(\overset{\forall}{r})) \leq 4$ &

$k+1 \leq \sigma_B(i(r)) \leq k+2$ $\quad$ σ_B が function であることに反す。

$k-1 \leq i(\overset{\exists}{r}) \leq k$ のとき

a b c d Lem 6

1 a b c a Lem 6

2 a a c d Lem 7

3 a b b d Lem 6

4 a b c c Lem 7

5 a b b a Lem 6

a b a d

a b c b

1) a a c b Lem 7

a c a b

a c c b Lem 6

2) [2] a a b c Lem 7

a c b a Lem 6

a c b c

3) a c b b Lem 7

4) a b a c

[1] a b c a Lem 6

[4] a b c c Lem 7

5) a b c b

6) [3] a b b c Lem 6

a a a a

1) a a a b

2) a a b a

3) a a b b Lem 7 x

4) a b a a

5) a b a b

6) [5] a b b a Lem 6

7) a b b b

	B	A′	B′	A	
	a	b	c	d	Lem 6
1	a	b	c	a	Lem 6
2	a	a	c	d	Lem 7
3	a	b	b	d	Lem 6
4	a	b	c	c	Lem 7
5	a	b	b	a	Lem 6

Lemが成立しないケース

a b a d

Lem8では現われない

a b c b

B	A′	B′	A
a	a	b	b

Cor 2

a a a b

a b a

a b b

2 a b c

a b a a

b a b

b a c

1 a b c a

b c b

4 b c c

5 a b b a

b b b

3 b b c

$Q \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad k$

$\sigma_A(1) \quad \sigma_A(2) \quad \sigma_A(3) \quad \cdots \quad \sigma_A(k)$

$\sigma_B(1) \quad \sigma_B(2) \quad \sigma_B(3) \quad \cdots \quad \sigma_B(k)$

$$\sigma_A : \underbrace{\{1, 2, \cdots, k\}}_{I_Q} \longrightarrow \underbrace{\{0, 1, 2, \cdots, k, k+1, k+2\}}_{I_\Sigma \cup \{0\}}$$

$$\sigma_B : \{1, 2, \cdots, k\} \longrightarrow \{0, 1, 2, \cdots, k, k+1, k+2\}$$

$$\sigma_A, \sigma_B : I_Q \longrightarrow I_\Sigma \cup \{0\}$$

$$A = \sigma_A(I_Q) \setminus \{0\} \qquad A' = I_\Sigma \setminus A$$

$$B = \sigma_B(I_Q) \setminus \{0\} \qquad B' = I_\Sigma \setminus B$$

3) $\#A \leq k-2, \ \#B \leq k-2 \quad |A' \cap B'| = 0$

$l_A = k - \#\sigma_A^{-1}(0) - \#A$ 重複している記号数

$l_B = k - \#\sigma_B^{-1}(0) - \#B$

$k - \#\sigma_A^{-1}(0) \geq \#A$

$\exists i_1, i_2, i_3 \in I_Q ; \sigma_A(i_1) = \sigma_A(i_2) = \sigma_A(i_3)$

$\#\sigma_A^{-1}(0) \leq k - \#A$

$\exists i_1, i_2, i_3, i_4 \in I_Q ; \sigma_A(i_1) = \sigma_A(i_2) \ \& \ \sigma_A(i_3) = \sigma_A(i_4)$

$\#A' \geq 4 \qquad \#B' \geq 4$

$\#A = k - \#\sigma_A^{-1}(0) - l_A \leq k-2$

$\#\sigma_A^{-1}(0) + l_A \geq 2 \qquad (l_A \geq 0)$ …論文では $l_A = 0$ で

$\sigma_A^{-1}(0) = \{i_0, i_1\}$ としている。

同様に $\#\sigma_B^{-1}(0) + l_B \geq 2$

$$I_Q^{(0,0)} = \{ i \in I_Q \mid i \in \sigma_A^{-1}(0) \cap \sigma_B^{-1}(0) \}$$

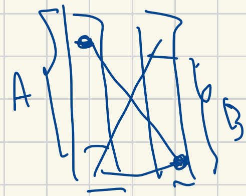
$$I_Q^{(0,1)} = \{ i \in I_Q \mid i \in \sigma_A^{-1}(0) \setminus \sigma_B^{-1}(0) \}$$

$I_Q^{(1,0)}$: $\sigma_B^{-1}(0) \setminus \sigma_A^{-1}(0)$

$I_\alpha^{(0,0)} = \{ i \in I_\alpha \mid i \in \sigma_A^{-1}(0) \cap \sigma_B^{-1}(0) \}$

$I_\alpha^{(0,1)} = \{ i \in I_\alpha \mid i \in \sigma_A^{-1}(0) \setminus \sigma_B^{-1}(0) \}$

$I_\alpha^{(1,0)} = \{ i \in I_\alpha \mid i \in \sigma_B^{-1}(0) \setminus \sigma_A^{-1}(0) \}$



$\# A' \geq 4$, $\# B' \geq 4$

$R = \{ a_\alpha a_\beta \mid \alpha \in A' \text{ and } \beta \in B' \}$

$\sigma_A(i) \in A \cap B$ or $A \setminus B$

$\sigma_B(i) \in A \cap B$ or $B \setminus A$

$\forall a_\alpha a_\beta \in R$ について

$\tilde{i}(\alpha, \beta) = \{ i \in I_\alpha \mid p\{x == a_\alpha a_\beta\} \preceq f_i \}$

if $\exists \alpha \in A'$, $\exists \beta \in B'$, and

$\exists i \in \tilde{i}(\alpha, \beta)$ s.t. $\sigma_A(i) \in A$ and $\sigma_B(i) \in B$

i.e. $p\{x == a_{\sigma_A(i)} y\} \preceq f_i$

and $p\{x == y\, a_{\sigma_B(i)}\} \preceq f_i$

このとき $p\{x == xy\} \preceq f_i$ となる。

$\sigma_A(i) \in B$ and $\sigma_B(i) \in A$ ならば

$\forall i \in \tilde{i}(\alpha, \beta) \Longrightarrow \sigma_A(i) = 0$ or $\sigma_B(i) = 0$

$\# \sigma_A^{-1}(0) = k - \# A - l_A$

$\# \sigma_B^{-1}(0) = k - \# B - l_B$

$\# A' = k + 2 - \# A$ より $\# A = k + 2 - \# A'$

$\# \sigma_A^{-1}(0) = k - (k + 2 - \# A') - l_A$

$= \# A' - l_A - 2 \leq \# A' - 2$

$\# \sigma_B^{-1}(0) \leq \# B' - 2$

$$I_a^{(0,0)} = \{ i \in I_a \mid i \in \sigma_A^{-1}(0) \cap \sigma_B^{-1}(0) \}$$
$$I_a^{(0,1)} = \{ i \in I_a \mid i \in \sigma_A^{-1}(0) \setminus \sigma_B^{-1}(0) \}$$
$$I_a^{(1,0)} = \{ i \in I_a \mid i \in \sigma_B^{-1}(0) \setminus \sigma_A^{-1}(0) \}$$

$$\begin{aligned} \#\sigma_A^{-1}(0) &= k - (k+2-\#A') - l_A \\ &= \#A' - l_A - 2 \leq \#A' - 2 \end{aligned}$$

$l_A = l_B = 0$ のとき

$$\#\sigma_B^{-1}(0) \leq \#B' - 2$$

$$\begin{aligned} &4\#I_a^{(0,0)} + 2\#I_a^{(0,1)} + 2\#I_a^{(1,0)} \\ &= 2(\#I_a^{(0,0)} + \#I_a^{(0,1)}) + 2(\#I_a^{(0,0)} + \#I_a^{(1,0)}) \\ &= 2\#\sigma_A^{-1}(0) + 2\#\sigma_B^{-1}(0) \\ &\leq 2(\#A' + \#B') - 8 < \#A' \times \#B' \end{aligned}$$

$$\because) \quad \#A' \times \#B' - 2(\#A' + \#B') + 8$$
$$= (\#A' - 2)(\#B' - 2) + 4 > 0$$

$$I_a^{(1,1)} = \{ i \in I_a \mid \sigma_A(i) \in A \text{ and } \sigma_B(i) \in B \}$$

$\#\sigma_A^{-1}(0) = k - \#A - \ell_A$
$\#\sigma_B^{-1}(0) = k - \#B - \ell_B$

ℓ_A と ℓ_B を含めて解析

$$4\#I_\alpha^{(0,0)} + 2\#I_\alpha^{(0,1)} + 2\#I_\alpha^{(1,0)}$$
$$= 2\left(\#I_\alpha^{(0,0)} + \#I_\alpha^{(0,1)}\right) + 2\left(\#I_\alpha^{(0,0)} + \#I_\alpha^{(1,0)}\right)$$
$$= 2\#\sigma_A^{-1}(0) + 2\#\sigma_B^{-1}(0)$$

$\#A' = k + 2 - \#A$ より $\#A = k + 2 - \#A'$

$$\#\sigma_A^{-1}(0) = k - (k + 2 - \#A') - \ell_A$$
$$= \#A' - \ell_A - 2$$
$$\#\sigma_B^{-1}(0) = \#B' - \ell_B - 2$$

$$= 2(\#A' - \ell_A - 2) + 2(\#B' - \ell_B - 2)$$
$$= 2(\#A' + \#B') - 8 - 2(\ell_A + \ell_B)$$

$$\#A' \times \#B' - \left(2(\#A' + \#B') - 8 - 2(\ell_A + \ell_B)\right)$$
$$= \#A' \times \#B' - 2(\#A' + \#B') + 8 + 2(\ell_A + \ell_B)$$
$$= (\#A' - 2)(\#B' - 2) + 2(\ell_A + \ell_B + 2)$$

従って $I_\alpha^{(0,0)}$ に5つ以上 または $I_\alpha^{(0,1)}$, $I_\alpha^{(1,0)}$ に3つ以上の $a_\alpha a_\beta$ を示せれば良い。

$l_A = k - \#\sigma_A^{-1}(0) - \#A$

$l_B = k - \#\sigma_B^{-1}(0) - \#B$

$\#A = \#(\sigma_A(I_a)/\{0\})$

	A	A'
B	$A \cap B$	$B \setminus A$
B'	$A \setminus B$	$\emptyset$

$$\#A + \#A' = k + 2$$

$$\#A + l_A + \#\sigma_A^{-1}(0) = k$$

$$\#A' - l_A - \#\sigma_A^{-1}(0) = 2$$

$$l_A + l_B = 2k - (\#A + \#B) - (\sigma_A^{-1}(0) + \sigma_B^{-1}(0))$$

$$2(\#A' + \#B') - 8 - 2(l_A + l_B)$$

$$\min(\#(A \setminus B) + l_A,\ \#(B \setminus A) + l_B)$$

$$\leq \min(\#B' + l_A,\ \#A' + l_B)$$

$$\leq \frac{\#A' + \#B' + l_A + l_B}{2}$$

$\#A' \geq 3$, $\#B' \geq 3$
$a \in \mathbb{Z}$
$\#A \leq k-1$, $\#B \leq k-1$
$a \in \mathbb{Z}$

$$\#A' \times \#B' - 2(\#A' + \#B') + 8 + 2(l_A + l_B) - \frac{1}{2}(\#A' + \#B' + l_A + l_B)$$

$$= \#A' \times \#B' - \frac{5}{2}(\#A' + \#B') + 8 + \frac{3}{2}(l_A + l_B)$$

$$= \left(\#A' - \frac{5}{2}\right)\left(\#B' - \frac{5}{2}\right) + \frac{7}{4} + \frac{3}{2}(l_A + l_B)$$

//