PAPER

Compactness of Finite Union of Regular Patterns and Regular Patterns without Adjacent Variables

Naoto TAKETA†, ***Nonmember***, **Tomoyuki UCHIDA**†, **Takayoshi SHOUDAI**††, **Satoshi MATSUMOTO**†††, **Yusuke SUZUKI**†, ***and*** **Tetsuhiro MIYAHARA**†, ***Members***

SUMMARY 正規パターンとは，定数記号と変数記号から成る，各変数記号が高々1 回しか出現しない記号列をいう．正規パターン p の変数記号を定数記号列で置き換えることで生成できる定数記号列全体の集合を $L(p)$ で表す．高々k 個の正規パターンの集合全体のクラス $\mathcal{RP}^k$ に属する正規パターン集合 P と Q に対し，任意の正規パターン $p \in P$ に対して，p より汎化された正規パターン q が Q に存在するとき，$P \sqsubseteq Q$ と書く．高々k ($k \geq 2$) 個の正規パターンから成る集合の全体のクラスを $\mathcal{RP}^k$ で表す．1998 年に Sato ら [1] は，各変数記号に対し，長さが高々2 の記号列を代入することで $P \in \mathcal{RP}^k$ から得られる記号列の有限集合 $S_2(P)$ が，$L(P) = \bigcup_{p \in P} L(p)$ の特徴集合であることを示した．次に，定数記号の数が $2k-1$ 以上のとき，$\mathcal{RP}^k$ が包含関係に関してコンパクト性をもつことを示した．これらの結果に対し，本稿では，まず Sato ら [1] の結果を検証し，Sato らが与えた定理の証明の誤りを修正した．さらに，隣接した変数（隣接変数）を持たない正規パターンである非隣接変数正規パターン全体の集合 $\mathcal{RP}_{\mathcal{NAV}}$ を与え，高々k ($k \geq 1$) 個の非隣接変数正規パターンから成る集合の全体のクラス $\mathcal{RP}^k_{\mathcal{NAV}}$ に属する集合 P から得られる $S_2(P)$ が $L(P)$ の特徴集合であることを示した．さらに，定数記号の数が $k+2$ 以上のとき，$\mathcal{RP}^k_{\mathcal{NAV}}$ が包含に関してコンパクト性をもつことを示した．これにより，正規パターン言語のときよりも少ない数の定数記号で，非隣接変数正規パターン言語の有限和に関する効率的な学習アルゴリズムが設計できることを示した．

key words: *Regular Pattern Language, Compactness*

1. Introduction

パターンとは，定数記号と変数記号から成る記号列である．例えば，a, b, c を定数記号，x, y を変数記号とするとき，$axbxcy$ はパターンである．パターンから成る集合の全体を $\mathcal{P}$ で表す．パターン $p \in \mathcal{P}$ に対し，すべての変数記号を空記号列 ε でない定数記号列で置き換えて得られる記号列の集合を，**p により生成されるパターン言語**あるいは単にパターン言語といい，$L(p)$ と書く．なお，同じ変数記号には同じ定数記号列で置き換える．例えば，上記のパターン $axbxcy$ により生成されるパターン言語 $L(axbxcy)$ は $\{aubucw \mid w, u$ は ε でない定数記号列$\}$ を表す．各変数記号が高々1 回しか現れないパターンを**正規パターン**という．例えば，パターン $axbxcy$ は正規パターンではないが，変数記号 x, y, z を持つパターン $axbzcy$ は正規パターンである．正規パターンから成る全体の集合を $\mathcal{RP}$ で表す．パターン $p \in \mathcal{P}$ がパターン $q \in \mathcal{P}$ の変数記号をパターンで置き換えることで得られるとき，q は p の汎化といい，$p \leq q$ と書く．例えば，パターン $q = axz$ はパターン $p = axbxcy$ の汎化である．q の変数記号 z をパターン $bxcy$ で置き換えると p が得られるからである．よって，$p \leq q$ である．パターン $p, q \in \mathcal{P}$ に対して，$p \leq q$ ならば $L(p) \subseteq L(q)$ であることは明らかである．しかし，その逆，つまり $L(p) \subseteq L(q)$ ならば $p \leq q$ は成り立つとは限らない．これに対し，Mukouchi[2] は，定数記号の数が 3 以上の場合，任意の正規パターン $p, q \in \mathcal{RP}$ に対して，$L(p) \subseteq L(q)$ ならば $p \leq q$ も成り立つことを示した．

$\mathcal{RP}^+$ を $\mathcal{RP}$ の空でない有限集合の集合とする．$\mathcal{RP}^k$ を高々k ($k \geq 2$) 個の正規パターンから成る集合の全体のクラスとする．正規パターンの集合 $P \in \mathcal{RP}^k$ に対し，$L(P) = \bigcup_{p \in P} L(p)$ とし，$\mathcal{RP}^k$ に対する正規パターン言語のクラス $\{L(P) \mid P \in \mathcal{RP}^k\}$ を $\mathcal{RPL}^k$ とする．$P, Q \in \mathcal{RP}^k$ とし，$Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ とする．任意の正規パターン $p \in P$ に対し，ある正規パターン q_i が存在し，$p \leq q_i$ が成り立つとき $P \sqsubseteq Q$ と書く．定義より，$P \sqsubseteq Q$ ならば $L(P) \subseteq L(Q)$ であることは明らかである．そこで，Sato ら [1] は，$k \geq 3$ であり定数記号の数が $2k-1$ であるとき，各変数記号に対し長さが高々2 の定数記号列を代入することで $P \in \mathcal{RP}^k$ から得られる定数記号列の有限集合 $S_2(P)$ が $L(P)$ の特徴集合であること，つまり任意の正規パターン言語 $L' \in \mathcal{RPL}^k$ に対して，$S_2(P) \subseteq L'$ ならば $L(P) \subseteq L'$ となることを示し，(i)$S_2(P) \subseteq L(Q)$，(ii) $P \sqsubseteq Q$ および (iii) $L(P) \subseteq L(Q)$ が同値であることを示した．しかし，この結果の根拠となる補題 14[1] に誤りがあるため，本稿では，まずその修正を行い，Sato らが示した 3 つの命題の同値性の正しい証明を与えた．Sato ら [1] は，定数記号の数が $2k-1$ 以上のとき，$\mathcal{RP}^k$ が包含に関してコンパクト性を持つことも示した．これに対し，本稿では，隣接した変数記号（隣接変数）を持たない正規パターンである非隣接変数正規パターン全体の集合 $\mathcal{RP}_{\mathcal{NAV}}$ を与え，高々k ($k \geq 1$) 個の非隣接変数正規パターンの集合全体のクラス $\mathcal{RP}^k_{\mathcal{NAV}}$ に属する集合 P から得られる $S_2(P)$ が $L(P)$ の特徴集合であることを示した．さらに，定数記号の数が $k+2$ 以上のとき，$\mathcal{RP}^k_{\mathcal{NAV}}$ が包含に関してコンパクト性を持つことを示した．表 1 に本稿の結果をまとめて示す．

Table 1 包含に関してコンパクト性を持つための定数記号の数に関する条件

k	2	3 以上
$\mathcal{RP}^k$	4 以上	$2k-1$ 以上
$\mathcal{RP}^k_{\mathcal{NAV}}$	$k+2$ 以上	

Manuscript received January 1, 2015.
Manuscript revised January 1, 2015.
†Graduate School of Information Sciences, Hiroshima City University
††Department of Computer Science and Engineering, Fukuoka Institute of Technology
†††Faculty of Science, Tokai University
DOI: 10.1587/trans.E0.??.1

本稿の結果は，言語の有限和の表現である正規パターンの集合あるいは非隣接変数正規パターンの集合を対象とした効率的な学習アルゴリズムをそれぞれ与えられることを示唆している．

本稿の構成は以下の通りである．第 2 節では，準備としてパターン言語，正規パターン言語，コンパクト性などの定義を与え，さらに $\mathcal{RP}^+$ の特徴集合に関する Sato らの結果を紹介する．第 3 節では，$S_2(P)$ は $\mathcal{RPL}^k$ における $L(P)$ の特徴集合であること，および $\mathcal{RP}^k$ が包含に関するコンパクト性を持つことを示す．第 4 節では，非隣接変数正規パターンを与え，$\mathcal{RP}^k_{\mathcal{NAV}}$ に属する集合 P から得られる $S_2(P)$ が $L(P)$ の特徴集合であること，および $\mathcal{RP}^k_{\mathcal{NAV}}$ が包含に関してコンパクト性をもつことを示す．

2. Preliminaries

Σ を有限アルファベットとし，X を $\Sigma \cap X = \emptyset$ を満たす可算無限集合とする．Σ と X の要素をそれぞれ定数記号と変数記号という．Σ と X の記号から成る記号列を**パターン**という．また，各変数記号が高々1 回しか現れないパターンを**正規パターン**という．パターン p の長さ，つまりその記号列の長さを $|p|$ で表す．すべてのパターンの集合とすべての正規パターンの集合をそれぞれ $\mathcal{P}$ と $\mathcal{RP}$ で表す．便宜上，空記号列 ε もパターンとしていることに注意する．つまり，$\mathcal{P} = (\Sigma \cup X)^*$ であり，$\mathcal{P} \setminus \{\varepsilon\} = (\Sigma \cup X)^+$ である．集合 A の要素数を $\sharp A$ で表す．本稿では，$\sharp\Sigma \geq 2$ と仮定する．$\mathcal{P}$ の要素を $p, q, \ldots, p_1, p_2, \ldots,$ で表す．

与えられたパターンの変数記号に長さ 1 以上のパターンを代入することで，別のパターンを生成することができる．ただし，同じ変数記号には同じパターンを代入し，空記号列 ε は代入しないこととする．パターン $p \in \mathcal{P}$ に対し，p 中の各変数記号 x_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ にそれぞれパターン q_i を代入することを $\theta = \{x_1 := q_1, x_2 := q_2, \ldots, x_k := q_k\}$ で表すこととし，このような代入の操作を p に施した結果のパターンを $p\theta$ で表す．便宜上，θ を代入と呼ぶ．q が p の汎化，あるいは p が q の例化であるとは，$p = q\theta$ を満たす代入 θ が存在するときをいい，$\boldsymbol{p \preceq q}$ で表す．また，$p \preceq q$ かつ $q \preceq p$ であるとき，p と q は等価であるといい，$\boldsymbol{p \equiv q}$ で表す．

パターン p に対し，p が表す言語 (Σ^* の部分集合) を，p に代入を施すことにより生成できる定数記号列の集合 $L(p)$，つまり，$L(p) = \{w \in \Sigma^+ \mid w \preceq p\}$ と定義する．ここで，$p \equiv q$ ならば $L(p) = L(q)$ であることに注意する．パターンおよび正規パターンによって生成される言語をそれぞれパターン言語および正規パターン言語という．また，すべてのパターン言語の集合および正規パターン言語の集合をそれぞれ $\mathcal{PL}$ および $\mathcal{RPL}$ で表す．正規パターンについては，次の補題が成り立つ．

Lemma 1 (Mukouchi[2]): 任意の正規パターン $p, q \in \mathcal{RP}$ に対して，$p \preceq q$ ならばその時に限り $L(p) \subseteq L(q)$ である．

$\mathcal{P}$ の空でない有限部分集合の集合を $\mathcal{P}^+$ で，高々k $(k \geq 1)$ 個のパターンから成る $\mathcal{P}$ の部分集合 $\{P \in \mathcal{P}^+ \mid \sharp P \leq k\}$ を $\mathcal{P}^k$ で表す．また，高々k $(k \geq 1)$ 個のパターン集合 $P \in \mathcal{P}^k$ に対して，P が表すパターン言語 $\bigcup_{p \in P} L(p)$ を $L(P)$ で，$\mathcal{P}^k$ に属するパターン集合が表すパターン言語のクラス $\{L(P) \mid P \in \mathcal{P}^k\}$ を $\mathcal{PL}^k$ で表す．同様に，$\mathcal{RP}$ の空でない有限部分集合の集合を $\mathcal{RP}^+$ で，高々k $(k \geq 1)$ 個のパターンから成る $\mathcal{RP}$ の部分集合 $\{P \in \mathcal{RP}^+ \mid \sharp P \leq k\}$ を $\mathcal{RP}^k$，$\mathcal{RP}^k$ に属するパターン集合が表すパターン言語のクラス $\{L(P) \mid P \in \mathcal{RP}^k\}$ を $\mathcal{RPL}^k$ で表す．P, Q を $\mathcal{P}^+$ に属するパターン集合とする．このとき，任意のパターン $p \in P$ に対して，あるパターン $q \in Q$ が存在し，$p \preceq q$ が成り立つとき $P \sqsubseteq Q$ と書く．全ての $p \in P$ に対して,$p \preceq q$ を満たす $q \in Q$ が存在するとき,二項関係 $P \sqsubseteq Q$ が成り立つ．このとき，$P \sqsubseteq Q$ ならば $L(P) \subseteq L(Q)$ である．なお，一般にこの逆は成り立たないことに注意する．

$\mathcal{RP}^k$ について，任意のパターン $p \in \mathcal{RP}^+$ に対し，ある特定の有限部分集合 $S \subseteq L(p)$ が存在して，$S \subseteq L(Q)$ ならば，ある $q \in Q$ に対して $L(p) \subseteq L(q)$ となることが知られている [2]．また，$S \subseteq L(Q)$ ならば $L(p) \subseteq L(Q)$ である．これにより，S は次の定義される $L(p)$ の特徴集合であることがわかる．

Definition 1: $\mathcal{L}$ を言語クラスとする．L を $\mathcal{L}$ に属する言語とする．空でない有限部分集合 $S \subseteq \Sigma^+$ は $\mathcal{L}$ における L の**特徴集合**であるとは，任意の $L' \in \mathcal{L}$ に対して $S \subseteq L'$ ならば $L \subseteq L'$ となるときをいう．

m $(m \geq 0)$ 個の変数記号 $x_1, \ldots, x_m$ を含む正規パターン p と n $(n \geq 1)$ に対して，p 中の各変数記号に長さが高々n の Σ^+ の定数記号列を代入して得られるすべての定数記号列の集合を $S_n(p)$ で表す．さらに，正規パターンの空でない有限集合 P に対して，$S_n(P) = \bigcup_{p \in P} S_n(p)$ とする．このとき，任意の自然数 n $(n \geq 1)$ に対して，$S_n(P) \subseteq S_{n+1}(P) \subseteq L(P)$ である．よって，次の定理が成り立つ．

Theorem 1 (Sato et al.[1]): 任意の $P \in \mathcal{RP}^k$ に対して，$S_n(P)$ がクラス $\mathcal{RPL}^k$ 内の正規パターン言語 $L(P)$ の特徴集合であるような自然数 n $(n \geq 1)$ が存在する．

p_1, p_2, r, q を正規パターンとし，$p_1 r p_2 \preceq q$ が成り立つとする．また，$x_1, \ldots, x_n$ を q に含まれる変数記号とする．このとき，$q = q_1 x_i q_2$ に対して，$p_1 = (q_1\theta)r'$ かつ $p_2 = r''(q_2\theta)$ を満たす変数記号 x_i と代入 $\theta = \{x_1 := r_1, \ldots, x_i := r' r r'', \ldots, x_n := r_n\}$ が存在すれば，$p_1 r p_2$ に含まれる正規パターン r は q の変数記号への代入により生成できる．よって，$p_1 r p_2$ に含まれる正規パターン r が q の変数記号への代入により生成できるとき，$p_1 x p_2 \preceq q$ が成り立つ．

Lemma 2 (Sato et al.[1]): $p = p_1 x p_2$, $q = q_1 q_2 q_3$ を正規パターンとする．以下の (i), (ii), (iii) がすべて成り立つとき，$p \preceq q$ である．

(i) $p_1 \preceq q_1 q_2$, (ii) $p_2 \preceq q_2 q_3$,
(iii) q_2 は変数記号を含む．

Proof. y を q_2 に含まれる変数記号とし，$q_2 = q_2' y q_2''$ とする．$p_1 \preceq q_1 q_2 = q_1(q_2' y q_2'')$ より，$p_1' \preceq q_1 q_2'$ かつ $p_1'' \preceq y q_2''$ となるような p_1', p_1'' を定義すると，$p_1 = p_1' p_1''$ となる．同様に，$p_2 \preceq q_2 q_3 = (q_2' y q_2'') q_3$ より，$p_2' \preceq q_2' y$ かつ $p_2'' \preceq q_2'' q_3$ となるような p_2', p_2'' を定義すると，$p_2 = p_2' p_2''$ となる．このとき，$p = p_1 x p_2 = p_1'(p_1'' x p_2')p_2'' \preceq$

$q_1q'_2(p''_1xp'_2)q''_2q_3 = q\theta \preceq q$ となる．

ある $a \in \Sigma$ に対して，$p\{x := a\} \preceq q$ のとき，$p_1xp_2 \npreceq q$ ならば，p_1ap_2 の定数記号 a は，q の変数記号への代入によって生成することはできない．すなわち，$p_1 \preceq q_1$ かつ $p_2 \preceq q_2$ を満たす $q = q_1aq_2$ が存在する．これにより，次の補題が得られる．

Lemma 3 (Sato et al.[1]): $\sharp\Sigma \geq 3$, $p = p_1xp_2$, q を正規パターン，a, b, c を Σ に属する相異なる定数記号とする．このとき，$p_1ap_2 \preceq q$, $p_1bp_2 \preceq q$ かつ $p_1cp_2 \preceq q$ が成り立つならば，$p \preceq q$ が成り立つ．

Proof. $p \npreceq q$ と仮定する．このとき，p_1ap_2 の a, p_1bp_2 の b, p_1cp_2 の c は q の変数記号を置き換えることによって生成できない．よって，

(1)	$p_1 \preceq q_1$		(1')	$p_2 \preceq q_2bq_3cq_4$
(2)	$p_1 \preceq q_1aq_2$		(2')	$p_2 \preceq q_3cq_4$
(3)	$p_1 \preceq q_1aq_2bq_3$		(3')	$p_2 \preceq q_4$

$(q_1, q_2, q_3, q_4$ は正規パターン)

を満たす $q = q_1aq_2bq_3cq_4$ が存在する．(2) と (1') より，q_2 に変数記号が含まれる場合，補題 2 より，$p \preceq q$ となる．これは仮定に矛盾する．よって，q_2 は定数記号列である．同様に，(3) と (2') より，q_3 は定数記号列である．したがって，$w = q_2, w' = q_3$ (w, w' は定数記号列) とおく．

$|w| = |w'|$ のとき，(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は $awbw'$ かつ aw である．$|w| = |w'|$ より，$bw' = aw$ である．これは，$b = a$ となり，a, b が互いに異なる定数記号であることに矛盾する．

$|w| < |w'|$ のとき，(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は $awbw'$ かつ aw である．$w' = w_1w$ とおくと，$awbw' = awbw_1w$ となる．このとき，w_1 の最後の記号は a となる．(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は $wbw'c$ かつ $w'c$ である．$w' = w_1w$ とおくと，$wbw'c = wbw_1wc$ となり，$w' = ww_2$ とおくと，$w'c = ww_2c$ となる．$|wbw_1| = |ww_2c|$ より，w_1 の最後の記号は c となる．よって，w_1 の接尾辞は $a = c$ となる．これは，a, c が互いに異なる定数記号であることに矛盾する．

$|w| > |w'|$ のとき，(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は $wbw'c$ かつ $w'c$ である．$w = w'w_1$ とおくと，$wbw'c = w'w_1bw'c$ となる．このとき，w_1 の最初の記号は c となる．(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は $awbw'$ と aw である．$w = w'w_1$ とおくと，$awbw' = aw'w_1bw'$ となり，$w = w_2w'$ とおくと，$aw = aw_2w'$ となる．$|w_1bw'| = |aw_2w'|$ より，w_1 の最初の記号は a となる．よって，$a = c$ となる．これは，a, c が互いに異なる定数記号であることに矛盾する．

次の補題 4 は，相異なる定数記号 a, b に対して，$p\{x := a\} \preceq q$ かつ $p\{x := b\} \preceq q$ ならば $p \npreceq q$ となる正規パターン p, q が存在することを示している．

Lemma 4 (Sato et al.[1]): $\sharp\Sigma \geq 3$ とする．a, b を相異なる定数記号とする．次の条件 (i), (ii), (iii) を満たす正規パターン $p = p_1AwxwBp_2$ と $q = q_1AwBq_2$ に対して，$p\{x := a\} \preceq q$ かつ $p\{x := b\} \preceq q$ ならば $p \npreceq q$ である．ここで，p_1, p_2, q_1, q_2 は正規パターン，w は定数記号列である．

(i) $p_1 \preceq q_1$, (ii) $p_2 \preceq q_2$,
(iii) $A = a, B = b$ または $A = b, B = a$.

補題 3 より，次の定理が成り立つ．

Theorem 2 (Sato et al.[1]): $\sharp\Sigma \geq 2k + 1$ とし，$P \in \mathcal{RP}^+$, $Q \in \mathcal{RP}^k$ とする．このとき，次の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i) $S_1(P) \subseteq L(Q)$, (ii) $P \sqsubseteq Q$, (iii) $L(P) \subseteq L(Q)$.

次の例は，$\sharp\Sigma = 2k$ における定理 2 の反例である．

Example 1: $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k\}$ を $2k$ 個の定数記号から成る集合，p を正規パターン，$Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ とする．$w_1, \ldots, w_k$ を $w_i = w_{i+1}b_{i+1}a_{i+1}w_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1), w_k = \varepsilon$ のように定義する．

$$p = x_1a_1w_1xw_1b_1x_2, q_i = x_1a_iw_ib_ix_2.$$

$p\{x := a_i\} \preceq q_i$ かつ $p\{x := b_i\} \preceq q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ である場合を考える．$i = 1$ のとき，$p\{x := a_1\} = (x_1a_1w_1)a_1(w_1b_1x_2) = q_1\{x_1 := x_1a_1w_1\} \preceq q_1$ かつ $p\{x := b_1\} = q_1\{x_2 := w_1b_1x_2\} \preceq q_1$ となる．$i \geq 2$ のとき，w_i の定義より，ある記号列 $w^{(i)}, w'^{(i)}$ に対して，$w_1 = (w_ib_i)w^{(i)} = w'^{(i)}(a_iw_i)$ となる．したがって，任意の i $(i \geq 2)$ に対して，

$$\begin{aligned}
p\{x := a_i\} &= (x_1a_1w_1)a_i(w_1b_1x_2)\\
&= (x_1a_1w_1)a_i(w_ib_iw^{(i)})b_1x_2\\
&= (x_1a_1w_1)(a_iw_ib_i)(w^{(i)}b_1x_2)\\
&= q_i\{x_1 := x_1a_1w_1, x_2 := w^{(i)}b_1x_2\}\\
&\preceq q_i,\\
p\{x := b_i\} &= (x_1a_1w_1)b_i(w_1b_1x_2)\\
&= x_1a_1(w'^{(i)}a_iw_i)b_i(w_1b_1x_2)\\
&= (x_1a_1w'^{(i)})a_iw_ib_i(w_1b_1x_2)\\
&= q_i\{x_1 := x_1a_1w'^{(i)}, x_2 := w_1b_1x_2\}\\
&\preceq q_i.
\end{aligned}$$

したがって，$S_1(p) \subseteq L(Q)$ である．一方で，$p \npreceq q_i$ であるため，$L(p) \nsubseteq L(q_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ である．

定理 2 より，次の系が得られる．

Corollary 1 (Sato et al.[1]): $\sharp\Sigma \geq 3$ とし，p, q を正規パターンとする．このとき，次の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i) $S_1(p) \subseteq L(q)$, (ii) $p \preceq q$, (iii) $L(p) \subseteq L(q)$,

3. 正規パターン集合のコンパクト性

この節では，コンパクト性の定義を与え，$\sharp\Sigma \geq 2k - 1$ と仮定したとき，$S_2(P)$ は $\mathcal{RPL}^k$ における $L(P)$ の特徴集合であることを示し，$\mathcal{RP}^k$ が包含に関してコンパクト性を持つことを示す．

Definition 2: クラス $C \subseteq \mathcal{RP}^+$ が**包含に関してコンパクト性を持つ**とは，任意のパターン $p \in \mathcal{RP}$ と任意のパターン集合 $Q \in C$ に対して，$L(p) \subseteq L(Q)$ ならば，ある

$q \in Q$ が存在して $L(p) \subseteq L(q)$ であるときをいう．

同様にして，クラス $C \in \mathcal{P}^+$ が包含に関してコンパクト性を持つことが定義できる．また，クラス $C \in \mathcal{RP}^+$ が包含に関してコンパクト性を持つとき，補題 1 より，任意の $P, Q \in C$ に対して，$P \sqsubseteq Q$ ならばその時に限り $L(P) \subseteq L(Q)$ であることが示せる．

Lemma 5 (Sato et al.[1]): $\sharp\Sigma \geq 3$ とし，p, q を正規パターンとする．正規パターンの有限集合 D が，次の (i), (ii) のいずれかで表されるとき，任意の $r \in D$ に対して $p\{x := r\} \preceq q$ ならば，$p\{x := xy\} \preceq q$ である．ただし，$a \neq b$ とする．

(i) $\{ay, by\}$，(ii) $\{ya, yb\}$.

Proof. p に変数記号が含まれない場合は自明である．したがって，正規パターン p には変数記号が現れるとし，その変数記号を x とする．このとき，正規パターン p_1, p_2 が存在し，$p = p_1 x p_2$ と表すことができる．$p\{x := xy\} \npreceq q$ と仮定して，矛盾を導く．

(i) $D = \{ay, by\}$ $(a \neq b)$ であるとする．$p\{x := xy\} \npreceq q$ のとき，$p_1 ay p_2 \preceq q$ かつ $p_1 by p_2 \preceq q$ であることから，正規パターン q_1, q_2 と変数記号 y_1, y_2，さらに定数記号列 w が存在して，$q = q_1 a y_1 w b y_2 q_2$ または $q = q_1 b y_1 w a y_2 q_2$ と表すことができる．$q = q_1 a y_1 w b y_2 q_2$ と表されるとき，次の (1), (2), (1'), (2') がすべて成り立つ．

(1)	$p_1 \preceq q_1$	(1')	$p_2 \preceq w b y_2 q_2$ または $p_2 \preceq y' w b y_2 q_2$
(2)	$p_1 \preceq q_1 a y_1 w$	(2')	$p_2 \preceq q_2$ または $p_2 \preceq y'' q_2$

(2) より，正規パターン p_1', p_1'' が存在して，$p_1 = p_1' p_1''$，$p_1' \preceq q_1 a$ かつ $p_1'' \preceq y_1 w$ が成り立つ．したがって，$p = p_1 x p_2 = p_1' p_1'' x p_2$ であるから，(1') が $p_2 \preceq w b y_2 q_2$ のとき，$p \preceq q_1 a p_1'' x w b y_2 q_2 = q\{y_1 := p_1'' x\}$ となる．また，(1') が $p_2 \preceq y' w b y_2 q_2$ のとき，$p \preceq q_1 a p_1'' x y' w b y_2 q_2 = q\{y_1 := p_1'' x y'\}$ となる．よって，$p \preceq q$ が成り立ち，仮定 $p\{x := xy\} \npreceq q$ に矛盾する．

(ii) $D = \{ya, yb\}$ $(a \neq b)$ のときは，記号列 p と q を逆順にすることにより，**(i)** の場合と同様に，仮定 $p\{x := xy\} \npreceq q$ に矛盾することを証明できる．

Lemma 6: $\sharp\Sigma \geq 4$ とし，p, q を正規パターンとする．正規パターンの有限集合 $D = \{a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4\}$ ($i \neq j$ に対して，$a_i \neq a_j$ かつ $b_i \neq b_j$) で表されるとき，任意の $r \in D$ に対して $p\{x := r\} \preceq q$ ならば，$p\{x := xy\} \preceq q$ である．

Proof. p に変数記号が含まれない場合は自明である．したがって，正規パターン p には変数記号が現れるとし，その変数記号を x とする．このとき，正規パターン p_1, p_2 が存在し，$p = p_1 x p_2$ と表すことができる．$p\{x := xy\} \npreceq q$ と仮定して，矛盾を導く．

$D = \{a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4\}$ ($i \neq j$ に対して，$a_i \neq a_j$ かつ $b_i \neq b_j$) であるとする．任意の $r \in D$ に対して $p\{x := r\} \preceq q$ であることから，正規パターン q には，$a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4$ に対応する長さ 2 の記号列が存在する．その 4 つの記号列は一部を重複して現れることが

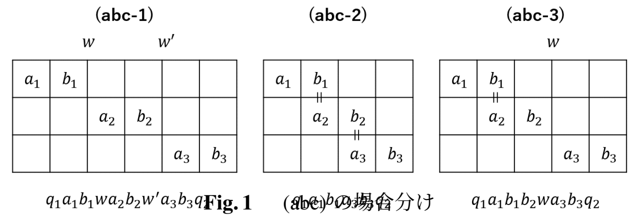

Fig. 1 (abc) の場合分け

あることに注意する．D の 4 つの記号列に対応する q の記号列の現れ方には次の 15 通り存在する．

(a) $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4$	(i) $a_1b_1, y_1b_2, a_3y_2, a_4y_3$
(b) $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4y_1$	(j) $a_1b_1, a_2y_1, a_3y_2, a_4y_3$
(c) $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, y_1b_4$	(k) $y_1b_1, y_2b_2, y_3b_3, y_4b_4$
(d) $a_1b_1, a_2b_2, a_3y_1, y_2b_4$	(l) $y_1b_1, y_2b_2, y_3b_3, a_4y_4$
(e) $a_1b_1, a_2b_2, y_1b_3, y_2b_4$	(m) $y_1b_1, y_2b_2, a_3y_3, a_4y_4$
(f) $a_1b_1, a_2b_2, a_3y_1, a_4y_2$	(n) $y_1b_1, a_2y_2, a_3y_3, a_4y_4$
(g) $a_1b_1, y_1b_2, y_2b_3, y_3b_4$	(o) $a_1y_1, a_2y_2, a_3y_3, a_4y_4$
(h) $a_1b_1, y_1b_2, y_2b_3, a_4y_3$	(y_1, y_2, y_3, y_4 は変数記号)

上記 **(e)–(o)** の 11 通りの記号列を含む正規パターン q は，補題 5(i) または (ii) に対応する記号列が現れる．その場合の証明より仮定 $p\{x := xy\} \npreceq q$ に矛盾する．したがって，(a)–(d) の 4 通りついて矛盾を導く．

(a), (b), (c) は，q に $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4$ が現れる場合，(d) は，q に $a_1b_1, a_2b_2, a_3y_1, y_2b_4$ が現れる場合において，矛盾を導く証明が考えられる．しかし，(a), (b), (c) は，q に a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 が現れる場合，(d) は，q に a_1b_1, a_2b_2, a_3y_1 が現れる場合と q に a_1b_1, a_2b_2, y_2b_4 が現れる場合において，矛盾を導くことで，証明できる．よって，本論文では，q に a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 が現れる場合と q に a_1b_1, a_2b_2, a_3y $(y = y_1)$ が現れる場合を証明する．q に a_1b_1, a_2b_2, y_2b_4 が現れる場合は，記号列 p と q を逆順にすることにより，q に a_1b_1, a_2b_2, a_3y が現れる場合の証明から導かれる．

(abc) q に a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 が現れる場合，

図 1 のように，3 つの記号列が重複する場合があるので，次の 3 つの場合に分けて証明する．

(abc-1) $q = q_1a_1b_1wa_2b_2w'a_3b_3q_2$,
(abc-2) $q = q_1a_1b_1a_3b_3q_2$ ($b_1 = a_2$ かつ $a_3 = b_2$),
(abc-3) $q = q_1a_1b_1b_2wa_3b_3q_2$ ($b_1 = a_2$).

(abc-1) $q = q_1a_1b_1wa_2b_2w'a_3b_3q_2$ とする．これに対して，次の式が成り立っているものとする．

(1) $p_1 \preceq q_1$	(1') $p_2 \preceq wa_2b_2w'a_3b_3q_2$
(2) $p_1 \preceq q_1a_1b_1w$	(2') $p_2 \preceq w'a_3b_3q_2$
(3) $p_1 \preceq q_1a_1b_1wa_2b_2w'$	(3') $p_2 \preceq q_2$

$|w| = |w'|$ のとき，(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は $a_1b_1wa_2b_2w'$ かつ a_1b_1w であるので，$a_1b_1w = a_2b_2w'$ となる．よって，$a_1b_1 = a_2b_2$ となり，$a_1 \neq a_2$ かつ $b_1 \neq b_2$ であることに矛盾する．

$|w| + 1 = |w'|$ のとき，(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は $wa_2b_2w'a_3b_3$ かつ $w'a_3b_3$ である．$w' = ww_1$ とおくと，$w'a_3b_3 = ww_1a_3b_3$ となる．したがって，$wa_2b_2 =$

ww_1a_3 より $b_2 = a_3$ となる．(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は $a_1b_1wa_2b_2w', a_1b_1w$ である．$w' = w_2w$ とおくと，$a_1b_1wa_2b_2w' = a_1b_1wa_2b_2w_2w$ となる．したがって，$b_2w_2w = a_1b_1w$ より，$b_2 = a_1$ となる．$b_2 = a_3$ より，$a_3 = a_1$ となり，$a_3 \neq a_1$ であることに矛盾する．

$|w| + 1 < |w'|$ のとき，(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は $a_1b_1wa_2b_2w'$ かつ a_1b_1w である．$w' = w_1w$ とおくと，$a_1b_1wa_2b_2w' = a_1b_1wa_2b_2w_1w$ となる．$|w_1| \geq 2$ であるため，w_1 の接尾辞は a_2b_2 となる．(1′) と (2′) より，p_2 の接頭辞は $wa_2b_2w'a_3b_3$ かつ $w'a_3b_3$ である．$w' = ww_2$ とおくと，$w'a_3b_3 = ww_2a_3b_3$ となり，$w' = w_1w$ とおくと，$wa_2b_2w'a_3b_3 = wa_2b_2w_1wa_3b_3$ となる．$|ww_2a_3b_3| = |wa_2b_2w_1|$ より，w_1 の接尾辞は a_3b_3 となる．よって，w_1 の接尾辞は $a_2b_2 = a_3b_3$ となり，$a_2 \neq a_3$ かつ $b_2 \neq b_3$ であることに矛盾する．

(abc-2) $q = q_1a_1b_1a_3b_3q_2$ ($b_1 = a_2$ かつ $a_3 = b_2$) とする．これに対して，次の式が成り立っているものとする．

(1) $p_1 \leq q_1$　　(1') $p_2 \leq a_3b_3q_2$
(2) $p_1 \leq q_1a_1$　　(2') $p_2 \leq b_3q_2$
(3) $p_1 \leq q_1a_1b_1$　　(3') $p_2 \leq q_2$

(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は a_1b_1 かつ a_1 であり，$b_1 = a_1$ となる．$b_1 = a_2$ より，$a_1 = a_2$ であるため，$a_1 \neq a_2$ であることに矛盾する．

(abc-3) $q = q_1a_1b_1b_2wa_3b_3q_2$ ($b_1 = a_2$) とする．これに対して，次の式が成り立っているものとする．

(1) $p_1 \leq q_1$　　(1') $p_2 \leq b_2wa_3b_3q_2$
(2) $p_1 \leq q_1a_1$　　(2') $p_2 \leq wa_3b_3q_2$
(3) $p_1 \leq q_1a_1b_1b_2w$　　(3') $p_2 \leq q_2$

$w = \varepsilon$ のとき，(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は a_1 かつ $a_1b_1b_2$ であり，(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は $b_2a_3b_3$ かつ a_3b_3 である．$b_2 = a_1$ と $b_2a_3 = a_3b_3$ より，$a_1 = a_3$ となり，$a_1 \neq a_3$ であることに矛盾する．

$|w| \geq 1$ のとき，(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は a_1 かつ $a_1b_1b_2w$ である．よって，w の最後の記号は a_1 となる．(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は $b_2wa_3b_3$ かつ wa_3b_3 となる．よって，w の最後の記号は a_3 となる．したがって，w の最後の記号は $a_1 = a_3$ となり，$a_1 \neq a_3$ であることに矛盾する．

(d) q に a_1b_1, a_2b_2, a_3y が現れる場合，記号列 A, B, C に対して，$\{A, B, C\} = \{a_1b_1, a_2b_2, a_3y\}$ とおき，$q = q_1AwBw'Cq_2$ とする．これに対して，次の式が成り立っているものとする．

(1) $p_1 \leq q_1$　　(1') $p_2 \leq wBw'Cq_2$
(2) $p_1 \leq q_1Aw$　　(2') $p_2 \leq w'Cq_2$
(3) $p_1 \leq q_1AwBw'$　　(3') $p_2 \leq q_2$

$|w| = |w'|$ のとき，(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は Aw かつ $AwBw'$ である．よって，$Aw = Bw'$ となり，$A \neq B$ であることに矛盾する．

$|w| \neq |w'|$ とする．$A = a_3y$ とすると，$B = a_1b_1$，

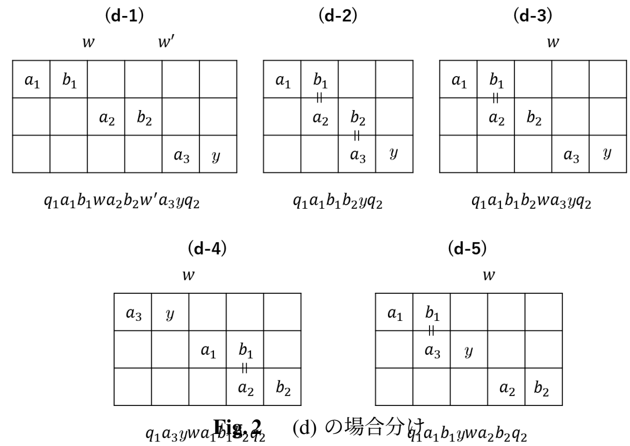

Fig. 2　(d) の場合分け

$C = a_2b_2$ としてよいので，(2) は $p_1 \leq q_1a_3yw$ となる．したがって，正規パターン p'_1, p''_1 が存在して，$p_1 = p'_1p''_1$，$p'_1 \leq q_1a_3$ かつ $p''_1 \leq yw$ となる．これらと (1') より，$p = p_1xp_2 = p'_1p''_1xp_2 \leq q_1a_3p''_1xwa_1b_1w'a_2b_2q_2 = q\{y := p''_1x\}$ となり，$p = q\theta$ となる．これは仮定に矛盾する．$B = a_3y$ とすると，$A = a_1b_1$，$C = a_2b_2$ としてよいので，(3) は $p_1 \leq q_1a_1b_1wa_3yw'$ となり，(1') は $p_2 \leq wa_3yw'a_2b_2q_2$ である．$q'_1 = q_1a_1b_1$，$q'_2 = wa_3yw'$，$q'_3 = a_2b_2q_2$ とおくと，(3) $p_1 \leq q'_1q'_2$，(1′) $p_2 \leq q'_2q'_3$，q'_2 は変数記号が含まれる．補題 2 より，$p \leq q$ となり，$p\{x := xy\} \leq q$ である．これは仮定に矛盾する．

以上より，A または B が a_3y の場合，仮定に矛盾するため，$C = a_3y$ となる．

$C = a_3y$ のとき，3 つの記号列が重複する場合を考慮して，表 2 のように，5 つの場合に分けて証明する．

(d-1) $q = q_1a_1b_1wa_2b_2w'a_3yq_2$,
(d-2) $q = q_1a_1b_1b_2yq_2$ ($a_2 = b_1$ かつ $a_3 = b_2$),
(d-3) $q = q_1a_1b_1b_2wa_3yq_2$ ($b_1 = a_2$),
(d-4) $q = q_1a_3ywa_1b_1b_2q_2$ ($b_1 = a_2$),
(d-5) $q = q_1a_1b_1ywa_2b_2q_2$ ($b_1 = a_3$).

(d-1) $q = q_1a_1b_1wa_2b_2w'a_3yq_2$ とする．これに対して，次の式が成り立っているものとする．

(1) $p_1 \leq q_1$　　(1') $p_2 \leq wa_2b_2w'a_3yq_2$
(2) $p_1 \leq q_1a_1b_1w$　　(2') $p_2 \leq w'a_3yq_2$
(3) $p_1 \leq q_1a_1b_1wa_2b_2w'$　　(3') $p_2 \leq q_2$

$|w| + 1 = |w'|$ のとき，(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は $a_1b_1wa_2b_2w'$ かつ a_1b_1w である．$w' = w_1w$ とおくと，$a_1b_1wa_2b_2w' = a_1b_1wa_2b_2w_1w$ と表すことができる．$b_2w_1w = a_1b_1w$ より，$b_2 = a_1$ となる．(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は $wa_2b_2w'a_3$ かつ $w'a_3$ である．$w' = ww_2$ とおくと，$w'a_3 = ww_2a_3$ と表すことができる．$wa_2b_2 = ww_2a_3$ より，$b_2 = a_3$ となる．よって，$b_2 = a_1$ より，$a_1 = a_3$ となり，$a_1 \neq a_3$ であることに矛盾する．

$|w| + 1 < |w'|$ のとき，(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は $a_1b_1wa_2b_2w'$ かつ a_1b_1w である．$w' = w_1w$ とおくと，$a_1b_1wa_2b_2w' = a_1b_1wa_2b_2w_1w$ と表すことができる．よって，w_1 の接尾辞は a_1b_1 となる．(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は $wa_2b_2w'a_3$ かつ $w'a_3$ である．$w' = w_1w$

とおくと，$wa_2b_2w'a_3 = wa_2b_2w_1wa_3$ となる．さらに，$w' = ww_2$ とおくと，$w'a_3 = ww_2a_3$ と表すことができる．$|a_2b_2w_1| = |w_2a_3|+1$ より，w_1 の最後から 2 つ目の記号は a_3 となる．よって，w_1 の接尾辞は a_1b_1 であり，$a_1 = a_3$ となる．これは，$a_1 \neq a_3$ であることに矛盾する．

$|w'| + 1 = |w|$ のとき，(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は $wa_2b_2w'a_3$ かつ $w'a_3$ である．$w = w'w_1$ とおくと，$wa_2b_2w'a_3 = w'w_1a_2b_2w'a_3$ と表すことができる．$w'w_1 = w'a_3$ より，$w_1 = a_3$ となる．(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は $a_1b_1wa_2b_2w'$ かつ a_1b_1w である．$w = w'w_1$ とおくと，$a_1b_1wa_2b_2w' = a_1b_1w'w_1a_2b_2w'$ となる．さらに，$w = w_2w'$ とおくと，$a_1b_1w = a_1b_1w_2w'$ と表すことができる．$|w_1a_2b_2w'| = |a_1b_1w_2w'|$ より，$w_1 = a_1$ となる．よって，$w_1 = a_3$ より，$a_1 = a_3$ となり，$a_1 \neq a_3$ であることに矛盾する．

$|w| > |w'| + 1$ のとき，(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は $wa_2b_2w'a_3$ かつ $w'a_3$ である．$w = w'w_1$ とおくと，$wa_2b_2w'a_3 = w'w_1a_2b_2w'a_3$ と表すことができる．このとき，w_1 の最初の記号は a_3 となる．(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は $a_1b_1wa_2b_2w'$ かつ a_1b_1w である．$w = w'w_1$ とおくと，$a_1b_1wa_2b_2w' = a_1b_1w'w_1a_2b_2w'$ となる．さらに，$w = w_2w'$ とおくと，$a_1b_1w = a_1b_1w_2w'$ と表すことができる．$|w_1a_2b_2| = |a_1b_1w_2|$ より，w_1 の接頭辞は a_1b_1 となる．よって，w_1 の接頭辞は a_3 であり，a_1b_1 である．すなわち，$a_3 = a_1$ となる．これは，$a_3 \neq a_1$ であることに矛盾する．

(d-2) $q = q_1a_1b_1b_2yq_2$ ($a_2 = b_1$ かつ $a_3 = b_2$) とする．これに対して，次の式が成り立っているものとする．

(1) $p_1 \preceq q_1$ (1') $p_2 \preceq b_2yq_2$
(2) $p_1 \preceq q_1a_1$ (2') $p_2 \preceq yq_2$
(3) $p_1 \preceq q_1a_1b_1$ (3') $p_2 \preceq q_2$

(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は a_1b_1 かつ a_1 である．よって，$b_1 = a_1$ となる．$a_2 = b_1$ より，$a_1 = a_2$ となり，$a_1 \neq a_2$ であることに矛盾する．

(d-3) $q = q_1a_1b_1b_2wa_3yq_2$ ($b_1 = a_2$) とする．これに対して，次の式が成り立っているものとする．

(1) $p_1 \preceq q_1$ (1') $p_2 \preceq b_2wa_3yq_2$
(2) $p_1 \preceq q_1a_1$ (2') $p_2 \preceq wa_3yq_2$
(3) $p_1 \preceq q_1a_1b_1b_2w$ (3') $p_2 \preceq q_2$

$w = \varepsilon$ のとき，(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は a_1 かつ $a_1b_1b_2$ である．よって，$a_1 = b_2$ となる．(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は b_2a_3 かつ a_3 である．よって，$b_2 = a_3$ となる．したがって，$a_1 = b_2$ より，$a_1 = a_3$ となり，$a_1 \neq a_3$ であることに矛盾する．

$|w| \geq 1$ のとき，(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は a_1 かつ $a_1b_1b_2w$ である．よって，w の最後の記号は a_1 となる．(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は b_2wa_3 かつ wa_3 である．よって，w の最後の記号は a_3 となる．したがって，w の最後の記号は $a_1 = a_3$ となり，$a_1 \neq a_3$ であることに矛盾する．

(d-4) $q = q_1a_3ywa_1b_1b_2q_2$ ($b_1 = a_2$) とする．これに対して，次の式が成り立っているものとする．

(1) $p_1 \preceq q_1$ (1') $p_2 \preceq wa_1b_1b_2q_2$
(2) $p_1 \preceq q_1a_3yw$ (2') $p_2 \preceq b_2q_2$
(3) $p_1 \preceq q_1a_3ywa_1$ (3') $p_2 \preceq q_2$

(3) より，正規パターン p'_1 と p''_1 が存在して，$p_1 = p'_1p''_1$，$p'_1 \preceq q_1a_3$ かつ $p''_1 \preceq ywa_1$ が成り立つ．これらより，$p = p_1xp_2 = p'_1p''_1xp_2 \preceq q_1a_3p''_1xwa_1b_1b_2q_2 = q\{y := p''_1x\}$ となるので，$p \preceq q$ となり，$p\{x := xy\} \preceq q$ である．これは仮定に矛盾する．

(d-5) $q = q_1a_1b_1ywa_2b_2q_2$ ($b_1 = a_3$) とする．これに対して，次の式が成り立っているものとする．

(1) $p_1 \preceq q_1$ (1') $p_2 \preceq ywa_2b_2q_2$
(2) $p_1 \preceq q_1a_1$ (2') $p_2 \preceq wa_2b_2q_2$
(3) $p_1 \preceq q_1a_1b_1yw$ (3') $p_2 \preceq q_2$

$q'_1 = q_1a_1b_1$，$q'_2 = yw$，$q'_3 = a_2b_2q_2$ とおくと，(3) から，$p_1 \preceq q'_1q'_2$，(1') から $p_2 \preceq q'_2q'_3$ が得られ，さらに q'_2 は変数記号が含まれるので，補題 2 より，$p \preceq q$ となり，$p\{x := xy\} \preceq q$ である．これは仮定に矛盾する．

Lemma 7: $\sharp\Sigma \geq 3$ とし，p, q を正規パターンとする．正規パターンの有限集合 $D = \{ya, bc, dy\}$ ($b \neq a, d$ かつ $c \neq a, d$) で表されるとき，任意の $r \in D$ に対して $p\{x := r\} \preceq q$ ならば，$p\{x := xy\} \preceq q$ である．

Proof. p に変数記号が現れない場合は自明である．したがって，$p = p_1xp_2$ (p_1, p_2 は正規パターン，x は変数記号) とおく．$p\{x := xy\} \not\preceq q$ と仮定して，矛盾を導く．

記号列 A, B, C に対して，$\{A, B, C\} = \{y_1a, bc, dy_2\}$ とおき，$q = q_1AwBw'Cq_2$ とする．これに対して，次の式が成り立っているものとする．

(1) $p_1 \preceq q_1$ (1') $p_2 \preceq wBw'Cq_2$
(2) $p_1 \preceq q_1Aw$ (2') $p_2 \preceq w'Cq_2$
(3) $p_1 \preceq q_1AwBw'$ (3') $p_2 \preceq q_2$

$q'_1 = q_1A$, $q'_2 = wBw'$, $q'_3 = Cq_2$ とおくと，(3) と (1') より，$p_1 \preceq q'_1q'_2$, $p_2 \preceq q'_2q'_3$ となる．補題 2 より，q'_2 に変数記号が含まれるとき，$p \preceq q$ となる．よって，$B = y_1a$ または，$B = dy_2$ である場合，仮定に矛盾する．したがって，$B = bc$ である場合のみを考える．

$A = dy_2$ とすると，(2) は $p_1 \preceq q_1dy_2w$ となる．$p_1 = p'_1p''_1, p'_1 \preceq q_1d$ かつ $p''_1 \preceq y_2w$ とおくと，(1') より，$p = p_1xp_2 = p'_1p''_1xp_2 \preceq q_1dp''_1xwbcw'y_1aq_2 = q\{x := p''_1x\}$ となり，$p = q\theta$ となる．これは仮定に矛盾する．したがって，$A = y_1a, B = bc, C = dy_2$ である場合のみ考えればよい．

$q = q_1y_1awbcw'dy_2q_2$ ($b \neq a, d$ かつ $c \neq a, d$) とする．これに対して，次の式が成り立っているものとする．

(1) $p_1 \preceq q_1$ (1') $p_2 \preceq wbcw'dy_2q_2$
(2) $p_1 \preceq q_1y_1aw$ (2') $p_2 \preceq w'dy_2q_2$
(3) $p_1 \preceq q_1y_1awbcw'$ (3') $p_2 \preceq q_2$

$|w| = |w'|$ のとき，(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は $awbcw'$ かつ aw であるので，$cw' = aw$ となる．これは，

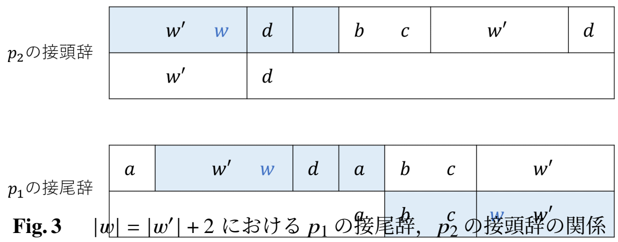

Fig. 3 $|w| = |w'| + 2$ における p_1 の接尾辞，p_2 の接頭辞の関係

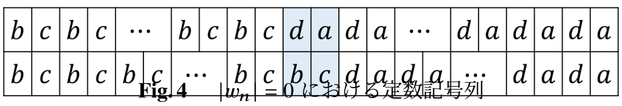

Fig. 4 $|w_n| = 0$ における定数記号列

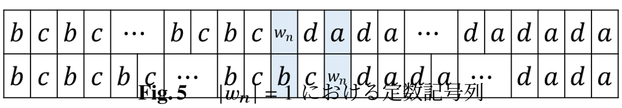

Fig. 5 $|w_n| = 1$ における定数記号列

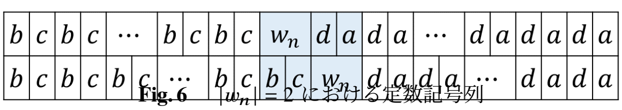

Fig. 6 $|w_n| = 2$ における定数記号列

$c = a$ となり，$c \neq a$ であることに矛盾する．

$|w| = |w'| + 1$ のとき，(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は $awbcw'$ かつ aw である．$w = w_1 w'$ とおくと，$aw = aw_1 w'$ となる．したがって，$bcw' = aw_1 w'$ より，$b = a$ となる．これは $b \neq a$ であることに矛盾する．

$|w| = |w'| + 2$ のとき，(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は $awbcw'$ かつ aw であり，(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は $wbcw'd$ かつ $w'd$ である．

図 3 のように，$w = w'da$, $w = bcw'$ となる．よって，$w'da = bcw'$ となる．

Claim 1: w' を定数記号列，a,b,c,d を定数記号とする．このとき，$w'da \neq bcw'$ $(b \neq a, d$ かつ $c \neq a, d)$ となる．

主張 1 の証明. $w'da = bcw'$ と仮定する．$|w'| \geq 4$ のとき，$w' = bcw_1 da$ (w_1 は定数記号列) とおける．$w'da = bcw_1 dada, bcw' = bcbcw_1 da$ であるので，$bcw_1 dada = bcbcw_1 da$ となる．w' と同様に w_1 を考えると，$w_1 = bcw_2 da$ (w_2 は定数記号列) とおける．w_2 以降も同様に定義できる．ここで，定数記号列の長さを考えていくと，$|w_1| = |w'| - 4, |w_2| = |w_1| - 4$ のように，$|w_{i+1}|$ は $|w_i|$ より長さ 4 ずつ短くなっていく．そのため，定数記号列を繰り返し定義していくと，最終的に定義できる w_n は長さ 0,1,2,3 のいずれかとなる．

$|w_n| = 0$ のとき，図 4 のように，$da = bc$ となる．これは，$b \neq d$ であることに矛盾する．

$|w_n| = 1$ のとき，図 5 のように，$w_n = a = b$ となる．これは，$b \neq a$ であることに矛盾する．

$|w_n| = 2$ のとき，図 6 のように，$w_n = bc = da$ となる．これは，$b \neq d$ であることに矛盾する．

$|w_n| = 3$ のとき，$w_n = w_{n_1} w_{n_2} w_{n_3}$($w_{n_i}$ は w_n におけ

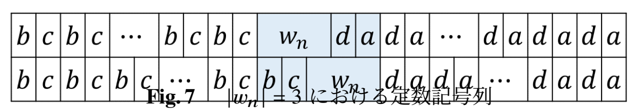

Fig. 7 $|w_n| = 3$ における定数記号列

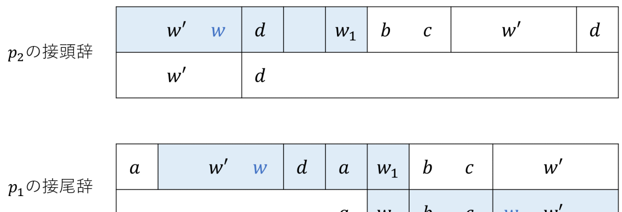

Fig. 8 $|w| \geq |w'|+3$ における p_1 の接尾辞，p_2 の接頭辞の関係

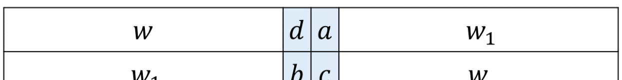

Fig. 9 $|w| = |w_1|$ における定数記号列

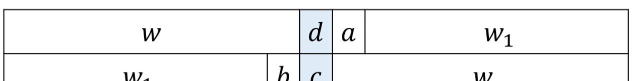

Fig. 10 $|w| = |w_1|+1$ における定数記号列

る i 番目の定数記号) と表すと，図 7 のように，$bcw_{n_3} = w_{n_1}da$ となる．よって，$c = d$ となる．これは，$c \neq d$ であることに矛盾する．

以上より，$|w_n| = 0, 1, 2, 3$ のとき，すべての場合において，仮定に矛盾するため，$|w'| \geq 4$ である場合，$w'da \neq bcw'$ となる．

$|w'| \leq 3$ のとき，$|w_n| = 0, 1, 2, 3$ を $|w'|$ と置き換えて考えることができるため，すべての場合において仮定に矛盾する．よって，$w'da \neq bcw'$ となる．

(主張 1 の Q.E.D)

よって，$w'da = bcw'$ は，主張 1 に矛盾する．

$|w| \geq |w'|+3$ のとき，図 8 のように，$w = w'daw_1 = w_1bcw'$ (w_1 は定数記号列) となる．よって，$w'daw_1 = w_1bcw'$ となる．

Claim 2: w, w_1 を定数記号列，a,b,c,d を定数記号とする．このとき，$wdaw_1 \neq w_1bcw$ ($b \neq a, d$ かつ $c \neq a, d$) となる．

主張 2 の証明. $wdaw_1 = w_1bcw$ と仮定する．w と w_1 の関係を以下のように場合分けして，考えていく．

- **(a)** $|w_1| \leq |w| \leq |w_1|+2$,
- **(b)** $2|w_1| \leq |w| \leq 2|w_1|+4$,
- **(c)** $|w_1| = 0$,
- **(d)** $|w_1|+3 \leq |w| \leq 2|w_1|-1$,
- **(e)** $|w| \geq 2|w_1|+5$.

(a) $|w_1| \leq |w| \leq |w_1|+2$ である場合から考える．

$|w| = |w_1|$ のとき，図 9 のように，$bc = da$ となる．これは，$b \neq d$ であることに矛盾する．

$|w| = |w_1|+1$ のとき，図 10 のように，$c = d$ となる．これは，$c \neq d$ であることに矛盾する．

$|w| = |w_1|+2$ のとき，図 11 のように，$w = w_1bc = daw_1$ となる．これは，主張 1 に矛盾する．

(b) $2|w_1| \leq |w| \leq 2|w_1|+4$ である場合，

$|w| = 2|w_1|$ のとき，図 12 のように，$w_1da = bcw_1$ となる．これは，主張 1 に矛盾する．

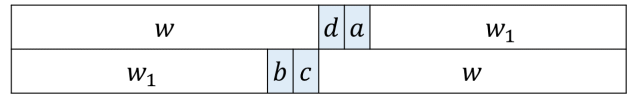

Fig. 11 $|w| = |w_1|+2$ における定数記号列

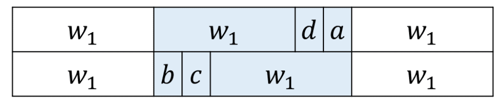

Fig. 12 $|w| = 2|w_1|$ における定数記号列

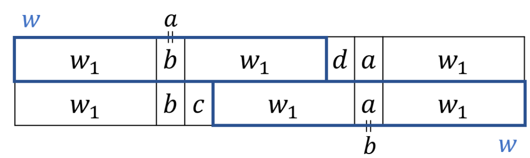

Fig. 13 $|w| = 2|w_1|+1$ における定数記号列

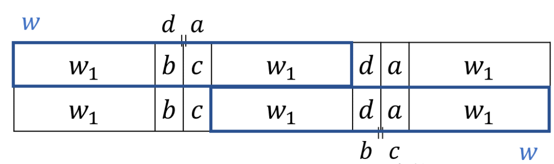

Fig. 14 $|w| = 2|w_1|+2$ における定数記号列

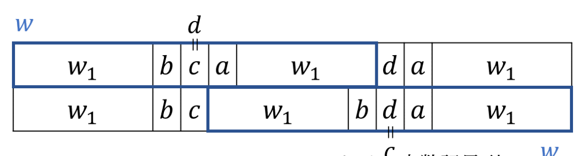

Fig. 15 $|w| = 2|w_1|+3$ における定数記号列

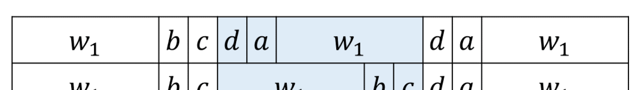

Fig. 16 $|w| = 2|w_1|+4$ における定数記号列

$|w| = 2|w_1|+1$ のとき，図 13 のように，$b = a$ となる．これは，$b \neq a$ であることに矛盾する．

$|w| = 2|w_1|+2$ のとき，図 14 のように，$bc = da$ となる．これは，$b \neq d$ であることに矛盾する．

$|w| = 2|w_1|+3$ のとき，図 15 のように，$c = d$ となる．これは，$c \neq d$ であることに矛盾する．

$|w| = 2|w_1|+4$ のとき，$w = w_1bcdaw_1$ とおける．図 16 のように，$daw_1 = w_1bc$ となる．これは，主張 1 に矛盾する．

(c) $|w_1| = 0$ のとき，$wda \neq bcw$ ($b \neq a, d$ かつ $c \neq a, d$) となる．これは，主張 1 に矛盾する．

上記以外の範囲 **(d)** $|w_1|+3 \leq |w| \leq 2|w_1|-1$ と **(e)** $|w| \geq 2|w_1|+5$ である場合，対象とする定数記号列の長さを減らして考えることができる．

(d) $|w_1|+3 \leq |w| \leq 2|w_1|-1$ のとき，

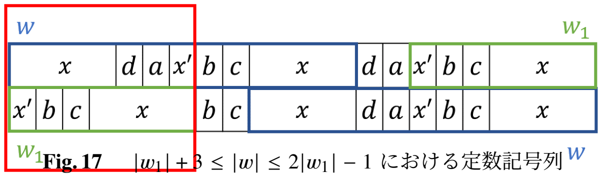

Fig. 17 $|w_1|+3 \le |w| \le 2|w_1|-1$ における定数記号列

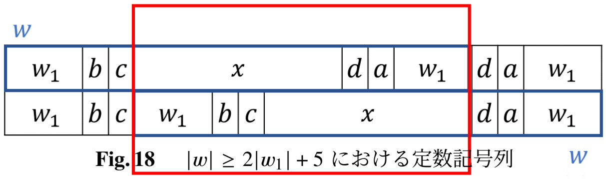

Fig. 18 $|w| \ge 2|w_1|+5$ における定数記号列

図 17 のように，W を w，W' を w_1 と置き換えて考えることができる．よって，赤枠部分以外の定数記号列を無視できるため，対象とする定数記号列の長さを減らすことができる．

(e) $|w| \ge 2|w_1|+5$ のとき，

図 18 のように，W と w を置き換えて考えることができる．よって，赤枠部分以外の定数記号列を無視できるため，対象とする定数記号列の長さを減らすことができる．

したがって，**(d)** $|w_1|+3 \le |w| \le 2|w_1|-1$ と **(e)** $|w| \ge 2|w_1|+5$ の場合，w, w_1 の長さを減らして考えることができる．この結果より，w と w_1 の長さの関係は，最終的に，**(a)** $|w_1| \le |w| \le |w_1|+2$，**(b)** $2|w_1| \le |w| \le 2|w_1|+4$，**(c)** $|w_1| = 0$ のいずれかに当てはまるため，仮定に矛盾する．

(主張 2 の Q.E.D)

よって，$w'daw_1 = w_1bcw'$ は，主張 2 に矛盾する．次に，$|w| < |w'|$ である場合を考える．

$|w'| = |w|+1$ のとき，(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は $wbcw'd$ かつ $w'd$ である．$|wbc| = |w'd|$ より，$c = d$ となる．これは，$c \ne d$ であることに矛盾する．

$|w'| = |w|+2$ のとき，(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は $wbcw'd$ かつ $w'd$ である．$|wbc| = |w'|$ より，w' の最初の記号は d となり，w' の最後の 2 つの記号は bc となる．(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は $awbcw'$ かつ aw であるため，$|w'|-1 = |aw|$ より，w' の最初から 2 つ目の記号は a となる．よって，$w' = wbc = daw$ となる．これは，主張 1 に矛盾する．

$|w'| \ge |w|+3$ のとき，(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は $wbcw'd$ かつ $w'd$ である．$|wbcw_1| = |w'|$ (w_1 は定数記号列) より，w' の接頭辞は w_1d となり，w' の接尾辞は bcw_1 となる．(2) と (3) より，p_1 の接尾辞は $awbcw'$ かつ aw である．$|w'|-|w_1|-1 = |aw|$ より，w' の最初から 2 つ目の記号は a となる．よって，$w' = wbcw_1 = w_1daw$ となる．これは，主張 2 に矛盾する．

Lemma 8: $\sharp\Sigma \ge 3$ とし，p, q を正規パターンとする．正規パターンの有限集合 D が，次の (i), (ii) のいずれかで表されるとき，すべての $r \in D$ に対して $p\{x := r\} \le q$ ならば，$p\{x := xy\} \le q$ である．

(i) $\{ya, bc, dy\}$ $(b = a,\ c \ne a, d,\ b \ne d)$,
(ii) $\{ya, bc, dy\}$ $(b \ne a, d,\ c = d,\ c \ne a)$.

Proof. p に変数記号が現れない場合は自明である．したがって，$p = p_1xp_2$ (p_1, p_2 は正規パターン，x は変数記号) とおく．$p\{x := xy\} \not\le q$ と仮定して，矛盾を導く．

(i) $D = \{ya, bc, dy\}$ $(b = a,\ c \ne a, d,\ b \ne d)$ であるとする．すべての $r \in D$ に対して $p\{x := r\} \le q$ であるから正規パターン q には，ya, bc, dy に対応する 3 つの長さ 2 の記号列が存在する．その 3 つの記号列は一部を重複して現れることがあることに注意する．D の 3 つの記号列に対応する q の記号列の現れ方には次の 3 通り存在する．

(a) y_1a, bc, dy_2,
(b) y_1a, y_2c, dy_3,
(c) y_1a, by_2, dy_3.

(a) 記号列 A, B, C に対して，$\{A, B, C\} = \{y_1a, bc, dy_2\}$ とおき，$q = q_1AwBw'Cq_2$ とする．これに対して，次の式が成り立っているものとする．

(1) $p_1 \le q_1$	(1′) $p_2 \le wBw'Cq_2$
(2) $p_1 \le q_1Aw$	(2′) $p_2 \le w'Cq_2$
(3) $p_1 \le q_1AwBw'$	(3′) $p_2 \le q_2$

$q_1' = q_1A$, $q_2' = wBw'$, $q_3' = Cq_2$ とおくと，(3) と (1') より，$p_1 \le q_1'q_2'$, $p_2 \le q_2'q_3'$ となる．補題 2 より，q_2' に変数が含まれるとき，$p \le q$ となる．よって，$B = y_1a$ または，$B = dy_2$ である場合，仮定に矛盾する．したがって，$B = bc$ である場合のみを考える．

$A = dy_2$ とすると，(2) は $p_1 \le q_1dy_2w$ となる．$p_1 = p_1'p_1''$, $p_1' \le q_1d$ かつ $p_1'' \le y_2w$ とおくと，(1') より，$p = p_1xp_2 = p_1'p_1''xp_2 \le q_1dp_1''xwbcw'y_1aq_2 = q\{x := p_1''x\}$ となり，$p = q\theta$ となる．これは仮定に矛盾する．したがって，$A = y_1a, B = bc, C = dy_2$ である場合のみ考えればよい．

以上より，記号列が重複する場合を考慮して，次の 2 つの場合に分けて証明する．

(a-1) $q = q_1y_1awbcw'dy_2q_2$,
(a-2) $q = q_1y_1acwdy_2q_2$ $(a = b)$,

(a-1) 補題 7 の証明より，$p\{x := xy\} \le q$ となる．よって，仮定に矛盾する．

(a-2) $q = q_1y_1acwdy_2q_2$ $(a = b)$ とする．この q に対して，次の式が成り立っているものとする．

(1) $p_1 \le q_1$	(1′) $p_2 \le cwdy_2q_2$
(2) $p_1 \le q_1y_1$	(2′) $p_2 \le wdy_2q_2$
(3) $p_1 \le q_1y_1acwdy_2$	(3′) $p_2 \le q_2$

$|w| = 0$ であれば，(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は cd かつ d となる．よって，$c = d$ となる．これは，$c \ne d$ であることに矛盾する．

$|w| = 1$ であれば，(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は cwd かつ wd となる．よって，$w = c = d$ となる．これは，$c \ne d$ であることに矛盾する．

$|w| \ge 2$ であれば，(1') と (2') より，p_2 の接頭辞は cwd かつ wd となる．長さ n の w を $w_1w_2w_3 \cdots w_{n-1}w_n$ (w_i $(i = 1, \ldots, n)$ は定数記号) とする．$cw = wd$ より，w の接頭辞は c，w の接尾辞は d となる．よって，$cw_2w_3 \cdots w_{n-1}d$ となる．$cw = ccw_2w_3 \cdots w_{n-1}d$, $wd = cw_2w_3 \cdots w_{n-1}dd$ であるから，$cw = wd$ より，$w_i = w_{i+1}$ $(i = 2, \ldots, n-2)$ となる．したがって，$c = d$ となる．こ

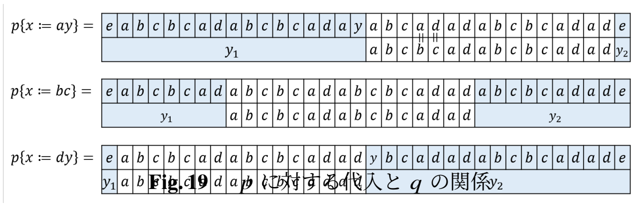

Fig. 19 p に対する代入と q の関係

れは，$c \neq d$ であることに矛盾する．

(b) の記号列を含む正規パターン q は，$c \neq a$ より，補題 5(i-2) に対応する記号列が現れる．よって，$p\{x := xy\} \preceq q$ となる．これは，仮定に矛盾する．

(c) の記号列を含む正規パターン q は，$b \neq d$ より，補題 5(i-1) に対応する記号列が現れる．よって，$p\{x := xy\} \preceq q$ となる．

(ii) $D = \{ya, bc, dy\}$ ($b \neq a, d,\ c = d$ かつ $c \neq a$) のときは，記号列 p と q を逆順にすることにより，**(ii)** の場合と同様に， 仮定 $p\{x := xy\} \not\preceq q$ に矛盾することを証明できる．

補題 7，補題 8 より，次の系が得られる．

Corollary 2: $\sharp\Sigma \geq 3$ とし，p, q を正規パターンとする．正規パターンの有限集合 $D = \{ya, bc, dy\}$ ($b = a$ かつ $c = d$) で表されるとき，任意の $r \in D$ に対して $p\{x := r\} \preceq q$ ならば，$p\{x := xy\} \not\preceq q$ となる q が存在する．

Example 2: a, b, c, d, e を定数記号，x, y, y_1, y_2 を変数記号とする．$p\{x := xy\} \not\preceq q$ となる正規パターン p, q を $p = eabcbcadabcbcadaxbcadadabcbcadade$，$q = y_1abcbcadabcbcadady_2$ ($b = a$ かつ $c = d$) とする．

このとき，図 19 のように，

$$
\begin{aligned}
& p\ \{x := ya\} \\
&= (eabcbcadabcbcaday)abcadadabcbcadade \\
&= q\{y_1 := eabcbcadabcbcaday_1\} \\
&\preceq q, \\
& p\ \{x := bc\} \\
&= (eabcbcad)abcbcadabcbcadad(abcbcadade) \\
&= q\{y_1 := eabcbcad,\ y_2 := abcbcadade\} \\
&\preceq q, \\
& p\ \{x := dy\} \\
&= eabcbcadabcbcadad(ybcadadabcbcadade) \\
&= q\{y_2 := y_2bcadadabcbcadade\} \\
&\preceq q.
\end{aligned}
$$

となる．これは，系 2 の条件を満たす．

Lemma 9: $\sharp\Sigma \geq k + 2$，$p \in \mathcal{RP}$，$Q \in \mathcal{RP}^k$ とする．任意の定数記号 $a, b \in \Sigma$ に対し，ある正規パターン $q \in Q$ が存在し，$p\{x := ab\} \preceq q$ ならば，$p\{x := xy\} \preceq q$ となる．

Proof. p に変数記号が現れない場合は自明である．したがって，$p = p_1xp_2$ (p_1, p_2 は正規パターン，x は変数記号) とおく．また，$Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ とする．次のように記号を定める．

$$
\begin{aligned}
& A_i = \{a \in \Sigma \mid p\{x := ay\} \preceq q_i,\ y \in X\}, \\
& B_i = \{b \in \Sigma \mid p\{x := yb\} \preceq q_i,\ y \in X\}, \\
& A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i, B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i, \\
& \tilde{B} = \{\tilde{b} \mid b \in B\}, \\
& A' = \Sigma \setminus A,\ B' = \Sigma \setminus B, \\
& \tilde{\Sigma} = \{\tilde{c} \mid c \in \Sigma\}, \\
& \tilde{B}' = \{b \mid b \in \tilde{\Sigma} \setminus \tilde{B}\}\ \ (i = 1, \ldots, k).
\end{aligned}
$$

$p\{x := xy\} \not\preceq q_i$ ($i = 1, \ldots, k$) と仮定する．

$k = 1$ のとき，$p\{x := a_1a_i\} \preceq q_1$ かつ $p\{x := a_2a_i\} \preceq q_1$ ($i = 1, 2, 3$) となる．$p' = p\{x := a_1y\} = p_1a_1yp_2$ とおくと，$p\{x := a_1a_i\} \preceq q_1$ より，$p'\{y := a_i\} \preceq q_1$ となる．a_i は互いに異なる定数記号であるため，補題 3 より，$p' \preceq q_1$ となる．よって，$p\{x := a_1y\} \preceq q_1$ となる．$p\{x := a_2y\}$ についても同様に考えることができ，$p\{x := a_2y\} \preceq q_1$ となる．したがって，$p\{x := a_1y\} \preceq q_1$ かつ $p\{x := a_2y\} \preceq q_1$ であるため，補題 5 より，$p\{x := xy\} \preceq q_1$ となる．これは，仮定に矛盾する．

$k \geq 2$ のとき，2 部グラフを用いて矛盾を導く．$G = (\Sigma, \tilde{\Sigma}; A' \times \tilde{B}')$ を Σ と $\tilde{\Sigma}$ を部集合とし，$A' \times \tilde{B}'$ を辺集合とする 2 部グラフとする．Σ と $\tilde{\Sigma}$ を部集合とし，$\tilde{E}_i = \{(a, \tilde{b}) \in A' \times \tilde{B}' \mid p\{x := ab\} \preceq q_i\}$ を辺集合とする 2 部グラフを $\tilde{G}_i = (\Sigma, \tilde{\Sigma}; \tilde{E}_i)$ とする．

$\sharp A_i \geq 2$ または $\sharp B_i \geq 2$ となる i が存在するとき，補題 5 より，$p\{x := xy\} \preceq q_i$ となる．これは仮定に矛盾する．よって，任意の i ($i = 1, \ldots, k$) に対して，$\sharp A_i \leq 1$ かつ $\sharp B_i \leq 1$ となる．また，$0 \leq \sharp A \leq k$ かつ $0 \leq \sharp\tilde{B} \leq k$ となり，$2 \leq \sharp A' \leq k+2$ かつ $2 \leq \sharp\tilde{B}' \leq k+2$ となる．$\sharp A = k$ かつ $\sharp\tilde{B} = k$ である G を $G^{(k,\,k)}$ と表し，$\sharp A_i = 1$ かつ $\sharp B_i = 1$ である $\tilde{G}_i$ を $\tilde{G}_i^{(1,\,1)}$ と表す．

$\sharp A$ と $\sharp\tilde{B}$ の関係を，次の 3 つの場合に分けて証明する．

(1) $\sharp A = k$ かつ $\sharp\tilde{B} \leq k$,
(2) $\sharp A = k - 1$ かつ $\sharp\tilde{B} \leq k - 1$,
(3) $\sharp A \leq k - 2$ かつ $\sharp\tilde{B} \leq k - 2$,

(1) $\sharp A = k$ かつ $\sharp\tilde{B} \leq k$ であるとき，$\sharp A' = 2$ かつ $\sharp\tilde{B}' \geq 2$ となる．このとき，G には少なくとも $\sharp A' \times \sharp\tilde{B}' = 2 \times 2 = 4$ 本の辺が含まれる．図 20 のように，$|A' \cap B'|$ の関係は，3 種類に分けられる．よって，以下のように，場合分けして証明する．

(1-1) $|A' \cap B'| = 0$, **(1-2)** $|A' \cap B'| = 1$,
(1-3) $|A' \cap B'| = 2$.

(1-1) $\sharp A = k$ かつ $\sharp\tilde{B} = k$ であるとき，$p\{x := ya_i\} \preceq q_i$ かつ $p\{x := a_iy\} \preceq q_i$ ($i = 3, \ldots, k$) とし，$p\{x := a_jy\} \preceq q_j$ かつ $p\{x := ya_{k+j}\} \preceq q_j$ ($j = 1, 2$) とする．

系 2 より，$p\{x := a_{k+1}a_1\} \preceq q_1$(図 21)，$p\{x := a_{k+2}a_2\} \preceq q_2$ となる q_1, q_2 が考えられる．

このとき，$\tilde{G}_1$ と $\tilde{G}_2$ に含まれる辺はそれぞれ 1 本となる．G に含まれる辺は，4 本であるため，残り $4 - 2 = 2$ 本の辺は $\tilde{G}_i$ ($i = 3, \ldots, k$) に含まれる．すなわ

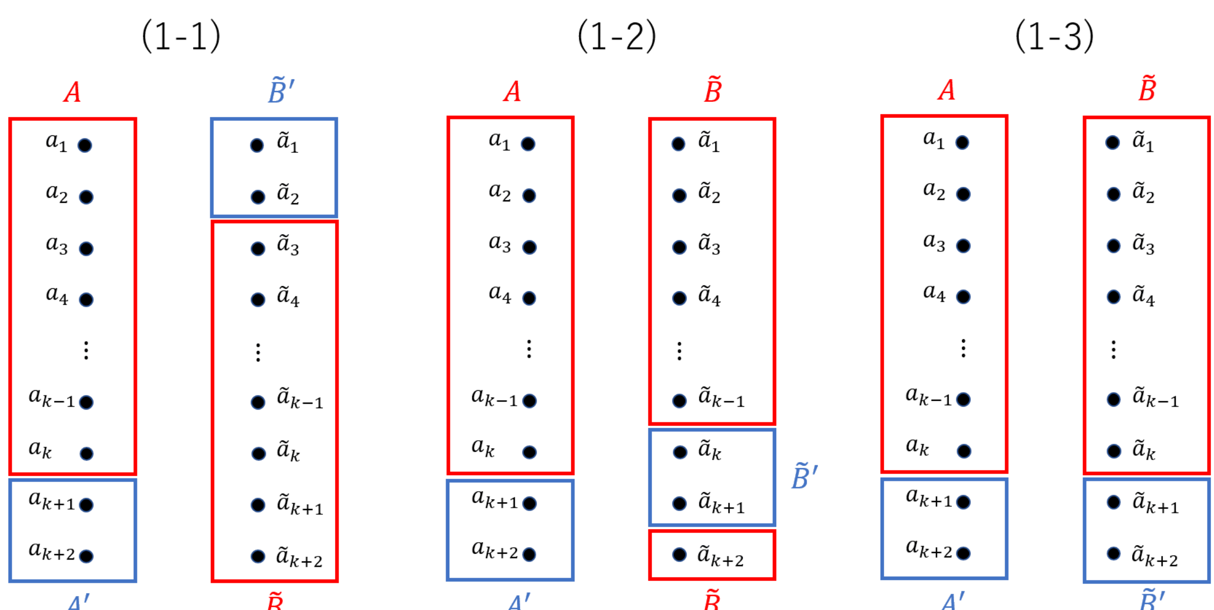

Fig. 20 (1-1), (1-2), (1-3) の例

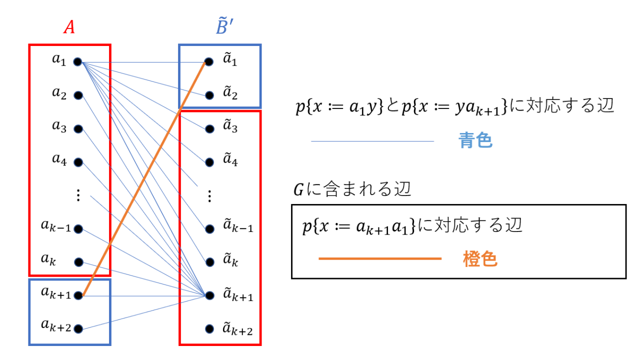

Fig. 21 系 2 の条件に当てはまるパターンにおける二分グラフの例

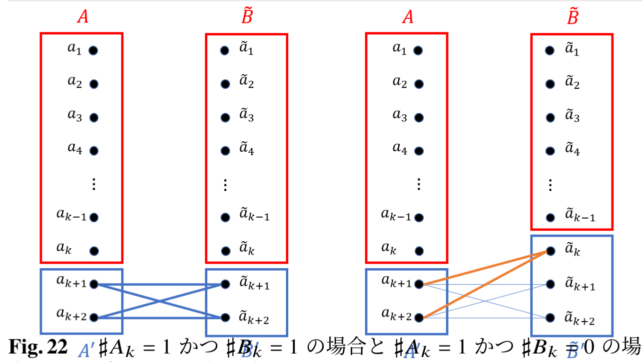

Fig. 22 $\sharp A_k = 1$ かつ $\sharp B_k = 1$ の場合と $\sharp A_k = 1$ かつ $\sharp B_k = 0$ の場合の G に含まれる辺数の違い

ち，$p\{x := a_{k+1}a_2\} \leq q_{i_0}$ と $p\{x := a_{k+2}a_1\} \leq q_{i_1}$ となる q_{i_0} と q_{i_1} が存在する．任意の i $(i = 3, \ldots, k)$ に対して，$p\{x := ya_i\} \leq q_i$ かつ $p\{x := a_iy\} \leq q_i$ であるため，$q_{i_0}, q_{i_1} \in Q \setminus \{q_1, q_2\}$ より，$a_{k+1} \neq a_i$ かつ $a_2 \neq a_i$ となる．よって，補題 7 より，$p\{x := xy\} \leq q_{i_0}$ となり，仮定に矛盾する．

$\sharp A = k$ かつ $\sharp\tilde{B} < k$ であるとき，$\sharp A_i = 1$ かつ $\sharp B_i = 0$ となる i が存在する．

図 22 のように，$G^{(k,\,k-1)}$ に含まれる辺の本数は，$G^{(k,\,k)}$ と比べて，$\sharp A'$ 本多くなる．すなわち，ある $\tilde{G}_i^{(1,\,1)}$ が $\tilde{G}_i^{(1,\,0)}$ となった場合，全体の G に含まれる辺の本数は，$\sharp A'$ 本多くなる．このことから，$G^{(k,\,k-1)}$ の部分グラフ $\tilde{G}_i^{(1,\,0)}$ に含まれる辺の本数が $\sharp A'$ 本以下であるとき，$G^{(k,\,k)}$ における結果と同様となる．一方で，$G^{(k,\,k-1)}$ の部分グラフ $\tilde{G}_i^{(1,\,0)}$ に $\sharp A' + 1 = 2 + 1 = 3$ 本以上の辺が含まれるとき，$G^{(k,\,k)}$ における結果から変化する可能性がある．

$G^{(k,\,k-2)}$ の部分グラフ $\tilde{G}_{i_0}^{(1,\,0)}$ と $\tilde{G}_{i_1}^{(1,\,0)}$ が，それぞれ 3 本の辺を含むとき，以下のような例が考えられる．

Example 3: $G^{(k,\,k-2)}$ の部分グラフ $\tilde{G}_{k-1}^{(1,\,0)}$ と $\tilde{G}_k^{(1,\,0)}$ に $\sharp A' + 1 = 2 + 1 = 3$ 本の辺が含まれるとき，

(i) $p\{x := a_iy\} \leq q_i$ かつ $p\{x := ya_i\} \leq q_i$ $(i = 3, \ldots, k-2)$,
(ii) $p\{x := a_jy\} \leq q_j$，$p\{x := ya_{k+j}\} \leq q_j$ かつ $p\{x := a_{k+j}a_j\} \leq q_j$ $(j = 1, 2)$,
(iii) $p\{x := a_{k-1}y\} \leq q_{k-1}$，$p\{x := a_za_{k-1}\} \leq q_{k-1}$ かつ $p\{x := a_1a_{k+2}\} \leq q_{k-1}$
$(z = k+1, k+2)$,
(iv) $p\{x := a_ky\} \leq q_k$，$p\{x := a_za_k\} \leq q_k$ かつ $p\{x := a_2a_{k+1}\} \leq q_k$.

となる p と q_i $(i = 1, \ldots, k)$ が存在し，$p\{x := xy\} \not\leq q_i$ となる．

図 23 のように，$\tilde{G}_i^{(1,\,0)}$ に 3 本の辺が含まれるパターンは，4 つ存在する．パターン 1 の場合，補題 6(abc) より，$p\{x := xy\} \leq q_i$ となる．パターン 2 とパターン 3 の場合，互いに隣接しない辺が 2 本存在するため，補題 6(d) より，$p\{x := xy\} \leq q_i$ となる．パターン 4 の場合，$p\{x := a_1a_j\} \leq q_i$ $(j = 1, 2, 3)$ となる．$p' = p\{x := a_1y\} = p_1a_1yp_2$ とおくと，$p\{x := a_1a_j\} \leq q_i$ より，$p'\{y := a_j\} \leq q_i$ となる．a_j は互いに異なる定数記号であるた

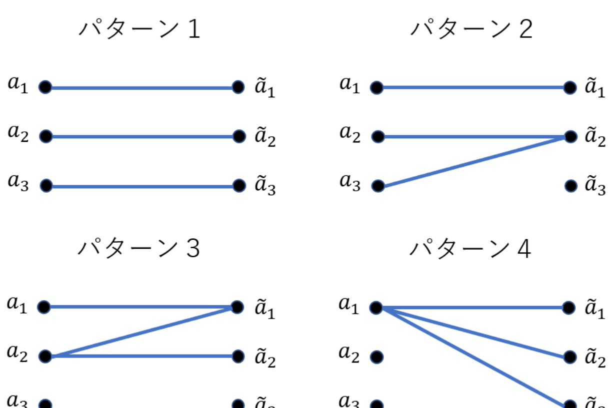

Fig. 23 辺数が 3 である二分グラフの例

め，補題 3 より，$p' \leq q_i$ となり，$p\{x := a_1 y\} \leq q_i$ となる．これは，A_i の定義に矛盾する．よって，$\tilde{G}_i^{(1,\,0)}$ に含まれる辺は 2 本以下となる．したがって，例 3 は，$\tilde{G}_{k-1}^{(1,\,0)}$ と $\tilde{G}_k^{(1,\,0)}$ に含まれる辺がそれぞれ 2 本以下であることに矛盾する．

以上より，$G^{(k,\,k)}$ において，仮定に矛盾する場合，$\sharp A = k$ かつ $\sharp\tilde{B}' < k$ である場合においても，仮定に矛盾する．(2)，(3) のいずれの場合においても，$\sharp A' > 2$ であることから，同様のことが言える．

(1-2) $\sharp A = k$ かつ $\sharp\tilde{B} = k$ であるとき，$p\{x := ya_i\} \leq q_i$ かつ $p\{x := a_i y\} \leq q_i$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ とし，$p\{x := ya_{k+2}\} \leq q_k$ かつ $p\{x := a_k y\} \leq q_k$ とする．系 2 より，$p\{x := a_{k+2}a_k\} \leq q_k$ である q_k が考えられる．このとき，$\tilde{G}_k$ に含まれる辺は 1 本となる．G に含まれる辺は，4 本であるから，残り $4-1=3$ 本の辺は $\tilde{G}_i$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ に含まれる．すなわち，$p\{x := a_{k+1}a_{k+1}\} \leq q_{i_0}$ が存在する．任意の i $(i = 1, \ldots, k-1)$ に対して，$p\{x := ya_i\} \leq q_i$ かつ $p\{x := a_i y\} \leq q_i$ であるため，$q_{i_0} \in Q \setminus \{q_k\}$ より，$a_{k+1} \neq a_i$ となる．よって，補題 7 より，$p\{x := xy\} \leq q_{i_0}$ となり，仮定に矛盾する．

(1-3) $\sharp A = k$ かつ $\sharp\tilde{B} = k$ であるとき，$p\{x := ya_i\} \leq q_i$ かつ $p\{x := a_i y\} \leq q_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とする G に 4 本の辺が含まれるため，$p\{x := a_{k+1}a_{k+1}\} \leq q_{i_0}$ が存在する．よって，任意の i に対して，$a_{k+1} \neq a_i$ となる．補題 7 より，$p\{x := xy\} \leq q_{i_0}$ となり，仮定に矛盾する．

(2) $\sharp A = k-1$ かつ $\sharp B \leq k-1$ であるとき，$\sharp A' = 3$ かつ $\sharp\tilde{B}' \geq 3$ となる．G には少なくとも $\sharp A' \times \sharp\tilde{B}' = 3 \times 3 = 9$ 本の辺が含まれる．図 24 のように，$|A' \cap B'|$ の関係は，4 種類に分けられる．よって，以下のように，場合分けして証明する．

(2-1) $|A' \cap B'| = 0$，**(2-2)** $|A' \cap B'| = 1$，
(2-3) $|A' \cap B'| = 2$，**(2-4)** $|A' \cap B'| = 3$.

(2-1) $\sharp A = k-1$ かつ $\sharp\tilde{B} = k-1$ であるとき，$p\{x := ya_i\} \leq q_i$ かつ $p\{x := a_i y\} \leq q_i$ $(i = 4, \ldots, k-1)$ とし，$p\{x := ya_j\} \leq q_j$ かつ $p\{x := a_{k+j-1}y\} \leq q_j$ $(j = 1, 2, 3)$ とする．このとき，系 2 より，$p\{x := a_j a_{k+j-1}\} \leq q_j$ となる q_j が考えられる．よって，$\tilde{G}_j$ には，それぞれ 1 本の辺が含まれる．G に含まれる辺は，9 本であるから，残り $9-3=6$ 本の辺は $\tilde{G}_i$ $(i = 4, \ldots, k)$ に含まれる．$\tilde{G}_i$ $(i = 4, \ldots, k-1)$ のいずれかに，辺が 1 本以上含まれる場合，$p\{x := ab\} \leq q_i$ $(a \neq a_i$ かつ $b \neq a_i)$ となる．これは，補題 7 より，$p\{x := xy\} \leq q_i$ となるため，仮定に矛盾する．よって，$\tilde{G}_k$ には 6 本の辺が含まれる．次数が 3 以上である頂点 a が $\tilde{G}_k$ に含まれるとき，補題 3 より，$p\{x := ay\} \leq q_k$ または $p\{x := ya\} \leq q_k$ となり，A_k または B_k の定義に矛盾する．したがって，$\tilde{G}_k$ に含まれる頂点の次数は 2 以下となる．

図 25 のように，ある $\tilde{G}_i$ に含まれる辺が 5 本であるとき，互いに隣接しない辺が 3 本以上存在する．よって，補題 6(abc) より，$p\{x := xy\} \leq q_k$ となる．これは，仮定に矛盾する．

(2-2) $p\{x := ya_i\} \leq q_i$ かつ $p\{x := a_i y\} \leq q_i$ $(i = 1, \ldots, k-3)$ とし，$p\{x := ya_{j+3}\} \leq q_j$ かつ $p\{x := a_j y\} \leq q_j$ $(j = k-2, k-1)$ とする．このとき，系 2 より，$p\{x := a_{j+3}a_j\} \leq q_j$ となる q_j が考えられる．よって，$\tilde{G}_j$ には，

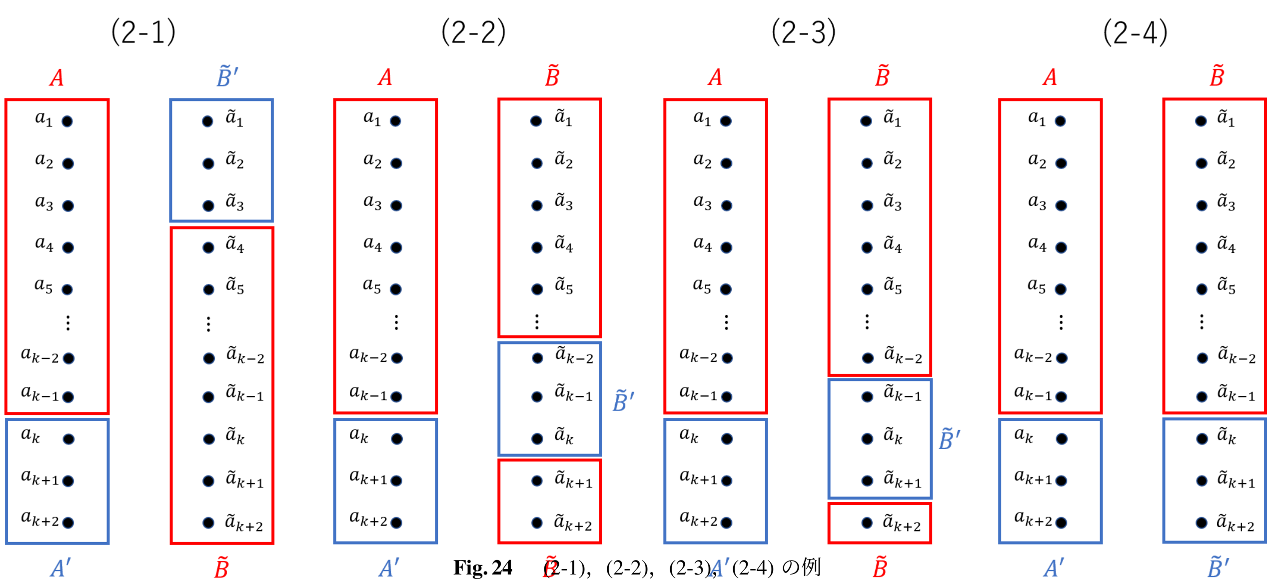

Fig. 24 (2-1), (2-2), (2-3), (2-4) の例

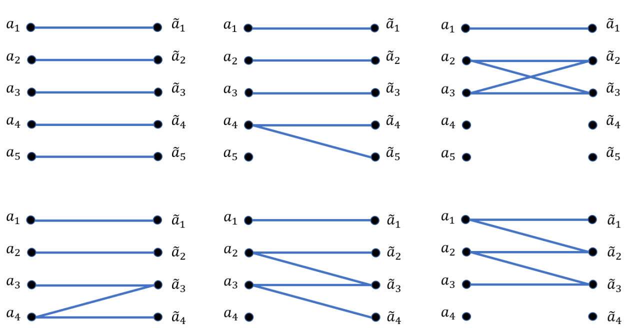

Fig. 25 辺数が 5 である二分グラフの例（各頂点の次数は 2 以下）

それぞれ 1 本の辺が含まれる．G に含まれる辺は，9 本であるから，残り $9-2=7$ 本の辺は $\tilde{G}_i$ $(i=1,\ldots,k-3)$ と $\tilde{G}_k$ に含まれる．$\tilde{G}_i$ のいずれかに，辺が 1 本以上含まれる場合，$p\{x:=ab\} \preceq q_i$ $(a \neq a_i$ かつ $b \neq a_i)$ となる．補題 7 より，$p\{x:=xy\} \preceq q_i$ となるこれは，仮定に矛盾する．よって，$\tilde{G}_k$ には 7 本の辺が含まれる．ある $\tilde{G}_i$ に含まれる辺が 5 本以上であるとき，互いに隣接しない辺が 3 本以上存在する．補題 6(abc) より，$p\{x:=xy\} \preceq q_k$ となる．これは，仮定に矛盾する．

(2-3) $p\{x:=ya_i\} \preceq q_i$ かつ $p\{x:=a_iy\} \preceq q_i$ $(i=1,\ldots,k-2)$ とし，$p\{x:=ya_{k+2}\} \preceq q_{k-1}$ かつ $p\{x:=a_{k-1}y\} \preceq q_{k-1}$ とする．このとき，系 2 より，$p\{x:=a_{k+2}a_{k-1}\} \preceq q_{k-1}$ となる q_{k-1} が考えられる．よって，$\tilde{G}_{k-1}$ には，1 本の辺が含まれる．G に含まれる辺は，9 本であるから，残り $9-1=8$ 本の辺は $\tilde{G}_i$ $(i=1,\ldots,k-2)$ と $\tilde{G}_k$ に含まれる．$\tilde{G}_i$ のいずれかに，辺が 1 本以上含まれる場合，$p\{x:=ab\} \preceq q_i$ $(a \neq a_i$ かつ $b \neq a_i)$ となる．補題 7 より，$p\{x:=xy\} \preceq q_i$ となる．これは，仮定に矛盾する．よって，$\tilde{G}_k$ には 8 本の辺が含まれる．ある $\tilde{G}_i$ に含まれる辺が 5 本以上であるとき，互いに隣接しない辺が 3 本以上存在する．補題 6(abc) より，$p\{x:=xy\} \preceq q_k$ となる．これは，仮定に矛盾する．

(2-4) $p\{x:=ya_i\} \preceq q_i$ かつ $p\{x:=a_iy\} \preceq q_i$ $(i=1,\ldots,k-1)$ とする．$\tilde{G}_i$ のいずれかに，辺が 1 本以上含まれる場合，$p\{x:=ab\} \preceq q_i$ $(a \neq a_i$ かつ $b \neq a_i)$ となる．補題 7 より，$p\{x:=xy\} \preceq q_i$ となる．よって，$\tilde{G}_k$ に 9 本の辺が含まれる．ある $\tilde{G}_i$ に含まれる辺が 5 本以上であるとき，互いに隣接しない辺が 3 本以上存在する．補題 6(abc) より，$p\{x:=xy\} \preceq q_k$ となる．これは，仮定に矛盾する．

(3) $G^{(k-2,\,k-2)}$ には $4\times4=16$ 本の辺が含まれる．$|A' \cap B'|=0$ であるとき，最大 4 つの $\tilde{G}_i$ に辺が 1 本含まれ，$\tilde{G}^{(0,\,0)}_{i_0}$ と $\tilde{G}^{(0,\,0)}_{i_1}$ に，少なくとも $4\times4-4=12$ 本の辺が含まれる．$12>4\times2+1$ より，$\tilde{G}^{(0,\,0)}_{i_0}$ または $\tilde{G}^{(0,\,0)}_{i_1}$ は 5 本以上の辺を含む．よって，$\tilde{G}^{(0,\,0)}_{i_0}$ または $\tilde{G}^{(0,\,0)}_{i_1}$ は，互いに隣接しない辺を 3 本以上含む．したがって，補題 6(abc) より，$p\{x:=xy\} \preceq q_{i_0}$ または $p\{x:=xy\} \preceq q_{i_1}$ となる．これは，仮定に矛盾する．

$|A' \cap B'|=0$ であるとき，$\tilde{G}^{(0,\,0)}_{i_0}$ と $\tilde{G}^{(0,\,0)}_{i_1}$ に含まれる辺数が最も少なくなる．よって，$|A' \cap B'|=0$ であるとき，矛盾であれば，$|A' \cap B|=n$ $(n=1,2,3,4)$ であるときも矛盾する．

一般化して考えていくと，G には $\sharp A' \times \sharp\tilde{B}'$ 本の辺が含まれる．$|A' \cap B'|=0$ であるとき，1 本の辺を持つ $\tilde{G}^{(1,\,1)}_{i_n}$ $(n=1,\ldots,\ell$ $(0 \le \ell \le \sharp A'))$ が最大 $\sharp A'$ 個存在する．このとき，$\tilde{G}^{(0,\,0)}_{j_m}$ $(m=1,\ldots,\sharp A'-2)$ には $\sharp A' \times \sharp\tilde{B}' - \ell$ 本の辺が含まれる．よって，$\ell \le \sharp A'$ より，少なくとも $\sharp A' \times \sharp\tilde{B}' - \sharp A'$ 本の辺が含まれる．$\sharp A'-2$ 個の $\tilde{G}^{(0,\,0)}_{j_m}$ に対して，合計 $4(\sharp A'-2)+1$ 本の辺を追加していくと，少なくとも 1 個のグラフは，5 本以上の辺を含む．

$$
\begin{aligned}
&\sharp A' \times \sharp\tilde{B}' - \sharp A' \ge 4(\sharp A'-2)+1 \\
&\sharp A'^2 - \sharp A' \ge 4\sharp A' - 8 + 1 \\
&\sharp A'^2 - 5\sharp A' + 7 \ge 0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

(1) 式の判別式を D とすると，$D=25-4\times7=-3$

となる．$D < 0$ より，任意の $\sharp A'$ について不等式が成り立つ．よって，ある $\tilde{G}_i^{(0,0)}$ に含まれる辺は 5 本以上となり，互いに隣接しない辺が 3 本以上存在する．したがって，補題 6(abc) より，$p\{x := xy\} \preceq q_i$ となる．これは，仮定に矛盾する．

以上より，$k \geq 2$ においても，仮定に矛盾する．

Lemma 10 (Sato et al.[1]): $\sharp\Sigma \geq 3$ とし，p, q を正規パターンとする．このとき，ある $a \in \Sigma$ に対して，$p\{x := a\} \preceq q$ かつ $p\{x := xy\} \preceq q$ ならば $p \preceq q$ である．ただし，y は q に含まれない変数記号である．

補題 9，補題 10 より，次の定理が成り立つ．

Theorem 3: $k \geq 3$，$\sharp\Sigma \geq 2k-1$，$P \in \mathcal{RP}^+$，$Q \in \mathcal{RP}^k$ とする．このとき，以下の (i),(ii),(iii) は同値である．

$$\text{(i) } S_2(P) \subseteq L(Q), \text{ (ii) } P \sqsubseteq Q, \text{ (iii) } L(P) \subseteq L(Q).$$

Proof. (ii) ⇒ (iii) と (iii) ⇒ (i) は自明である．定理 2 より，$\sharp\Sigma \geq 2k+1$ のとき，(i) ⇒ (ii) は成り立つ．よって，$\sharp Q = k$ のとき，$\sharp\Sigma = 2k-1$ または $\sharp\Sigma = 2k$ の場合，(i) ⇒ (ii) が成り立つことを，p に含まれる変数記号の数 n に関する数学的帰納法により証明する．

$n = 0$ のとき，$S_2(p) = \{p\}$ であり，$p \in L(Q)$ となる．よって，ある $q \in Q$ に対して，$p \preceq q$ となる．

$n \geq 0$ 個の変数記号を含む任意の正規パターンに対して題意が成り立つと仮定する．p を $S_2(p) \subseteq L(Q)$ を満たす $n+1$ 個の変数記号を含む正規パターンとする．$p \not\preceq q_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ と仮定する．$p = p_1 x p_2$ (p_1, p_2 は正規パターン，x は変数記号)，$Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ を考える．$a, b \in \Sigma$ に対して，$p_a = p\{x := a\}$ と $p_{ab} = p\{x := ab\}$ とおく．このとき，p_a, p_{ab} は n 個の変数記号が含まれ，$S_2(p_a) \subseteq L(Q)$ かつ $S_2(p_{ab}) \subseteq L(Q)$ が成り立つことに注意する．帰納法の仮定より，任意の $a, b \in \Sigma$ に対して，$p_a \preceq q_i$ かつ $p_{ab} \preceq q_{i'}$ を満たすような $i, i' \leq k$ が存在する．$D_i = \{a \in \Sigma \mid p\{x := a\} \preceq q_i\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ とする．ある i に対して，$\sharp D_i \geq 3$ であるとき，補題 3 より，$p \preceq q_i$ となる．これは仮定に矛盾する．よって，$\sharp D_i \leq 2$ $(i = 1, \ldots, k)$ となる場合を考える．$\sharp\Sigma = 2k-1$ のとき，任意の i に対して，$\sharp D_i = 2$ または $\sharp D_i = 1$，$\sharp\Sigma = 2k$ のとき，任意の i に対して，$\sharp D_i = 2$ となる．$k \geq 3$ であるとき，$2k+1 \geq k+2$ となる．よって，補題 9 より，$p\{x := xy\} \preceq q_i$ となる i が存在する．したがって，補題 10 より，$p \preceq q_i$ となる．これは仮定に矛盾する．

以上より，(i) ⇒ (ii) が成り立つ．

この定理 3 より，次の系が得られる．

Corollary 3: $k \geq 3$，$\sharp\Sigma \geq 2k-1$，$P \in \mathcal{RP}^+$ とする．このとき，$S_2(P)$ は $\mathcal{RPL}^k$ における $L(P)$ の特徴集合である．

Lemma 11 (Sato et al.[1]): $\sharp\Sigma \leq 2k-2$ とする．このとき，$\mathcal{RP}^k$ は包含に関するコンパクト性を持たない．

Proof. $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_{k-1}, b_1, \ldots, b_{k-1}\}$ を $(2k-2)$ 個の定数記号から成る集合，p, q_i を正規パターン，w_i $(i = 1, \ldots, k-1)$ を例 1 と同様に定義された記号列とする．$q_k = x_1 a_1 w_1 x y w_1 b_1 x_2$ とする．例 1 で示した通り，$p\{x := a_i\} \preceq q_i$ かつ $p\{x := b_i\} \preceq q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ であるとき，$S_1(p) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k-1} L(q_i)$ となる．一方で，任意の w $(|w| \geq 2)$ に対して，$p\{x := w\} \preceq q_k$ となる．すなわち，$L(p) \subseteq L(Q)$ である．しかし，$p \not\preceq q_i$ であるため，$L(p) \not\subseteq L(q_i) (i = 1, 2, \ldots k)$ である．したがって，$\mathcal{RP}^k$ は包含に関するコンパクト性を持たない．

定理 3 と補題 11 より，次の定理が成り立つ．

Theorem 4: $k \geq 3$ とし，$\sharp\Sigma \geq 2k-1$ とする．このとき，$\mathcal{RP}^k$ は包含に関してコンパクト性を持つ．

$k = 2$ のとき，次の定理が成り立つ．

Theorem 5: $\sharp\Sigma \geq 4$ とし，$P \in \mathcal{RP}^+$，$Q \in \mathcal{RP}^2$ とする．このとき，以下の (i),(ii),(iii) は同値である．

$$\text{(i) } S_2(P) \subseteq L(Q), \text{ (ii) } P \sqsubseteq Q, \text{ (iii) } L(P) \subseteq L(Q).$$

Proof. (ii) ⇒ (iii) と (iii) ⇒ (i) は自明に成り立つ．よって，(i) ⇒ (ii) が成り立つことを示す．$Q = \{q_1, q_2\}$ とするとき，p に含まれる変数記号の数 n に関する数学的帰納法で示す．
(1) $n = 0$ のとき，p は定数記号列となるので $S_2(p) = \{p\}$ となり (i) より，$p \in L(Q)$ となる．よって，ある $q \in Q$ に対して $p \preceq q$ となる．
(2) $n = k$ 個の変数記号を含むすべての正規パターンに対して有効であると仮定する．そして，p を $S_2(p) \subseteq L(Q)$ を満たす $(n+1)$ 個の変数記号を含む正規パターンとする．

$p \not\preceq q_i$ $(i = 1, 2)$ と仮定する．$p = p_1 x p_2$ (p_1, p_2 は正規パターン，x は変数記号) を考える．$a, b \in \Sigma$ に対して，$p_a = p\{x := a\}$，$p_{ab} = p\{x := ab\}$ とおく．このとき，p_a, p_{ab} は n 個の変数記号が含まれ，$S_2(p_a) \subseteq L(Q)$，$S_2(p_{ab}) \subseteq L(Q)$ が成り立つことに注意する．帰納法の仮定より，任意の $a, b \in \Sigma$ に対して，$p_a \preceq q_i, p_{ab} \preceq q_{i'}$ を満たすような $i, i' \leq k$ が存在する．

ある i に対して $\sharp D_i \geq 3$ のとき，補題 3 より，$p \preceq q_i$ となる．よって，任意の i に対して，$\sharp D_i \leq 2$ となる．したがって，$\sharp D_1 = 2$ かつ $\sharp D_2 = 2$ となる場合を考える．

$\sharp\Sigma = k+2$ であるとき，$k = 2$ より，$\sharp\Sigma = 4$ となる．よって，補題 9 より，ある i に対して，$p\{x := xy\} \preceq q_i$ となる．したがって，補題 10 より，$p \preceq q_i$ となる．これは，仮定に矛盾する．

以上より，(i) ⇒ (ii) が成り立つ．

次の例は，$k = 2$ における定理 5 の反例である．

Example 4: $\Sigma = \{a, b, c\}$ を 3 つの定数記号から成る集合，p, q_1, q_2 を正規パターン，x, x', x'' を変数記号とする．

$$p = x'axbx'', q_1 = x'abx'', q_2 = x'cx''.$$

$w \in \Sigma^+$ とする．w に c が含まれるとき，$p\{x := w\} \preceq q_2$ となり，c が含まれないとき，$p\{x := w\} \preceq q_1$ となる．よって，$L(p) \subseteq L(q_1) \cup L(q_2)$ である．しかし，$p \not\preceq q_1$ かつ $p \not\preceq q_2$ である．

定理 5 より，次の 2 つの系が成り立つ．

Corollary 4: $\sharp\Sigma \geq 4$ とし，$P \in \mathcal{RP}^+$ とする．このとき，$S_2(P)$ は，$\mathcal{RPL}^2$ における $L(P)$ の特徴集合である．

Corollary 5: $\sharp\Sigma \geq 4$ とする．このとき，クラス $\mathcal{RP}^2$ は

包含に関してコンパクト性を持つ．

4. 非隣接変数正規パターン

隣接した変数記号を持たない正規パターンを**非隣接変数正規パターン**という．例えば，パターン $axybc$ は正規パターンであるが，非隣接変数正規パターンではない．パターン $axbcy$ は非隣接変数正規パターンである．$\mathcal{RP}_{\mathcal{NAV}}$ を非隣接変数正規パターン全体の集合とする．$\mathcal{RP}_{\mathcal{NAV}}$ の空でない有限部分集合の集合を $\mathcal{RP}^{+}_{\mathcal{NAV}}$ で，高々k ($k \geq 1$) 個のパターンから成る $\mathcal{RP}_{\mathcal{NAV}}$ の部分集合 $\{P \in \mathcal{RP}^{+}_{\mathcal{NAV}} \mid \sharp P \leq k\}$ を $\mathcal{RP}^{k}_{\mathcal{NAV}}$ で表す．このとき，次の定理が成り立つ．

Theorem 6: $\sharp\Sigma \geq k+2$, $P \in \mathcal{RP}^{+}_{\mathcal{NAV}}$, $Q \in \mathcal{RP}^{k}_{\mathcal{NAV}}$ とする．このとき，以下の (i), (ii), (iii) は同値である．

$$\text{(i) } S_2(P) \subseteq L(Q), \text{ (ii) } P \sqsubseteq Q, \text{ (iii) } L(P) \subseteq L(Q).$$

Proof. 定義より，(ii) ⇒ (iii) と (iii) ⇒ (i) は自明に成り立つ．よって，(i) ⇒ (ii) が成り立つことを，p に現れる変数記号の数 n に関する数学的帰納法で証明する．

$n = 0$ のとき，$S_2(p) = \{p\}$ であり，$p \in L(Q)$ となる．よって，ある $q \in Q$ に対して，$p \preceq q$ となる．

$n \geq 0$ 個の変数記号を含む任意の正規パターンに対して，題意が成り立つと仮定する．p を $S_2(p) \subseteq L(Q)$ を満たす $n+1$ 個の変数記号を含む非隣接変数正規パターンとする．$p \npreceq q_i$ ($i = 1, 2$) と仮定する．非隣接変数正規パターン p を $p = p_1 x p_2, Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ とおく．ここで，p_1 は末尾が定数記号である非隣接変数正規パターンであり，p_2 は先頭が定数記号である非隣接変数正規パターン，x は変数記号，任意の i ($i = 1, \ldots, k$) に対して，q_i は非隣接変数正規パターンである．$a, b \in \Sigma$ に対して，$p_a = p\{x := a\}$，$p_{ab} = p\{x := ab\}$ とおく．このとき，p_a, p_{ab} は n 個の変数記号が含まれ，$S_2(p_a) \subseteq L(Q)$ かつ $S_2(p_{ab}) \subseteq L(Q)$ が成り立つことに注意する．帰納法の仮定より，任意の $a, b \in \Sigma$ に対して，$p_a \preceq q_i$ かつ $p_{ab} \preceq q_{i'}$ を満たすような $i, i' \leq k$ が存在する．

補題 9 より，ある i に対して $p\{x := xy\} \preceq q_i$ が成り立つ．このとき，$p\{x := xy\} = p_1 xy p_2$ の部分パターン xy は q_i の変数記号を置き換えることで生成できない．このことは，q_i に xy が含まれることを示している．これは，q_i が非隣接変数正規パターンであることに矛盾する．

以上より，(i) ⇒ (ii) が成り立つ．

Corollary 6: $\sharp\Sigma \geq k+2$, $P \in \mathcal{RP}^{+}_{\mathcal{NAV}}$ とする．このとき，$S_2(P)$ は $\mathcal{RPL}^{k}_{\mathcal{NAV}}$ における $L(P)$ の特徴集合である．

Lemma 12: $\sharp\Sigma \leq k+1$ とする．このとき，$\mathcal{RP}^{k}_{\mathcal{NAV}}$ は包含に関してコンパクト性を持たない．

Proof. $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$ を $k+1$ 個の定数記号から成る集合，p, q_i を正規パターンとする．$p\{x := a_i y\} \preceq q_i$ かつ $p\{x := y a_{i+1}\} \preceq q_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) とする．$p\{x := a_{k+1} a_1\} \preceq q_1$ であるとき，$S_2(p) \backslash S_1(p) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} L(q_i)$ となる．すなわち，$L(p) \subseteq L(Q)$ である．しかし，$p \npreceq q_i$ であるため，$L(p) \nsubseteq L(q_i)$ ($i = 1, 2, \ldots k$) である．したがって，$\mathcal{RP}^{k}_{\mathcal{NAV}}$ は包含に関するコンパクト性を持たない．

コンパクト性をもたない例を例 5 に示す．

定理 6 と補題 12 より，次の定理が成り立つ．

Theorem 7: $\sharp\Sigma \geq k+2$ とする．このとき，$\mathcal{RP}^{k}$ は包含に関してコンパクト性を持つ．

5. おわりに

本稿では，高々k ($k \geq 2$) 個の正規パターン集合全体のクラス $\mathcal{RP}^{k}$ について，(1) 正規パターン集合 $P \in \mathcal{RP}^{k}$ から得られる記号列の集合 $S_2(P)$ が P により生成される言語 $L(P)$ の特徴集合となること，および (2) $\mathcal{RP}^{k}$ が包含に関してコンパクト性を持つことを示した Sato ら [1] の結果の証明の誤りを修正した．次に，隣接する変数がない正規パターンである非隣接変数正規パターンについて，高々k($k \geq 3$) 個の非隣接変数正規パターン集合全体のクラス $\mathcal{RP}^{k}_{\mathcal{NAV}}$ から得られる記号列の集合 $S_2(P)$ が，正規パターン言語の有限和に対する特徴集合と，定数記号の数が $k+2$ 以上のとき，$\mathcal{RP}^{k}_{\mathcal{NAV}}$ が包含に関してコンパクト性をもつことを示した．これらにより，Arimura ら [4] が示した $\mathcal{RP}^{k}$ に対する学習アルゴリズムを非隣接変数正規パターン言語の有限和に関する効率的な学習アルゴリズムが設計できることを示した．

今後の課題として，$\mathcal{RP}^{k}_{\mathcal{NAV}}$ に対する特徴集合を活用し，非隣接変数正規パターン言語の有限和を正例から極限同定する多項式時間帰納推論アルゴリズムおよび一つの正例と多項式回の所属性質問を用いて同定する質問学習アルゴリズムの高速化が考えられる．また，正規パターン言語の有限和に対する特徴集合の概念を線形項木パターン言語 [5] の有限和や正則 FGS 言語 [6] に拡張することが考えられる．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 19K12103, 20K04973, 21K12021, 22K12172 の助成を受けたものである．

References

[1] M.Sato, Y.Mukouchi, D.Zheng, Characteristic Sets for Unions of Regular Pattern Languages and Compactness, in Proc. ALT '98, Springer LNAI 1501, pp.220-233, 1998.

[2] Y. Mukouchi, Characterization of Pattern Languages, in Proc. ALT '91, Ohmusha, pp.93-104, 1991.

[3] K.Wright, Identification of Unions of Languages Drawn from an Identifiable Class, in Proc. COLT '89, Morgan Kaufmann, pp.328-333, 1989.

[4] H. Arimura, T. Shinohara, S. Otsuki, Finding Minimal Generalizations for Unions of Pattern Languages and Its Application to Inductive Inference from Positive Data, in Proc. STACS '94, Springer LNCS 775, pp.649-660, 1994.

[5] Y. Suzuki, T. Shoudai, T. Uchida and T. Miyahara, Ordered Term Tree Languages Which are Polynomial Time Inductively Inferable from Positive Data, Theoretical Computer Science, 350(1):63-90, 2006.

[6] T. Uchida, T. Shoudai, S. Miyano, Parallel Algorithms for Refutation Tree Problem on Formal Graph Systems, IEICE Trans. Inf. & Syst.,

Example 5: $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ を 4 つの定数記号から成る集合，p, q_1, q_2, q_3 を正規パターン，x, x', x'' を変数記号とする．p, q_1, q_2, q_3 を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
p &= x' a_3 a_1 a_4 a_1 a_4 a_1 a_1 a_4 a_1 a_3 a_2 a_1 a_4 a_1 a_4 a_1 a_1 a_4 a_1 x a_1 a_4 a_1 a_4 a_1 a_1 a_4 a_1 a_3 a_2 a_1 a_4 a_1 a_4 a_1 a_1 a_4 a_1 a_2 x'',\\
q_1 &= x' a_3 a_1 a_4 a_1 a_4 a_1 a_1 a_4 a_1 a_3 a_2 a_1 a_4 a_1 a_4 a_1 a_1 a_4 a_1 a_2 x'',\\
q_2 &= x' a_2 a_1 a_4 a_1 a_4 a_1 a_1 a_4 a_1 a_3 x'',\\
q_3 &= x' a_1 a_1 a_4 a_1 a_4 x''.
\end{aligned}
$$

これは，$L(p) \subseteq L(q_1) \cup L(q_2) \cup L(q_3)$ となる．しかし，$p \npreceq q_1$，$p \npreceq q_2$ かつ $p \npreceq q_3$ である．

E78-D(2):99-112, 1995.