特　集「機械学習の科学研究への応用」

代数学・数学基礎論における機械学習

Machine Learning in Algebra and Fundations of Mathematics

デ・ブレクトマシュー　京都大学大学院情報学研究科
Matthew de Brecht　Graduate School of Informatics, Kyoto University.
matthew@iip.ist.i.kyoto-u.ac.jp

徳永　浩雄　首都大学東京大学院理工学研究科
Hiroo Tokunaga　Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Metropolitan University.
tokunaga@tmu.ac.jp

山本　章博　京都大学大学院情報学研究科
Akihiro Yamamoto　Graduate School of Informatics, Kyoto University.
akihiro@i.kyoto-u.ac.jp, http://www.iip.ist.i.kyoto-u.ac.jp/member/akihiro/

Keywords: identification in the limit, ideals, ordinal numbers, topology.

1. は じ め に

機械学習において，正データからの学習あるいは教師なし学習は，計算論，統計，情報理論といった基礎の如何にかかわらず，数多くの問題と解決方法が試みられてきた．これらの研究の中には，本質的に数学の基礎と関連していると考えられるものが散見される．特に，計算論的な学習研究における形式言語の正データからの極限同定学習は代数学をはじめとする数学の基礎との直接の接点が見いだされた [Hayashi 02, Stephan 01]．本稿では，形式言語の正データからの極限同定学習に絞り，その数学との関係について，簡単な例を用いながら，著者らの最近の成果を交えて解説する．

この分野における基本結果は Angluin による [Angluin 80] が有名であるが，そこにおいて整数環のイデアルという代数的な概念が例として用いられている．その後の研究においても，Higmann の定理をはじめとする数学基礎論や組合せ論的な成果が利用されている．Freivalds と Smith[Freivalds 93] は学習の困難さを表す尺度に，集合論において基本的な概念である超限順序数を導入している．さらに，Martin ら [Martin 02] は位相空間論を導入した．位相は，解析学や幾何学における遠近や収束を公理化したものであり，位相を用いると関数の連続性を公理的に定義することができる．本稿では，研究をできるだけ一体化した形で提示することを試みるものであり，それは著者らがこの数年にわたって行ってきた研究の動機でもある．

まず次章において正データからの極限同定学習 [Angluin 80, Gold 67] とそこで用いられる基本的な概念について概観する．その際，整数の倍数を用いた例を用いることで，3章の内容の導入とする．

3章では，可換環論と正データからの極限同定学習について解説する．可換環論における基本的な定理である Hilbert の基底定理からの帰結として，多項式環のイデアルには正データからの極限同定学習が自然に組み込まれていることがわかる．また，さらに抽象的な性質である可換環の Nöther 性と極限同定学習の関係についても説明する．一致点が見られる可換環論と極限同定学習であるが，そもそも研究の目的が異なるため，両者には違いもある．その違いについて，イデアルの集合和を用いて説明する．

正データからの極限同定学習の困難さを表す尺度として，推測の変更回数が用いられる．4章では，この尺度と超限順序数について述べる．超限順序数に極限同定学習の困難さという意味を与えられることを説明し，その意味を用いれば，大きな超限順序数を学習の困難さにもつような自然な学習対象が構成できることも説明する．

サポートベクトルマシンなどの学習においては，ある領域では学習が難しいときに，連続な関数を用いて別の領域に変換することがある．5章では，正データからの極限同定学習において学習の対象の変換に用いることのできる連続関数を位相を用いて導入する．この位相を用いると，正データからの極限同定学習の基本的な概念の一つを位相の言葉で表すことができるようになる．

2. 正データからの学習

2・1 概 念 と 仮 説

有限アルファベット Σ 上の有限長の文字列の全体を Σ^* で表す．形式言語は Σ^* の部分集合 C である．計算論的学習では，L はある規則性の表現 H を用いて $L=L(H)$ と表されていると仮定する [*1]．

*1 厳密にいうと，C として帰納的（recursive）であるものだけを考察する．

機械学習を論じる際には，どのような規則性を用いるか，つまり，“規則性を構成するための規則”$\mathscr{R}$を定めておく．本稿では主に代数学における環とイデアルなどを扱うが，計算論的学習における概念や結果などを示す際には，計算機科学で知られた正則言語などを用いる．

〔例 1〕正則言語とは，ある正則表現Eで受理される言語である．つまり，正則表現Eは$L=L(E)$に含まれる文字列の“規則性”を表しており，正則表現Eそのものは“正則表現を構成するための規則”に従って構成されている．

規則$\mathscr{R}$によって生成される規則の表現全体を$\mathscr{H}$とし，Hを$\mathscr{H}$中の“値”をとるパラメータとすると，$L(H)$はHによって定義される言語とみなすことができる．すると，未知の言語$C=C(H_*)$に関するデータが与えられたとき，H_*を推定する，という問題は言語学習と捉えることができる．学習機械はデータからH_*の推定値$\hat{H}$を構成することになるが，$\hat{H}$はあくまでも仮説であり，真の値H_*と一致しているとは限らない．この意味で，本稿では$\mathscr{H}$を**仮説空間**と呼ぶことにする．

本解説では代数的な領域Uの集合を対象といた機械学習を扱う．計算論の枠組みの中で扱うので領域内の要素は有限のアルファベットによって表現されているとする．以下では，領域の要素とその表現を区別しない．

〔例 2〕領域を自然数全体$\mathbf{N}$とすると，自然数は

$$1, 11, 111, \cdots$$

のように形式言語$\{1\}^+$中の語として表現できる．整数全体$\mathbf{Z}$の場合は，符号を考慮して

$$\cdots, -111, -11, 1, 11, 111, \cdots,$$

のように$-$と1からなる語として表現できる．有理数は整数mと自然数nの組$(m, n)\ (n \neq 0)$の形で表現できる．変数x, yからなる有理数係数の単項式$qx^m y^n$は(q, m, n)と表現でき，さらに変数x, yからなる多項式は単項式のリストで表現できる．

領域の部分集合を概念と呼ぶことにする．形式言語は領域がΣ^*であるような概念となる．概念Cも形式言語と同様に，仮説空間$\mathscr{H}$の仮説Hによって$C=C(H)$と表現されているとし，概念の族$\mathscr{C}=\{C(H) \mid H \in \mathscr{H}\}$を**概念空間**と呼ぶ[*2]．

〔例 3〕整数全体の集合$\mathbf{Z}$の概念として，非負整数hの倍数の集合

$$\langle h \rangle = \{h \times x \mid x \in \mathbf{Z}\}$$

がある．概念としてこの形の集合だけを扱うとき，各概念$\langle h \rangle$は$h \in \mathbf{Z}^+$（$\mathbf{Z}^+$は非負整数全体の集合）によって表現されている．つまり，概念空間は$\mathscr{C}=\{\langle h \rangle \mid h \in \mathbf{Z}^+\}$である．

*2 概念の族$\mathscr{C}$は**一様に帰納的**（uniformly recursive）である，という．

2・2 正データからの極限同定

空集合でない未知の概念$C(H_*)\ (H_* \in \mathscr{H})$を正データから学習，あるいは教師なしで学習する機械とは，有限集合$E \subseteq C(H_*)$から文法H_*を推定し，仮説$\hat{H}$を返すアルゴリズムである．有限集合Eの要素を**正例**(positive example）と呼ぶ．

機械学習理論においては，Eから$\hat{H}$を構成するアルゴリズムの挙動を正当性に照らして解析する．以下に述べる極限同定モデルは，Eが徐々に$C(H_*)$に近づくときの$\hat{H}$の挙動を解析する手法とみなすことができる．極限同定モデルでは，正例の出現確率を考慮しないので，集合論的・組合せ論的な手法で解析を行う．

正例の有限集合Eが徐々に$C(H_*)$に近づくことを定式化するには，Eを正例の無限列$\sigma: e_1, e_2, e_3, \cdots$の最初の$n$項$\sigma[n]$と捉える．学習アルゴリズム$M$は，未知の概念$C(H_*)$に関するデータ$\sigma: e_1, e_2, \cdots, e_n$の正例を順に読み込み，$\sigma[n]$から仮説$\hat{H}_n$を構成する．無限列$\sigma$が

- σが正例だけからなり，
- $C(H_*)$の任意の元はσに少なくとも1回は出現する

という条件を満たすとき，概念$C(H_*)$の**正データ**(positive data)，**正提示**（positive representation）ともいう）と呼ぶ．正データは，正例の有限集合の増加列

$$\sigma[1] \subseteq \sigma[2] \subseteq \sigma[3] \subseteq \cdots \subseteq \sigma[n] \subseteq \cdots \quad (1)$$

をつくり，しかも

$$\bigcup_{n \geq 1} \sigma[n] = C(H_*)$$

を満たすことになる．つまり，極限同定モデルでは“データ”という用語を極限の挙動を含めたものとして用いる．言語$C(H_*)$が有限集合であれば

$$\sigma[N] = \sigma[N+1] = \sigma[N+2] = \cdots = C(H_*)$$

を満たすような$N \geq 1$が存在する．一方，$C(H_*)$が無限集合であればこのようなNは存在しない．

学習アルゴリズムMは未知の概念$C(H_*)$の任意の正データσに対して

$$H_N = H_{N+1} = H_{N+2} = \cdots \quad (2)$$

となるような$N \geq 1$が存在して，$C(H_N) = C(H_*)$であるとき，Mは$C(H_*)$を**正データから極限同定する**(identify in the limit from positive data）という．さらに，Mが概念空間$\mathscr{C}$のすべての言語を正データから極限同定するとき，$\mathscr{C}$を**正データから極限同定する**という．また，$\mathscr{C}$は**正データから極限同定可能である**という．

〔例 4〕例3にある概念空間$\mathscr{C}=\{\langle h \rangle \mid h \in \mathbf{Z}^+\}$は正データから極限同定可能である．学習機械$M$は任意の正データ$\sigma$と$n \geq 1$に対して，$\sigma[n]$の最大公約数を$h_n$として返せばよい．例えば，未知の概念が$\langle 6 \rangle$であるとして，正データ

$$\sigma: 72, 108, 36, 60, 42, 114, \cdots$$

が与えられているとする．つまり，整数の有限集合Sに含まれる整数の最大公約数を$\gcd(S)$で表すと

$$h_1 = \gcd(\sigma[1]) = \gcd(\{72\}) = 72,$$
$$h_2 = \gcd(\sigma[2]) = \gcd(\{72, 108\}) = 36,$$
$$h_3 = \gcd(\sigma[3]) = \gcd(\{72, 108, 36\}) = 36,$$
$$h_4 = \gcd(\sigma[4]) = \gcd(\{72, 108, 36, 60\}) = 12,$$
$$h_5 = \gcd(\sigma[5]) = \gcd(\{72, 108, 36, 60, 42\}) = 6,$$
$$h_6 = \gcd(\sigma[6]) = \gcd(\{72, 108, 36, 60, 42, 114\}) = 6,$$
$$\cdots$$

と出力する．この正データについては，$e_5 = 42$ が与えられたとき，学習機械 M を出力する仮説が収束し始める．概念 $\langle 6\rangle$ に関する任意の正データに対しても $6 \in\langle 6\rangle$ であり，必ず $e_N = 6$ なる N があるので，遅くとも e_N が与えられるときには正解に達している．

2·3 有限証拠集合，特徴例集合，有限の弾力性

機械学習においては，**過汎化**（over generalization）と**過学習**（over fitting）を回避する方法が問題となる．

〔例5〕領域をアルファベット Σ 上の文字列全体 Σ^* として，正則表現全体からなる仮説空間と正則言語全体からなる概念空間を考える．未知の正則言語 $C(H_*) \neq \Sigma^*$ の正データに対して学習アルゴリズム M が正則表現 $H_n = \Sigma^*$ を返すことは，過汎化となる．一方，$C(H_*)$ が無限集合のとき，正則表現 $H_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ を返すことは過学習となる．

実際，正則言語全体からなる概念空間は正データから極限同定可能ではないことが知られている [Gold 67]．

正データの定義1と極限同定の条件2を見ると，有限集合 σ_n は拡大していくのに対して，H_n は収束しなければならない．収束を始めた時点 N では，有限個の例 $\sigma[N]$ によって $C(H_N)$ と他の $C(H)$ が識別できていることになる．概念空間 $\mathscr{C}$ の概念 $C(H)$ の有限部分集合 T が，

任意の $C(H') \in \mathscr{C}$ に対して

$T \subseteq C(H')$ ならば $C(H') \not\subset C(H)$

を満たすとき，$C(H)$ の**有限証拠集合**（finite tell-tale）であるという．概念空間 $\mathscr{C}$ が正データからの極限同定可能性に関する必要十分条件は任意の $H \in \mathscr{H}$ が与えられたとき，$C(H)$ のある有限証拠集合を枚挙する（必ずしも停止しない）手続きが存在することである [Angluin 80]．

〔例6〕概念空間 $\mathscr{C} = \{\langle h\rangle \mid h \in \mathbf{Z}^+\}$ において，$\langle h\rangle$ の有限証拠集合は $\{h\}$ である．数学的な証明は省略するが，例4における仮説の収束の説明から，$\{h\}$ が有限証拠集合であることは理解いただけよう．

上の例において $\langle h\rangle$ の有限証拠集合は $\{h\}$ はより強い条件を満たしている．概念空間 $\mathscr{C}$ の言語 $C(H)$ の有限部分集合 U が，

任意の $C(H') \in C$ に対して

$U \subseteq C(H')$ ならば $C(H) \subset C(H')$

を満たすとき，$C(H)$ の**特徴例集合**（characteristic set）であるという．概念空間 $\mathscr{C}$ の各言語 $C(H)$ が特徴例集合をもてば，$C(H)$ のある有限証拠集合を枚挙する（必ずしも停止しない）手続きが存在する [Kobayashi 96]．逆は成り立たない．

〔例7〕概念空間 $\mathscr{C} = \{\langle h\rangle \mid h \in \mathbf{Z}^+\}$ において，$\{h\}$ は $\langle h\rangle$ の特徴例集合になる．特徴例集合は，正データからの極限同定と数学を結ぶ際に主役となる．

正データからの極限同定の条件2を満たさないような概念空間の性質として，無限の弾力性が与えられている．概念空間 $\mathscr{C}$ が**無限の弾力性**（finite elasticity）をもつとは，領域要素の無限列 $e_0, e_1, e_2, \cdots$ と $\mathscr{C}$ に属する概念の無限列 $C(H_1), C(H_2), \cdots$ で

すべての n に対して

$\{e_0, e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}\} \subseteq C(H_n)$ かつ $e_n \not\in C(H_n)$

を満たすものが存在するときをいう．$\mathscr{C}$ が無限の弾力性をもたないとき，**有限の弾力性**（finite elasticity）をもつという．概念空間 $\mathscr{C}$ が有限の弾力性をもてば，すべての $L(G)$ に特徴例集合が存在する [Motoki 91, Wright 89]．この逆も成り立たない．

〔例8〕概念空間 $\mathscr{C} = \{h\rangle \mid h \in \mathbf{Z}^+\}$ は有限の弾力性をもつ．実際，整数の無限列 $e_0, e_1, e_2, \cdots$ に対して，$\{e_0, e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}\} \subseteq \langle h_n\rangle$ を満たす h_n は $\gcd(\{e_0, e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}\})$ の約数でなければならず，$e_n \not\in \langle h_n\rangle$ を満たす e_n は h_n の倍数ではない．つまり，$\gcd(\{e_0, e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}, e_n\}) \neq h_n$ であり，公約数の性質から，$h_n > h_{n+1}$ でなければならない．非負整数からなる無限長の単調減少列が存在しないので，$h_n > 0$ であるから，無限の弾力性の条件を満たす概念の無限列 $\langle h_1\rangle, \langle h_2\rangle, \cdots$ は存在しない．

次章では，この例をイデアルの概念を用いて一般化する．

3. Nöther 環のイデアルと正データ学習

3·1 イデアルの既定と特徴例集合

整数全体の集合 $\mathbf{Z}$ や，有理数係数の n 変数の多項式全体の集合 $\mathbf{Q}[x_1, \cdots, x_n]$ には，“たし算”と“かけ算”が定義されており，両演算の間には分配法則が成り立っている．可換環 R とは，$\mathbf{Z}$ や $\mathbf{Q}[x_1, \cdots, x_n]$ をこのような演算をもつ集合として抽象化したものである．以下本稿では，R を単に**環**と呼ぶ．また，R は帰納的可算な集合であり，和と積の演算は計算可能であるとする．具体的には，$\mathbf{Z}$ や $\mathbf{Q}[x_1, \cdots, x_n]$ をイメージしてほしい．

環 R の部分集合 I は

- 任意の $f, g \in I$ に対し，$f - g \in I$,
- 任意の $f \in I$ と $h \in R$ に対し，$hf \in I$,

を満たすとき，R の**イデアル**と呼ばれる．環 R の要素 $f_1, f_2, \cdots, f_r$ に対して，R の部分集合

$$\langle f_1, f_2, \cdots, f_r\rangle = \left\{\sum_{i=1}^{r} h_i f_i \middle| h_i \in R\right\}$$

はイデアルとなる．このイデアルを $\{f_1, f_2, \cdots, f_r\}$ で**生成されたイデアル**と呼び，集合 $\{f_1, f_2, \cdots, f_r\}$ を**基底**と呼ぶ．環 R のイデアル I は $I = \langle f_1, f_2, \cdots, f_r\rangle$ となるような有限

個の要素$f_1, f_2, \cdots, f_r$が存在するとき，**有限生成である**という．

〔例 9〕整数環$\mathbf{Z}$において，hの倍数の集合$\langle h\rangle$はイデアルである．イデアルはすべて$\langle h\rangle$の形で得られる．つまり有限生成である．

〔例 10〕多項式環$\mathbf{Q}[x, y]$において，

$$I_1=\langle x^2+xy+y^3,\ x^3+2x^2y+y^2\rangle$$
$$I_2=\langle x^2+y,\ x^3+y^4\rangle$$

とすると

$$x^4+3x^3y+2xy^2+xy^3+x^3+x^2y+xy^2+y^4$$
$$=x(x^2+xy+y^3)+(x+y)(x^3+2x^2y+y^2)\in I_1,$$
$$x^5+x^4y+y^3\not\in I_1,$$
$$2x^2y^4+x^5+xy^2$$
$$=(xy+y^4)(x^2+y)+(x^2-y)(x^3+y^4)\in I_2$$

である．基底$\{f_1, f_2, \cdots, f_r\}$を特別な形，すなわち被約Gröbner基底に変換することにより，gに対して$g\in\langle f_1, f_2, \cdots, f_r\rangle$であるかどうかを判定することができる（例えば，[Cox 07]を参照）．

有限生成であるイデアルは，その基底を“イデアルを定義する規則性の表現”とみなすことにより，概念とみなすことができる．仮説空間はRの有限部分集合全体の族$\mathcal{F}$であり，概念空間は

$$\mathcal{I}(\mathcal{F})=\{\langle f_1, f_2, \cdots, f_r\rangle \mid f_1, f_2, \cdots, f_r\in R\}$$

である．すると，有限生成であるイデアルを学習対象にした正データ学習を考えることができる．定義から$\langle f_1, \cdots, f_r\rangle$は$\{f_1, \cdots, f_r\}$を含む“包含関係に関して最小”のイデアルである．この性質はイデアルの基底が文法としての機能をもつと同時に，特徴例集合にもなっていることを意味している．つまり，次の命題が従う．

〈命題 1〉有限生成であるイデアル$I=\langle f_1, f_2, \cdots, f_r\rangle$に対して，集合$\{f_1, f_2, \cdots, f_r\}$は$I$自身の$\mathcal{I}(\mathcal{F})$における特徴例集合である．したがって，有限生成であるイデアル全体の族$\mathcal{I}(\mathcal{F})$は正データから極限同定可能となる．

一般の環Rでは，有限生成ではないイデアルが存在する．しかし，$\mathbf{Q}[x_1, \cdots, x_n]$については，次の事実が知られている．

［定理 1］（**Hilbert**）$\mathbf{Q}[x_1, \cdots, x_n]$の任意のイデアルは有限生成である．

命題 1 と合わせると，次の系を得る．

（系 1）$\mathbf{Q}[x_1, \cdots, x_n]$のイデアル全体からなる族は正データから極限同定可能となる．つまり，$\mathbf{Q}[x_1, \cdots, x_n]$のイデアル全体は自然な形で極限同定が可能となる．

3・2 Nöther 性と有限の弾力性

代数学では，イデアルが有限基底をもつことを，Nöther 性を用いて特徴付けている．環Rのイデアルの無限列$I_1, I_2, I_3, \cdots$で

$$I_1\subseteq I_2\subseteq\cdots\subseteq I_n\subseteq\cdots \quad (3)$$

を満たすものに対して，必ず$I_N=I_{N+1}=\cdots$となるNが存在するとき，Rは**Nöther 性をもつ**，あるいは**Nöther 環**（Nötherian ring）であるという．

［定理 2］環Rの任意のイデアルが有限生成である⇔RがNöther 環である．

多項式環と正データからの極限同定の関係は，Nöther 環と正データからの極限同定の関係に一般化することができる．環Rのイデアル全体の族$\mathcal{I}$が仮説空間$\mathcal{H}$の要素を用いて，$\mathcal{I}=\{I(H) \mid H\in\mathcal{H}\}$に表されているとするが，イデアルが有限基底をもつことをいったん離れるため，仮説空間$\mathcal{H}$は$\mathcal{F}$のように，Rの部分集合を用いて定義されているとは限らないとしよう．このとき，次の定理が成り立つ．

［定理 3］（[Stephan 01]）環Rのイデアル全体$\mathcal{I}$が正データから極限同定可能である⇔RはNöther 環である．

定理 2 と合わせると次の系を得る．

（系 2）環Rのイデアル全体$\mathcal{I}$が正データから極限同定可能である⇔$\mathcal{I}=\mathcal{I}(\mathcal{F})$．

すなわち，極限同定学習を定義する仮説空間を環の要素の有限集合全体$\mathcal{F}$として設定できること自体が，正データから極限同定可能であることと同値なのである．Nöther 環は，そのイデアルが仮説空間内の仮説によって表現されている限り，正データから極限同定可能な環と一致する．このとき，イデアルの基底は命題 1 より特徴例集合となる．

ここで，正データからの極限同定可能性については，学習手続きが出力する推測が単調増加であることを要求していないことに注意する．つまり，推測$H_i, H_j\in\mathcal{H}$ $(i<j)$に対して，$C(H_i)\not\subseteq C(H_j)$であっても構わない．しかし，Nöther 性の条件となるイデアルの列（3）は単調増加である．このことは，$\mathcal{I}$を正データからの極限同定の対象とするときには，特別な形の学習が成立していることを意味する．以下ではその事実を明らかにする．

Nöther 性が，Rのイデアル全体の族$\mathcal{I}$が有限の弾力性をもつための十分条件であることはその定義から直接導くことができるが，必要条件にもなっている．すなわち，次の定理が成立する．

［定理 4］（[小林 05]）環Rのイデアル全体$\mathcal{I}$が正データから極限同定可能である⇔$\mathcal{I}$が有限の弾力性をもつ．

一般には，概念空間$\mathcal{C}$が有限の弾力性をもつことは，$\mathcal{C}$が正データから極限同定可能であることより強い条件であり，同値ではない*3．しかし，環のイデアルのクラス$\mathcal{I}$については，次の同値関係が成り立つ．

$\mathcal{I}$の各イデアルが正データから極限同定可能
⇔$\mathcal{I}$の各イデアルが特徴例集合をもつ
⇔$\mathcal{I}$が有限の弾力性をもつ

定理 4 の証明（⇒）有限の弾力性が正データからの極限同定可能性を導くことと，定理 3 より従う．

（⇐）$\mathcal{I}$が無限の弾力性をもったとする．このとき，Rの元の無限列$f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$とイデアルの無限列$I_1, I_2,$

*3 両条件に差があることに関しては，榊原ら [榊原 01] を参照．

$\cdots, I_n, \cdots$で任意のnに対して，$\{f_0, f_1, \cdots, f_{n-1}\} \subset I_n$かつ$f_n \not\in I_n$を満たすものが存在する．この$f_n$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$)を用いて，イデアルJ_nを

$$J_n := \langle f_0, f_1, \cdots, f_{n-1}\rangle$$

と定義すると，任意のnに対して，J_nはJ_{n+1}の真部分集合である．実際，J_nの定義より，(i) $J_n \subseteq I_n$，また，(ii)$f_n \in J_{n+1}, f_n \not\in I_n$より$J_{n+1} \not\subseteq I_n$である．したがって，イデアル列$J_0, J_1, J_2, \cdots, J_n, \cdots$は無限に続く真の増加列である．これは定理2に矛盾する．

以上のように，正データからの極限同定可能性に関するさまざまな条件と代数学におけるNöther環の性質の間には，ある種の類似性が見られるものの正データからの極限同定可能性では同値でない条件が，Nöther環では同値になってしまうなど，はっきりした差もあることがわかった．

3·3 イデアルの集合和

形式言語では言語の和は基本的な演算であり，例えば，正則表現も和を表す演算を含んでいる．また，有限の弾力性という条件は，言語の和からなる概念空間の正データからの極限同定可能性を示す際に重要である．二つの概念空間$\mathscr{C}$と$\mathscr{D}$に対して，概念空間$\mathscr{C} \uplus \mathscr{D}$を

$$\mathscr{C} \uplus \mathscr{D} = \{C \cup D \mid C \in \mathscr{C}, D \in \mathscr{D}\}$$

と定義する．概念空間$\mathscr{C}$と$\mathscr{D}$が有限の弾力性をもてば，$\mathscr{C} \uplus \mathscr{D}$も有限の弾力性をもつ [Motoki 91, Wright 89]．

一方，代数学ではイデアルの集合和はほとんど扱われてこなかった．代数学ではイデアルI, Jの“和”$I+J$はIの元とJの元で生成されるイデアルを意味しており，単なる集合和とはかなり異なる．実際，$\mathbf{Z}$においてイデアル$\langle 2\rangle$と$\langle 3\rangle$の和$\langle 2\rangle + \langle 3\rangle$には$3 - 2 = 1$に注意すれば，1が含まれていることがわかる．すなわち，イデアル$\langle 2\rangle + \langle 3\rangle$は1の倍数をすべて含んでいる．これは，$\langle 2\rangle + \langle 3\rangle = \mathbf{Z}$を意味している．一方，集合和$\langle 2\rangle \cup \langle 3\rangle$は“2の倍数または3の倍数全体”であるから，$\mathbf{Z}$には一致しない．また，$2 + 3 = 5 \not\in \langle 2\rangle \cup \langle 3\rangle$なので，$\langle 2\rangle \cup \langle 3\rangle$はイデアルではない．こうした事情もあって“演算で閉じた世界”を扱う代数学では，イデアルの集合和が考察されることはほとんどなかった．しかしながら，正データからの極限同定では，イデアルの集合和は研究対象として意味のあるものである．例えば，イデアルの集合和の特徴例集合や具体的なアルゴリズムはどういったものかという問題が出てくる．これらに関しては，[Kameda 08, Takamatsu 07] を参照されたい．

4. 学習機械の推測更新回数と超限順序数

正データからの極限同定学習において，概念空間$\mathscr{C}$の学習の困難さを測る尺度として，超限順序数を用いるものがある [Freivalds 93]．

最初に，正データから極限同定する学習機械を用いた概念空間の学習の困難さについて説明する．概念空間$\mathscr{C}$の概念$C = C(H_*)$を正データから極限同定する学習機械Mが与えられたとする．正データσをMに与えると，Mの出力する仮説の列$H_1, H_2, H_3, \cdots$に対しては，条件(2)を満たし，かつ，$C(H_*) = C(H_N)$であるようなNが存在するのであるが，このNに至るまでにMが仮説を変更した回数に着目する．この回数が多ければ$\mathscr{C}$は学習が困難であり，少なければ容易であると考えることができる．例をいくつか用いて説明しよう．

〔例11〕単純な例として，領域を$\mathbf{Z}$とし，概念空間$\mathscr{C}$が偶数全体の集合C_0と奇数全体の集合C_1だけからなるとする．このとき，どちらが未知の概念であっても，その任意の正提示について，学習機械Mは最初の正例e_1が偶数か奇数かによって推測を出力すればよく，その後，推測を変更する必要はない．

〔例12〕前の例と似たような状況は，領域を$\mathbf{Q}^2$とし，概念を直線

$$C(p, q, r) = \{(x, y) \mid px + qy + r = 0\}$$

としたときの概念空間$\mathscr{C} = \{C(p, q, r) \mid p, q, r \in \mathbf{Q}\}$についても同様である．任意の直線$C(p, q, r)$に対して，正データはその上の点の座標である．学習機械Mは（有理数として）異なる2点が正データに現れた時点で，p, q, rを決定することができ，以後推測を変更する必要はない．

〔例13〕領域を$\mathbf{Z}$として，$\mathscr{C} = \{\langle 2\rangle, \langle 3\rangle, \langle 6\rangle\}$とする．例4を参考にすると，学習機械$M$としては，正提示の中に，$e_i = 2^n$または$3^n$であるような正例が出現すれば$h_i = 2$または3とし，それまでは$h_j = 6$ ($1 \leqq j < i$)を推測として出力し続ける，というものがある．この機械が推測を更新する回数は高々1回である．

例11と13から，概念空間$\{\langle 2\rangle, \langle 3\rangle, \langle 6\rangle\}$は，概念空間$\{C_0, C_1\}$よりも，推測の変更回数が多いという意味で，学習することが困難であることを示している．推測の変更回数を用いて概念空間の学習の困難さを測るとき，**推測変更複雑さ**（mind change complexity）と呼ぶ．

推測変更複雑さを厳密に定義するためには，変更回数を記録するカウンタKを学習機械Mに付加する．正データを与え始める前に，推測の変更回数の上限Nの値をCにセットする．そして，Mが正データを読み始め，推測を出し始めるとき，推測を変更する度にNを1ずつ減らす．カウンタKの値が0となってしまうと推測の変更は許されない．

概念空間を整数イデアル全体$\{\langle h\rangle \mid h \in \mathbf{Z}^+\}$とした場合，未知の概念$\langle h_*\rangle$に対する正データの最初の正例$e_1 = mh_*$について，$m$はいくらでも大きな値をとることができる．したがって，例4の学習機械にカウンタKを付加しても，Kの初期値を有限の値にすることはできない．しかし，最初の例e_1を受け入れた時点で，Kをeの約数の個数，と設定することができる．このような場合，カウンタKを記号ωと設定する．

記号 ω は最小の**超限順序数**と解釈することができる．順序数とは，数の“順序”（何番目）を表す機能に着目した概念である．数にはもう一つ，“個数”（何個）を表す機能もあるが，無限の扱いにおいて両者は区別される．具体的には，順序数は小さいものから

$$
\begin{aligned}
&0 < 1 < 2 < 3 < \cdots \\
&< \omega < \omega+1 < \omega+2 < \cdots < \omega \cdot 2 \\
&< \omega \cdot 2 < \omega \cdot 2+1 < \omega \cdot 2+2 < \cdots \\
&< \omega \cdot \omega < \omega \cdot \omega+1 < \omega \cdot \omega+2 < \cdots \\
&< \omega^{\omega} < \omega^{\omega}+1 < \omega^{\omega}+2 < \cdots
\end{aligned}
$$

と続いていく．個数としては，ω から ω^{ω} の手前までは，すべて自然数の個数と同じであるが，順序数としてはすべて異なる．なお，順序数の理論では，$\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega = \omega$ であるが，推測変更回数の理論で用いる場合には，$\omega \cdot 2 = 2 \cdot \omega \neq \omega$ として扱う．

学習機械 M に付加されたカウンタ K の値として任意の超限順序数を認めるものとする．学習機械 M が推測を変更するときに，K の値が順序数 α であれば，それを $\beta < \alpha$ を満たす β に変更するものとする．カウンタの値が 0 になれば推測の変更は行えない．未知の概念 $C = C(H_*)$ に対する任意の正データが与えられたとき，カウンタ K の初期値を α にした学習機械 M が $C(H_*)$ を正データから極限同定するとき，M は**推測変更回数制限**（mind change bound）α で正データから極限同定するという．学習機械 M は概念クラス $\mathscr{C}$ の各概念を推測変更回数制限 α で正データから極限同定するとき，$\mathscr{C}$ を**推測変更回数限界** α で正データから極限同定するという．

［定理 5］（[Stephan 01]）概念空間を整数環 $\mathbf{Z}$ のイデアル全体は，推測変更回数制限 ω で極限同定可能である．多項式環 $\mathbf{Q}[x_1, \cdots, x_n]$ のイデアル全体は，推測変更回数制限 ω^n で極限同定可能である．

推測変更回数は最低でもどのような順序数に設定しなければならないか，つまり，推測変更回数の下限が問題となる．整数環 $\mathbf{Z}$ のイデアル全体は，$\alpha < \omega$ なる α，つまり有限の α を推測変更回数制限とすると極限同定できないことは容易にわかる．多項式環 $\mathbf{Q}[x_1, \cdots, x_n]$ のイデアル全体は，$\alpha < \omega^n$ なる α を推測変更回数制限とすると極限同定できない [Stephan 01].

数学基礎論においては，$\omega^{\omega^{\omega}}$ のような大きな超限順序数の意味が問題となってきた．超限順序数を推測変更回数として用いる場合には，推測変更回数の下界が十分大きな超限順序数であるような概念空間をパターン言語を用いて構成することができる．パターン言語とは，有限アルファベット Σ 上のパターンを規則性の表現とする形式言語である．パターンとは Σ 中の記号と変数からなる有限列である．パターン π の表す形式言語 $L(\pi)$ とは，π 中の変数に Σ^* の文字列を代入することで構成する．

〔例 14〕アルファベット $\Sigma = \{a, b\}$ のときのパターンとしては $\pi = abxbbyax$（x, y は変数）があり，変数 x と y にそれぞれ，ε, a, b, ab などを代入することで $C(\pi)$ が次のように構成される．

$$
C(\pi)=\left\{\begin{array}{l}
abbba, abbbaa, ababbaa, abbbba, abbbbab, \\
ababbaaa, ababbbaa, abbbbaab, abbbbbab, \\
\cdots, abbbaba, ababbbaab, \cdots
\end{array}\right\}
$$

概念空間 $\mathscr{C}$ に対して，新たな概念空間

$$
\mathscr{C}^{\omega}=\left\{C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n \,\middle|\, \begin{array}{l} C_i \in \mathscr{C} \quad \text{for} \quad i=1,2,\cdots,n \\ \text{and } n \geqq 1 \end{array}\right\}
$$

を $\mathscr{C}$ の**非有界和**（unbounded union）と呼ぶ．このとき，次が成り立つ．

［定理 6］（[de Brecht 06]）領域を Σ^* とするとき，任意の γ（$1 \leqq \gamma < \omega$）に対して，推測変更回数の下界が $\omega^{\omega^{\gamma}}$ であるような概念空間をパターン言語の非有界和を用いて構成することができる．

文字列の連接演算は可換ではないが，もしそれが可換であれば上の例における π は $\pi = a^4b^2x^2y$ となるので，パターンは形式言語と代数学を結ぶ位置にあるといえる．

5. 概念空間上の位相

本章では，概念空間の位相から始めて，概念空間の連続な変換による学習を解説する．位相空間論では，開集合を公理的に定義することから始めて，連続写像を定義する．直感的には開集合は数直線の開区間と考えていただければよい．

集合 X が与えられたとき，その部分集合で**開集合**と呼ばれるもの全体 $\mathscr{O}$ は，次の条件を満たすものとする．

(1) $X, \emptyset \in \mathscr{O}$,

(2) $\mathscr{O}$ の任意の有限個の元の共通部分集合が $\mathscr{O}$ に属する，

(3) $\mathscr{O}$ の任意の部分集合の和集合が $\mathscr{O}$ に属する．

開集合の補集合を**閉集合**という．実数 $\mathbf{R}$ の数直線では，開集合は開区間，閉集合は閉区間をイメージしていただければよい．部分集合の集まり $\mathscr{O}$ を X 上の**位相**，X と $\mathscr{O}$ の組 $\langle X, \mathscr{O} \rangle$ を位相空間と呼ぶ．

集合 X の部分集合の族 $\mathscr{B}$ を含む X 上の最小の位相 $\mathscr{O}_{\mathscr{B}}$（つまり，$\mathscr{B} \subseteq \mathscr{O}$ かつ $\mathscr{B}$ を含む X 上の任意の位相 $\mathscr{O}$ が $\mathscr{O}$ を含む）を $\mathscr{B}$ から**生成される**位相という．数直線の場合は開区間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ の族が $\mathscr{B}$ となる．

位相空間における**連続写像**は次のように定義する．位相空間 $\langle X, \mathscr{O}_X \rangle$ と $\langle Y, \mathscr{O}_Y \rangle$ の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続であるとは，任意の $U \in \mathscr{O}_Y$ に対して $f^{-1}(U) \in \mathscr{O}_Y$ を満たすことをいう．

領域を Σ^* とする概念空間 $\mathscr{C}$ が与えられたとき，$\mathscr{C}$ の位相を定義する．まず，Σ^* の部分集合 S に対して，$\uparrow_{\mathscr{C}} S = \{L(G) \in \mathscr{C} \mid S \subseteq L(G)\}$ と定義する．$\mathscr{C}$ の部分集合の族

$$
\{\uparrow_{\mathscr{C}} F \mid F \text{ は } \Sigma^* \text{ の有限部分集合である}\}
$$

から生成される位相を $\mathscr{C}$ 上の **Π-位相**と呼び，$\Pi(\mathscr{C})$ と表す．概念空間の間の写像が Π-位相において連続であるとき，その写像を **Π-連続写像**と呼ぶ．

一般に，$f: \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ が Π- 連続写像であることは，任意の $L(H) \in \mathcal{C}_1$ の正提示 σ を入力として $f(L(H)) \in \mathcal{C}_2$ の正提示 $M(\sigma)$ を枚挙していく（オラクル）チューリング機械 M が存在することと同値である．

単射の Π- 連続写像 $f: \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ が存在するとき，$\mathcal{C}_1$ が $\mathcal{C}_2$ に**還元可能**であるといい，$\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2$ と書く．直感的には，$\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2$ ならば，$\mathcal{C}_2$ を極限同定する学習機械を，$\mathcal{C}_1$ を極限同定する学習機械に変換できる．実際，$\mathcal{C}_2$ を極限同定する学習者 ψ_2 から $\mathcal{C}_1$ を極限同定する ψ_1 を次のように構成できる．

まず，$\mathcal{C}_1$ の概念 $L = L(H_*)$ の正提示 σ に対して，f の Π- 連続性より $f(L(H_*)) \in \mathcal{C}_2$ の正提示 $M(\sigma)$ を枚挙できる．この正提示 $M(\sigma)$ を ψ^2 に提示して，ψ_2 の n 番目の仮説 H_n に対して，ψ_1 は $f(L(H_n{}^*)) = L(H_n)$ を満たす仮説 H'_n を出力する．ψ_2 が $\mathcal{C}_2$ を極限同定するので，ψ_2 はいつか $L(H) = f(L(H_*))$ を満たす仮説 H に収束する．すると，ψ_1 は $f(L(H)) = L(H)$ を満たす仮説 H' に収束することが容易にわかる．f が単射であるから，$f(L(H')) = L(H) = f(L(H_*))$ より $L(H') = L(H_*)$ が成り立つ．σ と $L(H_*) \in \mathcal{C}_1$ が任意であるから，ψ_1 は $\mathcal{C}_1$ を極限同定することがわかる．

各概念が特徴例集合をもつような概念空間は Π- 位相を用いて特徴付けることができる．任意の $x \in X$ に対して，x を含む最小の開集合 $U_x \in \mathcal{O}$ が存在するとき，位相空間 $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ は **Alexandrov 空間**と呼ばれる．

[**定理 7**]（[de Brecht 08]）概念空間 $\mathcal{C}$ が Alexandrov 空間であることと，$\mathcal{C}$ の各概念が特徴例集合をもつことは同値である．

概念空間 $\mathcal{C}_1$ が Alexandrov 空間であるとき，$f: \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ が Π- 連続写像であるための必要十分条件は，任意の $L(G)$，$L(G') \in \mathcal{C}_1$ に対して，$L(G) \subseteq L(G')$ ならば $f(L(G)) \subseteq f(L(G'))$ が成り立つことである [de Brecht 08]．この性質より，Alexandrov 空間からの Π- 連続写像が特に扱いやすい．

例えば，多項式環 $\mathbf{Q}[x_1, \cdots, x_m]$ のイデアル全体を $\mathcal{I}_m$，$\mathbf{Q}[x_1, \cdots, x_n]$（$m \leq n$）のイデアル全体を $\mathcal{I}_n$ とすると，$\mathcal{I}_m$ は $\mathcal{I}_n$ に還元可能である．実際，$\mathcal{I}_m$ は Alexandrov 空間であるが，各イデアル $I \in \mathcal{I}_m$ に対して

$$f(I) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i b_i \,\middle|\, r \geqq 1,\ a_i \in I,\ b_i \in \mathbf{Q}[x_1, \cdots, x_n] \right\}$$

と定義すると，$f: \mathcal{I}_m \to \mathcal{I}_n$ は単射で Π- 連続になる．

数学において，Alexandrov 空間は半順序付き集合との関係として注目される．例えば，$(P, \leqq)$ が半順序集合ならば，$\mathcal{O} = \{U \subseteq P \mid \forall x \in U : x \leqq y \Rightarrow y \in U\}$ というように P 上に位相 $\mathcal{O}$ を導入すれば，$\langle P, \mathcal{O} \rangle$ は Alexandrov 空間となる．この位相において，半順序集合の間の単調写像と連続写像が一致する．

さて，位相空間の理論において T_0, T_1, T_2 などの分離公理はよく知られている．より強い分離公理を満たせば，位相空間の点を開集合によってより良く分離できる．学習理論の場合，開集合は観察したデータ（正提示）に矛盾しない概念の集合と考えられるから，概念空間が強い分離公理を満たすと観察したデータより概念を区別しやすくなる．

学習理論に利用できる分離公理としては，**T_D- 分離公理**がある．位相空間 $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ が T_D- 分離公理を満たすとは，任意の $x \in X$ に対して $\{x\} = U \cap A$ を満たす開集合 U と閉集合 A が存在するときにいう．T_D- 分離公理は T_0- 分離公理より真に強く，T_1- 分離公理より真に弱い．T_D- 分離公理が主張しているのは，任意の概念を，その概念に真に含まれている概念から開集合で分離できる，ということである．

[**定理 8**]（[de Brecht 08]）概念空間 $\mathcal{C}$ が高々可算個の概念を含むとき，次が同値である．

(1) $\mathcal{C}$ の各概念が有限証拠集合をもつ

(2) $\mathcal{C}$ は T_D- 分離公理を満たす

(3) $\mathcal{C} \leqq \mathcal{C}'$ を満たす Alexandrov 空間 $\mathcal{C}'$ が存在する．

6. おわりに

本稿では，正データからの極限同定という機械学習では古典的なモデルが代数学を中心に数学と深く関わっていることを述べてきた．このような関係に気づかせていただいたのは，Hilbert を中心とした数学史の研究をされている林 晋氏である．林氏は，本稿では代数学において証明済みの定理として扱っている定理 1 について，“Hilbert の原証明が奇妙である，” と指摘したのである．その数理論理学上の結果の詳細は [Hayashi 02] を，またそれが数学史においてどのような意味をもつかについては，[ゲーデル] を参照されたい．

◇ 参 考 文 献 ◇

[Angluin 80] Angluin, D.: Inductive inference of formal languages from positive data, *Information and Control*, Vol. 45, pp. 117-135 (1980)

[有川 87] 有川節夫，篠原 武，宮原哲浩：帰納推論の理論，大須賀節雄，佐伯 胖 編：知識の獲得と学習，オーム社（1987）

[de Brecht 06] de Brecht, M. and Yamamoto, A.: Mind change complexity of inferring unbounded unions of pattern languages from positive data, *Proc. ALT 2006*（*Lecture Notes in Artificial Intelligence 4264*），pp. 158-168, Springer（2006）

[de Brecht 07] de Brecht, M., Kobayashi, M., Tokunaga, H. and Yamamoto, A.: Inferability of closed set systems from positive data, *New Fromtiers in Artificial Intelligence*（*Lecture Notes in Artificial Intelligence 4384*），pp. 265-275, Springer（2007）

[de Brecht 08] de Brecht, M. and Yamamoto, A.: Topological properties of concept spaces, *Proc. ALT 2008*（*Lecture Notes in Artificial Intelligence 5254*），pp. 374-388, Springer（2008）

[Cox 07] Cox, D., Little, J. and O'Shea, D.: *Ideals, Varieties, and Algorithms, An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*（Third Edition），Springer（2007）（第 2 版の邦訳：落合啓之ほか 訳，グレブナ基底と代数多様体入門〈上〉イデアル・多様体・アルゴリズム（上）（下），シュプリンガー・フェアラーク東京（2000））

[Freivalds 93] Freivalds, R. and Smith, C.: On the role of procastination for machine learning, *Information and*

Computation 107, 237-271（1993）
[ゲーデル] ゲーデル 著，林 晋，八杉満利子 訳：不完全性定理，岩波書店（2006）
[Gold 67] Gold, D.: Language identfication in the limit, *Information and Control,* Vol. 10, pp. 447-474（1967）
[Hayashi 02] Hayashi, S.: Mathematics based on learning, *Proc. ALT 2002*（*Lecture Notes in Artificial Intelligence 2533*），pp. 7-21, Springer（2002）
[Jain 99] Jain, S., Osherson, D., Royer, J. S. and Sharma, A.: *Systems That Learn. An Introduction to Learning Theory,* 2nd edition, MIT Press（1999）
[Kameda 08] Kameda, Y., Tokunaga, H. and Yamamoto, A.: Learning Noetherian closed set systems via characteristic set, *Proc. ICGI 2008*（*Lecture Notes in Artificial Intelligence 5278*），pp. 98-110, Springer（2008）
[Kobayashi 96] Kobayashi, S.: Approximate identification, finite elasticity and lattice structure of hypothesis space, Technical Report, CSIM 96-04, Dept. of Compt. Sci. and Inform. Math., Univ. of Electro-Communications（1996）
[小林 05] 小林正典，徳永浩雄，山本章博：多項式環のイデアルと正データからの学習，第8回情報論的学習理論ワークショップ予稿集，pp. 129-134（2005）
[Martin 02] Martin, E., Sharma, A. and Stephan, F.: Learning, logic, and topology in a common framework, *Proc. ALT 2002*（*Lecture Notes in Artificial Intelligence 2533*），pp. 248-262, Springer（2002）
[Motoki 91] Motoki, T., Shinohara, T. and Wright, K.: The correct definition of finite elasticity: Corrigendum to identification of unions, *Proc. COLT'91*, pp.375, 587-626, Morgan-Kaufman（1991）
[永田 79] 永田雅宜：可換環論，紀伊國屋数学叢書 1，紀伊國屋書店（1979）
[榊原 01] 榊原康文, 小林 聡, 横森 貴:計算論的学習, 培風館（2001）
[Stephan 01] Stephan, F. and Ventsov, Y.: Learning algebraic structures from text, *Theoretical Computer Science,* Vol. 26, pp. 221-273（2001）
[Takamatsu 07] Takamatsu, I., Kobayashi, M., Tokunaga, H. and Yamamoto, A.: Characteristic sets of bounded unions of polynomial ideals, *New Frontiers in Artificial Intelligence*（*Lecture Notes in Artificial Intelligence 4914*），pp. 318-329, Springer（2007）
[van der Waerden 40] van der Waerden, B. L.: *Moderne Algebra* II, Spiringer（1940）（邦訳：現代代数学 3，銀林 浩 訳，東京図書（1979））
[Wright 89] Wright, K.: Identification of unions of languages drawn from identifiable class, *Proc. COLT'89*, pp. 328-388, Morgan-Kaufmann（1989）
[山本 04] 山本章博：仮説の嗜好性と尤度—記号的学習と統計手法の比較から—，人工知能学会人工知能基本問題研究会資料 SIG-FPAI-A401, pp. 61-65（2004）

2009年9月11日　受理

著者紹介

デ・ブレクトマシュー（正会員）
2002年テキサス大学卒業．2007年京都大学大学院情報学研究科知能情報学専攻修士課程修了．同年同研究科知能情報学専攻博士課程入学，現在に至る．主にトポロジーとその機械学習への応用に関する研究に従事．

徳永　浩雄（正会員）
1984年京都大学理学部卒業．1986年同大学院理学研究科修士課程修了．1988年高知大学理学部助手．1994年同助教授．2000年東京都立大学理学研究科助教授．2005年首都大学東京都市教養学部教授．2006年同大学院理工学研究科教授．理学博士．主に代数幾何学の研究に従事．ここ数年は抽象代数学と機械学習の関わりの研究にも力を入れている．日本数学会会員．

山本　章博（正会員）
1985年京都大学理学部卒業．1990年九州大学大学院総合理工学研究科博士課程修了．同年北海道大学工学部講師．1994年同助教授，2003年京都大学大学院情報学研究科教授．理学博士．主として論理プログラミングの基礎理論とその機械学習への応用に関する研究に従事．情報処理学会，日本ソフトウェア科学会各会員．