# Sprawozdanie – Laboratorium nr 12

Zastosowanie ekstrapolacji Richardsona do całkowania przy użyciu wzorów: trapezów i 3/8

Tomasz Rajchel

2019/06/06

## Wstęp teoretyczny

### Ekstrapolacja Richardsona

Jest to proces rekurencyjnego wyznaczania pewnej wielkości (pochodnej, całki), co można zdefiniować przy pomocy wzoru:

$$D_{n,k-1} = L + \sum_{j=k}^{\infty} A_{jk} \left(\frac{h}{2^n}\right)^{2j} \tag{1}$$

Algorytm jest następujący:

1. Wybieramy h i liczymy

$$D_{n,0} = \phi\left(\frac{h}{2^n}\right),\ n = 0,1,2,\ldots,M \tag{2}$$

2. Następnie obliczamy

$$\begin{gathered} D_{n,k} = \frac{4^k D_{n,k-1} - D_{n-1,k-1}}{4^k - 1} \\ k = 1,2,\ldots,M \\ n = k, k+1,\ldots,M \end{gathered} \tag{3}$$

Obliczając rekurencyjnie wyrazy wg pkt. 2 dostajemy przybliiżenia

$$\begin{gathered} D_{n,0} = L + O(h^2) \\ D_{n,1} = L + O(h^4) \\ D_{n,2} = L + O(h^6) \\ D_{n,3} = L + O(h^8) \\ \cdots\cdots\cdots \\ D_{n,k-1} = L + O(h^{2k}),\ h \to 0 \end{gathered} \tag{4}$$

W powyższych wzorach:
M – ilość powtórzeń algorytmu
h – szerokość podprzedziału
L – kolejne przybliżenia funkcji

### Metoda trapezów

Metoda trapezów jest metodą numerycznego obliczania całek w przedziale:

$$h=b-a \tag{5}$$

Współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa (N=1)wynoszą:

$$A_0=-h\int_0^1 (t-1)\,dt=\frac{1}{2}h \tag{6}$$

$$A_1=h\int_0^1 (t)\,dt=\frac{1}{2}h \tag{7}$$

Co ostatecznie prowadzi do wzoru na całkę:

$$S(f)=\frac{1}{2}h(f_0+f_1) \tag{8}$$

### Metoda 3/8

Metoda 3/8 jest kwadraturą Newtona-Cotesa korzystającą wielomianu interpolującego (N=3). Jest dana wzorem (dla jednego przedziału):

$$S(f)=\frac{3}{8}h(f_0+3f_1+3f_2+f_3) \tag{9}$$

## Opis zadania

Dana jest funkcja

$$f(x)=\ln(x^3+3x^2+x+0.1)\cdot\sin(18x) \tag{10}$$

Celem zadania jest obliczenie wartości całki:

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx \tag{11}$$

Stosując ekstrapolację Richardsona w połączeniu z wzorami:

**Trapezów:**

$$S=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{h}{2}(f_i+f_{i+1}) \tag{12}$$

**3/8**

$$S=\sum_{i=0}^{(N/3)-1}\frac{3h}{8}(f_{3i}+3f_{3i+1}+3f_{3i+2}+f_{3i+3}) \tag{13}$$

Gdzie: h jest odległością między sąsiednimi węzłami, (N+1) jest liczbą węzłów kwadratury (węzły numerujemy od 0 do N).

Wyniki zapiszemy w tablicy trójkątnej D, gdzie numer wiersza *w = 0, 1, 2, …, n* będzie definiował liczbę węzłów kwadratury.

Dla trapezów:

$$h_w = \frac{b-a}{2^w}, \; N = 2^w \tag{14}$$

Dla wzoru 3/8:

$$h_w = \frac{b-a}{3\cdot 2^w}, \; N = 3\cdot 2^w \tag{15}$$

Pozostałe elementy tablicy:

$$\begin{matrix} D_{0,0} & & & & \\ D_{1,0} & D_{1,1} & & & \\ D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D_{n,0} & D_{n,1} & D_{n,2} & \cdots & D_{n,n} \end{matrix} \tag{16}$$

Wyznaczymy korzystając z pierwszej kolumny i wzoru ekstrapolacyjnego:

$$D_{n,k} = \frac{4^k D_{n,k-1} - D_{n-1,k-1}}{4^k - 1} \tag{17}$$

# Wyniki / Wnioski

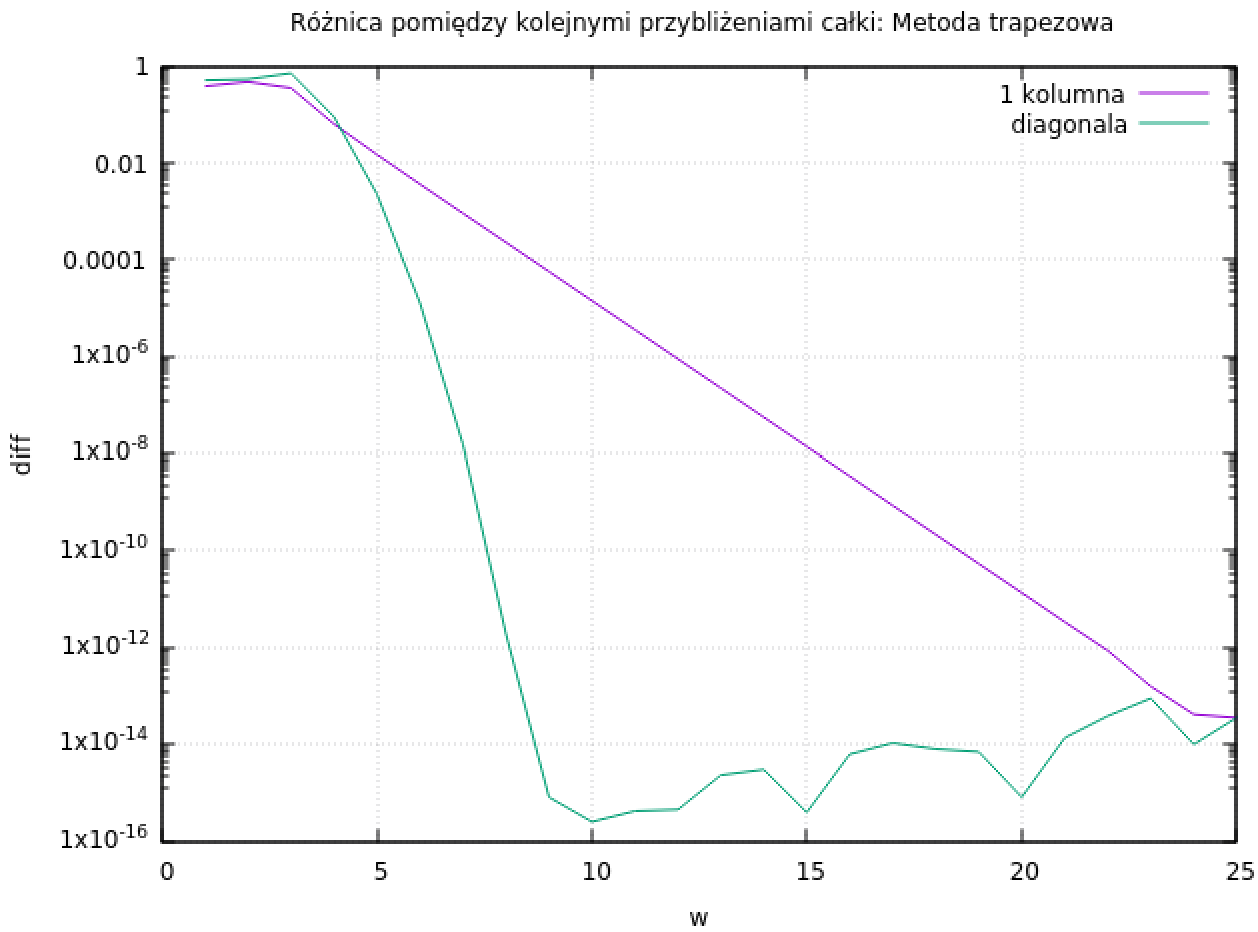
## Metoda trapezów

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -0.611769 | | | | | | | | |
| -0.225798 | -0.097141 | | | | | | | |
| 0.249839 | 0.408385 | 0.442087 | | | | | | |
| -0.103266 | -0.220968 | -0.262925 | -0.274116 | | | | | |
| -0.166821 | -0.188006 | -0.185809 | -0.184585 | -0.184234 | | | | |
| -0.181636 | -0.186575 | -0.186479 | -0.18649 | -0.186497 | -0.1865 | | | |
| -0.185278 | -0.186492 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | | |
| -0.186185 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | |
| -0.186411 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 |

W tablicy poniżej przedstawiono wartości elementów w pierwszej kolumnie i tych leżących na diagonali.

| w | $D_{w,0}$ | $D_{w,w}$ |
|---|---|---|
| 0 | -0.6117694336 | -0.6117694336 |
| 1 | -0.2257981458 | -0.0971410499 |
| 2 | 0.2498393627 | 0.4420869488 |
| 3 | -0.1032662652 | -0.2741156969 |
| 4 | -0.1668213661 | -0.1842337842 |
| 5 | -0.1816363823 | -0.1864995993 |
| 6 | -0.1852783076 | -0.1864868809 |
| 7 | -0.1861850002 | -0.1864868960 |
| 8 | -0.1864114378 | -0.1864868960 |

Przeanalizujemy teraz zbieżność tej metody. W celach doświadczalnych zwiększymy współczynnik n do 25 (Ogranicza nas moc obliczeniowa). Zobaczmy jak bardzo zmienia się przybliżenie wartości całki w kolejnych iteracjach. (Na wykresie przedstawiono wartość bezwzględną różnicy przybliżeń).




Widzimy, że bez używania ekstrapolacji Richardsona algorytm ma zbieżność wykładniczą (1 kolumna), a gdy skorzystamy z ekstrapolacji (diagonala) to zbieżność jest jeszcze lepsza. Kolejne przybliżenia wartości całki zmieniają się tylko o $\approx 10^{-15}$.

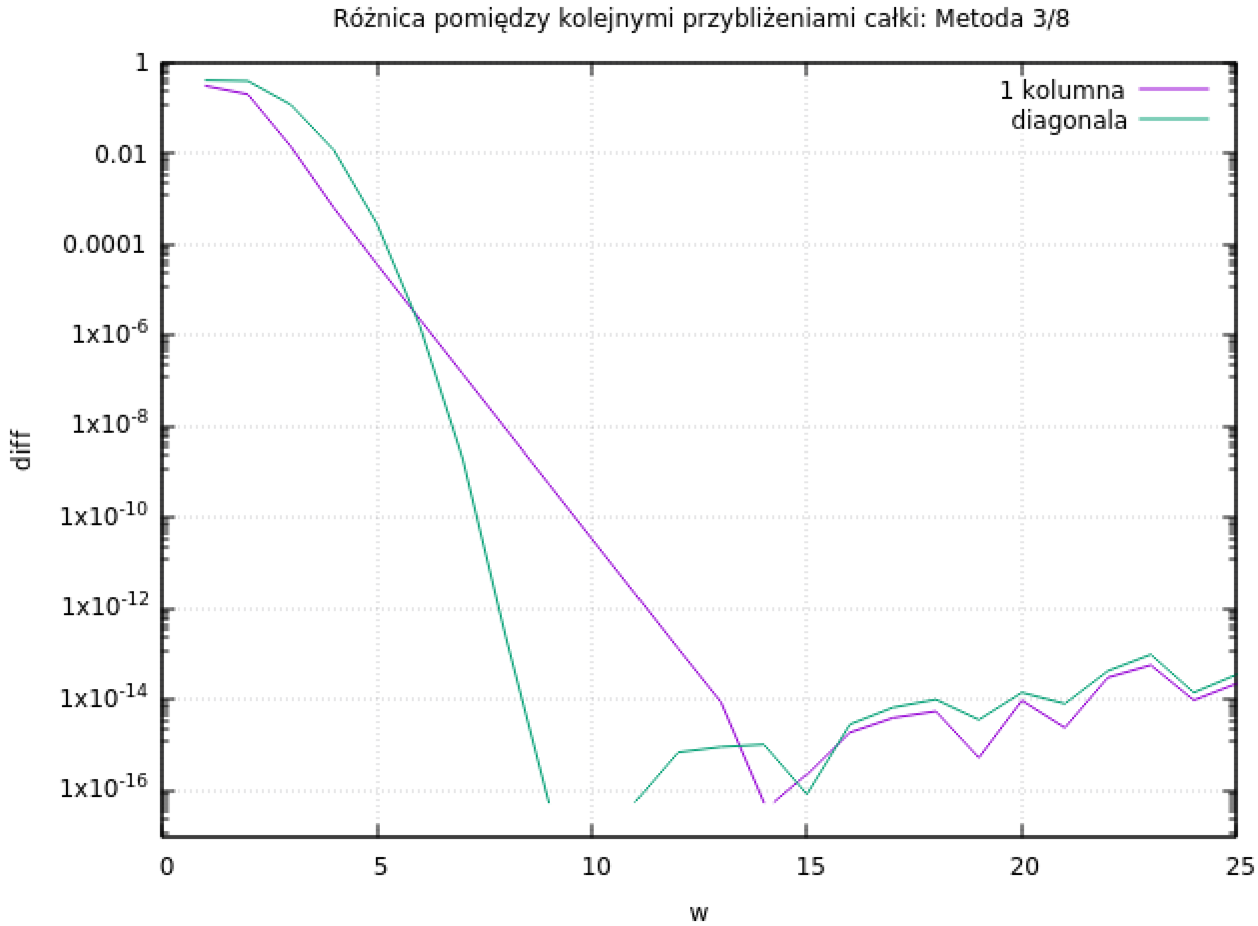
## Metoda 3/8

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -0.305892 | | | | | | | | |
| -0.00432877 | 0.0961922 | | | | | | | |
| -0.201133 | -0.266734 | -0.290929 | | | | | | |
| -0.187155 | -0.182495 | -0.176879 | -0.175069 | | | | | |
| -0.186526 | -0.186316 | -0.186571 | -0.186725 | -0.18677 | | | | |
| -0.186489 | -0.186477 | -0.186488 | -0.186487 | -0.186486 | -0.186485 | | | |
| -0.186487 | -0.186486 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | | |
| -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | |
| -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 | -0.186487 |

W tablicy poniżej przedstawiono wartości elementów w pierwszej kolumnie i tych leżących na diagonali.

| w | $D_{w,0}$ | $D_{w,w}$ |
|---|---|---|
| 0 | -0.3058917219 | -0.3058917219 |
| 1 | -0.0043287659 | 0.0961922194 |
| 2 | -0.2011329205 | -0.2909294070 |
| 3 | -0.1871546737 | -0.1750690029 |
| 4 | -0.1865258214 | -0.1867704777 |
| 5 | -0.1864892885 | -0.1864853061 |
| 6 | -0.1864870449 | -0.1864868979 |
| 7 | -0.1864869053 | -0.1864868960 |
| 8 | -0.1864868966 | -0.1864868960 |

Zobaczmy jak wygląda zbieżność tej metody:




Zbieżność w przypadku bez ekstrapolacji jest lepsza w porównaniu z metodą trapezową. Natomiast zbieżność w przypadku z ekstrapolacją jest podobna do tej z metody trapezowej. Również w tym przypadku zbieżność jest lepsza gdy zastosujemy ekstrapolację.