Sprawozdanie – Laboratorium nr 11

Odszumianie sygnału przy użyciu FFT - splot funkcji

Tomasz Rajchel
2019/05/30

Wstęp teoretyczny

Szybka transformacja Fouriera (FFT)

FFT jest wydajnym algorytmem (złożoność N $\log_2 N$) do liczenia dyskretnej transformaty Fouriera I transformaty do niej odwrotnej. W najpopularniejszej wersji algorytmu (FFT o podstawie 2) wektor próbek wejściowych musi mieć długosć N = 2^k, gdzie k jest liczbą naturalną.

Algorytm Radix-2

Zakładamy, że całkowita liczba węzłów jest potęgą 2:

$$x_j = \frac{2\pi}{N} j$$

$$j = 0,1,2,\ldots,N-1$$

$$N = 2^r, r \in N$$

Współczynniki wyznaczamy następująco:

$$c_k = \langle E_k, f\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} E_k(x_j) f(x_j) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \exp(-I x_j k) = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp\left(-I \frac{2\pi}{N} j k\right) \quad (1)$$

Grupujemy składniki parzyste (j = 2m) I nieparzyste (j = 2m+1):

$$c_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \exp\left(-I \frac{2\pi}{N}(2m)k\right) + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} \exp\left(-I \frac{2\pi}{N}(2m+1)k\right) \quad (2)$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$p_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \exp\left(-I \frac{2\pi}{N/2} m k\right) \quad (3)$$

$$q_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} \exp\left(-I \frac{2\pi}{N/2} mk\right) \quad (4)$$

$$\phi_k = \exp\left(-I \frac{2\pi}{N} k\right) \quad (5)$$

Możemy zapisać:

$$c_k = p_k + \phi_k q_k \tag{6}$$

Korzystamy teraz z okresowości wyrazów p_k oraz q_k:

$$p_{k+N/2} = p_k \qquad q_{k+N/2} = q_k \qquad \phi_{k+N/2} = -\phi_k \tag{7}$$

Kolejnym krokiem jest podział sum w p_k oraz w q_k na sumy zawierające tylko elemnty parzyste I nieparzyste. Po podziale, liczba elementów w każdej z dwóch powstałych sum jest dwukrotnie mniejsza niż w elemencie macierzystym. Proces rekurencyjnego podziału kończymy gdy liczba elementów jest równa 1.

Opis zadania

Liczba węzłów (pomiarów) sygnału jest równa $N = 2^k$, gdzie kolejno k = 8, 10, 12.
T = 1.0 – okres sygnału
t_{max} = 3T – maksymalny czasu rejestracji sygnału
dt = t_{max} / N
σ = T/20 – odchylenie standardowe (do funkcji gaussa)
ω = 2π/T – pulsacja

Zadanie polega na odszumieniu sygnału który w postaci niezaburzonej dany jest funkcją:

$$f_0(t) = \sin(1 \cdot \omega t) + \sin(2 \cdot \omega t) + \sin(3 \cdot \omega t) \tag{8}$$

Szum generujemy jako liczbę pseudolosową z przedziału $\Delta \in [-0.5, 0.5]$. Zaszumiony sygnał jest dany funkcją:

$$f(t) = f_0(t) + \Delta \tag{9}$$

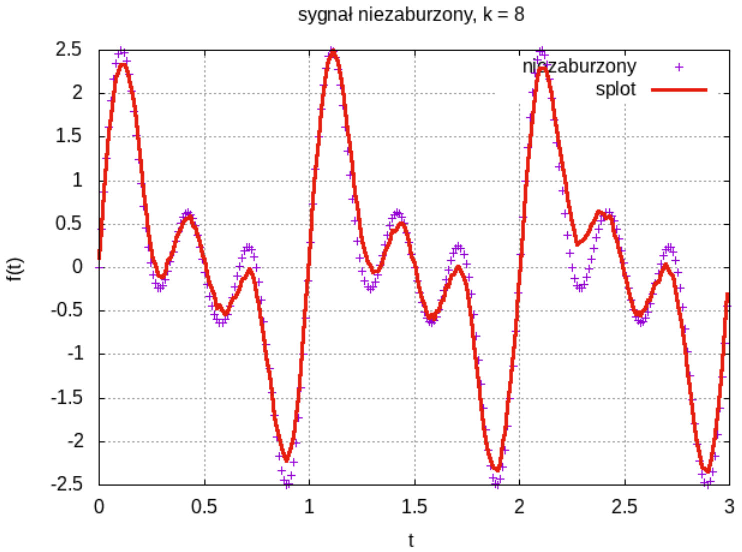
Jako funkcję wagową przyjmujemy funkcję gaussa g(t):

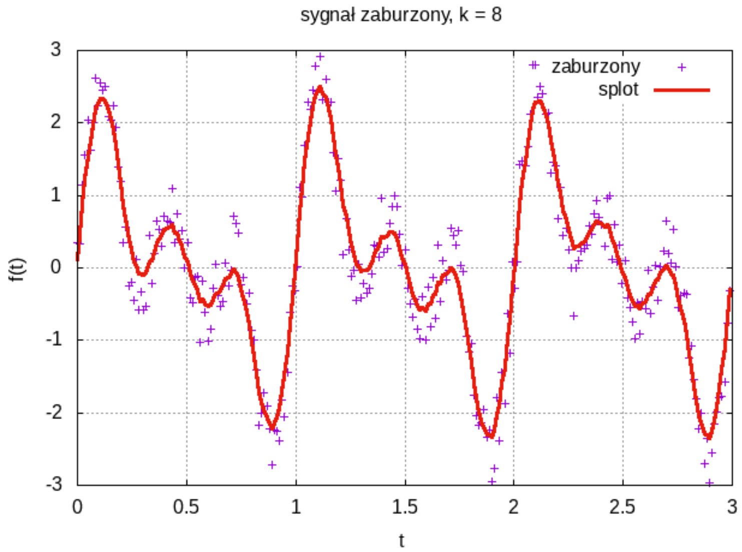
$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right) \tag{10}$$

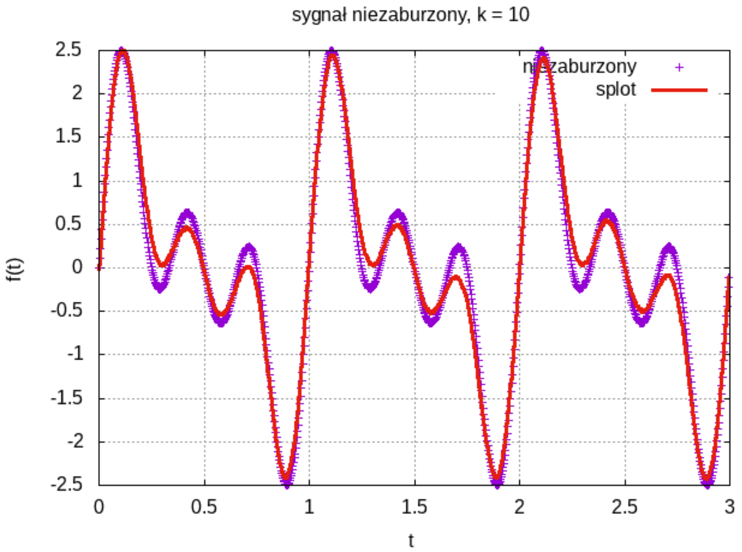
Szybką transformatę Fouriera obliczamy korzystając z biblioteki GSL.

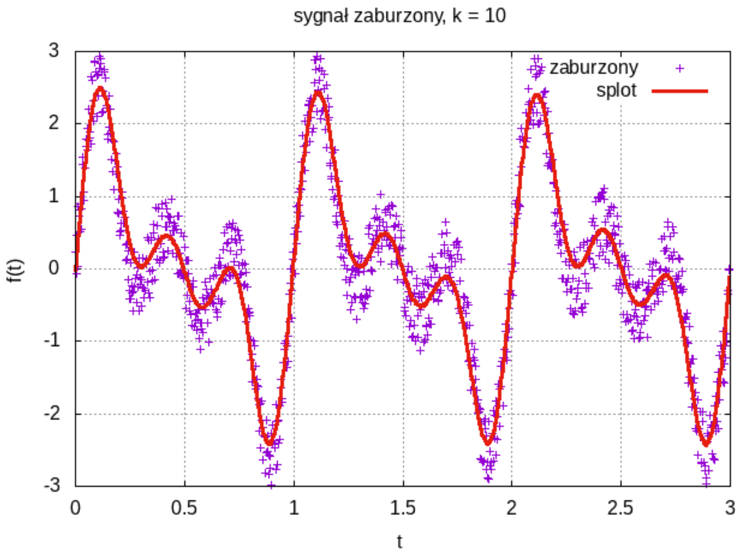
Wyniki

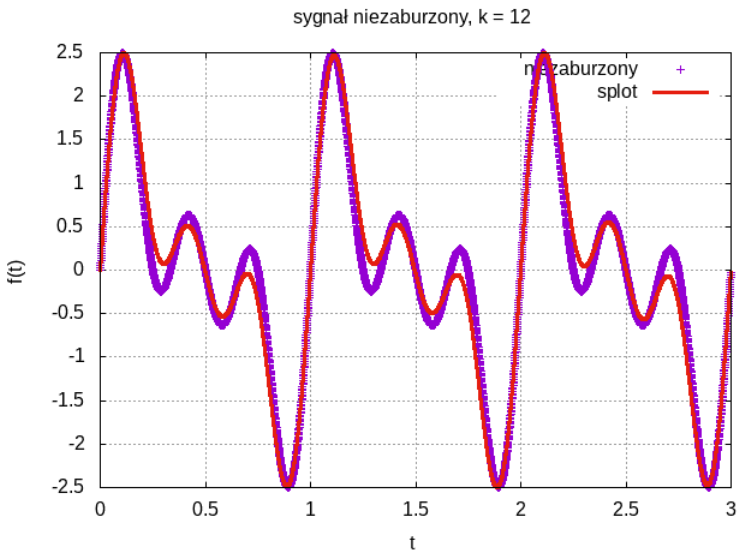
Sygnał niezaburzony/zaburzony i znormalizowany splot dla 2^8, 2^{10},2^{12} węzłów

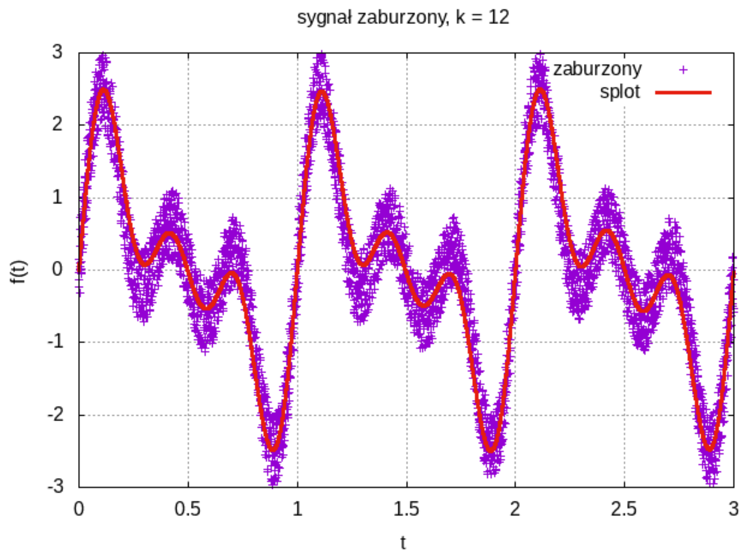












Wnioski

Dlaczego wykresy nie pokrywają się dla każdego t_i?

Z powodu przyjęcia dosyć dużej szerokości “okna” funkcji wagowej (σ = T/20) wartości sygnału są mocno uśredniane z wartościami sąsiednimi. Jeśli zmniejszymy odchylenie standardowe funkcji wagowej to uzyskamy dokładniejsze oszacowanie funkcji sygnału kosztem mniejszej gładkości. (wyniki dla sygnału niezaszumionego).

k	MSE, σ = T/20		MSE, σ = T/50
8	0.0412115	>	0.0214576
10	0.0309613	>	0.00863279
12	0.0393938	>	0.00208226

Czy jakość wygładzania zależy od ilości elementów w tablicy (tj. przy ustalonym czasie generowania sygnału tmax = 3T od częstości jego próbkowania dt)?

Tylko do pewnego stopnia. Widzimy, że dla k=10 jakośc wygładzenia jest lepsza niż dla k=8, ale już dla k=12 nie widać znaczącej poprawy.