Sprawozdanie – Laboratorium nr 2

Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

Tomasz Rajchel

2019/03/07

Wstęp teoretyczny

Rozkład LU

Dekompozycja macierzy **A** to znalezienie takich macierzy trójkątnych **L** (lower) i **U** (upper), które z macierza **A** związane są relacją:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} * \mathbf{U}$$

Oraz mają następującą postać:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

gdzie dodatkowo elementy diagonalne macierzy **L** są równe 1, dzięki czemu możemy zapisać macierze **L** i **U** w jednej macierzy, oszczędzając pamięć.

Mając macierze **L** i **U** możemy rozwiązać układ równań:

$$A\vec{x}=\vec{b}$$
$$LU\vec{x}=\vec{b}$$

poprzez rozwiązanie 2 układów równań:

$$L\vec{y}=\vec{b}$$
$$U\vec{x}=\vec{y}$$

Zauważmy, że w problemach gdzie macierz **A** jest stała, a zmienia się tylko wektor wyrazów wolnych $\vec{b}$ to wystarczy wyliczyć tylko jedno równanie z macierza trójkątną, co wiąże się z małym nakładem obliczeniowym (~1n^2).

Aby rozłożyć macierz A na macierze **L** i **U** wykorzystujmey metodę eliminacji Gaussa opisaną w sprawozdaniu nr 1.

Wyznacznik macierzy

Korzystając z własności macierzy:

- Wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi elementów na przekątnej

- $det(A*B)=det(A)*det(B)$
- **A** = **L** * **U**
- Macierz **L** ma same jedynki na przekątnej.

Możemy łatwo obliczyć wyznacznik macierzy $\mathbf{A}_{\mathbf{n\,x\,n}}$ który jest równy:

$$det(A)=det(U)=\prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy

Wskaźnik uwarunkowania macierzy określa w jakim stopniu dane wejściowe wpływają na błąd wyniku.

$$\text{cond}(A) = \|A\| * \|A^{-1}\|$$

Aby go obliczyć korzystamy z normy:

$$\|A\|_{1,\infty} = \max | a_{i,j} |$$

Która jest po prostu największą liczbą w macierzy.

Opis zadania

Macierz **A** jest macierzą kwadratową o liczbie wierszy i kolumn równej 4. Elementy macierzy indeksowane są od zera i zdefiniowane są następująco:

$$a_{ij}=\frac{1}{i+j+2}$$

Korzystając z biblioteki GSL – Gnu Scientific Library, mamy do wykonania następujące czynności:

1. Znalezienie rozkładu LU macierzy, przy użyciu funkcji:
   *gsl_linalg_LU_decomp(gsl_matrix *a, gsl_permutation *p, int *signum)*
2. Obliczenie wyznacznika macierzy A.
3. Znalezienie macierzy odwrotnej: A^{-1} korzystając z funkcji.
   *gsl_linalg_LU_solve(gsl_matrix *A, gsl_permutation *p, gsl_vector *b, gsl_vector *x)*
4. Obliczenie iloczynu A A^{-1} – korzystając ze standardowego mnożenia macierzy (metoda Cauchy'ego).
5. Obliczenie wskaźnika uwarunkowania macierzy.

Wyniki

Rozkład LU

Macierz **A** skonstruowana według podanej wcześniej definicji wygląda następująco:

$$A=\begin{pmatrix}0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000\\ 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667\\ 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429\\ 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250\end{pmatrix}$$

Dokonujemy jej dekompozycji na macierze **L** i **U**:

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0.5 & 1 & 0 & 0\\ 0.6667 & 0.8333 & 1 & 0\\ 0.4 & 1 & -0.8571 & 1\end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix}0.5 & 0.3333 & 0.25 & 0.2\\ 0 & 0.0333 & 0.0417 & 0.0429\\ 0 & 0 & -0.0014 & -0.0024\\ 0 & 0 & 0 & 0.0001\end{pmatrix}$$

Wyznacznik

Wyznacznik macierzy **A** jest równy:

det(A) = 0.5 * 0.033333 * (-0.001389) * 0.000102 ≈ -2.36206 * 10^{-9}

Macierz odwrotna

Macierz odwrotną A^{-1} znajdujemy rozwiązując 4 układy równań z wektorami wyrazów wolnych:

$$b_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, b_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, b_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, b_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Z naszych obliczeń wynika, że jest ona równa:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}200 & -1200 & 2100 & -1120\\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400\\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800\\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800\end{pmatrix}$$

Wiemy, że iloczyn $\mathbf{AA}^{-1}$ = **I**. Wykonując obliczenia numerycznie uzyskujemy jednak wynik:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2.27374\text{e-}13 & 0 & 0\\ -2.84217\text{e-}14 & 1 & 4.54747\text{e-}13 & 0\\ 0 & -2.27374\text{e-}13 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy

Korzystając z podanej wcześniej definicji obliczamy wskaźnik uwarunkowania macierzy:

cond(A) = 0.5 * 29400 = 14700

Wnioski

Udało się prawidłowo zrealizować wszystkie podpunkty zadania. Jednak ze względu na to, że macierz **A** jest prawie osobliwa (det(A) ≈ -2.36206 * 10^{-9}) i jej wskaźnik uwarunkowania jest wysoki, uzyskaliśmy błąd rzędu 10^{-13} przy mnożeniu macierzy.

W miejscu gdzie powinniśmy otrzymać macierz jednostkową ($\mathbf{AA}^{-1}$), niektóre elementy poza przekątną były tylko zbliżone do zera.

Duży wskaźnik uwarunkowania macierzy powoduje duże względne zaburzenia rozwiązania nawet dla małych zaburzeń danych. Można powiedzieć, że zadanie jest źle uwarunkowane, obciążone względnie dużą niedokładnością obliczeń.