

Sprawozdanie – Laboratorium nr 3

Iteracyjne rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Jakobiego

Tomasz Rajchel

2019/03/14

Wstęp teoretyczny

Metoda Jacobiego [1]

Metoda Jacobiego jest metodą iteracyjną. Metody iteracyjne mają zwykle mniejszą złożoność obliczeniową niż metody dokładne, nadają się one do rozwiązywania dużych układów równań. Metodę Jacobiego można stosować tylko dla układów równań z macierzą nieosobliwą o niezerowych elementach na diagonalu.

Mając zadany układ równań:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

przekształcimy go w równoważny układ postaci:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

gdzie:

\mathbf{A} , \mathbf{M} – macierze rzeczywiste wymiaru $n \times n$

\mathbf{b} , \mathbf{c} – wektory rzeczywiste długości n

A następnie iteracyjnie znajdziemy coraz dokładniejsze rozwiązanie.

Całą procedurę iteracyjną powtarzamy wielokrotnie, aż do uzyskania zbieżności wyniku (dokładność 10^{-6}).

Aby wyprowadzić wzór na postać macierzy \mathbf{M} oraz wektora \mathbf{c} , musimy rozłożyć macierz \mathbf{A} na trzy macierze \mathbf{L} , \mathbf{D} , \mathbf{U} , takie że:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$$

gdzie:

\mathbf{L} – macierz trójkątna dolna z zerami na diagonalu

\mathbf{D} – macierz diagonalna

\mathbf{U} – macierz trójkątna górna z zerami na diagonalu

Następnie dokonujemy kolejnych przekształceń:

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}) \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{D} \mathbf{x} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór iteracyjny:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{D}^{-1} (\mathbf{L} + \mathbf{U}) \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}$$

gdzie poszczególne elementy szukanego wektora $\mathbf{x}^{(k+1)}$ wynoszą odpowiednio:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

Macierz:

$$\mathbf{M}_J = -\mathbf{D}^{-1} (\mathbf{L} + \mathbf{U})$$

nazywamy macierzą Jacobiego.

Mając taką macierz algorytm iteracyjny jest następujący:

1. Przyjmij wektor startowy $\mathbf{x}^{(0)}$
2. Przyjmij $k = 0$
3. Wyznacz wektor $\mathbf{x}^{(k+1)}$
4. Sprawdź warunek stopu
 - a) oblicz różnicę norm wektorów $\mathbf{x}^{(k+1)}$, $\mathbf{x}^{(k)}$
 - b) porównaj tę wartość z przyjętą dokładnością
 - c) jeśli ta wartość jest mniejsza od przyjętej dokładności to zakończ działanie algorytmu przyjmując $\mathbf{x}^{(k+1)}$ jako szukane rozwiązanie.
5. Zwiększ k o jeden i przejdź do kroku 3.

Opis zadania

Chcemy znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x - \beta V + F_0 \sin(\Omega t)$$

które opisuje ruch ciała poddanego działaniu siły sprężystej ($-\omega^2 x$), siły tarcia ($-\beta V$) zależnej od prędkości oraz siły wymuszającej ruch ($F_0 \sin(\Omega t)$).

Ponieważ problem rozwiązywany jest w czasie więc wprowadzamy siatkę, której węzłami są kolejne chwile czasowe:

$$t = t_i = h * i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Więc nasze rozwiązanie $x(t)$ będzie określone dla położenia węzłowych tj. $x(t) = x_{ti} = x_i$

Drugą pochodną zamieniamy na symetryczny trójpunktowy iloraz różnicowy:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2}$$

gdzie: h oznacza krok czasowy na siatce

Ponieważ prędkość jest pierwszą pochodną położenia po czasie więc ją także zastępujemy ilorazem różnicowym (dwupunktowym niesymetrycznym):

$$V_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{h^2}$$

I wstawiamy do równania różniczkowego:

$$\frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2} = -\omega^2 x_i - \beta V_i + F_0 \sin(\Omega h i)$$

Przenosimy wyrazy z niewiadomymi x_i na lewą stronę (zamieniając prędkość na iloraz różnicowy) a na prawej pozostawiamy wyraz wolny:

$$x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + \omega^2 h^2 x_i + \beta h (x_{i+1} - x_i) = F_0 \sin(\Omega h i) h^2$$

Co można zapisać w symbolicznie:

$$a_1 x_{i-1} + a_2 x_i + a_3 x_{i+1} = b_i$$

gdzie:

$$a_1 = 1, a_2 = \omega^2 h^2 - 2 - \beta h, a_3 = 1 + \beta h, b_i = F_0 \sin(\Omega h i) / h^2$$

Dostaliśmy układ równań postaci: $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Potrzebne są nam jeszcze warunki początkowe:

- Wychylenie początkowe, $x_0 = 1$,
- Prędkość początkowa, $V_0 = 0$

Wtedy nasz układ równań przyjmuję postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ze względu na to, że jest to macierz trójkątniowa (rzadka), można ją przechować w pamięci w postaci trzech wektorów:

$$d_0 = [1, 1, a_3, a_3, \dots, a_3]$$

$$d_1 = [0, -1, a_2, a_2, \dots, a_2]$$

$$d_2 = [0, 0, a_1, a_1, \dots, a_1]$$

Aby wyznaczyć i -ty element nowego przybliżenia ($x_n[i]$) dysponując przybliżeniem z poprzedniej iteracji (wektor x_s) korzystamy ze wzoru:

$$x_n[i] = \frac{1}{d_0[i]} (b[i] - d_1[i] x_s[i-1] - d_2[i] x_s[i-2])$$

Elementy $x_s[-1]$, $x_s[-2]$ są dowolne.

Wyniki

Przyjmujemy parametry:

$$V_0 = 0,$$

$$x_0 = 1,$$

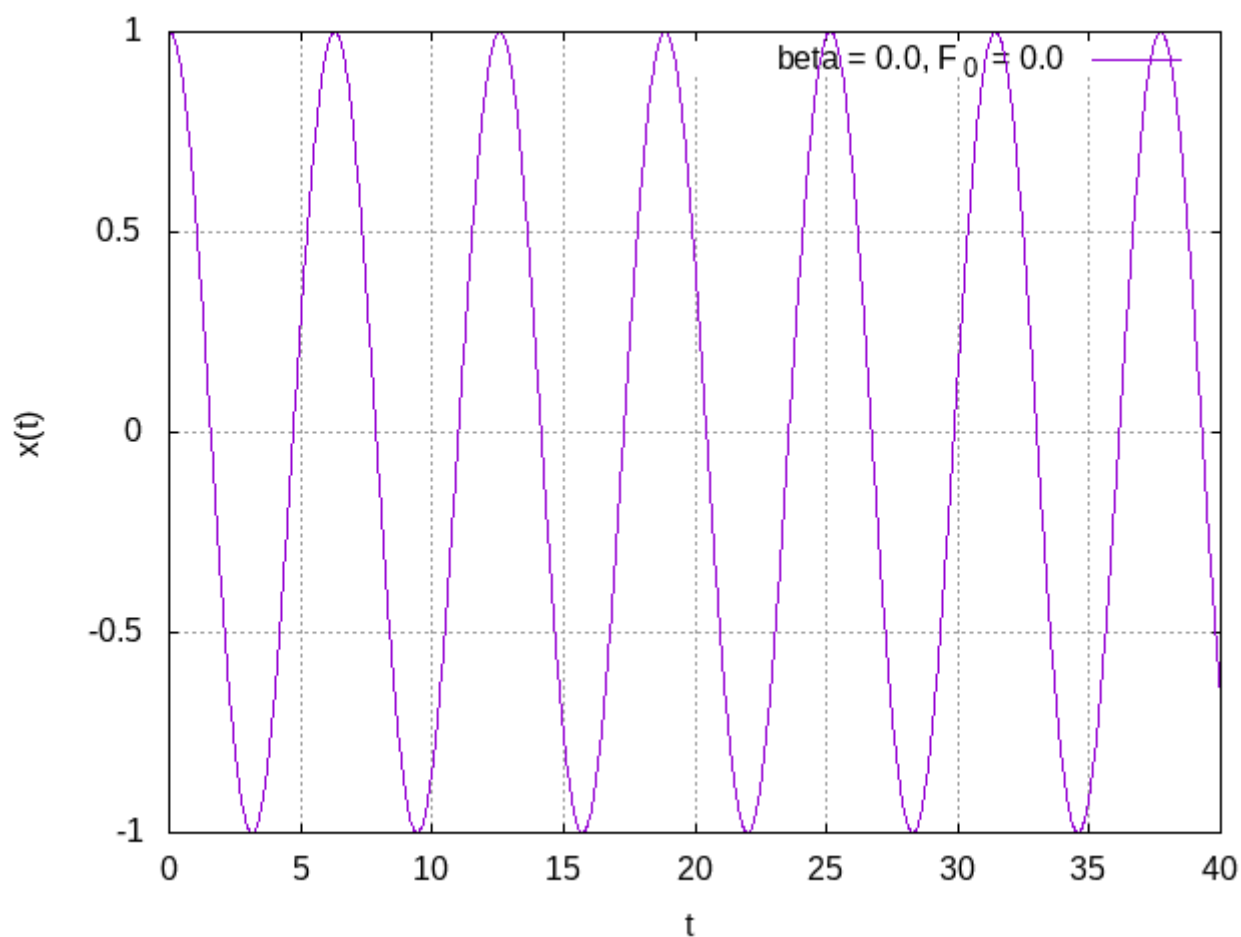
$$\omega = 1,$$

Liczba kroków czasowych, $n = 2000$,

$$h = 0.02$$

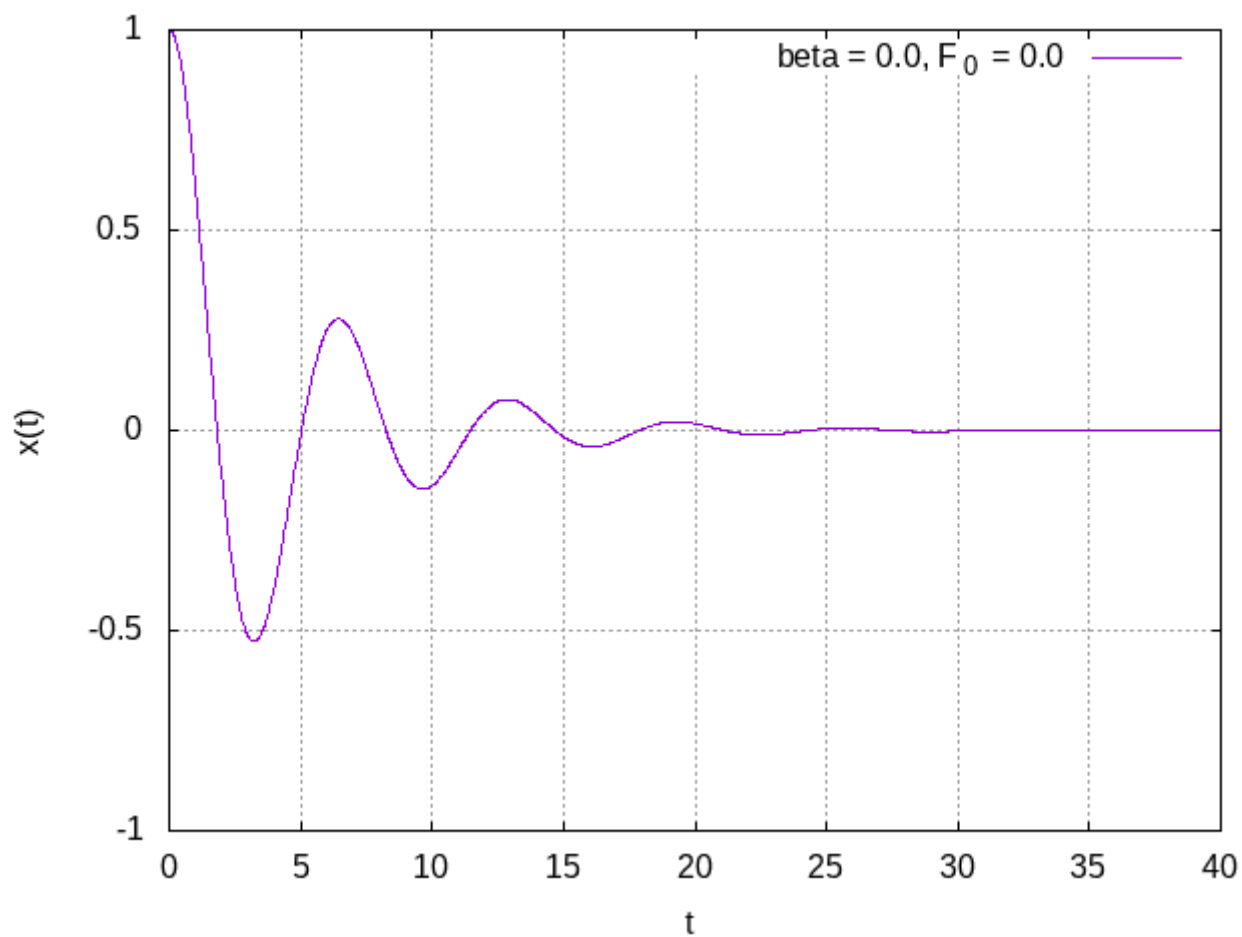
A następnie korzystając z iteracyjnej metody Jakobiego znajdujemy rozwiązanie dla 3 przypadków

1. $\beta = 0.0$, $F_0 = 0.0$, $\Omega = 0.8$

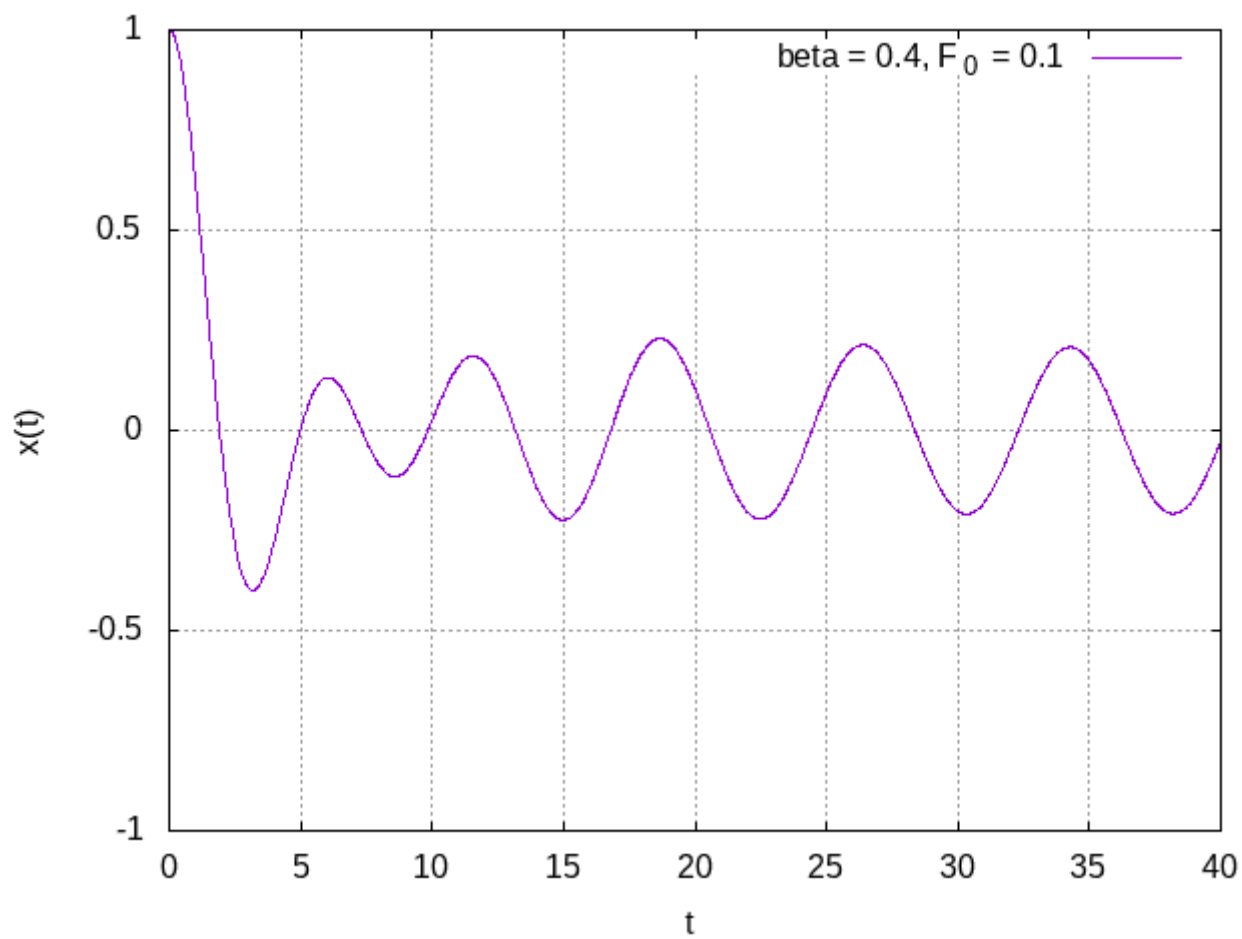


$x(t)$ - położenie

2. $\beta = 0.4, F_0 = 0.0, \Omega = 0.8$



3. $\beta = 0.4, F_0 = 0.1, \Omega = 0.8$



Wnioski

Dla każdego przypadku algorytm był zbieżny w $n \pm 1$ iteracjach. Czas działania programu wynosił średnio 0.05 s.

Algorytm wykorzystujący metodę Gaussa-Seidla był zbieżny już w 2 iteracjach w każdym przypadku dla zadanej dokładności 10^{-6} .

Dzieje się tak ponieważ zamiast odwoływać się do poprzedniego „starego” wektora wyników, korzysta z dokładniejszych „nowszych” wartości wektora x .

Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych są szczególnie użyteczne gdy w macierzy wiele elementów jest zerami. Pozwalają w krótkim czasie otrzymać przybliżone rozwiązanie o wysokiej dokładności.

Bibliografia

[1] E. Dudek-Dyduch, J. Wąs, et al. - “Metody Numeryczne Wybrane Zagadnienia” 2011