Sprawozdanie – Laboratorium nr 1

Rozwiązywanie UARL metodami bezpośrednimi

Tomasz Rajchel
2019/02/28

Wstęp teoretyczny

Układ algebraicznych równań liniowych (UARL)

Układem równań liniowych nazywamy zbiór równań algebraicznych stopnia pierwszego.
Przykładowy układ „m” równań liniowych „n” zmiennych:

$$\text{U:}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Albo w zapisie skróconym:

AX = **B**

Metoda Gaussa-Jordana

Metoda Gaussa Jordana umożliwia efektywne rozwiązywanie układów równań liniowych, obliczanie macierzy odwrotnych i nie tylko. Rozwiązywanie układów równań tą metodą polega na wykonywaniu działań na macierzach **A** i **B** tak aby macierz **A** zamienić na macierz trójkątną.

Dozwolone działania to:

- Mnożenie wierszy przez skalar
- Dodawanie i odejmowanie wierszy ze sobą
- Zamiana kolejności wierszy

W pierwszym etapie algorytmu odejmujemy od i-tego wiersza wiersz i-1 pomnożony przez taki skalar tak aby otrzymać macierz trójkątną z samymi jedynkami na przekątnej.

W drugim etapie algorytmu dokonujemy eliminacji zmiennych, podstawiając kolejne wartości do wierszy wyżej.

Opis zadania

Oscylator harmoniczny

Wykorzystamy metodę Gaussa-Jordana do aproksymacji położenia prostego oscylatora harmonicznego na przestrzeni kilku okresów drgań. Położenie x(t) jest opisane równaniem różniczkowym.

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} x(t) = -\omega^2 x(t)$$

Przybliżając występującą po lewej stronie równania drugą pochodną położenia x, w chwili t ilorazem różnicowym:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

i wprowadzając oznaczenia $\Delta t = h$, $x_i = x(ih)$ otrzymujemy z równania różniczkowego iteracyjny wzór pozwalający na wyznaczenie x_i+1 w zależności od x_i i x_{i-1}:

$$x_i + 1 + (\omega^2 h^2 - 2) x_i + x_i - 1 = 0.$$

Układ równań dla kolejnych kroków czasowych możemy zapisać w postaci macierzowej (poniżej dla siedmiu kroków):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \omega^2 h^2 - 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega^2 h^2 - 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \omega^2 h^2 - 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^2 h^2 - 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^2 h^2 - 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ v_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Potrzebne są nam jeszcze warunki początkowe:
A jest początkowym wychyleniem z położenia równowagi, a v_0 początkową prędkością ciała.

Przyjmujemy:

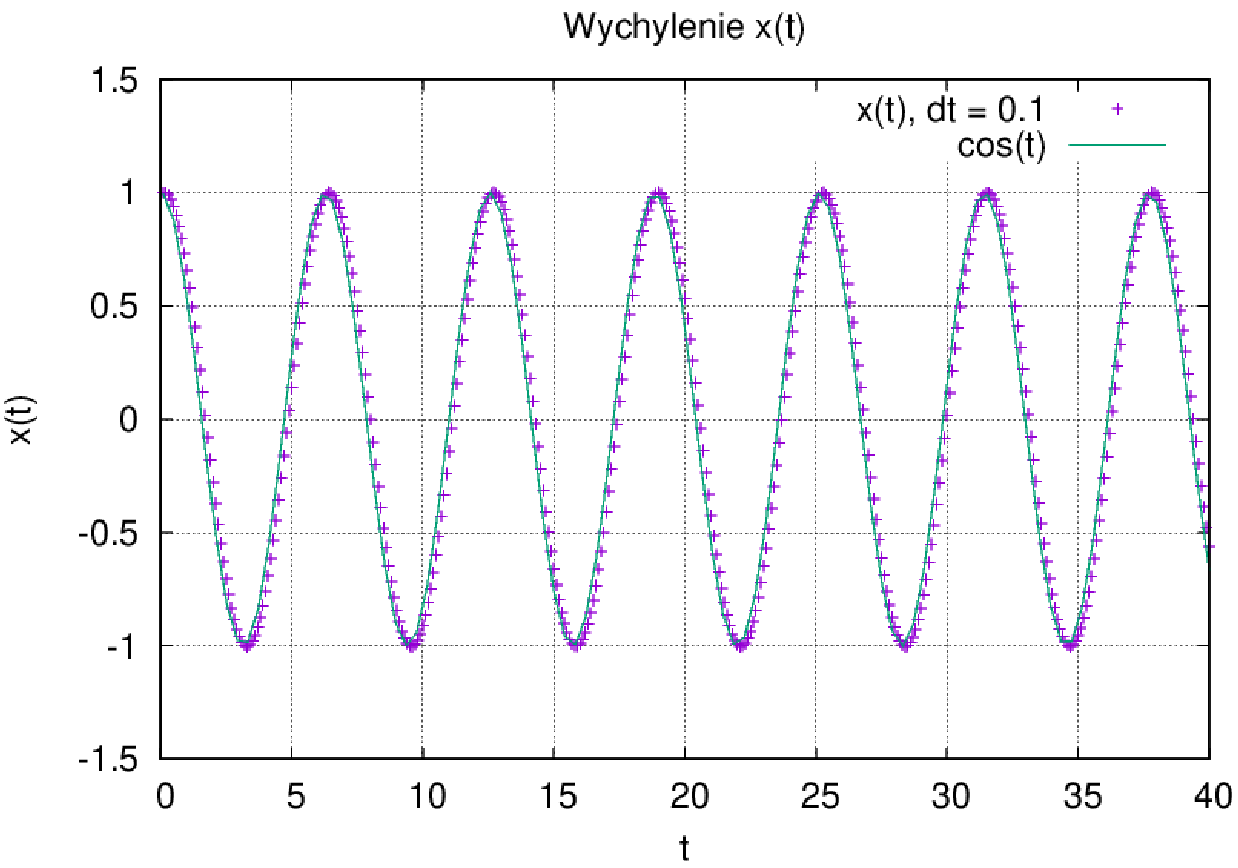
k/m = 1 => ω = 1
$v_0 = 0$
A = 1
krok całkowania h = 0.1

Wyniki

Wykorzystując metodę opisaną powyżej obliczymy numerycznie położenie oscylatora dla 400 kolejnych kroków czasowych. Program został napisany w języku C korzystając z biblioteki "Numerical Recipes". Wykres został wykonany programem Gnuplot. Analityczne rozwiązanie równania oscylatora:

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

również zostało przedstawione na wykresie.



Wykres 1: Położenie oscylatora w czasie, obliczone numerycznie i analitycznie.

Wnioski

Metoda Gaussa-Jordana pozwala w prosty i szybki sposób rozwiązywać układy równań liniowych. W rozpatrywanym problemie można jeszcze bardziej zwiększyć dokładność poprzez zmiejszenie kroku czasowego. Duża liczba zer w macierzy sugeruje, istnienie lepszego, mniej skomplikowanego obliczeniowo rozwiązania tego problemu.