Sprawozdanie – Laboratorium nr 9

Aproksymacja funkcji okresowych

Tomasz Rajchel
2019/05/09

Wstęp teoretyczny

Aproksymacja średniokwadratowa w bazie funkcji trygonometrycznych

Funkcje okresowe aproksymujemy przy użyciu funkcji trygonometrycznych, czyli w bazie:

$$1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \ldots \tag{1}$$

Szukamy wielomianu w postaci:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m} [a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)] \tag{2}$$

Gdzie współczynniki a_j oraz b_j wyznacza się z warunku minimalizacji wyrażenia:

$$\sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) - F(x_i)]^2 = min \tag{3}$$

I są one równe:

$$a_j = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \sin(kx_i) \tag{4}$$

$$b_j = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cos(jx_i) \tag{5}$$

Liczba punktów/węzłów funkcji aproksymowanej f(x) wynosi **n**.

Opis zadania

Naszym zadaniem jest aproksymacja funkcji:

$$f_1(x) = 2\sin(x) + \sin(2x) + 2\sin(3x) + \alpha \tag{6}$$

$$f_2(x) = 2\sin(x) + \sin(2x) + 2\cos(x) + \cos(2x) \tag{7}$$

$$f_3(x) = 2\sin(1.1x) + \sin(2.1x) + 2\sin(3.1x) \tag{8}$$

Gdzie:

$$\alpha=\frac{rand()}{RAND_{MAX}+1.0}-0.5 \tag{9}$$

Jest liczbą pseudolosową, $\alpha\in[-0.5, 0.5]$.

Aproksymacji funkcji f_1, f_2, f_3 dokonamy w przedziale $x\in[0, 2\pi]$, liczba węzłów n = 100, przy pomocy funkcji:

$$F(x)=\sum_{k=0}^{M_S} a_k \sin(kx)+\sum_{j=0}^{M_C} b_j \cos(jx) \tag{10}$$

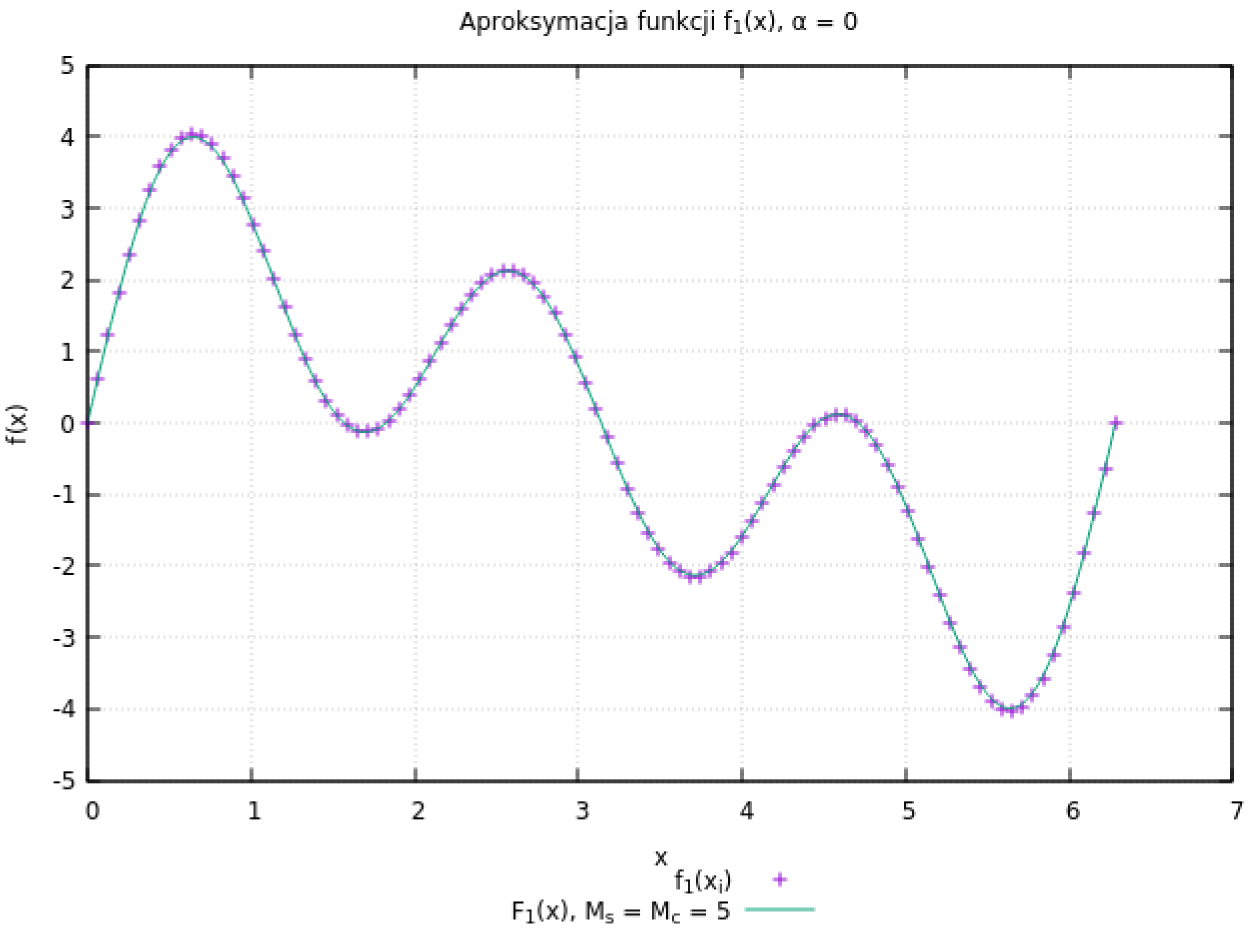
Gdzie współczynniki a i b są zdefiniowane we wzorach (4) (5).

Wykonamy 4 warianty:

1. funkcja f_1, $\alpha = 0$, $(M_S, M_C) = \{(5, 5)\}$.
2. funkcja f_2, $(M_S, M_C) = \{(5, 5)\}$.
3. funkcja f_3, $(M_S, M_C) = \{(5, 0), (5, 5), (10, 10)\}$.
4. funkcja f_1, α ze wzoru (9), $(M_S, M_C) = \{(5, 5), (30, 30)\}$.

Wyniki / Wnioski

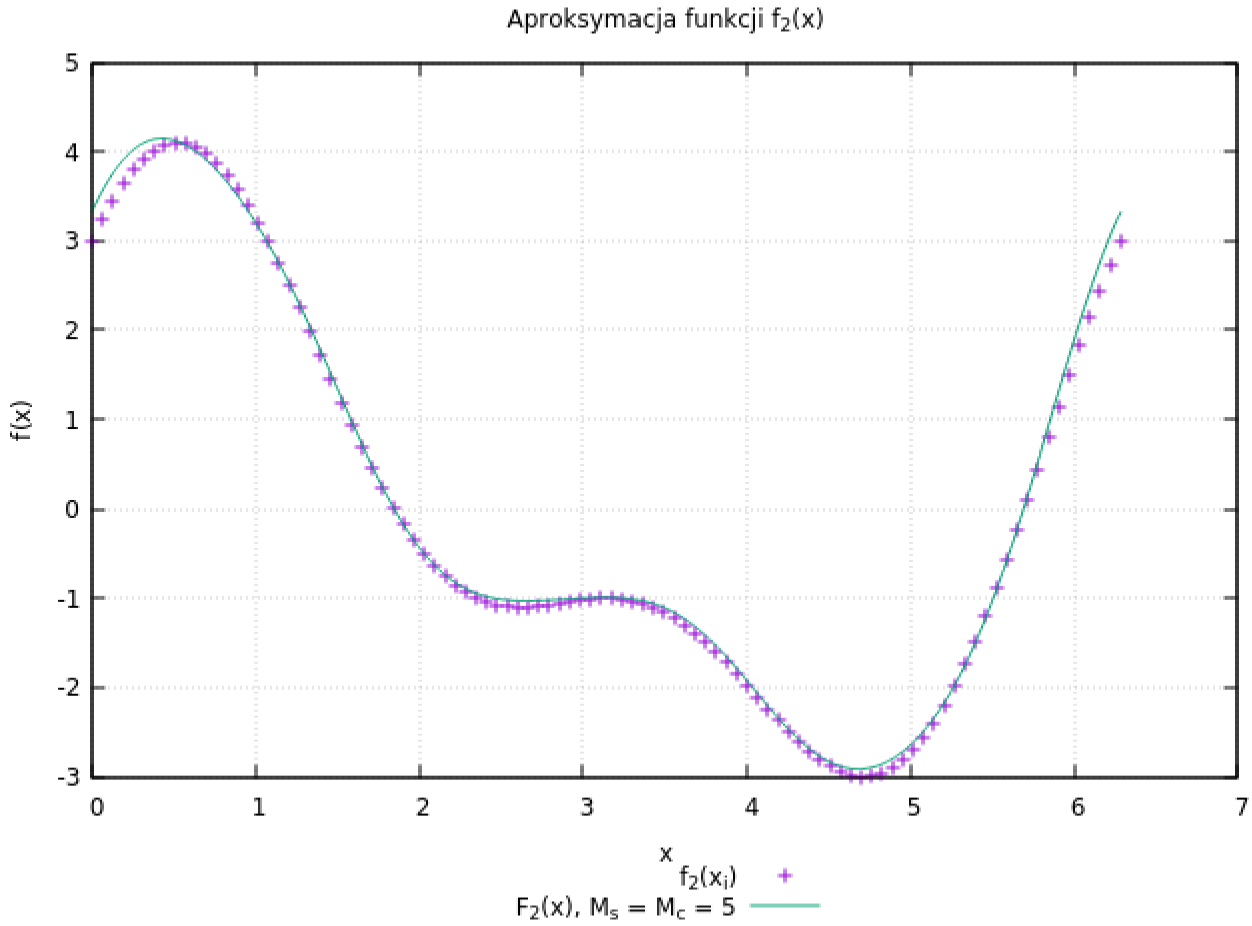
Wariant 1



Indeks	a	b
0	0	3.48474e-16
1	1.98	-1.44465e-16
2	0.99	-2.73251e-16
3	1.98	2.33011e-16
4	-1.52101e-16	1.10886e-16
5	-2.44249e-17	2.84081e-16

Funkcja jest aproksymowana z dużą dokładnością. Współczynniki przy kolejnych wyrazach szeregu trygonometrycznego funkcji aproksymującej są bardzo zbliżone do funkcji aproksymowanej.

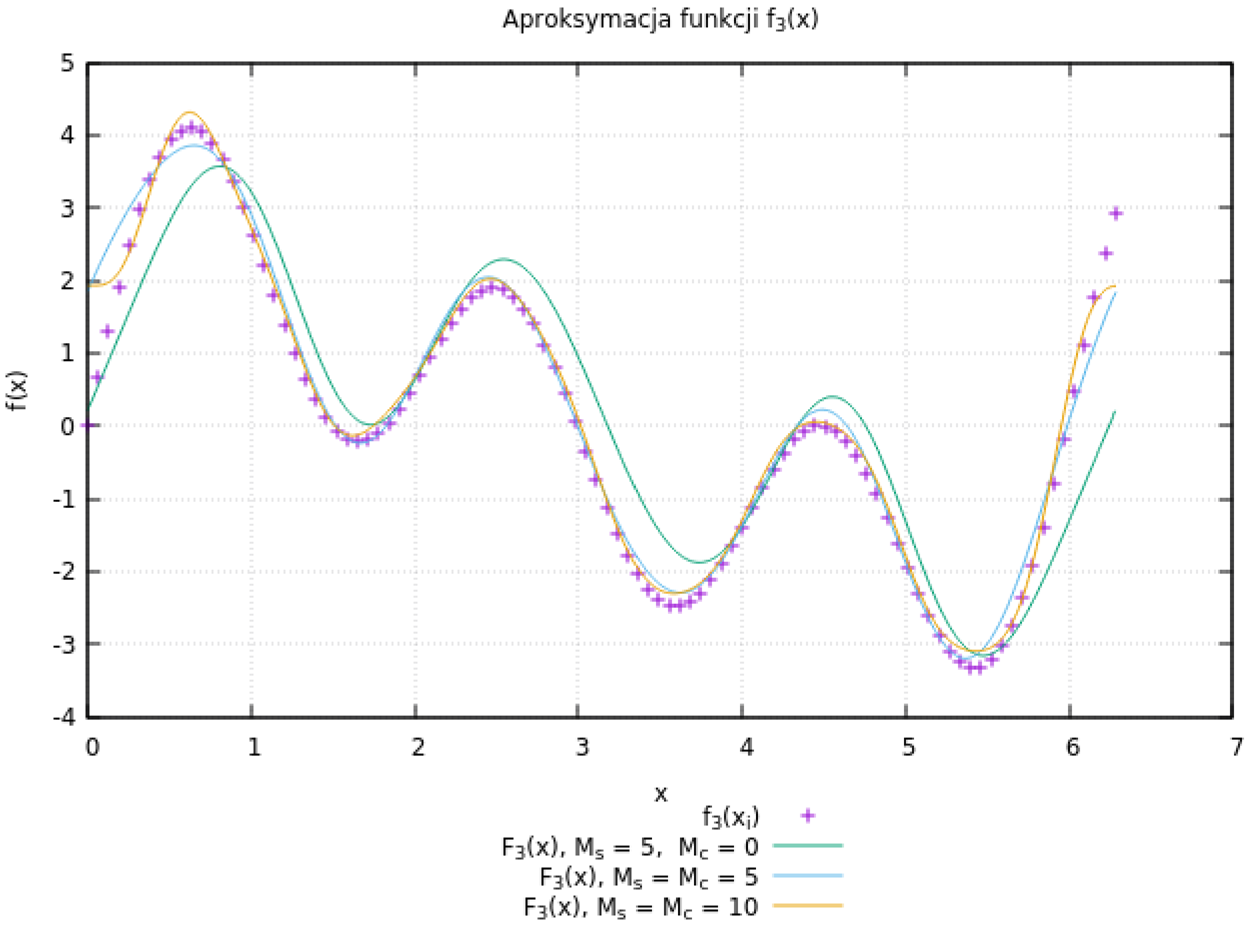
Wariant 2



Indeks	a	b
0	0	0.06
1	1.98	2.04
2	0.99	1.05
3	2.75657e-16	0.06
4	1.18853e-16	0.06
5	2.57368e-16	0.06

Można zauważyć gorszą jakość aproksymacji na krańcach przedziału.

Wariant 3



Budując funkcję aproksymującą korzystamy z funkcji sin({0,1,2,…,}x), a argument funkcji aproksymowanej jest przesunięty sin({1.1, 2.1, 3.1}x) dlatego nie możemy dokładnie aproksymować używając samych sinusów.
Widać, że już przy pięciu wyrazach otrzymujemy dobrą aproksymację. Użycie 30 wyrazów dodatkowo ją poprawia.

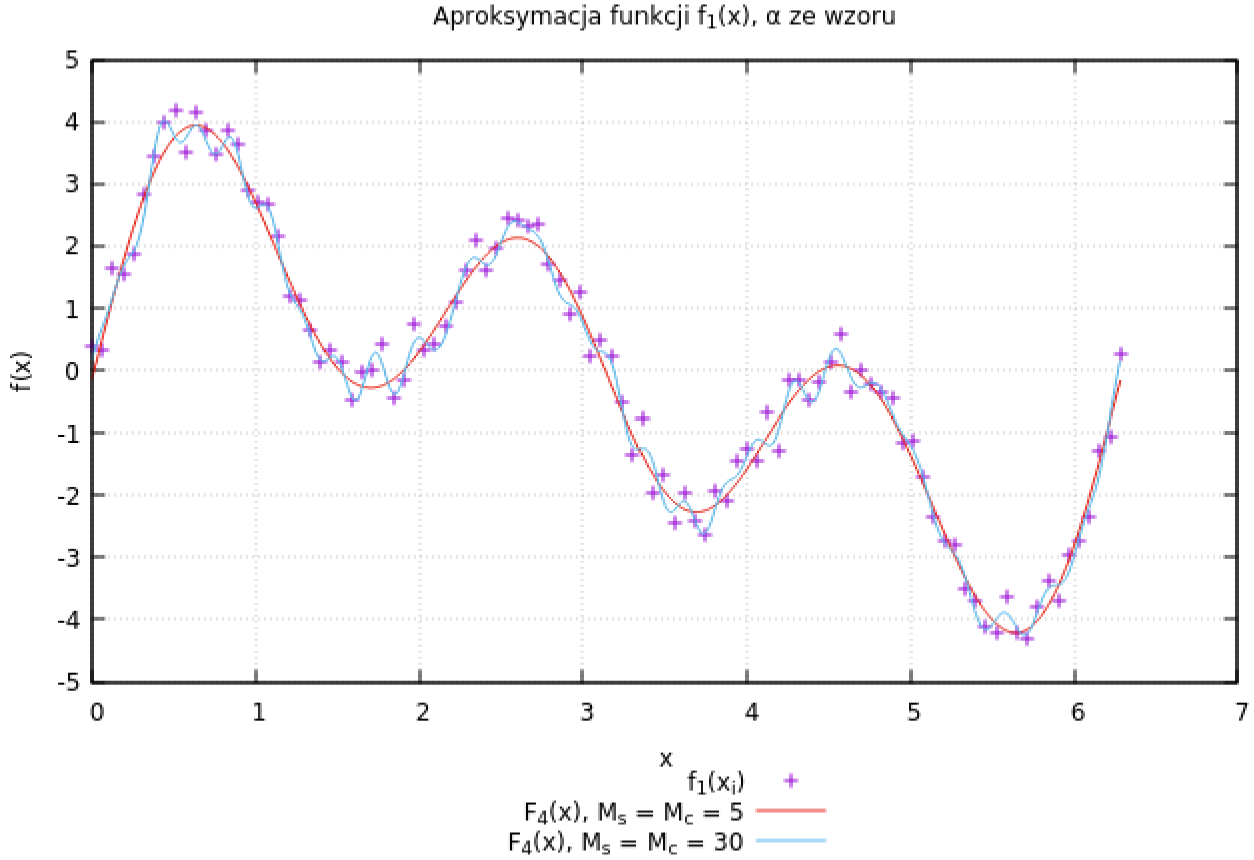
Ponownie występuje gorsze dopasowanie na krańcach przedziału.

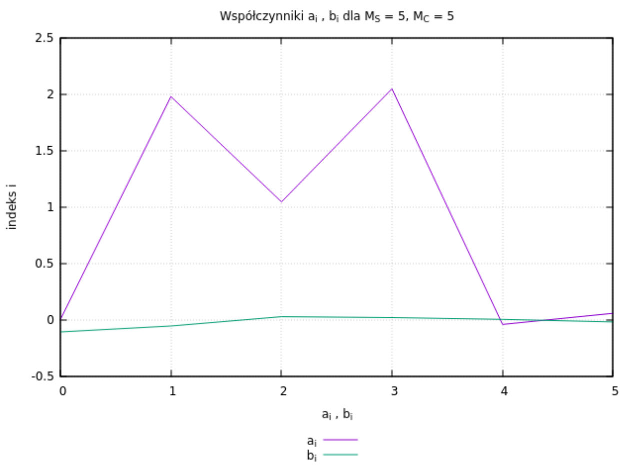
$M_S = 5, M_C = 0$		
Indeks	**a**	**b**
0	0	0.20609
1	1.86172	-
2	0.770679	-
3	1.55911	-
4	-0.394767	-
5	-0.241636	-

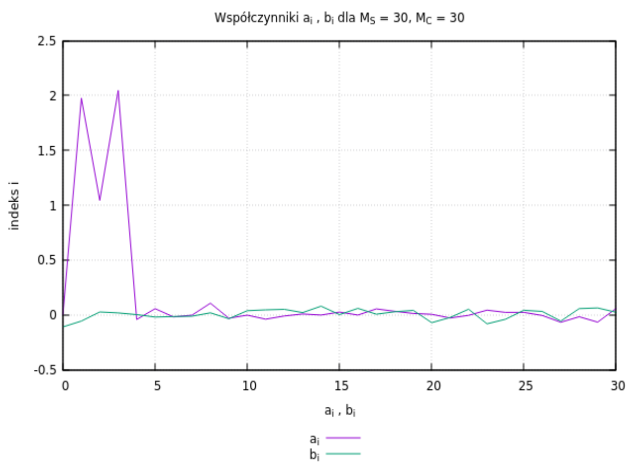
$M_S = 5$, $M_C = 5$		
Indeks	**a**	**b**
0	0	0.20609
1	1.86172	0.740076
2	0.770679	0.356492
3	1.55911	0.59635
4	-0.394767	-0.049075
5	-0.241636	-0.00677342

$M_S = 10$, $M_C = 10$		
Indeks	**a**	**b**
0	0	0.20609
1	1.86172	0.740076
2	0.770679	0.356492
3	1.55911	0.59635
4	-0.394767	-0.049075
5	-0.241636	-0.00677342
6	-0.181425	0.00722941
7	-0.146988	0.014097
8	-0.124054	0.0180842
9	-0.107438	0.0206372
10	-0.0947271	0.0223822

Wariant 4







Wprowadzono zaszumienie współczynnikiem α. Dla funkcji z 30 wyrazami szeregu sinusów i cosinusów występuje nadmierne dopasowanie. Funkcja dopasowuje się do szumu czego wolelibyśmy uniknąć.

Lepszy obraz funkcji aproksymowanej daje funkcja z zaledwie pięcioma wyrazami szeregu (sin i cos).