Instituto Superior de Engenharia de Coimbra DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA



Análise Matemática I - Engenharia Informática 2022-23

5. Métodos de primitivação Primitivação por substituição

Aulas TP+P: Folha 6

Formulário: página 6

$$mv: x = \phi(t), \text{ injectiva e derivável} \qquad \int f(x) dx = \left[\int f(\phi(t)) \phi'(t) dt \right]_{t=\phi^{-1}(x)}$$

1. Resolva as primitivas aplicando a técnica de primitivação por substituição.

(a)
$$\int \frac{3}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx$$
;

(b)
$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+9x^2}} dx$$
;

(c)
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} dx$$
;

(d)
$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$$
;

(e)
$$\int \frac{e^x}{4 + 9e^{2x}} dx$$
;

(a) Recorrendo à definição de primitiva, prove a seguinte igualdade:

$$\int \sin^3(x) \, dx = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + c \,, \quad c \in \mathbb{R} \,.$$

- (b) Recorrendo à técnica de primitivação por substituição e à mudança de variável $x=2\sin(t)$, $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, mostre que o cálculo da primitiva $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$ reduz-se ao cálculo da primitiva da alínea anterior.
- (c) Com base nas alíneas anteriores, determine $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx.$
- 3. Para cada uma das seguintes primitivas identifique uma mudança de variável, faça a respectiva substituição e simplifique a expressão obtida, sem efectuar a resolução da primitiva simplificada.

(a)
$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4 + x^2}} dx$$
;

(b)
$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}} dx;$$

(c)
$$\int \frac{e^{2x}+1}{4e^x-1} dx$$
.

4. Resolva a primitiva $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ aplicando a técnica de primitivação por substituição e à mudança de variável $x=t^2$