Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ANÁLISE MATEMÁTICA I - **Engenharia Informática 2022-23**

6. Séries — Aulas TP+P: Folha 10

Convergência de uma série

A série $\sum u_n = \overset{S_n}{\boxed{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}} + \cdots$ é convergente se e só se o limite $\lim S_n$ existe e é finito.

- Série de Mengoli $\left[u_n = a_n - a_{n+p}\right] \rightarrow S_n = a_1 + \cdots + a_p - (a_{n+1} + \cdots + a_{n+p})$, desde que $n > p$
- Série geométrica $\left[\frac{u_{n+1}}{u_n} = R\right] \rightarrow S_n = 1^{\underline{\text{o}}}\,\text{termo} \times \frac{1-R^n}{1-R}$

Comandos do Geogebra:

- Calcular a soma: `Soma( <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final> )`

Séries numéricas

1. Utilize a definição de convergência de uma série numérica para verificar quais das seguintes séries de **Mengoli** são convergentes e, sempre que possível, calcule a respectiva soma.

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

2. Utilize a definição de convergência de uma série numérica para verificar quais das seguintes séries **geométricas** são convergentes e, sempre que possível, calcule a respectiva soma.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 5^n$; b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

3. Recorrendo à **condição necessária de convergência**, prove que as seguintes série são divergentes.

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{\ln(n)}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{4^{n+1}}$.

4. Determine, recorrendo ao **critério do integral**, a natureza das seguintes séries.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

5. Determine a natureza das seguintes séries, recorrendo ao **critério de D'Alembert**.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^n}$.

6. Determine, a natureza das seguintes séries.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2^{\frac{2}{n+1}} - 2^{\frac{2}{n}}\right)$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-n}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{7}{6^{n-1}}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+4}$;

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{3n}$; f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^4}$; g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$; h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2}$.

7. Prove que as série seguintes são (absolutamente) convergentes.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{7}{6^{n-1}}$.

Séries de Potências

8. Para as séries de potências seguintes, determine o centro da série, o raio de convergência e o intervalo de convergência absoluta.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{4^n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^n}\, x^n$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$;

9. Considere o desenvolvimento em série de Taylor de centro $x_0 = 0$ da função $f(x) = e^x$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

(a) Partindo do desenvolvimento em série da função e^x , determine o desenvolvimento em série de Taylor de centro $x_0 = 0$ da função $f(x) = e^{x^2}$.

(b) Tendo em conta a alínea anterior, calcule o desenvolvimento em série de $\displaystyle\int e^{x^2}\, dx$.

(c) Recorrendo à alínea anterior e à soma parcial de 2ª ordem, determine uma aproximação para o integral

$$\int_0^1 e^{x^2}\, dx\,.$$

(d) Recorrendo à regra de Simpson, determine uma aproximação para o integral

$$\int_0^1 e^{x^2}\, dx\,.$$

(e) Compare e comente os resultados das alíneas (c) e (d).