Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de Análise Matemática I (parte 1) - Engenharia Informática

15 de fevereiro de 2022 | Duração: 1h15m

- A avaliação do portfólio de actividades do CeaMatE substitui a resposta ao grupo 1.
- Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

[1.0 *val.*] 1. (a) Identifique todas as igualdades que são verdadeiras:

i) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

ii) $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$;

iii) $a \times a = 2a$;

iv) $\log_2(2^a) = a$.

[0.5 *val.*] (b) Identifique a igualdade que é falsa:

i) $\sin\left(\dfrac{8\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$;

ii) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$;

iii) $\arccos(-0.5) = \dfrac{2\pi}{3}$;

iv) $\arcsin\big(\sin(2\pi)\big) = 2\pi$.

[0.5 *val.*] (c) A função inversa de $f(x) = 1 + e^{2x-3}$ é:

i) $g(x) = \dfrac{1}{1+e^{2x-3}}$;

ii) $g(x) = 1 + \ln(2x-3)$;

iii) $g(x) = -1 - \ln(-2x+3)$;

iv) $g(x) = \dfrac{\ln(x-1)+3}{2}$.

[1.0 *val.*] 2. A equação $2^x + x - 2 = 0$ tem apenas uma solução real, pertencente ao intervalo $[0, 2]$.

(a) Recorrendo ao método gráfico, justifique a afirmação anterior.

(b) Efectue 3 iterações do método da bisseção, para determinar uma estimativa para a solução da equação dada. Indique um majorante para o erro dessa estimativa.
Nota: $\sqrt{2} \simeq 1.41\,,\quad \sqrt[4]{2^3} \simeq 1.68$

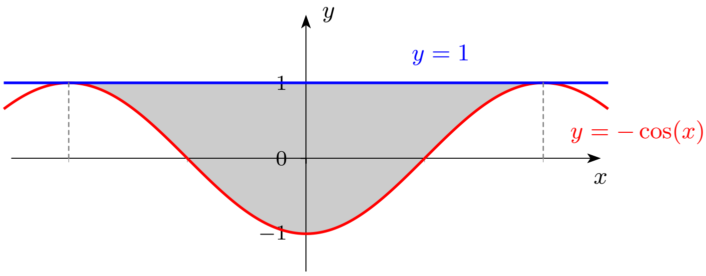
[2.0 *val.*] 3. Recorrendo apenas às regras de primitivação imediata, apresente 3 resoluções da primitiva

$$\int \operatorname{cosec}^2(x) \operatorname{cotg}(x)\, dx\,.$$

[1.0 *val.*] 4. Considere o integral definido $\displaystyle\int_{-1}^{1} \tan(x)\, dx$.

Recorrendo a uma regra de integração numérica e a uma partição em 4 sub-intervalos, determine uma estimativa para o integral. Justifique a escolha da regra de integração numérica.

[5.0 *val.*] 5. Considere a região $\mathcal{A}$, sombreada, da figura seguinte.



(a) Defina a região $\mathcal{A}$ na forma $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \le x \le b \ \wedge\ f(x) \le y \le g(x)\right\}$.

(b) Usando integrais, calcule a área de $\mathcal{A}$.

(c) Usando integrais, indique expressões simplificadas para o volume dos sólidos que se obtêm pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo:

i) Ox;

ii) Oy.

(d) Indique uma expressão simplificada que permita calcular o perímetro da região $\mathcal{A}$.

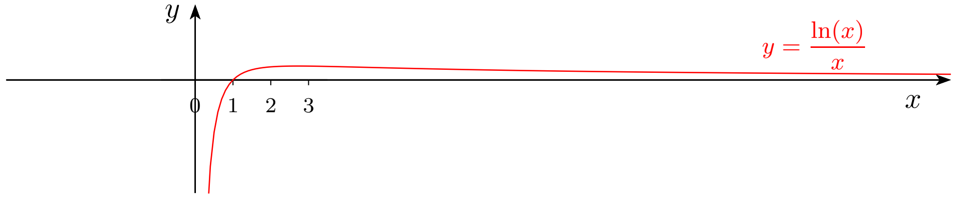
Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de Análise Matemática I (parte 2) - Engenharia Informática

15 de fevereiro de 2022 Duração: 1h15m

- Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

[2.0 *val.*] 1. Considere o gráfico seguinte.



(a) Considere os seguintes integrais:

(I) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$; (II) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$; (III) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$.

No que se segue, note que $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

i. Identifique, justificando, o integral impróprio de 1ª espécie e determine a sua natureza.

ii. Identifique, justificando, o integral impróprio de 2ª espécie e determine a sua natureza.

(b) Determine, justificando, a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n}$.

[4.0 *val.*] 2. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\displaystyle\int x^2 \ln(x)\,dx$; b) $\displaystyle\int \sin(3x)\,\sin(2x)\,dx$; c) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\,dx$.

[1.0 *val.*] 3. Justifique, recorrendo a dois critérios distintos, que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n}$ é divergente.

[0.5 *val.*] 4. (a) A expressão $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx$ corresponde a (escolha a opção correta):

i) um integral indefinido;
ii) um integral definido;
iii) um integral impróprio de 1ª espécie;
iv) um integral impróprio de 2ª espécie.

[0.5 *val.*] (b) Identifique a proposição verdadeira:

i) $\int \ln(x)\, dx = x \int \frac{1}{x} \ln(x)\, dx\,;$
ii) $\int \ln(x)\, dx = \ln(x) \int 1\, dx\,;$
iii) $\int \ln(x)\, dx = x\ln(x) - \int 1\, dx\,;$
iv) $\int \ln(x)\, dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$

[0.5 *val.*] (c) Considere o integral $I = \int_0^{64} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$ e a mudança de variável definida por $x = t^6$.
Uma expressão equivalente de I é dada por (escolha a opção correta):

i) $\int_0^{64} \frac{t^2}{1+t^3}\, dt\,;$
ii) $\int_0^{2} \frac{t^2}{1+t^3}\, dt\,;$
iii) $\int_0^{64} \frac{6\,t^7}{1+t^3}\, dt\,;$
iv) $\int_0^{2} \frac{6\,t^7}{1+t^3}\, dt\,.$

[0.5 *val.*] (d) A expressão $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n^3}}$ define (escolha a opção correta):

i) uma série geométrica, convergente;
ii) uma série geométrica, divergente;
iii) uma série de Dirichlet, divergente;
iv) uma série de Dirichlet, convergente.