Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ANÁLISE MATEMÁTICA I - **Engenharia Informática 2022-23**

1. Funções reais de variável real — Aulas TP+P: Folha 1

Curvas de referência, transformações gráficas, domínios, função inversa e resolução de equações

---

1. Faça um esboço das seguintes curvas e confirme a sua resposta recorrendo ao Geogebra:

a) $y = x\,;$ b) $y = x - 1\,;$ c) $y = 2x - 2\,;$

d) $y = x^2\,;$ e) $y = x^2 - 1\,;$ f) $y = x^2 - 2x + 1\,;$

g) $x = y^2 + 1\,;$ h) $x^2 + y^2 = 1\,;$ i) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4\,;$

j) $y = \cos(x)\,;$ k) $y = \cos(x) - 1\,;$ l) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right);$

m) $y = 2\cos(x)\,;$ n) $y = -\cos(x)\,;$ o) $y = \sin(x)\,;$

p) $y = 2^x\,;$ q) $y = 2^x - 1\,;$ r) $y = 2^{x-1}\,;$

s) $y = \begin{cases} x & , x < 0 \\ x^2 & , x \geq 0 \end{cases}\;;$ t) $y = |x|\,;$ u) $y = |x-1|\,.$

Transformações gráficas ($a > 0$), a partir de uma função de referência $y = f(x)$:

$y = f(x \pm a)$	translação horizontal	$\rightarrow$ se $-a$,	$\leftarrow$ se $+a$
$y = f(x) \pm a$	translação vertical	$\uparrow$ se $+a$,	$\downarrow$ se $-a$
$y = f(a\,x)$	contração/dilatação horizontal	dilatação se $0 < a < 1$,	contração se $a > 1$
$y = a\,f(x)$	contração/dilatação vertical	contração se $0 < a < 1$,	dilatação se $a > 1$
$y = f(-\,x)$	reflexão relativamente ao eixo Ox		
$y = -\,f(x)$	reflexão relativamente ao eixo Oy		

Comandos **Geogebra:**

- Definir uma função $y = f(x)$: `f(x):= <expressão em x>`
- Definir uma curva $f(x, y) = 0$: `<condição (igualdade) em x e y>`
- Módulo: `abs( <expressão> )`
- Função por ramos $y = \begin{cases} f(x), & \text{condição} \\ g(x), & \text{c.c.} \end{cases}$: `Se( <condição para f(x)>, <f(x)>, <g(x)> )`

2. Determine, analiticamente, o domínio das seguintes funções e confirme a sua resposta recorrendo ao Geogebra:

a) $f(x) = x - 1\,;$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}\,;$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}\,;$

d) $f(x) = \sqrt{x-1}\,;$ e) $f(x) = e^{x-1}\,;$ f) $f(x) = \ln(x-1)\,;$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x-1)}\,;$ h) $f(x) = \sin(x-1)\,;$ i) $f(x) = \arcsin(x-1)\,.$

Domínios de referência:

$f(x) = \dfrac{\bullet}{\blacksquare}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \blacksquare \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt[n]{\blacksquare}$, com n par	$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \blacksquare \geq 0\}$
$f(x) = \log_a(\blacksquare)$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \blacksquare > 0\}$
funções trigonométricas inversas	ver tabelas de Matemática

Comandos **Geogebra:**

- Resolver equações ou inequações: `Resolver( <Equação ou inequação>, <Variável> )`
- Raiz quadrada: `sqrt( <expressão> )`
- Raiz de índice n: `( <expressão> )`$\wedge(1/n)$
- Separador entre equações, inequações ou condições: `&&`
- Representar a região plana $a \leq x \leq b$: `a<= x <= b`
- Representar uma região plana $f(x) \leq y \leq g(x)$: `f(x)<= y <= g(x)`

3. Determine a função inversa de cada uma das seguintes funções, numa restrição conveniente.

a) $f(x) = 2x - 1$; b) $f(x) = x^2$; c) $f(x) = \cos(2x) + 1$;
d) $f(x) = \arcsin(x-1)+\pi$; e) $f(x) = e^{2x} - 1$; f) $f(x) = \ln(-x) + 1$.

Sugestões para realizar a análise no **Geogebra:**

i) represente o gráfico da função $f(x)$;
ii) determine, analiticamente, a restrição principal do domínio da função $f(x)$ (contradomínio de $f^{-1}(x)$);
iii) defina a restrição da função: `Função( <expressão>, <x inicial>, <x final> )`
iv) determine a expressão analítica da função inversa: `Resolver( <y=f(x)>, <x> )`
v) determine, analiticamente, a restrição principal do domínio da função inversa $f^{-1}(x)$;
vi) represente o gráfico da função inversa $f^{-1}(x)$;
vii) confirme que os gráficos de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ são simétricos relativamente à reta $y = x$.

4. Calcule o valor das seguintes expressões numéricas:

a) $\sqrt{3^2+4^2}$; b) $\sqrt{e^6}$; c) $\sqrt{\sqrt[3]{8^2}}$;
d) $\log(100)$; e) $\ln(e^4)$; f) $e^{2\ln(4)}$;
g) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$; h) $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$; i) $\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right)$;
j) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; k) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)$; l) $\operatorname{cotg}\left(\frac{10\pi}{3}\right)$;
m) $\arccos(-1)$; n) $\cos\big(\arcsin(0)\big)$; o) $\arccos\big(\sin(\pi)\big)$;
p) $\arccos\left(\cos(\frac{\pi}{5})\right)$; q) $\arccos\big(\cos(2\pi)\big)$; r) $\arccos(e^0)$;

Comandos **Geogebra:**

- Usar a folha CAS
- Para calcular ou simplificar basta inserir a expressão em causa

- Simplificação de expressões: `Simplificar( <expressão> )`
- símbolo π: `pi`
- exponencial e^x: `exp( <expressão> )`

5. Simplifique a seguinte expressão:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right).$$

6. Considere a função $f(x) = 3\sin(2x)$.
   (a) Determine o domínio e o contradomínio de $f(x)$.
   (b) Faça um esboço do gráfico da função $f(x)$ e confirme a resposta da alínea (a).
   (c) Determine o valor de $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
   (d) Resolva a equação $f(x) = -3$.
   (e) Interprete graficamente a alínea (d) e confirme a solução recorrendo o Geogebra.
   (f) Defina uma restrição de injectividade de f e caracterize a função inversa, nessa restrição.

Comandos **Geogebra:**

- Calcular o valor de $f(a)$, estando a função $f(x)$ já definida: `f( <valor> )`
- Representar o ponto $(a, f(a))$: `( <valor>, <f(valor)> )`

7. Considere a função $f(x) = -\frac{\pi}{3} + \arccos(3x-1)$.
   (a) Determine o domínio e o contradomínio de $f(x)$.
   (b) Determine os zeros da função $f(x)$.
   (c) Calcule $f\left(\frac{1}{6}\right)$.
   (d) Caracterize a função inversa de $f(x)$, indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

8. Considere a função $f(x) = 3 + 2\ln(x-1)$.
   (a) Determine o domínio e o contradomínio de $f(x)$.
   (b) Calcule $f(2)$.
   (c) Caracterize a função inversa de $f(x)$, indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

9. Resolva, caso seja possível, as seguintes equações:

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$;	b) $x^3 - 2x^2 + x = 0$;	c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$.
d) $e^x - 1 = 0$;	e) $e^{2x} - e^x = 0$;	f) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$;
g) $-3 + \log(x) = 0$;	h) $\ln(x+1) = 0$;	i) $\ln(x^2) - 4 = 0$;
j) $\sin(3x - \pi) = \frac{1}{2}$;	k) $\sin(3x-\pi) = \sin(x)$;	l) $1 - 2\cos(2x) = 2$;
m) $\arcsin(3x) = \frac{\pi}{4}$;	n) $\arcsin(3x) = \pi$;	o) $\arccos(3x) = \pi$.

10. Verifique que as seguintes equações têm uma única solução e aproxime-a, com uma casa decimal correcta.

a) $x + e^x = 0$;	b) $\sin(x) - x + 2 = 0$;	c) $x + \ln(x) = 0$.

Sugestões para realizar a análise e cálculo no **Geogebra:**

i) localize e separe todas as soluções da equação, recorrendo ao gráfico da função $f(x)$;

ii) defina um intervalo que contenha a solução pretendida e onde sejam válidas as condições de convergência do método numérico a utilizar (bisseção ou Newton);

iii) recorrendo à folha CAS, itere até obter a aproximação pretendida.

- bisseção: calcular o ponto médio do intervalo $[a_n, b_n]$ e escolher o sub-intervalo conveniente;
- Newton: calcular a raiz da tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto de abcissa x_n:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$