Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I (parte 1) - Engenharia Informática

23 de fevereiro de 2022 Duração: 1h15m

- A avaliação do portfólio de actividades do CeaMatE substitui a resposta ao grupo 1.
- Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

[0.5 *val.*] 1. (a) Identifique a igualdade que é verdadeira:

i) $\arcsin(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$;

ii) $\dfrac{2+x}{x} = 3$;

iii) $e^{x^2} = \left(e^x\right)^2$;

iv) $\log_3(3^{2a}) = 2a$.

[0.5 *val.*] (b) O valor numérico da expressão $\arccos\left(-2\cos\left(\dfrac{29\pi}{3}\right)\right)$ é:

i) π;

ii) 0;

iii) $-\pi$;

iv) 2π.

[0.5 *val.*] (c) A função inversa de $f(x) = 2 + e^{3x-1}$ é:

i) $g(x) = \dfrac{1}{2+e^{3x-1}}$;

ii) $g(x) = 2 + \ln(3x-1)$;

iii) $g(x) = -2 - \ln(-3x+1)$;

iv) $g(x) = \dfrac{1+\ln(x-2)}{3}$.

[0.5 *val.*] (d) Identifique a igualdade que é <u>falsa</u>:

i) $\arcsin(-0.5) = -\dfrac{\pi}{6}$;

ii) $\arcsin\left(\sin(-\pi)\right) = -\pi$;

iii) $\arccos(-0.5) = \dfrac{2\pi}{3}$;

iv) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

[1.0 *val.*] 2. A equação $3^{-x} - x - 2 = 0$ tem apenas uma solução real, pertencente ao intervalo $[-2,\, 0]$.

(a) Recorrendo ao método gráfico, justifique a afirmação anterior.

(b) Efectue 3 iterações do método da bisseção, para determinar uma estimativa para a solução da equação dada. Indique um majorante para o erro dessa estimativa.
Nota: $\sqrt{3} \simeq 1.73\,, \quad \sqrt[4]{3} \simeq 1.32$

[2.0 *val.*] 3. Calcule as seguintes primitivas:

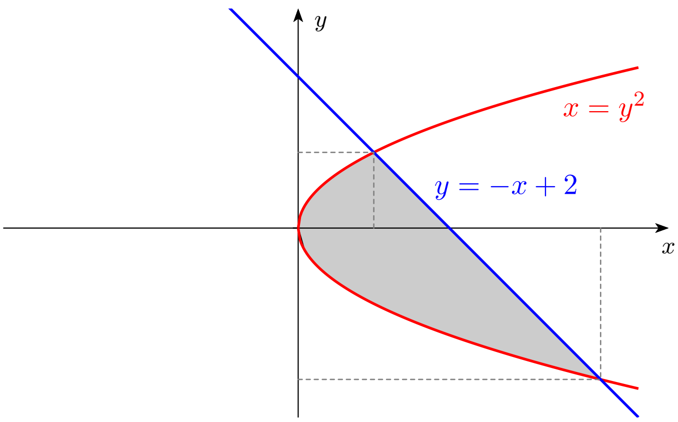
(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}\,dx\,;$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + \cos\left(-\frac{2}{x}\right)}{x^2}\,dx\,.$

[1.0 *val.*] 4. Considere o integral definido $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,dx\,.$

Recorrendo a uma regra de integração numérica e a uma partição em 4 sub-intervalos, determine uma estimativa para o integral.

[5.0 *val.*] 5. Considere a região $\mathcal{A}$, sombreada, da figura seguinte.



(a) Defina a região $\mathcal{A}$ na forma $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \le y \le b \ \wedge\ f(y) \le x \le g(y)\right\}$.

(b) Usando integrais, calcule a área de $\mathcal{A}$.

(c) Usando integrais, indique expressões simplificadas para o volume dos sólidos que se obtêm pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo:

i) Ox;

ii) Oy.

(d) Indique uma expressão simplificada que permita calcular o perímetro da região $\mathcal{A}$.

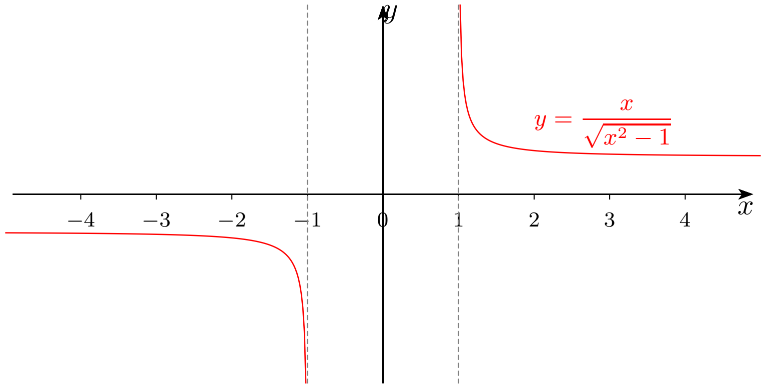
Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de Análise Matemática I (parte 2) - Engenharia Informática

23 de fevereiro de 2022 — Duração: 1h15m

- Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

[2.0 *val.*] 1. Considere o gráfico seguinte.



(a) Classifique, justificando, as seguintes expressões:

(I) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$; (II) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$; (III) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$; (IV) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

No que se segue, note que $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sqrt{x^2-1}+c, \quad c \in \mathbb{R}$.

(b) Determine a natureza do integral impróprio de 1ª espécie.

(c) Determine, justificando, a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$.

[4.0 *val.*] 2. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int x\,\mathrm{arctg}\,(x)\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \tan^3(x)\cos(x)\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{x-2}{(x-1)(x^2-3x+2)}\,dx$.

[1.0 *val.*] 3. Determine, o centro e o intervalo de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$.

[0.5 *val.*] 4. (a) A expressão $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx$ corresponde a (escolha a opção correta):

i) um integral indefinido;
ii) um integral definido;
iii) um integral impróprio de 1ª espécie;
iv) um integral impróprio de 2ª espécie.

[0.5 *val.*] (b) Identifique a proposição verdadeira:

i) $\displaystyle\int x\,e^x\,dx = x\int e^x\,dx\,;$

ii) $\displaystyle\int x\,e^x\,dx = \frac{x^2}{2}\,e^x + c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,;$

iii) $\displaystyle\int x\,e^x\,dx = e^x\,x - \int e^x\,dx\,;$

iv) $\displaystyle\int x\,e^x\,dx = \frac{x^2}{2}\,e^x - \int e^x\,dx\,.$

[0.5 *val.*] (c) Considere o integral $\displaystyle I = \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ e a mudança de variável definida por $x = t^2$.
Uma expressão equivalente de I é dada por (escolha a opção correta):

i) $\displaystyle\int_0^4 \frac{t}{1+t}\,dt\,;$

ii) $\displaystyle\int_0^2 \frac{t}{1+t}\,dt\,;$

iii) $\displaystyle\int_0^4 \frac{2\,t^2}{1+t}\,dt\,;$

iv) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2\,t^2}{1+t}\,dt\,.$

[0.5 *val.*] (d) A expressão $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2^n - 2^{n-1}\right)$ define (escolha a opção correta):

i) uma série de Mengoli, convergente;
ii) uma série geométrica, convergente;
iii) uma série geométrica, divergente;
iv) uma série de Dirichlet, divergente.