Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Engenharia Electrotécnica

Exame Normal de Álgebra Linear (1^0 ano/1^0 sem.)

23 de janeiro de 2017 Duração: 2h30

---

1. Sejam α e β parâmetros reais. Considere o sistema linear $AX = B$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \beta \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha+\beta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -\beta+1 \\ 1 \\ -2\beta \end{bmatrix}.$$

[2.0] (a) Discuta o sistema em função dos parâmetros α e β.

(b) Faça $\alpha = -2$ e $\beta = 0$.

[1.0] i. Resolva o sistema linear $AX = B$.

[1.5] ii. Calcule A^{-1} usando o algoritmo de Gauss-Jordan.

[1.5] iii. Confirme a resposta dada em i. usando a matriz inversa calculada em ii..

[1.5] 2. Sabendo que A, B e X sao matrizes invertíveis de ordem n, resolva em ordem a X a equaçao matricial $(AXB^{-1})^T = I_n$.

3. Considere os vectores $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$ e $w = (1, -3, -2)$ de $\mathbb{R}^3$.

[2.0] (a) Determine o subespaço vectorial $S =< u, v, w >$.

[1.0] (b) Determine uma base de S e indique a respectiva dimensão.

[1.0] (c) Determine as coordenadas do vector $a = (2, 3, 5)$ relativamente à base que indicou na alínea anterior.

[1.0] (d) Os vectores u, v e w constituem uma base de $\mathbb{R}^3$? Justifique.

[1.0] (e) Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha os vectores u e v.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

[1.5] (a) Determine os valores próprios da matriz A .

[1.0] (b) Confirme o resultado obtido na alínea anterior de dois modos distintos.

[2.0] (c) Diga, justificando, se a matriz A é diagonalizável. Em caso afirmativo, indique uma matriz diagonalizadora, P, e uma matriz diagonal, D, tais que $A = PDP^{-1}$.

[1.0] (d) Determine o polinómio característico da matriz A.

[1.0] (e) Use o teorema de Cayley-Hamilton para calcular a matriz $-A^{18} + A^{16} + 3I_3$.