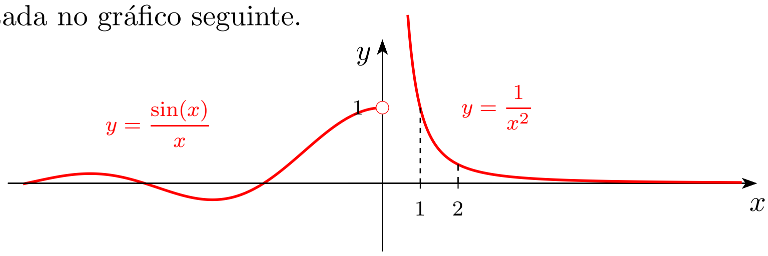
Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Frequência 2 de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

18 de dezembro de 2019 Duração: 1h45m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

[2.75 *val.*] 1. Considere a função $f(x)$, representada no gráfico seguinte.



[0.75 *val.*] (a) Classifique, justificando, os seguintes integrais:

(I) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$; (II) $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,dx$; (III) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$.

[0.75 *val.*] (b) Determine, justificando, a natureza do integral impróprio de 1ª espécie.

[0.50 *val.*] (c) Determine, justificando, a natureza do integral impróprio de 2ª espécie.

[0.75 *val.*] (d) Recorrendo ao critério do integral, determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Justifique a validade das condições do critério do integral.

[3.0 *val.*] 2. Considere a primitiva $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

[1.25 *val.*] (a) Calcule a primitiva, recorrendo à técnica de primitivação por partes.

[1.75 *val.*] (b) Calcule a primitiva, recorrendo à técnica de primitivação por substituição.
Nota: Não simplifique o resultado final.

[2.0 *val.*] 3. Calcule as seguintes primitivas:

[0.75 *val.*] (a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sec^2(e^x)}\,dx$;

[1.25 *val.*] (b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx$.

[1.25 *val.*] 4. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(2^{-n} - 2^{-n-1}\right)$.

[0.75 *val.*] (a) Mostre que a série pode ser interpretada como um série de Mengoli e também como uma série geométrica.

[0.50 *val.*] (b) Justifique que a série é convergente e determine a sua soma.

1. (a) Começamos por notar que $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Além disso, $f(x)$ é contínua no seu domínio.

(I) $D_{\text{int}} = [-1, 0]$ é limitado mas não está contido em D_f, porque $x = 0$ não pertence a D_f. Porém, trata-se de único ponto. Uma vez que o limite

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$$

é finito, então a função é limitada em D_{int}. Logo o integral é definido (D_{int} e $f(x)$ são ambos limitados).

(II) $D_{\text{int}} = [0, 2]$ é limitado mas não está contido em D_f, porque $x = 0$ não pertence a D_f. Porém, trata-se de único ponto. Como o limite

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

não é finito, então a função não é limitada em D_{int}. Logo o integral é impróprio de 2ª espécie (D_{int} é limitado e $f(x)$ é ilimitada).

(III) $D_{\text{int}} = [2, +\infty[$ não é limitado mas está contido em D_f. Como $f(x)$ é contínua em D_{int}, então o integral é impróprio de 1ª espécie (D_{int} é ilimitado mas $f(x)$ é limitada em intervalos fechados e limitados).

(b) O integral impróprio de 1ª espécie é (III) e tem-se,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t x^{-2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^t = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

pelo que o integral é convergente.

(c) O integral impróprio de 2ª espécie é (I). Tendo em conta a primitiva já calculada na alínea anterior, tem-se

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^2 x^{-2}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_t^2 = \lim_{t\to 0^+} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{t}\right) = +\infty,$$

pelo que o integral é divergente.

(d) Do gráfico apresentado verifica-se que, no intervalo $[1, +\infty[$, a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ é contínua, positiva e decrescente, pelo que o critério do integral é aplicável. Atendendo a que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx,$$

como $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ é um integral definido e $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ é um integral impróprio convergente, então $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente. Logo a série também é convergente.

Alternativa: Atendendo a que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

como a segunda série é convergente (pelo critério do integral e atendendo a III), então a série é convergente.

2. (a) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \;=\; \int \underbrace{x^2}_{d} \cdot \underbrace{x\,(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{p}\,dx$$

cálculos auxiliares:

- $\int x\,(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \;=\; -\frac{1}{2}\int \underbrace{-2x\,(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx = -(4-x^2)^{\frac{1}{2}} + c$
- $(x^2)' = 2x$

$$\begin{aligned}
&= x^2\left(-(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\right) - \int 2x\cdot\left(-(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)dx\\
&= -x^2\,(4-x^2)^{\frac{1}{2}} - \int \underbrace{-2x\,(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx\\
&= -x^2\,(4-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c\\
&= -x^2\sqrt{4-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(4-x^2)^3} + c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Recorrendo à mudança de variável definida no caso 2 da página 4 das Tabelas de Matemática, tem-se

$$\text{m.v. } \boxed{x = 2\sin(t)}\,, \quad t\in\left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[\quad \text{(para garantir a invertibilidade da m.v.)}$$

e ainda

$$x' = 2\cos(t)$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &\overset{\text{m.v}}{=} \int \frac{\big(2\sin(t)\big)^3}{\sqrt{4-\big(2\sin(t)\big)^2}}\,2\cos(t)\,dt\\
&= \int \frac{16\sin^3(t)\,\cos(t)}{\sqrt{4}\,\sqrt{1-\sin^2(t)}}\,dt\\
&= \int \frac{8\sin^3(t)\,\cos(t)}{\sqrt{\cos^2(t)}}\,dt\,, \qquad \text{porque } 1-\sin^2(t)=\cos^2(t)\\
&= \int \frac{8\sin^3(t)\,\cos(t)}{\cos(t)}\,dt\,, \qquad \text{porque, na restrição, tem-se } \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)\\
&= \int 8\sin^3(t)\,dt\,, \qquad \text{primitivação de funções trigonometricas, pág. 7 das Tabelas}\\
&= 8\int \sin(t)\,\sin^2(t)\,dt\\
&= 8\int \sin(t)\,\big(1-\cos^2(t)\big)\,dt\\
&= 8\int \underbrace{\sin(t)}_{R7}\,dt - 8\,(-1)\int \underbrace{-\sin(t)\cos^2(t)}_{R2}\,dt\\
&= -8\cos(t) + 8\,\frac{\cos^3(t)}{3} + c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Uma vez que, para $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$$x = 2\,\sin(t) \;\Leftrightarrow\; \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = t\,,$$

então

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \;=\; -8\,\cos\Big(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Big) + \frac{8}{3}\cos^3\Big(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Big) + c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.$$

3. (a) Recorrendo à técnica de primitivação de funções trigonométricas (página 6 das Tabelas de Matemática, potência par de cosseno), tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{\sec^2(e^x)}\,dx &= \int e^x \cos^2(e^x)\,dx \\
&= \int e^x \frac{1}{2}\big(1+\cos(2e^x)\big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \underbrace{e^x}_{R3}\,dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \underbrace{2\,e^x\,\cos(2e^x)}_{R6}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\,e^x + \frac{1}{4}\,\sin(2e^x) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Trata-se de uma fracção imprópria (grau do numerador$=3$ e grau do denominador$=2$), pelo que não é possível aplicar nenhuma das regras de primitivação imediata. Para lá chegar, precisamos de simplificar a fracção, começando por efectuar a divisão dos dois polinómios:

$$\begin{array}{llll|l}
x^3 & & & & x^2-2x+1 \\ \cline{5-5}
 & & & & x+2 \\
-(\,x^3 & -2x^2 & +x &) & \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & -x & & \\
 & -(\,2x^2 & -4x & +2\,) & \\ \cline{1-4}
 & & 3x & -2 &
\end{array}$$

Então

$$\underbrace{\frac{x^3}{x^2-2x+1}}_{\text{fracção imprópria}} = x+2+\underbrace{\frac{3x-2}{x^2-2x+1}}_{\text{fracção própria}}\,,$$

A fracção própria resultante também ainda não é primitivável através das regras de primitivação imediata, pelo que necessitamos de a decompor numa soma de fracções simples (ver página 8 das Tabelas de Matemática).

- factorização do denominador:

$$x^2-2x+1=0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{x=1 \vee x=1}_{\text{raiz múltipla}},$$

Então

$$x^2-2+1 = (x-1)(x-1) = (x-1)^2\,.$$

- decomposição da fracção:
A raiz $x=1$, dupla, determina duas fracções simples:

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2} = \underbrace{\frac{A_1}{x-1}}_{\cdot(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} = \frac{A_1\,(x-1)+A_2}{(x-1)^2}\,.$$

Da igualdade entre os numeradores resulta que

$$\begin{array}{r|rcl}
 & 3x-2 & = & A_1\,(x-1)+A_2 \\ \hline
x=1 & 1 & = & 0+A_2 \\
x=0 & -2 & = & -A_1+A_2
\end{array}
\;\Leftrightarrow\; \begin{cases} A_2=1 \\ -2=-A_1+1 \end{cases}
\;\Leftrightarrow\; \begin{cases} A_2=1 \\ A_1=3 \end{cases}$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é definida por

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\,,$$

Então,

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{x^3}{x^2-2x+1}}_{\text{fracção imprópria}} &= x+2+\underbrace{\frac{3x-2}{x^2-2x+1}}_{\text{fracção própria}} \\
&= x+2+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\,,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx &= \int x+2+\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}\,dx \\
&= \int \underbrace{x}_{R5}\,dx + \int \underbrace{2}_{R2}\,dx + 3\int \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{R5}\,dx + \int \underbrace{(x-1)^{-2}}_{R2} \\
&= \frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+c \\
&= \frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

4. (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(2^{-n}-2^{-n-1}\right) = \left(2^{-2}-2^{-3}\right)+\left(2^{-3}-2^{-4}\right)+\left(2^{-4}-2^{-5}\right)+\cdots.$

A série pode ser interpretada como uma série de Mengoli, porque

$$u_n = 2^{-n}-2^{-n-1} = \underbrace{2^{-n}}_{a_n}-\underbrace{2^{-(n+1)}}_{a_{n+1}}$$

e também como uma série geométrica, porque

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-(n+1)}-2^{-(n+1)-1}}{2^{-n}-2^{-n-1}} = \frac{2^{-n-1}-2^{-n-2}}{2^{-n}-2^{-n-1}} = \frac{2^{-n}\left(2^{-1}-2^{-2}\right)}{2^{-n}\left(1-2^{-1}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad \text{(constante)}$$

(b) Se tivermos em conta que a série é de Mengoli, como

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0$$

é finito, então a série é convergente e tem soma

$$S = a_2 - \lim_{n\to+\infty} a_n = 2^{-2}-0 = \frac{1}{4}$$

Também podemos justificar tendo em conta que a série é geométrica. Nesse caso, a série é convergente porque $R=\frac{1}{2}$ é menor do que 1. A soma é dada por

$$S = \frac{u_2}{1-R} = \frac{2^{-2}-2^{-3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$