Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ANÁLISE MATEMÁTICA I - **Engenharia Informática 2022-23**

4.1 Cálculo integral: integral definido e aplicações — Aulas TP+P: Folha 4

Integral definido, cálculo de áreas, volumes e comprimentos de curvas, integração numérica.

Integral definido: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é um integral definido se:

i) o intervalo $[a,b]$ é limitado;

ii) a função $f(x)$ está definida ($[a,b] \subseteq D_f$) e é contínua em $[a,b]$.

Nota: O integral continua a ser definido se a função $f(x)$ não estiver definida ou não for contínua num **conjunto finito de pontos** do intervalo [a,b], desde que os limites laterais nesses pontos sejam finitos.

Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam $f(x)$ uma função real de variável real, contínua em $[a,b]$ e $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$, isto é, $\int f(x)\,dx = F(x)$. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b \equiv F(b) - F(a)\,.$$

Integração numérica

Regra dos trapézios: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\Big[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]$

com erro $\displaystyle\leq \frac{(b-a)^3}{12\,n^2} \times \max_{[a,b]} |f''(x)|$

Regra de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\Big[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big]$

Nota: n tem que ser **par**!

com erro $\displaystyle\leq \frac{(b-a)^5}{180\,n^4} \times \max_{[a,b]} |f''''(x)|$

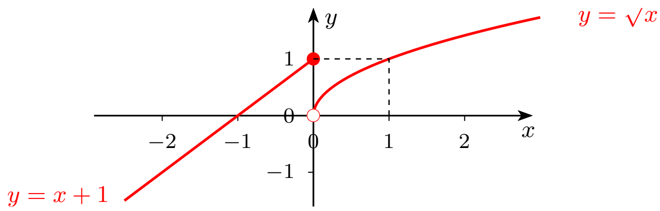
Comandos do **Geogebra:**

- Calcular/representar $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$: `integral( <expressão de f(x)>, <a>, <b> )`
- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} f(x)$: `LimiteàDireita( <expressão de f(x)>, <x0> )`
- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} f(x)$: `LimiteàEsquerda( <expressão de f(x)>, <x0> )`
- Regra dos trapézios: `SomaTrapezoidal( <expressão de f(x)>, <a>, <b>, <# de trapézios> )`

1. Calcule o valor dos seguintes integrais definidos.

   a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}+1\,dx\,;$ b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx\,;$ c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx\,.$

2. A função $f(x)=\begin{cases} x+1 & ,\ x\le 0 \\ \sqrt{x} & ,\ x>0 \end{cases}$ tem a representação gráfica da figura seguinte.

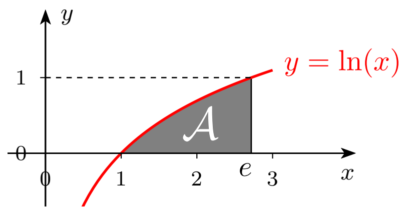


   (a) Indique o domínio da função $f(x)$.

   (b) Analise a continuidade da função $f(x)$.

   (c) Justifique que o integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ é definido e calcule o seu valor.

3. Considere a região sombreada $\mathcal{A}$ representada na figura seguinte.



   (a) Identifique, justificando, a região $\mathcal{A}$ na forma $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : \quad a\le x\le b \ \wedge\ f(x)\le y\le g(x)\}$.

   (b) Usando integrais, indique expressões simplificadas que permitam calcular a área de $\mathcal{A}$

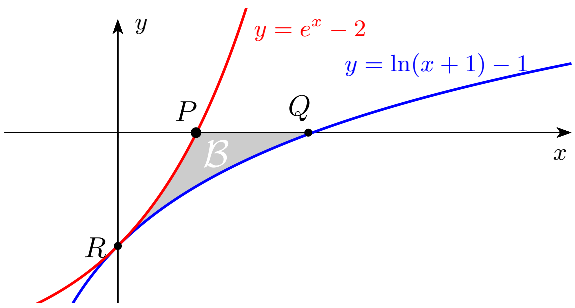
      i. em função da variável x;

      ii. em função da variável y.

   (c) Explique as vantagens da expressão da alínea b(ii) e, a partir dela, calcule o valor exacto da área de $\mathcal{A}$.

   (d) Recorrendo à expressão da alínea b(i), calcule uma aproximação para a área de $\mathcal{A}$, recorrendo à regra dos trapézios e a uma partição uniforme do intervalo em 4 sub-intervalos. Confirme o resultado recorrendo ao Geogebra.

4. Considere a região $\mathcal{B}$, sombreada, da figura seguinte.



   (a) Determine as coordenadas dos pontos P, Q e R.

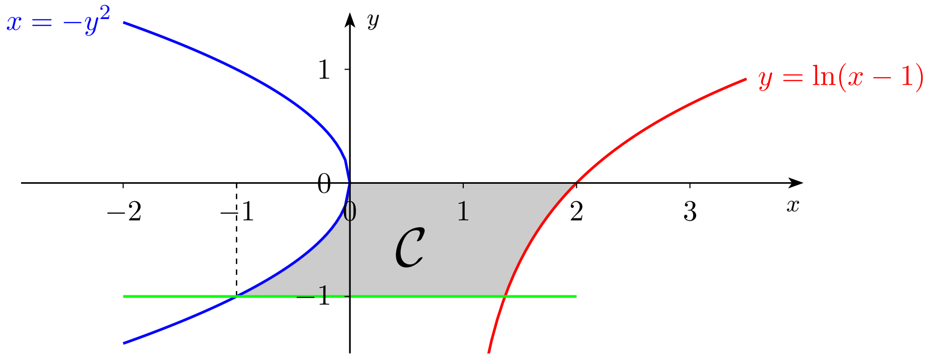
   (b) Usando integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular a área de $\mathcal{B}$

      (i) em função da variável x;

      (ii) em função da variável y.

   (c) Recorrendo a integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{B}$ em torno do eixo Ox.

5. Considere a região $\mathcal{C}$, a sombreado, da figura seguinte.



(a) Identifique, justificando, a região $\mathcal{C}$ na forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le y \le b \ \wedge \ f(y) \le x \le g(y)\}$.

(b) Indique uma expressão simplificada que permita calcular a área de $\mathcal{C}$.

(c) Usando integrais, calcule o volume do sólido de revolução que se obtém a partir da rotação da região $\mathcal{C}$ em torno do eixo Oy.

6. Considere a região $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y \le (x-1)^2 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 \le 1 \quad \wedge \quad y \ge 0\right\}$.

(a) Represente graficamente a região $\mathcal{D}$.

(b) Usando integrais, indique expressões simplificadas que permitam calcular a área de $\mathcal{D}$

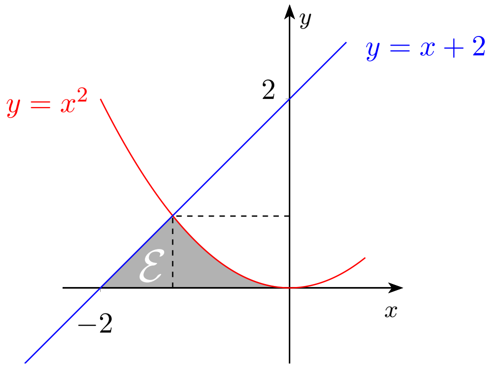
(i) em função da variável x;

(ii) em função da variável y.

(c) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que permita calcular o volume do sólido de revolução que se obtém a partir da rotação da região $\mathcal{D}$ em torno do eixo Oy.

(d) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que permita calcular o perímetro de $\mathcal{D}$.

7. Considere a região $\mathcal{E}$ representada na figura seguinte:



(a) Identifique, justificando, a região $\mathcal{E}$ na forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le y \le b \ \wedge \ f(y) \le x \le g(y)\}$.

(b) Usando integrais, calcule a área de $\mathcal{E}$.

(c) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro de $\mathcal{E}$.

(d) Usando integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular os volumes dos seguintes sólidos de revolução representados nas figuras 1 e 2, obtidos a partir da rotação da região $\mathcal{E}$ em torno dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

Figura 1

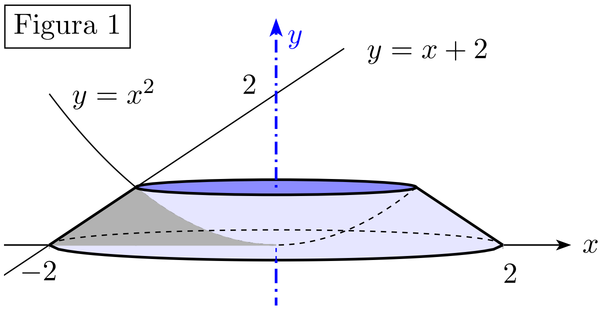
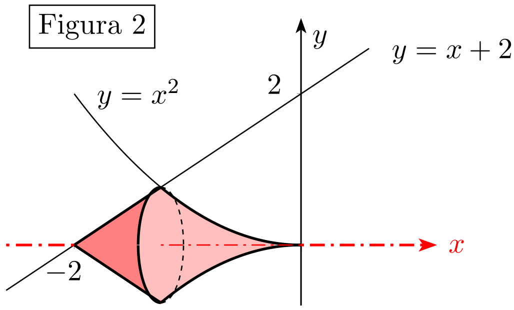
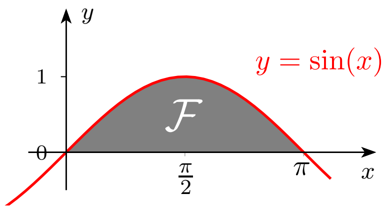


Figura 2



8. Considere a região sombreada $\mathcal{F}$ representada na figura seguinte.



(a) Identifique, justificando, a região $\mathcal{F}$ na forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leq x \leq b \ \wedge \ f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

(b) Usando integrais, calcule a área de $\mathcal{F}$.

(c) Calcule uma aproximação para a área de $\mathcal{F}$, recorrendo à regra dos trapézios e a uma partição uniforme do intervalo em 4 sub-intervalos. Confirme o resultado recorrendo ao Geogebra.

(d) Determine um majorante para o erro da aproximação da alínea anterior.

(e) Recorrendo à regra de Simpson, determine uma nova estimativa para a área de $\mathcal{F}$ com, pelo menos, uma casa decimal correcta (erro ≤ 0.05).

9. Considere a região $\mathcal{G} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 1 - y^2 \quad \wedge \quad y \leq -\ln(x) \quad \wedge \quad -1 \leq y \leq 0\right\}$.

(a) Represente graficamente a região $\mathcal{G}$.

(b) Usando integrais, indique expressões simplificadas que permitam calcular a área de $\mathcal{G}$

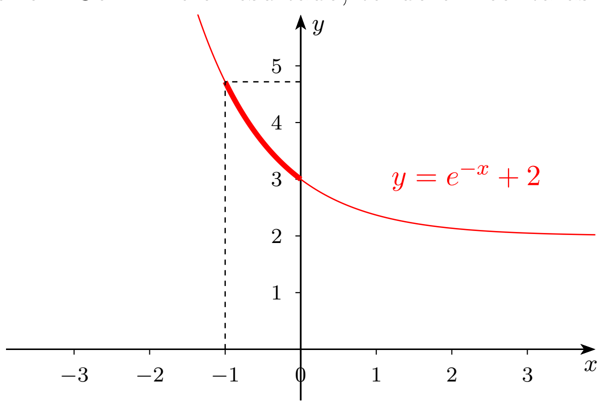
i. em função da variável x;

ii. em função da variável y.

(c) Explique as vantagens da expressão da alínea b(ii) e, a partir dela, calcule o valor exacto da área de $\mathcal{G}$.

(d) Tendo em conta a expressão da alínea b(ii) calcule uma aproximação para a área de $\mathcal{G}$ recorrendo à regra dos trapézios e a uma partição uniforme em 4 sub-intervalos.

(e) Tendo em conta o gráfico da figura seguinte, calcule um majorante para o erro da estimativa da alínea anterior. Confirme o resultado, tendo em conta as alíneas (c) e (d).



10. Considere a região $\mathcal{H} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y \leq -x^2 + 1 \quad \wedge \quad y \geq x - 1 \quad \wedge \quad 0 \leq x \leq 1\right\}$.

(a) Represente graficamente a região $\mathcal{H}$.

(b) Usando integrais, indique expressões simplificadas que permitam calcular a área de $\mathcal{H}$

(i) em função da variável x;

(ii) em função da variável y.

(c) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que permita calcular o volume do sólido de revolução que se obtém a partir da rotação da região $\mathcal{H}$ em torno do eixo

(i) O_x;

(ii) O_y.

(d) Indique uma expressão simplificada que permita calcular o perímetro de $\mathcal{H}$.

(e) Recorrendo à regra dos trapézios, ao integral da alínea anterior e ao Geogebra, determine uma estimativa para o perímetro de $\mathcal{H}$ com, pelo menos, uma casa decimal correcta (erro ≤ 0.05).