

3. Primitivação de funções reais de variável real  
Primitivação imediata

Aulas TP+P: Folha 3

**Primitiva / Anti-derivada / Integral**

$F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$   $\Leftrightarrow F'(x) = f(x)$  Notação:  $\int f(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

**Propriedade** [linearidade do integral]:  $\int k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x) dx = k_1 \int f_1(x) dx \pm k_2 \int f_2(x) dx$

**Comandos Geogebra:**

- Para calcular a primitiva de  $y = f(x)$ : `integral( <expressão de  $f(x)$ > )`

1. Recorrendo à definição de primitiva, mostre que

$$\int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. Aplique as regras de primitivação indicadas no cálculo das primitivas das seguintes funções:

P2+P3+P4+P5

- |                               |                                |                               |  |
|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|--|
| a) $3x^2$ ;                   | b) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ;  | c) $\frac{\ln^3(x)}{x}$ ;     | d) $\frac{x}{(1+x^2)^3}$ ;                 |
| e) $\frac{x}{1+x^2}$ ;        | f) $\frac{e^{x+1}}{e^x+1}$ ;   | g) $\frac{1}{x \ln(x)}$ ;     | h) $\operatorname{cosec}(2x) \cos(2x)$ ;   |
| i) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ; | j) $\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$ ; | k) $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ ; | l) $\frac{\cos(x)}{\sqrt{9-4\sin^2(x)}}$ ; |
| m) $\frac{1}{1+x^2}$ ;        | n) $\frac{1}{1+4x^2}$ ;        | o) $\frac{x}{9+x^4}$ ;        | p) $\frac{e^x}{9+4e^{2x}}$ ;               |

P6

- |                             |   |                                    |                             |
|-----------------------------|---|------------------------------------|-----------------------------|
| q) $\sin(x) e^{2\cos(x)}$ ; | r) $\frac{e^{\operatorname{tg}(3x)}}{\cos^2(3x)}$ ; | s) $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ ; | t) $\frac{2^{\ln(x)}}{x}$ ; |
|-----------------------------|---|------------------------------------|-----------------------------|

P7-P14

- |                 |                            |                                |  |
|-----------------|----------------------------|--------------------------------|--|
| u) $\cos(5x)$ ; | v) $\frac{x}{\cos(x^2)}$ ; | w) $\frac{e^x}{\cos^2(e^x)}$ ; | x) $\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ . |
|-----------------|----------------------------|--------------------------------|--|

3. Calcule as primitivas das seguintes funções:

- |                                   |                                    |   |                                   |
|-----------------------------------|------------------------------------|---|-----------------------------------|
| a) $\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ ; | b) $\frac{\cos(2x)}{\sin^3(2x)}$ ; | c) $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{2}{x}\right)$ ;    | d) $\frac{\arctg(4x)}{1+16x^2}$ ; |
| e) $\frac{5x^3}{1+16x^4}$ ;       | f) $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ ;      | g) $\frac{e^{\operatorname{tg}(x)}}{\cos^2(x)}$ ; | h) $\frac{\sin(\ln(x))}{2x}$ .    |

4. Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando a técnica de primitivação por decomposição.

- |                             |                           |                                 |  |
|-----------------------------|---------------------------|---------------------------------|--|
| a) $\frac{1+\sqrt{x}}{x}$ ; | b) $\frac{1+x}{1+9x^2}$ ; | c) $\frac{1+x}{\sqrt{9-x^2}}$ ; | d) $\frac{\cos^3(x) + \cos(x) + 1}{\cos^2(x)}$ . |
|-----------------------------|---------------------------|---------------------------------|--|

5. Considere a primitiva  $\int \boxed{\cdot} \sin(x) dx$ .

Complete, justificando, o espaço assinalado com  $\boxed{\cdot}$  por forma a que possam ser aplicadas as seguintes regras de primitivação imediata:

- a) P1;      b) P2;      c) P3;      d) P4;      e) P5;      f) P8.

6. Explique porque é que as funções a seguir indicadas não têm primitiva imediata.

- |                    |                            |                            |                                       |
|--------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| a) $3x \cos(2x)$ ; | b) $\frac{x^2-1}{x^3+x}$ ; | c) $\sin^2(x) \cos^3(x)$ ; | d) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}}$ . |
|--------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|