

4.2 Integrais impróprios

Aulas TP+P: Folha 5

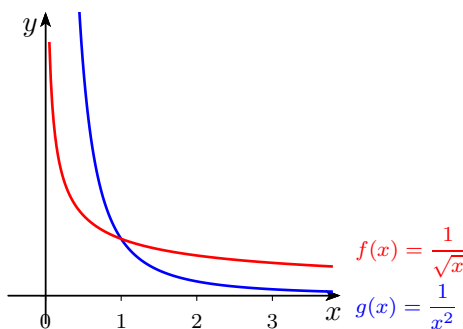
Integrais em intervalos não limitados e/ou de funções não limitadas

- Integral **indefinido** (= primitiva): $\int f(x) dx$
- Integral **definido**: $\int_a^b f(x) dx$ é um integral definido se:
 - i) $D_{int} = [a, b] \subseteq D_f$;
 - ii) $D_{int} = [a, b]$ é **limitado**;
 - iii) $f(x)$ é contínua no $D_{int} = [a, b]$ ou, pelo menos, o conjunto de pontos onde a função não é contínua ou não está definida é finito e a função é **limitada** (ie, os limites laterais nesses pontos são finitos).

Nota: Toda a função contínua num intervalo fechado e limitado $[a, b]$ é também limitada.

- Integral **impróprio**: $\int_a^b f(x) dx$ é um integral impróprio se:
 - i) $D_{int} = [a, b] \subseteq D_f$;
 - ii) $D_{int} = [a, b]$ **NÃO** é **limitado**. $\rightarrow \int_{-\infty}^b f(x) dx$, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$
ou
 - iii) o conjunto de pontos de $D_{int} = [a, b]$ onde a função não é contínua ou não está definida é finito, mas a função **NÃO** é **limitada**. $\rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$, em algum c no intervalo $[a, b]$

1. Considere as funções $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

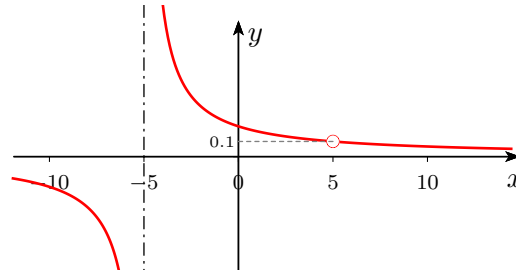


- (a) Classifique, justificando, os seguintes integrais:

(I) $\int_{-2}^{-1} f(x) dx$; (II) $\int_0^1 f(x) dx$; (III) $\int_1^2 f(x) dx$; (IV) $\int_1^{+\infty} f(x) dx$; (V) $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

- (b) Determine, justificando, a natureza do integral impróprio de 1ª espécie.
(c) Determine, justificando, a natureza do integral impróprio de 2ª espécie.
(d) Determine, justificando, a natureza do integral impróprio de 3ª espécie.
(e) Repita as alíneas (a)-(d), relativamente à função $g(x)$.

2. Considere o seguinte gráfico, da função $f(x) = \frac{x-5}{x^2-25}$.



(a) Classifique, justificando, os seguintes integrais:

(I) $\int_{-5}^0 \frac{x-5}{x^2-25} dx;$

(II) $\int_5^{10} \frac{x-5}{x^2-25} dx;$

(III) $\int_{10}^{+\infty} \frac{x-5}{x^2-25} dx.$

(b) No que se segue, note que $\int \frac{x-5}{x^2-25} dx = \ln|x+5| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

i. Determine, justificando, a natureza do integral impróprio de 1ª espécie.

ii. Determine, justificando, a natureza do integral impróprio de 2ª espécie.

3. Considere a região $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq e^{-x} \quad \wedge \quad x \geq (y-1)^2 \quad \wedge \quad y \geq 0\}.$

(a) Represente graficamente a região \mathcal{A} .

(b) Explícite, usando integrais, uma expressão que defina a área de \mathcal{A} .

(c) O que pode concluir relativamente à medida identificada na alínea anterior?

4. Considere o integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

(a) Determine a natureza do integral.

(b) Prove que o integral representa o comprimento da semi-circunferência de centro na origem e raio 1.