5. Métodos de primitivação — Aulas TP+P: Folha 9

Primitivação de frações racionais

Formulário: página 6

Seja $\dfrac{p(x)}{d(x)}$ uma fração em que $p(x)$ e $d(x)$ são polinómios (fração racional).

1. Se a **fracção é imprópria** (grau do numerador $\geq$ grau do denominador):

   Efectua-se a divisão dos polinómios, para decompor a fracção na soma de um polinómio com uma fracção própria,
   $$\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}.$$
   A fracção racional própria resultante é tratada conforme descrito no passo 2.

2. Se a **fracção é própria** (grau do numerador $<$ grau do denominador):

   Decompõe-se a fracção numa soma de fracções simples:

   i) factoriza-se o denominador, tendo em conta as suas raízes: $d(x) = (x-\star)^m \cdots (x-\bullet)^n$

   ii) cada **raiz real** $\star$, de **multiplicidade** m, origina um factor real $(x-\star)^m$ e portanto uma soma de m fracções simples com a forma
   $$\frac{A_1}{x-\star} + \frac{A_2}{(x-\star)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-\star)^m},$$

   iii) Determinam-se os coeficientes A_i recorrendo ao método dos coeficientes indeterminados ou ao método das constantes arbitrárias.

Comandos do **Geogebra:**

- Calcular a soma de frações simples: `FraçõesParciais( <fração> )`

1. Resolva as primitivas aplicando a técnica de primitivação de frações racionais:

   a) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2-1}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{3x^2-7x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$; c) $\displaystyle\int \frac{7x-11}{x^3-3x^2+4}\,dx$;

   d) $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{(x-2)(2x^2-2)}\,dx$; e) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^3-1}{x^2-1}\,dx$; f) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$.

2. Identifique, para cada uma das primitivas seguintes, a técnica de primitivação a aplicar:

   a) $\displaystyle\int \frac{3}{9x^2+1}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx$; c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx$;

   d) $\displaystyle\int \frac{3}{2x^2-4x+2}\,dx$; e) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-3x+2}\,dx$; f) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3-1}\,dx$.

3. Resolva as seguintes primitivas, recorrendo à técnica de primitivação por substituição e às mudanças de variável indicadas.

   a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}-1}\,dx$, mv: $e^x = t$; b) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx$, mv: $x = t^3$.

4. Resolva a primitiva $\displaystyle\int \frac{3\,e^{2x}}{e^{4x}-4}\,dx$ recorrendo à técnica de primitivação por substituição e a uma mudança de variável conveniente.