Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ÁLGEBRA LINEAR

Engenharia Electrotécnica

25 de Janeiro de 2016 Duração: 2h

---

1. Considere o sistema $AX = B$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ m & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{bmatrix}$ e $m \in \mathbb{R}$.

[1.5 *val.*] (a) Discuta o sistema $AX = B$ em função do parâmetro m.

(b) No que se segue considere $m = 2$.

[1.5 *val.*] (i) Calcule a inversa de A.

(ii) Determine a solução do sistema $AX = B$ recorrendo

[1.0 *val.*] (I) ao método de eliminação de Gauss;

[1.0 *val.*] (II) à regra de Cramer;

[1.0 *val.*] (III) à matriz inversa de A.

2. Sejam A e B matrizes invertíveis de ordem 3.

[1.0 *val.*] (a) Indique, justificando, a característica da matriz A.

[1.0 *val.*] (b) Comente a seguinte afirmação: "O determinante da matriz B é zero."

[1.0 *val.*] (c) Calcule o determinante da matriz $2A\,B^T A^{-1} B^{-1}$.

3. Considere em R^3 os vectores $u = (0, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (0, 2, 3)$ e $t = (1, 0, 0)$.

[1.5 *val.*] (a) Justifique, sem cálculos, que os vectores dados são linearmente dependentes.

[1.0 *val.*] (b) Verifique se o vector w é combinação linear dos vectores u e v.

[1.0 *val.*] (c) Tendo em conta a alínea anterior, determine uma base de R^3 que contenha os vectores u e v.

[1.5 *val.*] (d) Caracterize o espaço gerado pelos vectores u e v e determine as coordenadas do vector $(1, 2, 3)$ na base $\{u, v\}$.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

[1.0 *val.*] (a) Determine os valores próprios da matriz A.

[1.0 *val.*] (b) Analise o resultado da alínea anterior, recorrendo ao traço e ao determinante.

[2.0 *val.*] (c) Verifique, justificando, se a matriz A é diagonalizável.

[1.0 *val.*] (d) Recorrendo ao teorema de Cayley-Hamilton, determine $A^3 - 5A^2 + 9A - 4I$.

[1.0 *val.*] (e) Justifique que a matriz A é invertível e, recorrendo ao teorema de Cayley-Hamilton, determine uma expressão para A^{-1} em função da matriz A.

1. (a) Recorrendo à matriz ampliada do sistema $AX = B$, tem-se

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 & m \\ m & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - mL_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 & m-1 \\ 0 & 1-m & -m & 1-m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 = L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 & m-1 \\ 0 & 0 & 1-m & 0 \end{array}\right]$$

pelo que podem ocorrer os seguintes casos:

- se $m \neq 1$, então $car(A) = car(A|B) = 3 =$ nº de incógnitas e portanto o sistema é possível e determinado;
- se $m = 1$, então a matriz final tem a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

pelo que $car(A) = car(A|B) = 2$, mas é inferior ao número de incógnitas e portanto o sistema é possível e indeterminado, de grau 1 e tendo z como variável livre.

(b) Quando $m = 2$ tem-se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(i) A matriz inversa de A é uma matriz X de dimensão 3×3 tal que $AX = I_3$, onde I_3 representa a matriz identidade de ordem três. Recorrendo ao algoritmo de Gauss-Jordan, tem-se

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 = L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 + L_3 \\ L_1 = L_1 + L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 = L_1 - L_2 \\ L_3 = -L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

pelo que a inversa de A é dada por $X \equiv A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) Começamos por notar que o sistema é possível e determinado, atendendo à caracterização apresentada na alínea (a).

(I) Recorrendo ao método de eliminação de Gauss, tem-se

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 = L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ y + z & = & 1 \\ -z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

(II) Comecemos por observar que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\,(2-2) - (2-1) = -1\,.$$

é não nulo e portanto podemos usar a regra de Cramer. Este facto também já estava garantido pela alínea (a), pois sendo A uma matriz quadrada de característica máxima, então tem determinante diferente de zero. Assim,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{-1} = 0$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1$$

e ainda

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{-1} = 0$$

Note-se que nos cálculos de x e de z as matriz tem duas colunas iguais, pelo que os respectivos determinantes são nulos.

(III) Se recorrermos à matriz inversa de A, já calculada na alínea (b)(i), tem-se

$$AX = B \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=I}X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note-se que $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

2. (a) Sendo A uma matriz invertível de ordem 3, então tem característica (máxima) 3.

(b) Sendo B uma matriz quadrada invertível, então tem determinante não nulo, pelo que a afirmação é falsa.

(c) Atendendo a que A e B são matrizes de ordem 3 invertíveis e recorrendo às propriedades dos determinantes, tem-se

$$\begin{aligned} |2A\,B^T A^{-1} B^{-1}| &= 2^3|A||B^T||A^{-1}||B^{-1}| && \text{, porque } det(\lambda A) = \lambda^n det(A) \\ &= 2^3|A|\,|B|\,\frac{1}{|A|}\,\frac{1}{|B|} && \text{, porque } det(B^T) = det(B) \text{ e } det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} \\ &= 2^3\cancel{|A|}\,\frac{1}{\cancel{|A|}}\,\cancel{|B|}\,\frac{1}{\cancel{|B|}} && \text{, porque } ab = ba \text{ (comutatividade de números, não de matrizes!)} \\ &= 8\,. \end{aligned}$$

3. (a) O espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3, pelo que qualquer conjunto com mais do que três vectores, de $\mathbb{R}^3$, é um conjunto linearmente dependente. Como $\{u, v, w, t\}$ é um conjunto de quatro vectores de $\mathbb{R}^3$ então é linearmente dependente.

(b) O vector w é combinação linear dos vectores u e v se existirem escalares α e β tais que

$$\underbrace{(0,2,3)}_{w} = \alpha\underbrace{(0,1,1)}_{u} + \beta\underbrace{(1,0,1)}_{v}.$$

Como

$$\begin{aligned} & (0,2,3) = \alpha(0,1,1)+\beta(1,0,1) \\ \Leftrightarrow\ & (0,2,3) = (\beta,\alpha,\alpha+\beta) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=2 \\ \alpha+\beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=2 \\ 2=3 \quad \text{impossível!} \end{cases} \end{aligned}$$

então não existem escalares nas condições pretendidas, pelo que o vector w não é combinação linear dos vectores u e v.

(c) Os vectores u e v são linearmente independentes, porque não são múltiplos. Uma vez que, pela alínea anterior, o vector w não é combinação linear dos vectores u e v então os vectores u, v e w também são linearmente independentes. Como $\mathbb{R}^3$ é um espaço de dimensão três, então qualquer conjunto de três vectores de $\mathbb{R}^3$ que sejam linearmente independentes é também gerador do próprio espaço e portanto constitui uma base do mesmo. Logo $\{u,v,w\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(d) O espaço gerado pelos vectores u e v é dado por

$$< u,v >= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x,y,z)=\alpha u+\beta v,\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}\},$$

pelo que

$$\begin{aligned} & (x,y,z)=\alpha(0,1,1)+\beta(1,0,1) \\ \Leftrightarrow\ & (x,y,z)=(\beta,\alpha,\alpha+\beta) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \beta=x \\ \alpha=y \\ \alpha+\beta=z \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow[L_1\leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow[L_3=L_3-L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & z-y \end{array}\right] \\ & \xrightarrow[L_3=L_3-L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & z-y-x \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=y \\ \beta=x \\ 0=z-y-x \end{cases}. \end{aligned}$$

O sistema anterior só é possível se $z-y-x=0$, pelo que

$$< u,v >= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z=x+y\}.$$

Notemos agora que o vector $(1,2,3)$ pertence ao espaço $< u,v >$, pois $3=1+2$. Além disso, tendo em conta o sistema anterior ($\alpha=y=2$, $\beta=x=1$), tem-se

$$(1,2,3)=2u+1v.$$

4. (a) Os valores próprios de A são dados por

$$\begin{aligned} |A-\lambda I|=0 \ \Leftrightarrow\ & \begin{vmatrix} -\lambda & 5 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \\ \Leftrightarrow\ & (2-\lambda)\big(-\lambda(3-\lambda)+2\big)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=0 \\ \Leftrightarrow\ & 2-\lambda=0 \ \vee\ \lambda=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \underbrace{\lambda=2 \ \vee\ \lambda=\frac{3+1}{2}=2}_{\text{multiplicidade dois}} \vee\ \lambda=\frac{3-1}{2}=1. \end{aligned}$$

(b) Sabe-se que $tr(A) = \sum v.p.$ e $det(A) = \prod v.p.$. Ora,

- $tr(A) = 0 + 2 + 3 = 5$ (soma dos valores da diagonal de A)
- $\sum v.p. = 2 + 2 + 1 = 5 \checkmark$,

pelo que a primeira propriedade está verificada. Relativamente à segunda, tem-se

- $det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(0+2) = 4$
- $\prod v.p. = 2 \times 2 \times 1 = 4 \checkmark$.

(c) Para verificar se a matriz A é diagonalizável precisamos de determinar os espaços próprios de A e verificar se a dimensão de cada espaço coincide com a multiplicidade do valor próprio que lhe está associado. Comecemos pelo espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$, por se o único valor próprio não simples. Como $E(\lambda = 2) = \big\{X \in \mathbb{R}^3 : (A - 2I)X = 0\big\}$, então

$$[A - 2I|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 = L_3 + L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 5y - z = 0 \\ z \in \mathbb{R} \\ 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}\,z \\ z \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases}$$

e portanto

$$E(\lambda = 2) = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\, x = -\frac{1}{2}\,z,\, z \in \mathbb{R}\big\} = \big\{\big(-\frac{1}{2}\,z,\, 0,\, z\big) : z \in \mathbb{R}\big\} = \big\langle\big(-\frac{1}{2},\, 0,\, 1\big)\big\rangle$$

pelo que o espaço $E(\lambda = 2)$ só tem dimensão um, enquanto o valor próprio $\lambda = 2$ tem multiplicidade dois. Então a matriz A não é diagonalizável.

(d) De acordo com o teorema de Cayley-Hamilton tem-se $p(A) = 0$ onde $p(\lambda)$ é o polinómio característico da matriz A. Da alínea (a) sabemos que

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4\,,$$

pelo que do teorema de Cayley-Hamilton tem-se

$$-A^3 + 5A^2 - 8A + 4I = 0\,.$$

Então

$$\begin{aligned} A^3 - 5A^2 + 9A - 4I &= A^3 - 5A^2 + 8A + A - 4I \\ &= A^3 - 5A^2 + 8A - 4I + A \\ &= -\big(\underbrace{-A^3 + 5A^2 - 8A + 4I}_{=0}\big) + A \\ &= A \end{aligned}$$

(e) Na alínea (b) verificámos que $det(A) \neq 0$, pelo que a matriz A é invertível. Pelo teorema de Cayley-Hamilton tem-se agora

$$\begin{aligned} -A^3 + 5A^2 - 8A + 4I = 0 &\Leftrightarrow 4I = A^3 - 5A^2 + 8A \\ &\Leftrightarrow 4I = A\big(A^2 - 5A + 8I\big) \\ &\Leftrightarrow I = A\,\underbrace{\frac{1}{4}\big(A^2 - 5A + 8I\big)}_{A^{-1}}, \end{aligned}$$

pelo que a inversa de A é dada por $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\big(A^2 - 5A + 8I\big)$.