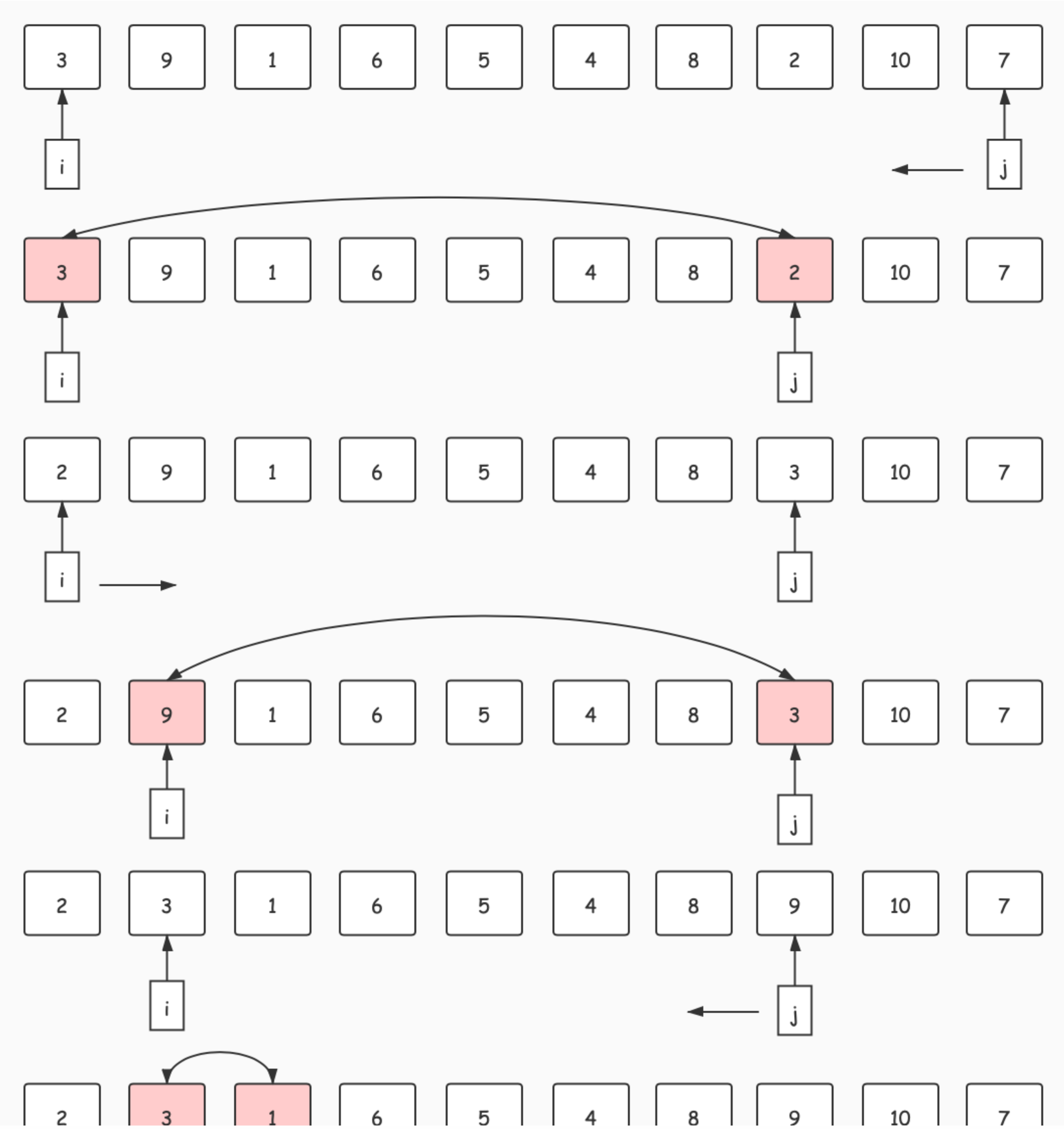
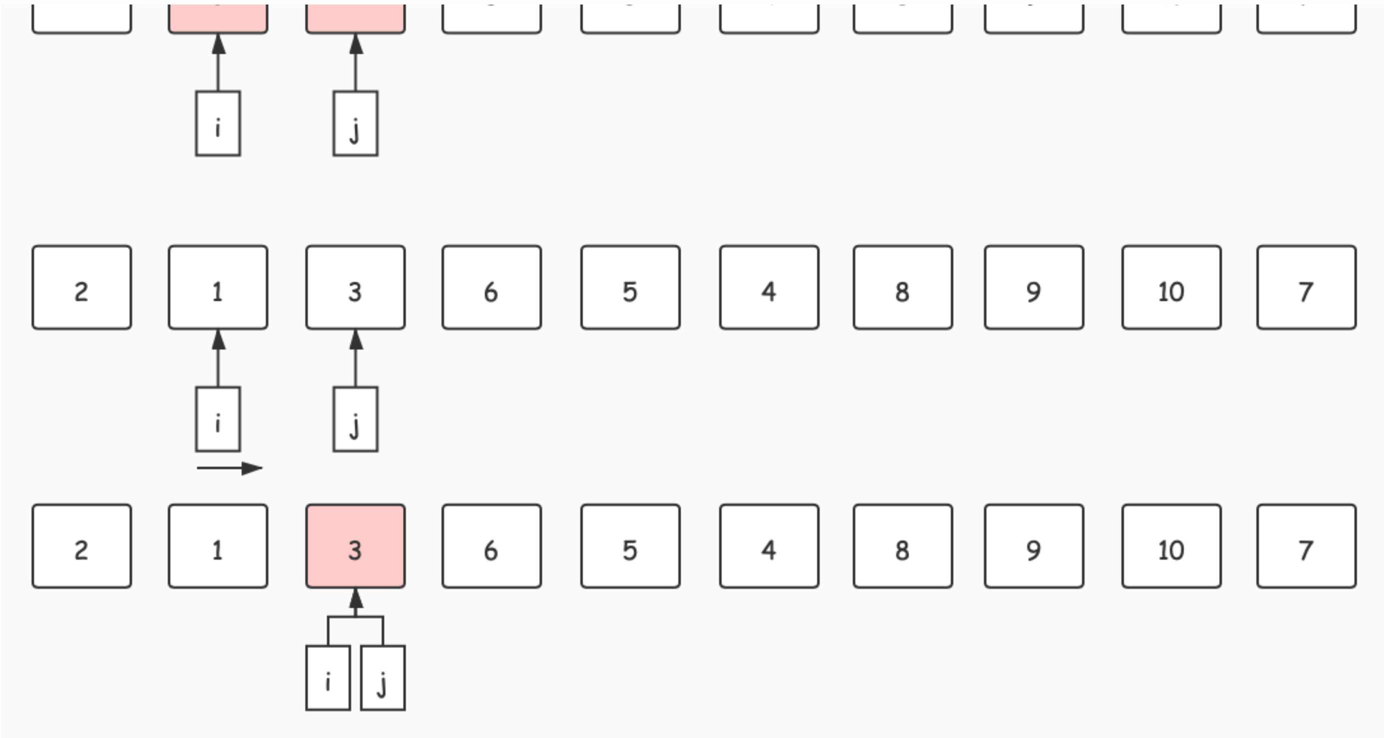
结合二叉树的快速排序算法分析

1. 示例引出：

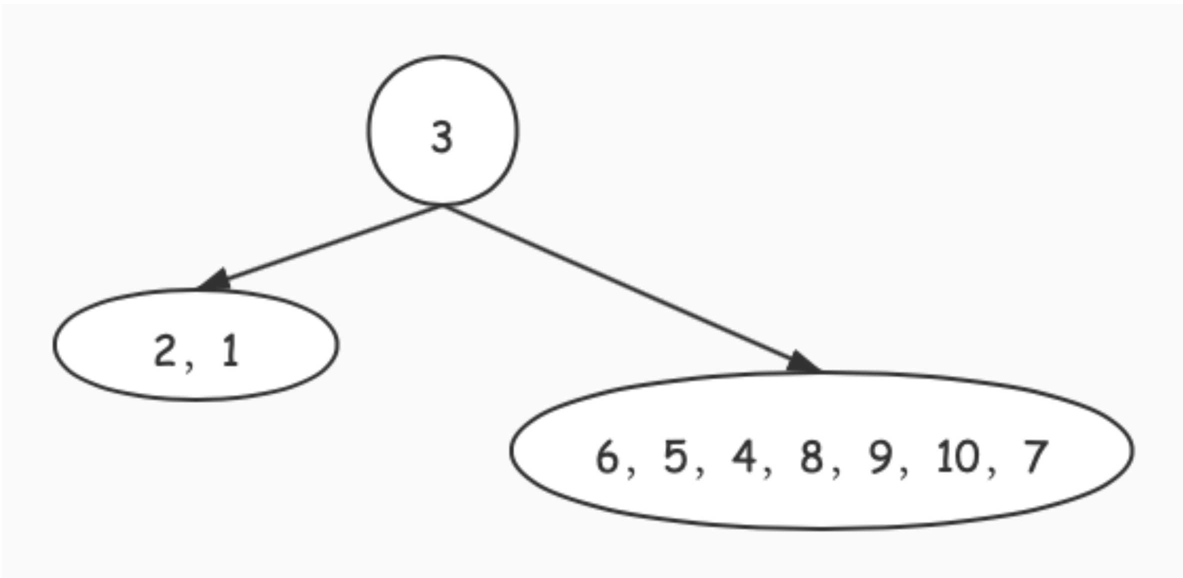
对 3，9，1，6，5，4，8，2，10，7 进行从小到大的快速排序

对于第一次遍历，如下图所示：

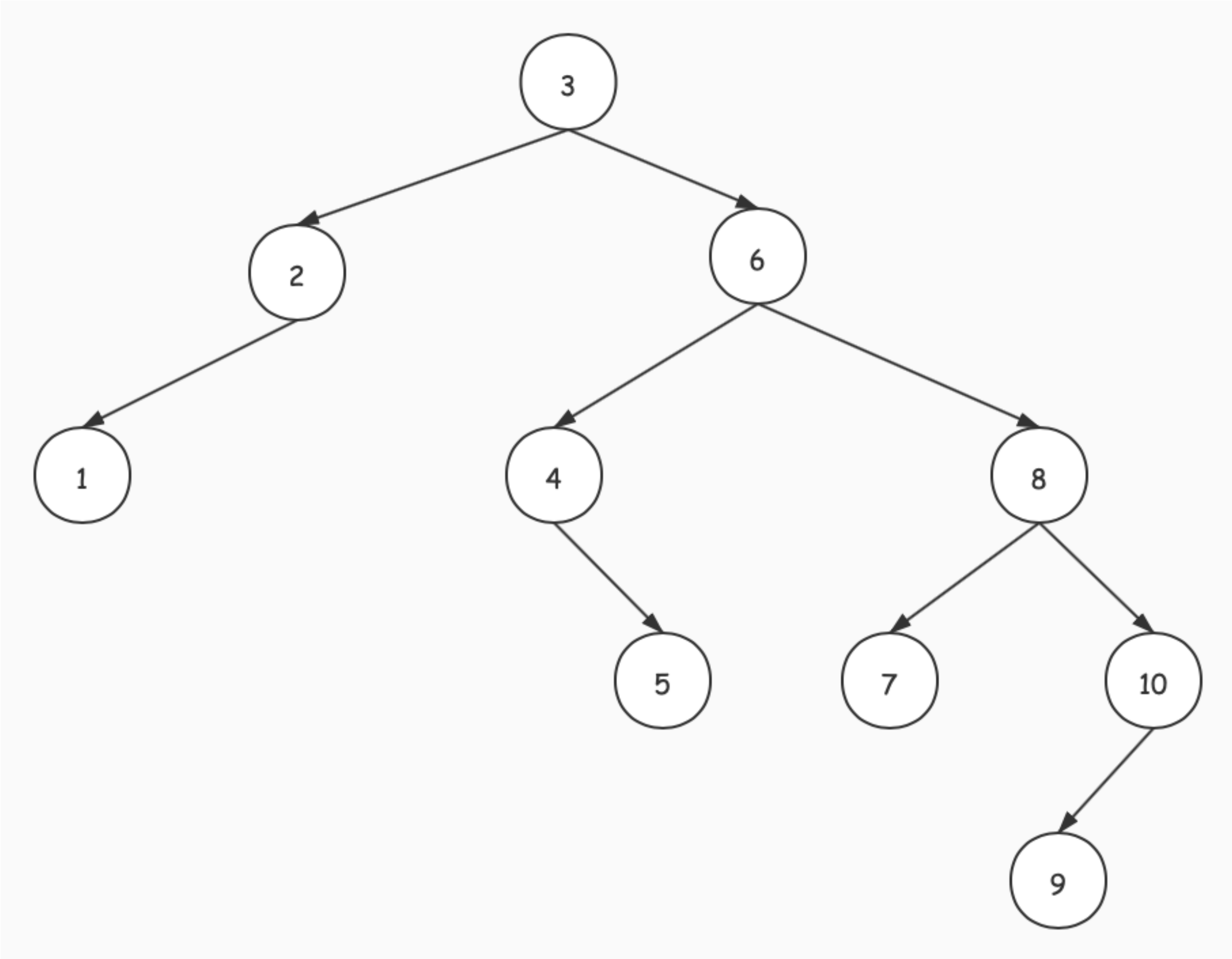




对应的二叉树结果是:



那么经过后几次遍历比较可以得到如下二叉树:



这时我们可以计算一下我们的快速排序算法进行了多少次比较:

$1*2+2*3+3*3+4=21$，即每个节点到根结点的距离之和。

2. 快排算法复杂性分析:

由上例可知，快排可视为一个二叉树构建的过程，那么这个二叉树构建的速度就决定了我们快排的效率。可以确定的是，对于同样的数据元素在不同的原始排列条件下，构建的二叉树越矮，则排序效率越高。

通过这一理论，我们可以更具体的分析其不同情况下的时间复杂度:

- 对于最理想的状态，构建出的是一颗完全二叉树。

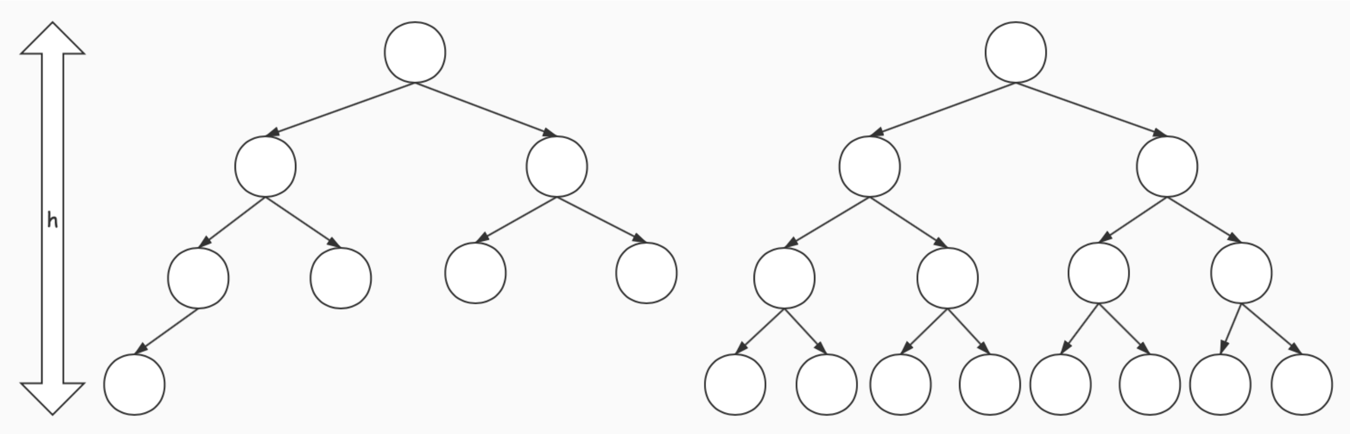
  完全二叉树满足如下公式:

  > $2*$ 叶子到根的距离之和 $=$ 顶点数 $+$ 顶点到根的距离之和 -1

  对于深度为h的完全二叉树，若为满二叉树，比较次数为: $\sum_{i=1}^{h}(i-1)2^{i-1}=(h-2)2^h+2$

  这里的叶子数量m与深度h的关系:

  $2^{h-2}+1\leqslant m\leqslant 2^{h-1}$



那么叶子到根的距离d为：

$h-2\leqslant d\leqslant h-1$

即，$log_2(m-1)\leqslant d\leqslant\log_2(m)$，由于$d$为整数，即可认为$\lfloor log_2(m)\rfloor\leqslant d\leqslant\lceil\log_2(m)\rceil$

而对于完全二叉树来说，叶子数m，与内点（带有叶子节点的顶点）数p的关系为$p=m-1$，则顶点数$n=2m-1$

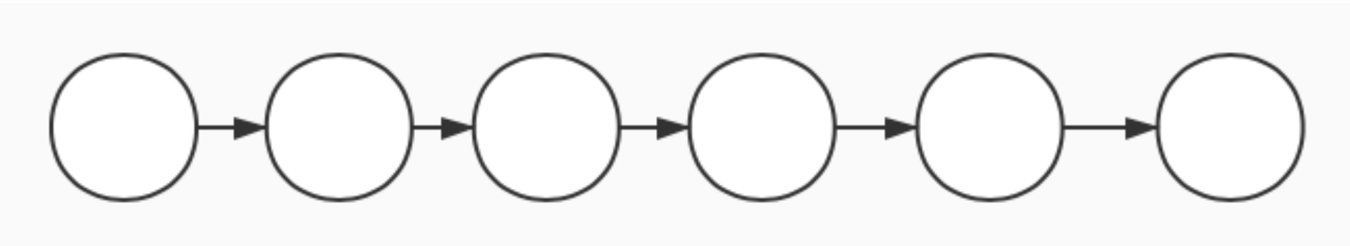
那么由上述公式可得：

> 比较次数 $=$ 顶点到根的距离 $=2*$ 叶子到根的距离 $-$ 顶点数 $+1=m*log_2(m)-n+1\approx n\log_2(\frac{n}{2})-n+1$
>
> 即，$n\log_2(n)-2n+1$，时间复杂度为：$O(n\log(n))$。

- 对于最糟糕的状态，构建出的是一张线性表。

  那么若节点数为n，则：

  > 比较次数 $=\sum_{i=0}^{n-1}i=\frac{n(n-1)}{2}$，即时间复杂度为：$O(n^2)$。



- 对于平均情况而言，我们将T_n作为对n个对象进行快速分类时平均比较次数，在取得排序结果后，选取第k个元素为分割标准，平均比较次数为：$(n-1)+T_{k-1}+T_{n-k}$。

  由于分割标准的选取概率完全相同，那么可以得到平均比较次数为：

  > 平均比较次数 $=T_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(n-1+T_{k-1}+T_{n-k})$
  >
  > $T_0=0\ \ T_1=0\ \ T_2=1$

  由于这里的$\sum_{k=1}^{n}T_{k-1}=\sum_{t=0}^{n-1}T_t$，$k=t-1$，以及$\sum_{k=1}^{n}T_{n-k}=\sum_{t=n-1}^{0}T_t=\sum_{t=0}^{n-1}T_t$，$k=t-1$

  > $T_n=n-1+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T_k$
  >
  > $T_0=0\ \ T_1=0\ \ T_2=1$

  由$nT_n=n(n-1)+2\sum_{k=0}^{n-1}T_k$，以及$(n+1)T_{n+1}=(n+1)n+2\sum_{k=0}^{n}T_k$，得：

  > $\frac{1}{n+2}T_{n+1}-\frac{1}{n+1}T_n=2(\frac{2}{n+1}-\frac{1}{n+2})=d_n$

令$S_n = \frac{1}{n+1}T_n$，得：

> $Sn = 2\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{2}{i+1} - \frac{1}{i+2})$

令$i = k-1$，得：$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2}{i+1} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$
令$i = k-2$，得：$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i+2} = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$
整理得：

> $S_n = 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + 4 - \frac{2}{n+1}$

由$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln(n)$，故$S_n < 2\ln(n) + O(1)$
则：

> $T_n < 2(n+1)\ln(n) + O(n)$
>
> 即，$T_n \sim O(n\log(n))$

综合来看，快排的时间复杂度最理想状态与最糟糕状态分别为$O(n\log(n))$、$O(n^2)$，但是对于一般随机情况而言时间复杂度仍为$O(n\log(n))$。