数学物理方法13

房庭轩 2019302130113

1. 证明：利用罗德里格斯表示

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

其中，$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^n(x+1)^n]$

$$=\frac{d^n}{dx^n}(x+1)^n\cdot(x-1)^n+C_n^1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x+1)^n\frac{d}{dx}(x-1)^n+\cdots+(x+1)^n\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n$$

从而，$P_n(1)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot(1+1)^n n!$

$$=1$$

$$P_n(-1)=\frac{1}{2^n n!}\cdot(-1-1)^n\cdot n!=(-1)^n$$

再利用表达式

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}$$

当n为奇数时，$P_n(x)$无常数项，故$P_{2n+1}(0)=0$

当n为偶数时，$P_{2n}(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(4n-2m)!\ x^{2(n-m)}}{2^{2n}m!(2n-m)!(2n-2m)!}$

其常数项

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(4n-2n)!}{2^{2n}(n!)^2 0!}=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$