3个题目：分离变量法必

l: 弦长度 向低维延拓

$$\begin{cases} u_{tt}+au_t=c^2u_{xx} & 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

$V_n(0)=0$

法1: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty} V_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$ 展开成特殊函数的级数

$V_n'(0)=\frac{2}{l}\int_0^{l} g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

第(1)项展开

法2: (1) $u=X(x)T(t)$

$XT''+aXT'=c^2X''T$

$\frac{T''+aT'}{c^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$

希尔伯特

库朗

GMT

(2) $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$ $X_n=\sin\frac{n\pi x}{l}$ $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$

(3) $T_n''+aT_n'+c^2\lambda_nT_n=0$

(4) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}X_nT_n$

(5) $P^2+aP+c^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2=0$ $\Delta=a^2-4c^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$

$>0,\ P=\frac{-a\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ a $\frac{2cn\pi}{l}$

$=0,\ P=\frac{-a}{2}$

$<0,\ P=\frac{-a\pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$ 当a充分小，则为三角展开

(6) $T_n(t)=\begin{cases} e^{-\frac{at}{2}}[C_n\cos\sqrt{-\Delta}t+D_n\sin\sqrt{-\Delta}t] & \Delta<0 \\ e^{-\frac{a}{2}t}[C_n+D_nt] & \Delta=0 \\ C_ne^{\frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}t}+D_ne^{\frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}t} & \Delta>0 \end{cases}$

a为阻尼

小阻尼

大阻尼

$e^{-\frac{a}{2}t}[C_ne^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t}+D_ne^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t}]$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\underset{(3)}{T_n(t)}\sin\frac{n\pi x}{l}+\underset{(2)}{T_{N+1}(t)}\sin\frac{(N+1)\pi x}{l}$$ (可能含有,单列讨论)

$$+\sum_{N+2}^{+\infty}\underset{(1)}{T_n(t)}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xxxx} & 0<x<l \\ u(0,t)=u''(0,t)=0 \\ u(l,t)=u''(l,t)=0 \end{cases}$$ 向高阶拓展

$u|_{t=0}=\varphi(x)\quad u_t|_{t=0}=\phi(x)$

(1) $u(x,t)=Z(x)T(t)$

(2) $ZT''=a^2Z^{(4)}T$

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{Z^{(4)}}{Z}=-\lambda$$

(3) $Z^{(4)}+\lambda Z=0$

$Z(0)=0,\ Z''(0)=0$

$Z''(l)=0,\ Z(l)=0$

$\sqrt[4]{|\lambda|}\quad -\sqrt[4]{|\lambda|}\quad i\sqrt[4]{|\lambda|}\quad -i\sqrt[4]{|\lambda|}$

$\lambda>0\quad C_1e^{\sqrt[4]{\lambda}x}\quad C_2e^{-\sqrt[4]{\lambda}x}\quad C_3\cos\sqrt[4]{\lambda}x\quad C_4\sin\sqrt[4]{\lambda}x$

$Z_n(x)=\sin\sqrt[4]{\lambda_n}x\qquad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4$

$=\sin\frac{n\pi x}{l}$

(4) $T_n''=-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4T_n$

$T_n(t)=C_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2at+D_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2at$

$$\sum D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x)$$

$$\sum C_n \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a \sin\frac{n\pi}{l}x = \phi(x)$$

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0 \\ u|_{y=0} = u|_{y=a} = 0 \\ u|_{z=0} = u|_{z=a} = 0 \end{cases}$$

向高维拓展

$$u|_{t=0} = x(b-x)y(b-y)z(b-z)$$

$$u_t|_{t=0} = 0$$

$$u = XYZT$$

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z}$$

$$\begin{cases} X'' = -\lambda X \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y'' = -\mu Y \\ Y(0) = Y(a) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Z'' = -\eta Z \\ Z(0) = Z(a) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_m = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \qquad \mu_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \qquad \eta_p = \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2$$

$$T''_{mnp} = -(\lambda + \mu + \eta) T_{mnp}$$

$$u = \sum T_{mnp} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{p\pi z}{c}$$

分离变量法　　圆环 or 圆周的坐标变换

(二) 13、23

行波法(积分变换法)　　半无限问题　一维
达朗贝尔

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & x>0,\ t>0 \\ u(0,t)=0 \\ u(x,0)=\varphi(x) \\ u_t(x,0)=\phi(x) \end{cases}$$

$u(0,t)=g(t)$

①延拓
②作代换
③齐次法

$$v=u-g\left(t+\frac{x}{a}\right)$$

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ v|_{x=0}=0 \\ v|_{t=0}=\varphi-g\left(\frac{x}{a}\right) \\ v_t|_{t=0}=\phi-g'\left(\frac{x}{a}\right) \end{cases}$$

格林函数的构造　　对相应问题求解，化简

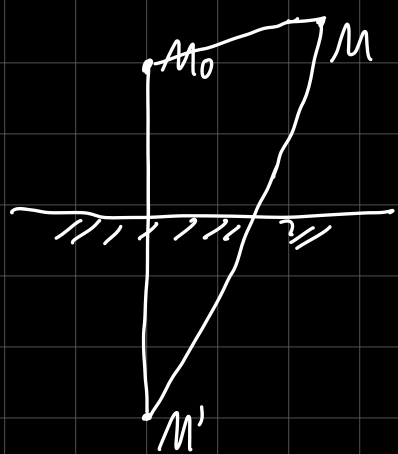
$$\begin{cases} \Delta u=0 \\ u|_{\partial\Omega}=g \end{cases} \qquad u=-\oint_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial n}g\,ds$$

$$\begin{cases} \Delta u=0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=g \end{cases} \qquad u=\oint_{\partial\Omega}G\cdot g\,ds$$

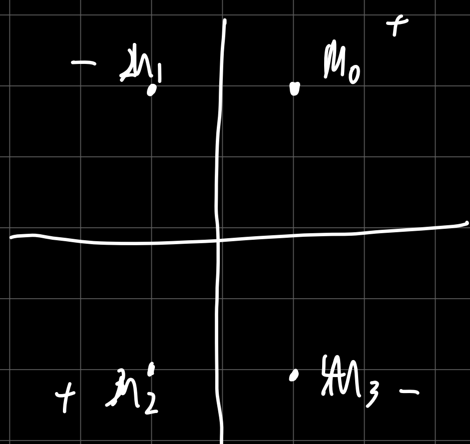
$$\begin{cases} \Delta u=f \\ u|_{\partial\Omega}=g \end{cases} \qquad u=-\int_{\Omega}Gf\,dV-\oint_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial n}g\,ds$$

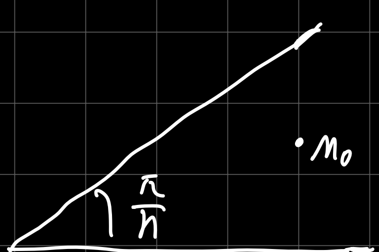
调和 $u=-\oint_{\partial\Omega}\left(u\underbrace{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)}_{\text{双层位势}}-\underbrace{\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial u}{\partial n}}_{\text{单层位势}}\right)dS$

关于参数调和



$$G=\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}-\frac{1}{4\pi r_{M'M}}$$





有限个镜像点

$(2n-1)$个

$f(x)$ 可展：有限个间断点
有限个极值点