数学物理方法第9次作业

2019302130113　唐庭轩

3. 求Fourier变换

(2) $f(x)=\begin{cases}0, & |x|>a \\ |x|, & |x|\leq a\end{cases}$ (a为正常数)

解: $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

$=\int_{-a}^{a}|t|e^{-i\omega t}dt$

$=\int_{-a}^{0}-te^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{a}te^{-i\omega t}dt$

$=\int_{0}^{a}te^{i\omega t}+te^{-i\omega t}dt$

$=2\int_{0}^{a}t\cos\omega t\,dt$

$=\frac{2}{\omega}\left(t\sin\omega t\Big|_{0}^{a}-\int_{0}^{a}\sin\omega t\,dt\right)$

$=\frac{2a}{\omega}\sin\omega a+\frac{2}{\omega^2}\cos\omega a-\frac{2}{\omega^2}$

(3) $f(x)=e^{-\beta|x|}$ ($\beta>0$为常数)

解: $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta|x|}e^{-i\omega x}dx$

$=\int_{-\infty}^{0}e^{(\beta-i\omega)x}dx+\int_{0}^{+\infty}e^{-(\beta+i\omega)\omega}dx$

$=\frac{1}{\beta-i\omega}+\frac{1}{\beta+i\omega}$

$=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$

4、证明: $F^{-1}[e^{-a^2\omega^2 t}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega$ 要引入新变量.

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2t(\omega^2-\frac{ix}{a^2t}\omega)} d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2t(\omega-\frac{ix}{2a^2t})^2} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2tz^2} dz \quad 其中\ z=\omega-\frac{ix}{2a^2t}$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy\cdot\frac{1}{a\sqrt{t}},\ 其中\ y=a\sqrt{t}z$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x}{4a^2t}}$$