数学物理方法第10次作业

2019302130113 房庭轩

5. (2) $f(t)=t^m$，m为非负整数

$$\mathcal{L}(f)=\int_0^{+\infty} t^m e^{-st}dt=-\frac{1}{s}\left(e^{-st}t^m\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-st}dt^m\right)$$
$$=\frac{m}{s}\int_0^{+\infty}t^{m-1}e^{-st}dt$$

从而 $f(m)=\frac{m}{s}f(m-1)$

$f(m-1)=\frac{m-1}{s}f(m-2)$

$\cdots$

$f(1)=\frac{1}{s}f(0)$

而 $f(0)=\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}$

从而 $f(m)=\frac{m!}{s^{m+1}}$ $(Re(s)>0)$

(5) $f(t)=e^{-\lambda t}\sinh wt$，$\lambda, w$为实数

$$\mathcal{L}(f)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\sinh wt\, e^{-st}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(e^{wt}-e^{-wt})e^{-(\lambda+s)t}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{[w-(\lambda+s)]t}-e^{-(w+\lambda+s)t}dt$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w-(\lambda+s)}+\frac{1}{w+\lambda+s}\right)$$
$$=\frac{\lambda+s}{(\lambda+s)^2-w^2}\quad (Re(s)>|w|-\lambda)$$

7. (3) $F(p)=\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$

可知 $p=\pm i$ 为它的二阶极点

据 $\underset{p=i}{Res}(F(p)e^{pt})=\lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\left[(p-i)^2\frac{p^2}{(p^2+1)^2}e^{pt}\right]=\frac{1}{4}(te^{it}-ie^{it})$

$\underset{p=-i}{Res}(F(p)e^{pt})=\lim_{p\to -i}\frac{d}{dp}\left[(p+i)^2\frac{p^2}{(p^2+1)^2}e^{pt}\right]=\frac{1}{4}(ie^{-it}+te^{-it})$

所以 $f(t)=\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)$

(4) $F(p)=\frac{1}{p^2(p+1)}$

$p=0$为二阶极点，$p=-1$为一阶极点

$$\operatorname*{Res}_{p=0}(F(p)e^{pt})=\lim_{p\to0}\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}}{p+1}\right)=t-1$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-1}(F(p)e^{pt})=\lim_{p\to-1}\frac{e^{pt}}{p^2}=e^{-t}$$

提 $f(t)=e^{-t}+t-1$

8. 解: 对y作Laplace变换，有

$$\begin{cases}\frac{d}{dx}[pU(x,p)-1]=\frac{1}{p}\\ U(x,p)\big|_{x=0}=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}\end{cases}$$

对x作积分，得 $U(x,p)=\frac{1}{p^2}x+c$

又由 $U(0,p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}$

得 $c=\frac{1+p}{p^2}$

提 $U(x,p)=\frac{1}{p^2}x+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}$

作逆变换，得 $u(x,y)=xy+y+1$