

奥赛模拟试卷 C1

命题人 应轶群 博士

请解答如下 7 个试题，并将解题过程工整地写出，满分 320 分，时间 180 分钟，阅读量 4000 字。

在答题之前，请大家先读一段一本古老的习题书的序。希望大家做习题时能够欣赏和批判习题，欣赏其中的物理模型和过程、欣赏优美的数学、批判自己认为不合理的东西。而不要只是为了刷题而刷题。奥赛有许多精华，亦有更多糟粕，奥赛选手们最后需要褪去身上奥赛的痕迹，去寻找属于自己的品味（taste）。

For many graduate students of physics the written qualifying examination is the last and one of the most important of the hundreds of grueling examinations that they have had to take in their career. I remember vividly my own experience in 1947 at the University of Chicago. After the qualifying examination, I knew I was finally free from all future examinations, and that generated a wonderful feeling of liberation and relief.

Be that as it may, the written qualifying examination does serve a useful purpose, both for the faculty and for the students themselves. That is why so many universities give these exams year after year in all parts of the world.

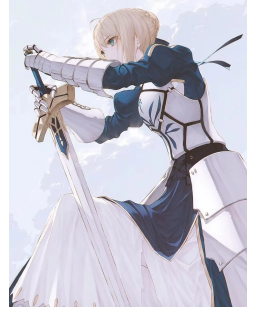
It is perhaps interesting to the readers of this volume to note that the famous Stokes' theorem, so important to modern differential geometry and to physics, first appeared in public as problem No. 8 of the Smith Prize Examination of 1854. Stokes was the examiner and Maxwell was one of the takers of the examination. That Maxwell was impressed with this theorem, and made extensive use of it in 1856 in the first of his epoch-making series of papers that led to Maxwell's equations, is obvious from his papers and from his *A Treatise on Electricity and Magnetism* (1873). Maybe a hundred years from now somebody will remember one of the problems of the present collection?

C.N. Yang

Question (0 Pts) : Who is C. N. Yang?

题 1 (80 分)

Excalibur。在著名的 Fate 系列动画当中，主人公阿尔托莉雅（Saber）的武器是一把不列颠传统的双刃宽剑。为了研究在战斗过程中剑的动力学，我们将其理想化为一根长为 L 、宽度远小于长度的均匀金属杆，其质量为 M 。手握剑柄的位置距离其中一端为 x ，与此同时，为了使用起来顺手，该剑还设计有一枚质量为 m 的配重，设配重距离剑柄一端为 y 。



A. 在战斗过程中，金闪闪用剑劈来，Saber 进行格挡，电光火石之间两剑相碰，设碰前 Saber 手中的剑绕手的角速度为如图所示的 Ω_0 ，手平动的速度为 v_0 ，碰后角速度方向与碰前的相反，大小为 Ω ，手平动的速度与原先相反，大小为 v 。设碰撞点离剑柄端为 z 。

- (1) 试用题给的物理量表示 Saber 手所受的冲量；
- (2) Saber 是一位用剑格斗的大师，她深知若手中受力太大，则产生的冲击会使得其兵器脱手。那么对于她自己而言，应尽量控制碰撞点在何处？在如下数值条件下讨论该方案的可行性；

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \Omega_0 \\ v_1 &= v_0 = \frac{\Omega_0 L}{3} \\ m &= \frac{M}{2} \\ x &= \frac{L}{6}\end{aligned}$$



- (3) 另一方面，如果她的对手使用的是一把一样的剑，则她应控制碰撞点在对手剑上的何处；
- (4) 挥剑劈砍过程中，手的作用是将剑加速到题设的运动条件，其会同时产生一个力和一个扭矩，试在上述的运动和长度数值条件下，认为 m 可变，定量讨论挥剑过程中配重的位置和作用。

B. 在不战斗时，Saber 将剑悬挂起来，悬挂点十分接近剑柄端，可认为该处设有一粗糙铰链，其可以提供一个很弱的与剑的角速度成正比的阻力矩，即 $G = -K\Omega$ 。开始时剑被拉至与竖直方向夹角 θ 处由静止释放。下述问题的解答中，取配重为 0。

- (1) 对剑在竖直方向平衡位置附近的小幅振动，即认为 θ 为小角，试求解剑的角位移随时间的关系以及振动周期，保留到阻尼系数的一阶；
- (2) 若 θ 为稍大一些的角度，试将动力学方程当中的 \sin 项展开到 θ 的 3 阶，而后设 3 阶的系数为小量的情况下，进行修正求解，修正无需对频率进行。试在不长的时间里给出与该小量同阶的修正，即角位移随时间的关系。你的求解过程中须在关键步骤处判断是否计入阻尼的作用，并说明理由；
- (3) 计算对周期的修正，并对上述求解过程进行适当批判性评论。

题 2 (40 分, 二附中 2021 届 史景喆 IPHO 金牌)

研究电介质的应力问题——一个长期存在争议的问题的其中一个观点。

A.

如果一团有限大小的、处处不带电的线性电介质进行任意的形变不会做功, 求证: 当其带有一定量的自由电荷时, 能量变化仅包括电磁场对自由电荷的做功。并给出其内能的积分表达式 (10 分)。提示: 构造一个循环, 运用热力学第一定律。

B.

(1) 假设电介质密度为 $\rho_m(\vec{r})$, 相对介电常数为 $\epsilon_r(\rho_m)$, 单位体积带有自由电荷 $\rho_f(\vec{r})$, 电介质内部存在电场 $\vec{E}(\vec{r})$ 。如果自由电荷完全附着于电介质体内, 求电介质应力的表达式 $\vec{f}(\vec{r})$ 。提示: 可以假设, 在 \vec{r} 处的一团电介质有小位移 $\vec{\xi}(\vec{r})$, 并考察整体的能量变化, 从而用虚功原理求出受力的表达式。(5 分)

(2) 如果再定义一个 $\rho'_m = \rho'_m(\rho_m)$, 将 ρ'_m 代入刚刚求出的表达式, 求出的 $\vec{f}'(\vec{r})$ 是否与 B.(1) 中的 $\vec{f}(\vec{r})$ 相一致? (5 分)

(3) 对最常见的偶极子模型, 请化简 (1) 中得到的表达式, 证明你得到的结果可以写成 (5 分)

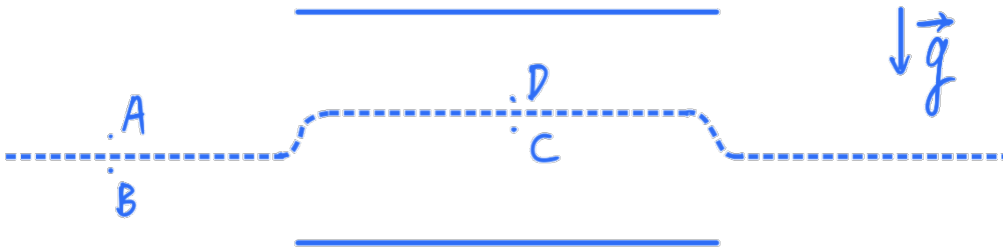
$$\vec{f} = \rho_f \vec{E} + \rho_m \nabla \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \frac{\epsilon_r - 1}{\rho_m} \right)$$

C.

近似将水看为线性介质。在水面上下各有一个很大的电容器极板, 分别带有面电荷密度为 $\pm\sigma$ 的均匀电荷。根据 B 中得到的应力表达式, 计算路径 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ 中, 箭头所连接的两点之间的压强差。进而求出水面上升的高度。

(15 分)

参考资料: 《电介质液面上升问题》, 杨天骅。



题 3 (30 分, 二附中 2020 届 徐浩哲 国家集训队)

- (1) 考虑一个密闭容器, 内部装有理想气体, 其数密度为 n , 温度为 T , 分子质量为 m , 用积分的方法求出单位时间与单位面积容器壁碰撞的分子数。
- (2) 考虑一不均匀、等温的气体系统, 气体分子平均速度为 $\langle v \rangle$, 密度为 ρ , 定容摩尔热容为 C_v , 其分子数密度随 z 坐标变化。考虑处于 $z_0 \pm \lambda$ 范围的气体, 其中 λ 为分子平均自由程, 将其看作两层分别内部均匀的理想气体。根据这个模型, 求出理想气体的分子数的扩散系数 D , 定义为

$$\Delta N = D \frac{dn}{dz} \Delta S \Delta t$$

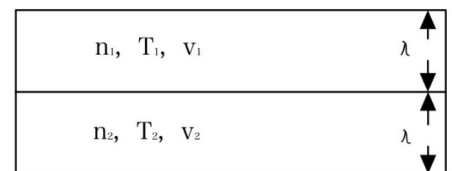
- (3) 考虑上一问中的模型, 不过气体沿着平行于 z 的方向作水平流动, 两层的分子数密度相同而水平流速不同。根据这个模型, 求出理想气体的粘滞系数 η , 定义为

$$\Delta f = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S$$

- (4) 考虑上上一问中的模型, 不过气体分子数密度相同而温度不同。根据这个模型, 求出理想气体的热导率 κ , 定义为

$$\Delta Q = \kappa \frac{dT}{dz} \Delta S \Delta t$$

- (5) 以上几个所得的值与严格值在系数上有所差别, 严格的值系数为 $1/3$ 。简述你求出的值和严格值系数存在差别的原因。



题 4 (40 分, 二附中 2021 届 滕容 (女) CPHO 银牌)

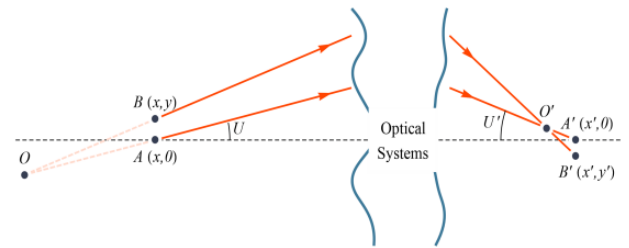
A. 光的汇聚。

- (1) 请证明传播方向平行于旋转抛物面主轴的平行光经过抛物面的反射后会聚于一点, 指出该点的位置;
- (2) 情况 (1) 中的光线能够完美会聚在一点, 但若是平行光束与光轴夹一个小角度 δ 入射, 是否还能完美成像?

B. 如果一个成像系统对于稍微偏离主轴的光线也能完美成像, 则物象必须满足一定的条件, 示意图如下。

(1) 设某光学系统, 左侧折射率为 n , 右侧折射率为 n' , 对轴上点 A 已经能够完美成像于 A' 点。已知 A 发出的光线与光轴夹角为 u , A' 接收的光线与光轴夹角为 u' , 那么对于非常靠近光轴, 距离 δ_r 的另一个点 B , 若能够完美成像于像平面上的 B' 点, 求 $A'B'$ 距离 δ_r' ;

(2) 众所周知, 人的眼睛对 532 nm 附近的绿色光最为敏感, 因此以此波长的激光器直接照射人的眼睛, 伤害也最大。其他条件保持不变, 将绿色激光笔放在上图 O 点处 (OA 长为 R), 光束发散角为 $\theta \ll 1$, 与光轴保持小角度 $u + \theta/2$ 入射, 求在原 $A'B'$ 像平面上光轴下方的区域时眼睛需要与光轴保持多大的距离才能避免被绿色激光灼伤。



题 5 (40 分, 上中 2022 届 冯逸韬 国家集训队)

行星轨道的缓变问题。假设质量为 m 的行星绕大质量恒星 M 转动, 其中 $M \gg m$ 。初始状态行星沿半长轴为 a , 离心率为 e 的椭圆轨道运动。现在由于恒星向四周均匀地抛射质量, 恒星的质量非常缓慢地减小至 γM , 且仍然远大于 m 。

道的形状和朝向。

A. 定义 Laplace-Runge-Lenz 矢量为

$$\mathbf{B} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - GMm^2 \hat{\mathbf{r}}$$

- (1) 证明它是一个守恒量;
- (2) 求其模方的大小;
- (3) 求行星在最初的一个周期内的运动轨道方程。

B. 假设一个周期内 M 几乎以匀速 $dM/dt = -\beta$ 缓慢减小。

- (1) 求一个周期内 dB/dt 的平均值;
- (2) 求最终行星椭圆轨道长轴相对原来转过的角度;
- (3) 求最终行星椭圆轨道的半长轴和离心率。

题 6 (50 分, 上中 2019 届 郭雨尘 国家集训队)

极化激元。

- (1) 考察一条由 N 对原子组成的一维双原子链。两种原子的质量分别为 m 和 M , 平衡时相邻原子间距均为 a 。假设相邻原子间由劲度系数为 β 的弹簧相连。请取行波作为试探解, 解出原子链的振动模式与色散关系 (频率 ω 与波矢 k 的关系)。如果采用周期性边界条件, 即将原子链首尾连成环, 请给出 k 的可能取值。其中 ω 有两个解, 分别称为光学波和声学波。

- (2) 长波极限下, 离子晶体 (如 NaCl) 的晶格振动可以用宏观理论进行讨论。黄昆先生引入了宏观量

$$\mathbf{W} = \sqrt{\frac{\bar{M}}{\Omega}} (\boldsymbol{\mu}_+ - \boldsymbol{\mu}_-)$$

其中 \bar{M} 为正负离子对的约化质量, Ω 为与晶格相关的体积量纲的参数, $\boldsymbol{\mu}_{\pm}$ 为正负离子的位移。他以此建立了一组宏观的方程

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{W}} &= b_{11}\mathbf{W} + b_{12}\mathbf{E} \\ \mathbf{P} &= b_{21}\mathbf{W} + b_{22}\mathbf{E}\end{aligned}$$

称为黄方程。第一个方程是决定离子振动的动力学方程, 第二个方程表示极化强度由正负离子对的相对位移与宏观电场对原子本身的极化两部分组成。请结合电介质的极化方程, 证明以上 4 个系数满足

$$\begin{aligned}b_{12} &= b_{21} \\ b_{12}^2 &= -b_{11}\epsilon_0[\epsilon(0) - \epsilon(\infty)] \\ b_{22} &= [\epsilon(\infty) - 1]\epsilon_0\end{aligned}$$

提示: 恒定静电场下 $\ddot{\mathbf{W}} = 0$, 极高频电场下 $\mathbf{W} = 0$ 。

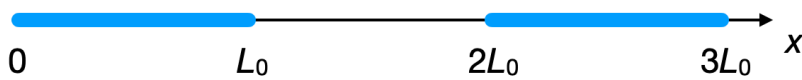
- (3) 离子晶体中的长光学波可以分解为横波与纵波的叠加 $\mathbf{W} = \mathbf{W}_T + \mathbf{W}_L$, 满足

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{W}_T &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{W}_T &\neq 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{W}_L &\neq 0 \\ \nabla \times \mathbf{W}_L &= 0\end{aligned}$$

将黄方程与麦克斯韦方程组结合起来, 可以求解外场下的长光学波。请分别计算横波和纵波的色散关系。(记 $\omega_0^2 = -b_{11}$, 可以使用的参数包括 $\omega_0, \epsilon(\infty), \epsilon(0)$ 以及真空中光速 c)

题 7 (40 分)

一个著名相对论运动学问题的新视角。如图所示的两根杆子，静止放置在地面系中，各点坐标已经标出。



- A. 曾经著名的问题说的是当两根杆子同时“瞬间”加速到同样的沿 x 正方向的速度 v ，这时地面系的观察者观察到的景象如何？也就是求出两根杆子的表观长度和它们各端点的相对距离，试回答这个问题。
- B. 对于上述问题的答案，许多同学会产生较为明显的质疑，我们现在采取另一种方式来求解，设杆子由一系列零散的质点组成，它们之间没有相互作用。而后两杆所有的质点在地面系中同时开始以较小的恒定加速度（它们各自的自身静止参照系中的加速度值都为常数 a ）沿着 x 正方向加速，经过很长时间后它们都加速到速度 v 。
- (1) 试求这时两根杆子左端点的坐标；
 - (2) 试求这时两根杆子右端点的坐标；
 - (3) 根据该结论，重新审视你在 A 中的回答，并作出你的评论。
- C. 对于以上结果你估计是不满意的，那我们再建立一个模型，取杆子上所有质点为一个共同体，也即存在一个“杆子的本征系”，在该系当中杆子的加速度为常数 a 。
- (1) 试求地面系当中 t 时刻杆左右端点的坐标；
 - (2) 根据该结论，重新审视你在 A 中的回答，并作出你的评论。