Seminar 2 - ALGEBRĂ

Definiţia 1. O matrice $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se numeşte **matrice scară pe linii** dacă satisface proprietăţile:

1. Dacă o linie are toate elementele 0, atunci toate liniile de sub aceasta au elementele 0.

2. Dacă primul element nenul dintr-o linie S_i este s_{ij}, atunci elementele de pe coloanele $1, 2, ..., j$, aflate sub linia i sunt nule.

Primul element nenul de pe o linie se numeşte **pivot**.

Definiţia 2. O matrice scară obţinută prin metoda Gauss-Jordan din matricea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se numeşte **matrice în forma scară redusă.** Metoda Gauss-Jordan are în plus două caracteristici:

1. In fiecare etapă, elementul pivot este forţat să devină 1. Mai precis, dacă s-a fixat pivotul pe linia i ca fiind $a_{ij} \neq 0$, atunci transformarea $\frac{L_i}{a_{ij}} \to L_i$ conduce la pivot 1.

2. Pe lângă zerouri sub pivot, se creează, prin transformări elementare pe linie, zerouri şi deasupra pivotului.

Propoziţia 1. *Rangul unei matrici în forma scară pe linii este egal cu numărul de pivoţi.*

Remarca 1. Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dacă numărul pivoţilor din prima jumătate a formei scară reduse este mai mic decât n (adică rangul matricei A este mai mic decât n) atunci matricea este singulară şi nu admite inversă.

Probleme rezolvate

Exerciţiul 1. Care dintre următoarele matrice au forma scară pe linie? Dar matrice în formă scară redusă?

a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rezolvare.
Matrice în forma scară: a),c),e),f).
Matrice în forma scară redusă: c),f).
Niciuna din cele două forme: b),d) .

Exerciţiul 2. Să se găsească toate matricele în formă scară pe linie, unde matricea aparţine lui $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Folosiţi $\bullet$ pentru pivot, $*$ pentru număr nenul şi 0.

Rezolvare.
$\begin{pmatrix} \bullet & * \\ 0 & \bullet \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \bullet & 0 \\ 0 & \bullet \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \bullet & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \bullet & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & \bullet \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Exerciţiul 3. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases},$$

utilizând metoda lui Gauss.

Rezolvare. Avem matricea extinsă a sistemului: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right)$

Calculăm matricea $\overline{A}$ în formă scară pe linii:

$$S_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right) L_2 - 2L_1 \to \widetilde{L_2; L_3} - L_1 \to L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right) L_3 - \widetilde{\tfrac{7}{3}L_2} \to L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1/3} & -2/3 \end{array}\right)$$

Obţinem noul sistem:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ \quad -3y + z = 2 \\ \quad\quad -\frac{1}{3}z = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Sistemul este compatibil determinat şi are soluţia unică: $x = 3, y = -2, z = 2$.

Exerciţiul 4. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ \quad 2x - 2z = -2 \\ 3x + 2y + z = 7 \end{cases},$$

utilizând metoda lui Gauss.

Rezolvare. Avem matricea extinsă a sistemului: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right)$

Calculăm matricea $\overline{A}$ în formă scară pe linii:

$$S_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) L_2 - 2L_1 \to \widetilde{L_2; L_3} - 3L_1 \to L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & \boxed{-4} & -8 & -20 \\ 0 & -4 & -8 & -20 \end{array}\right) L_3 \widetilde{- L_2} \to L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -4 & -8 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Obţinem noul sistem:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ -4y - 8z = -20 \end{cases}$$

Deci rangul matricei $S_{\overline{A}}$ este 2 şi la fel şi rangul matricei $\overline{A}$. Analog rangul matrici S_A este 2, deci şi al matricei A.

Aşadar sistemul este compatibil simplu nedeterminat, necunoscutele principale sunt x şi y, iar necunoscuta secundară este z. Notăm $z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Mulţimea soluţiilor sistemului este: $\{(-1 + \alpha, 5 - 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Exerciţiul 5. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -x-y=-1 \\ -2x-2y=1 \\ z+t=-1 \end{cases},$$

utilizând metoda lui Gauss.

Rezolvare. Avem matricea extinsă a sistemului: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

Calculăm matricea $\overline{A}$ în formă scară pe linie:

$$S_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) L_2 + L_1 \to \widetilde{L_2; L_3} + 2L_1 \to L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) L_3 - 2L_2 \to \widetilde{L_3; L_4} - L_2 \to L_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Obţinem noul sistem:

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ z+t=0 \\ 0=3 \\ 0=-1 \end{cases}$$

Din ultimele două ecuaţii ale sistemului deducem că sistemul este incompatibil.

Exerciţiul 6. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+2y-3z=-2 \end{cases},$$

utilizând metoda lui Gauss-Jordan.

Rezolvare. Matricea extinsă a sistemului este: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$

Calculăm matricea $\overline{A}$ în formă scară pe linie:

$$S_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \widetilde{L_2 - 2L_1 \to L_2; L_3 - 3L_1 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & -5 & -6 & -17 \end{array}\right)$$

$$\widetilde{-\frac{1}{5}L_2 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 1/5 & 7/5 \\ 0 & -4 & -6 & -17 \end{array}\right) \widetilde{L_3 + 4L_2 \to L_3; L_1 - 2L_2 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/5 & 11/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & -26/5 & -57/5 \end{array}\right)$$

$$\widetilde{-\frac{5}{26}L_3 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/5 & 11/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 57/26 \end{array}\right) \widetilde{L_2 - \frac{1}{5}L_3 \to L_2; L_1 - \frac{3}{5}L_3 \to L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 23/26 \\ 0 & 1 & 0 & 25/26 \\ 0 & 0 & 1 & 57/26 \end{array}\right)$$

Deci soluţia sistemului este: $x = \frac{23}{26}, y = \frac{25}{26}, z = \frac{57}{26}$.

Exerciţiul 7. Să se determine valorile parametrului real a astfel încât sistemul să aibă: nicio soluţie, exact o soluţie şi o infinitate de soluţii.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases},$$

Rezolvare. Avem matricea extinsă a sistemului: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a + 2 \end{array}\right)$

Calculăm matricea $\overline{A}$ în formă scară pe linie:

$$S_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a + 2 \end{array}\right) \widetilde{L_2 - 3L_1 \to L_2; L_3 - 4L_1 \to L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{-7} & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2 - 2 & a - 14 \end{array}\right) \widetilde{L_3 - L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2 - 16 & a - 4 \end{array}\right)$$

Obţinem noul sistem:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ -7y + 14z = -10 \\ (a^2 - 16)z = a - 4 \end{cases},$$

Calculăm determinantul sistemului

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & a^2 - 16 \end{vmatrix} = -7(a^2 - 16).$$

Se rezolvă ecuaţia : $-7(a^2 - 16) = 0 \iff a = \pm 4$.

Cazul 1. Dacă $a \neq \pm 4$, atunci sistemul este compatibil determinat, soluţiile sale fiind calculate cu ajutorul regulii lui Cramer:

$$x = \frac{8a + 25}{7(a + 4)}, y = \frac{10a + 28}{7(a + 4)}, z = \frac{1}{a + 4}$$

Cazul 2. • Dacă $a = 4$, atunci sistemul devine $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ -7y + 14z = -10 \\ 0 = 0 \end{cases}$,

Determinantul sistemului este nul. Alegem un minor nenul care va juca rolul determinantului principal: $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$.

Avem minorul caracteristic $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Acest sistem este compatibil simplu nedeterminat (deoarece rangul este 2, necunoscutele principale sunt x si y, iar necunoscuta secundară este z), având soluţiile $x = \frac{8}{7} - \alpha, y = \frac{10}{7} + 2\alpha, z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

• Dacă $a = -4$, atunci sistemul devine $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ -7y + 14z = -10 \\ 0 = -8 \end{cases}$.

Din ultima ecuaţie a sistemului deducem că în acest caz sistemul este incompatibil.

Exerciţiul 8. Să se calculeze rangul matricelor :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Rezolvare.

a) Calculăm forma scară pe linii a matricei A:

$$S_A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} L_2 - 2L_1 \to L_1; L_3 - 4L_1 \to L_3; L_4 - 3L_1 \to L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} L_3 - L_2 \to \widetilde{L_3; L_4} - L_2 \to L_4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deci $rangA = rangS_A = 2$ deoarece avem 2 pivoţi.

b) Calculăm forma scară pe linii a matricei A:

$$S_A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} L_1 \widetilde{<->} L_2 \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} L_2 - 2L_1 \to \widetilde{L_2; L_3} - 3L_1 \to L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{7} & -5 \\ 0 & 8 & -13 \end{pmatrix} L_3 - \widetilde{\tfrac{8}{7}L_2} \to L_3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{-51/7} \end{pmatrix}$$

Deci $rangA = rangS_A = 3$ deoarece avem 3 pivoţi.

Exerciţiul 9. Să se verifice dacă matricele de mai jos sunt inversabile. În caz afirmativ, să se calculeze inversa matricei.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rezolvare.

a) Calculăm

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \widetilde{+ L_1} \to L_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \widetilde{\tfrac{1}{5}L_2 \to} L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) L_1 - \widetilde{2L_2} \to L_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Deoarece forma scară redusă a matricei A este matricea unitate, ea are rangul 3, deci este inversabilă şi inversa ei este: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

b) $(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 + \widetilde{2L_1} \to L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_3 - \widetilde{3L_1} \to L_3$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{10} & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) L_3 + \widetilde{2L_2} \to L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) -\frac{3}{10} L_2 + \widetilde{L_1} \to L_1$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/5 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Submatricea formată din cele 3 linii şi primele 3 coloane are doi pivoţi, deci rangul matricei A este 2, adică este o matrice singulară şi submatricea formată din ultimele 3 coloane nu este inversa ei!

c) Calculăm

$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_1 \widetilde{<->} L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \widetilde{-L_1} \to L_1$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) L_2 - \widetilde{2L_1} \to L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) L_3 + \widetilde{L_2} \to L_3$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) L_1 + \frac{1}{5} L_3 \widetilde{\to L_1}; \frac{1}{5} L_3 \to L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) L_2 - \widetilde{2L_3} \to L_2$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$

Deoarece forma scară redusă a matricei A este matricea unitate, ea are rangul 3, deci este inversabilă şi inversa ei este: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Probleme propuse

Exerciţiul 10. Care dintre următoarele matrice au forma scară pe linie? Dar matrice în formă scară redusă?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercițiul 11. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} y + 5z = -4 \\ x + 4y + 3z = -2 \\ 2x + 7y + z = -2 \end{cases},$$

utilizând metoda lui Gauss.

Exercițiul 12. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x - 6z = -8 \\ y + 2z = 3 \\ 3x + 6y - 2z = -4 \end{cases},$$

utilizând metoda lui Gauss-Jordan.

Exercițiul 13. Să se calculeze rangul matricelor :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Exercițiul 14. Să se verifice dacă matricele de mai jos sunt inversabile. În caz afirmativ, să se calculeze inversa matricei.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$