Seminar 1 - ALGEBRĂ

Exerciţiul 1. Să se verifice dacă matricele A şi B se pot înmulţi. În caz afirmativ, să se calculeze produsul lor.

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Rezolvare.

a) Din $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}, B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ rezultă $A \cdot B \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

Deoarece numărul de coloane al matricei B este diferit de numărul de linii al matricei A $(1 \neq 2)$, deducem că produsul $B \cdot A$ nu se poate efectua.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b) Din $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}, B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ rezultă $A \cdot B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ şi $B \cdot A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Deoarece numărul de coloane al matricei A este diferit de numărul de linii al matricei B $(1 \neq 3)$, deducem că produsul $A \cdot B$ nu se poate efectua.

Din $A \in \mathbb{R}^{3\times 1}, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ rezultă $B \cdot A \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exerciţiul 2. Să se calculeze determinantul matricei A folosind dezvoltarea după linia a doua:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rezolvare.

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$2(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

Exerciţiul 3. Să se determine matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ astfel încât $det(A^3 - A^2) = 1$.

Rezolvare.

Avem că $det(A^3 - A^2) = 1 \iff det(A^2)det(A - I_2) = 1$.

Rezultă că $det(A^2) = det(A - I_2) = 1$ (căci $det(A^2) \geq 0$), sau $detA = \pm 1$ şi $det(A - I_2) = 1$.

Avem astfel sistemele:

$$\begin{cases} ac - b = 1 \\ (a-1)(c-1) - b = 1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} ac - b = -1 \\ (a-1)(c-1) - b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ac - b = 1 \\ a + c = 1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} ac - b = -1 \\ a + c = 1 \end{cases}$$

Deducem că $b = -a^2 + a - 1$ şi $c = 1 - a$, $a \in \mathbb{Z}$ (primul sistem) sau $b = -a^2 - a + 1$ şi $c = -1 - a$, $a \in \mathbb{Z}$ (al doilea sistem).

Exerciţiul 4. i) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că matricea A este inversabilă si să se calculeze A^{-1}.

ii) Arătaţi că, dacă $U \in \mathbb{C}^3$, astfel încât $U^2 = O_3$, atunci matricea $B = I_3 - U$ este inversabilă.

iii) Să se determine valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$, pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ nu este inversabilă.

Rezolvare.

i) Din faptul că $detA = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ avem că matricea A este inversabilă.

Avem că $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

Deci $A^{-1} = \frac{1}{detA} A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

ii) Observăm că $I_3 \cdot U = U \cdot I_3$ şi avem egalitatea: $(I_3 - U)(I_3 + U) = I_3^2 - U^2 = I_3 - O_3 = I_3$, deci matricea $B = I_3 - U$ este inversabilă şi $B^{-1} = I_3 + U$.

iii) Punem condiţia $detA = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (a+2)(a-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow$ $a \in \{-2, 1\}$.

Exerciţiul 5. i) Să se discute în funcţie de parametrul real a, rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & b & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Determinaţi numerele a şi b, astfel încât matricea A să aibă rangul minim.

Rezolvare.

i) Calculând, obţinem: $detA = (a-1)^2$.

Dacă $a = 1$, atunci $rangA = 1$.

Dacă $a \neq 1$, atunci $rangA = 3$.

ii) Deoarece există un minor nenul de ordinul 2, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, deducem $rangA \geq 2$. Matricea A are rangul minim 2, dacă toţi minorii de ordinul 3 care se obţin prin bordarea minorului de rangul 2 sunt nuli.

Aceştia sunt:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \end{vmatrix} = a + 3b - 2, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & b \end{vmatrix} = -2a + 3b + 1$$

Obţinem sistemul

$$\begin{cases} a + 3b - 2 = 0 \\ -2a + 3b + 1 = 0 \end{cases}$$

Prin rezolvarea acestui sistem obţinem $a = 1$ şi $b = \frac{1}{3}$.

Exerciţiul 6. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases},$$

utilizând

a) metoda lui Cramer;

b) metoda matriceală;

Rezolvare.

a) Determinantul sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Apoi calculăm

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 3, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -2, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

Aplicăm metoda de rezolvare a lui Cramer şi obţinem:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 3, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -2, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 2$$

Astfel soluţia sistemului este: $x = 3, y = -2, z = 2$.

b) Matricea asociată sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. Matricea termenilor liberi este $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, iar matricea necunoscutelor este $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Cu aceste notaţii se poate scrie sub formă matriceală $A \cdot X = B$. Avem $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, deci $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. De aici rezultă $x = 3, y = -2, z = 2$.

Exerciţiul 7. Să se rezolve sistemul liniar $2x + y - z = -10$.

Rezolvare.

Ecuaţia $2x + y - z = -10$ are o soluţie particulară $x = -3, y = 1, z = 5$.

Dacă $x = \alpha, y = \beta, z = 2\alpha + \beta + 10$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $2\alpha + \beta - (2\alpha + \beta + 10) = -10$ este adevarată.

Deci, tripletul $(\alpha, \beta, 2\alpha+\beta+10)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ este soluţia generală a ecuaţiei.

Exerciţiul 8. Să se discute şi apoi să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z & = 4 \\ 3x + 4y - z & = -5 \\ x + 5y - 4z & = -9. \end{cases}$$

Rezolvare.

Etapele rezolvării unui sistem liniar sunt:

1) Identificarea necunoscutelor principale şi a necunoscutelor secundare

- matricea sistemului

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

- determinantul matricei A

  -dacă $detA \neq 0$, atunci liniile (coloanele) matricei A nu pot fi scrise unele în funcţie de celelalte; se rezolvă utilizând metoda lui Cramer

  -dacă $detA = 0$, atunci liniile (coloanele) matricei A pot fi scrise unele în funcţie de celelalte;

  Găsim uşor că $detA = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0$, deci cel putin o linie(coloană) poate fi dedusă din cealaltă.

Alegem minorul principal al sistemului : $\Delta_p \neq 0$

În acest exemplu am construit minorul principal din primele două linii, respectiv coloane ale matricei A:

$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$

Aşadar necunoscutele principale sunt x, y (fac parte din minorul principal), iar necunoscuta secundară este z (nu face parte din minorul principal). Pentru a evidenţia rolul secundar al lui z, acesta va fi renotat cu α . Din sistemul iniţial vom păstra doar sistemul redus.

Sistemul redus obţinut este:

$$\begin{cases} 2x - y & = 4 - 3\alpha \\ 3x + 4y & = -5 + \alpha \end{cases}$$

- rangul unei matrice este dat de ordinul minorului principal, deci $rangA = 2$

2) Studierea compatibilităţii sistemului

Teorema lui Kronecker-Capelli :

sistemul este compatibil $\iff$ $rangA = rang\overline{A}$.

Teorema lui Rouché :

sistemul este compatibil $\iff$ toţi minorii caracteristici sunt nuli

Dacă cel puţin un minor caracteristic este nenul, atunci sistemul este incompatibil.

- minorul caracteristic este un determinant format din minorul principal la care se lipeşte coloana termenilor liberi

În exemplul nostru, matricea extinsă este:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 4 \\ 3 & 4 & -1 & \vdots & -5 \\ 1 & 5 & -4 & \vdots & -9 \end{pmatrix}$$

Putem să formăm un singur minor caracteristic:

$\Delta_c = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 0$

Deci sistemul este compatibil conform teoremei lui Rouche.

3) Rezolvarea sistemului redus

Sistemul redus obţinut are soluţiile: $x = 1 - \alpha, y = -2 + \alpha$.

Deci mulţimea soluţiilor sistemului este $S = \{(1-\alpha, -2+\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Exerciţiul 9. Să se discute şi apoi să se rezolve sistemul omogen:

$$\begin{cases} 4x + y - 3z - t &= 0 \\ 2x + 3y + z - 5t &= 0 \\ x - 2y - 2z + 3t &= 0. \end{cases}$$

Rezolvare.

Deoarece sistemul este omogen, iar numărul ecuaţiilor este mai mic decât numărul necunoscutelor, deducem că sistemul admite şi soluţii nenule.

Fie A matricea sistemului considerat.

Deoarece $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$, deducem că $rang(A) = 3$ şi că Δ este minor principal al matricei A. Prin urmare, necunoscutele x, y, z sunt necunoscute principale, necunoscuta t este necunoscuta secundară, iar toate ecuaţiile sistemului sunt ecuaţii principale.

Notăm $t = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, sistemul iniţial se poate scrie sub forma :

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = \alpha \\ 2x + 3y + z = 5\alpha \\ x - 2y - 2z = -3\alpha. \end{cases} \tag{1}$$

Având în vedere că $\Delta = 10$ este determinantul sistemului (1) şi că $\Delta_x = 6\alpha, \Delta_y = 10\alpha, \Delta_z = 8\alpha$ rezultă că $(\frac{3\alpha}{5}, \alpha, \frac{4\alpha}{5})$ sunt soluţiile sistemului (1).

Exerciţiul 10. Să se discute şi să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare.

Calculăm determinantul sistemului

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2.$$

Se rezolvă ecuaţia : $a^3 - 3a + 2 = 0 \iff a_1 = a_2 = 1, a_3 = -2$.

Cazul 1. Dacă $a \neq -2, a \neq 1$, atunci sistemul este compatibil determinat, soluţiile sale fiind calculate cu ajutorul regulii lui Cramer:

$$x = -\frac{a+1}{a+2}, y = \frac{1}{a+2}, z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$$

Cazul 2. • Dacă $a = 1$, atunci sistemul devine $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$.

Acest sistem este compatibil dublu nedeterminat (deoarece rangul este 1, iar numărul necunoscutelor principale este 1), având soluţiile $x = a, y = b, z = 1 - a - b, a, b \in \mathbb{R}$.

• Dacă $a = -2$, atunci sistemul devine $\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ x+y-2z=4 \end{cases}$.

Determinantul sistemului este nul. Alegem un minor nenul care va juca rolul determinantului principal: $\Delta_p = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

Avem minorul caracteristic $\Delta_c = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$. Deoarece minorul caracteristic este nenul, conform teoremei lui Rouchè, deducem că în acest caz sistemul este incompatibil.