Seminar 5 - ALGEBRĂ

Probleme rezolvate

Exerciţiul 1. Demonstraţi inegalitatea triunghiului (inegalitatea Minkowski):

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

Rezolvare.

Fie x, y vectori din E. Atunci aplicând inegalitatea Cauchy-Schwartz-Buniakovski avem:

$||x+y||^2 =< x+y, x+y >= ||x||^2 + 2 < x, y > +||y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$

Deci $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Exerciţiul 2. Demonstraţi teorema lui Pitagora:

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \iff x \perp y.$$

Rezolvare. $||x+y||^2 =< x+y, x+y >= ||x||^2 + 2 < x, y > +||y||^2$

Relaţia este adevărată dacă şi numai dacă $< x, y >= 0$, adică $x \perp y$.

Exerciţiul 3. Demonstraţi identitatea paralelogramului:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

Rezolvare.

$||x+y||^2 =< x+y, x+y >= ||x||^2 + 2 < x, y > +||y||^2$

$||x-y||^2 =< x-y, x-y >= ||x||^2 - 2 < x, y > +||y||^2$

Deci $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.

Exerciţiul 4. Să se studieze dacă aplicaţia $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită pentru orice $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ prin

$$< x, y >= 3x_1y_1 + 5x_2y_2$$

este produs scalar pe $\mathbb{R}^2$.

Rezolvare.

Verificăm condiţiile produsului scalar:

$< \alpha x + \beta y, z >= 3(\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + 5(\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 = 3\alpha x_1 z_1 + 5\alpha x_2 z_2 + 3\beta y_1 z_1 + 5\beta y_2 z_2 =< \alpha x, z > +\beta < y, z >$

$$< x, y >= 3x_1y_1 + 5x_2y_2 = 3y_1x_1 + 5y_2x_2 =< y, x >$$

$$< x, x >= 3x_1^2 + 5x_2^2 > 0$$

$$< x, x >= 3x_1^2 + 5x_2^2 = 0 \iff x = 0$$

Exercițiul 5. În spațiul euclidian $\mathbb{R}^3$ înzestrat cu produsul scalar canonic se dau vectorii:

$$x_1 = (1, 0, 1), x_2 = (2, 1, 3), x_3 = (1, t, 2t), x_4 = (t, t^2, t).$$

a) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor x_1, x_2 și lungimile celor doi vectori;

b) Să se determine $t \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii x_3 și x_4 să fie ortogonali.

Rezolvare.

a) $< x_1, x_2 >= 5$

$||x_1|| = \sqrt{2}$ și $||x_2 = \sqrt{14}$

b) x_3, x_4 ortogonali dacă $< x_3, x_4 >= 0$

$< x_3, x_4 >= t + t \cdot t^2 + 2t \cdot t = t^3 + 2t^2 + t = t(t + 1)^2$

Deci $t = 0$ sau $t = -1$.

Exercițiul 6. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât aplicația $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$< x, y >= x_1y_1 + ax_1y_2 + bx_2y_1 + x_2y_2,$$

pentru orice $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ să fie un produs scalar pe $\mathbb{R}^2$.

Rezolvare. Fie $e_1 = (1, 0)$ și $e_2 = (0, 1)$.

Calculăm $< e_1, e_2 >= a$ și $< e_2, e_1 >= b$. Deci $a = b$.

Pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ avem $< x, x >= x_1^2 + 2ax_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + ax_2)^2 + (1 - a^2)x_2^2$.

Luăm vectorul $y = (-ay_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Din relația precedentă avem $< y, y >= (1 - a^2)y_2^2, \forall y_2 \in \mathbb{R}$ și conform axiomei de pozitivitate a produsului scalar rezultă că $a \in (-1, 1)$.

Pentru $a, b \in (-1, 1)$ se arată că $< \cdot, \cdot >$ este un produs scalar pe $\mathbb{R}^2$.

Exerciţiul 7. a) Arătaţi că pe spaţiul liniar $C_{[a,b]}$ al funcţiilor reale continue pe intervalul $[a,b]$ se poate defini o structură de spaţiu liniar euclidian, definind produsul scalar prin:

$$< f,g >= \int_a^b f(x)g(x)dx, \forall f,g \in C_{[a,b]};$$

b) În spaţiul liniar euclidian $C_{[0,1]}$ se consideră funcţiile $f,g:[0,1] \to \mathbb{R}$ date prin $f(x) = x^3 + x + 2, g(x) = e^x + x + 1$. Calculaţi $< f,g >$ şi $||f||$.

Rezolvare.

a) Verificăm condiţiile produsului scalar:

Fie $f,g,h \in C_{[a,b]}$.

$< \alpha f+\beta g, h >= \int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]h(x)dx = \int_a^b \alpha f(x)h(x)dx+\int_a^b \beta g(x)h(x)dx = \alpha < f,h > +\beta < g,h >$

$$< f,g >= \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx =< g,f >$$

$$< f,f >= \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$$

$$< f,f >= \int_a^b f^2(x)dx = 0 \iff f = 0$$

b) $< f,g >= \int_0^1 (x^3 + x + 2)(e^x + x + 1) = ... = 7 + \frac{137}{60}$

$||f||^2 = \int_0^1 (x^3 + x + 2)^2 = ... = 7 + \frac{92}{105}$

Exerciţiul 8. Fie $\mathbb{R}^3$ spaţiu liniar euclidian cu produsul scalar canonic.

a) Arătaţi că sistemul de vectori

$$S = \left\{ v_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), v_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) v_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

este o bază ortogonală, apoi studiaţi dacă este o bază ortonormată.

b) Determinaţi $t \in \mathbb{R}$ astfel încât :

$$B = \{w_1 = (t, 2, t-4), w_2 = (2t, t+1, 2t), w_3 = (-5t, t+3, 1)\}$$

să fie o bază ortogonală în spaţiul liniar euclidian $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare.

a) S este bază în $\mathbb{R}^3$ deoarece $\begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Cum $< v_1, v_2 >= 0, < v_1, v_3 >= 0, < v_2, v_3 >= 0$, obţinem că S este o bază ortogonală.

Cum $||v_1|| = 1, ||v_2|| = 1, ||v_3|| = 1$ obţinem că S este o bază ortonormată.

b) Este suficient să determinăm $t \in \mathbb{R}$ astfel încât B să fie ortogonal.

$< w_1, w_2 >= 0, < w_1, w_3 >= 0, < w_2, w_3 >= 0$

$$< w_1, w_2 >= 0 \implies 2t^2+2(t+1)+2t(t-4) = 0 \implies 6t^2-8t+2 = 0 \implies t = 1 \text{ sau } t = \frac{1}{2}$$

Pentru $t = 1$ obţinem $< w_1, w_2 >= 0, < w_1, w_3 >= 0, < w_2, w_3 >= 0$, deci B este bază ortogonală.

Pentru $t = \frac{1}{2}$, B nu este bază ortogonală deoarece $< w_1, w_3 > \neq 0$.

Exerciţiul 9. În spaţiul liniar euclidian $\mathbb{R}^3$ se consideră sistemul de vectori

$$B = \{x_1 = (1, 1, 0), x_2 = (-1, 0, 1), x_3 = (0, 1, -1)\}.$$

Se cere:

a) Să se arate că B este o bază în $\mathbb{R}^3$;

b) Să se ortogonalizeze baza B;

c) Să se ortonormalizeze baza B;

Rezolvare.

a) B este bază în $\mathbb{R}^3$ deoarece $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

b) Aplicăm procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt.

Fie $B' = \{y_1, y_2, y_3\}$.

$y_1 = x_1 = (1, 1, 0)$

$y_2 = x_2 - \frac{<x_2,y_1>}{<y_1,y_1>} y_1 = (-1, 0, 1) - \frac{(-1)}{2}(1, 1, 0) = \big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\big)$

$y_3 = x_3 - \frac{<x_3,y_1>}{<y_1,y_1>} y_1 - \frac{<x_3,y_2>}{<y_2,y_2>} y_2 = (0, 1, -1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) - \frac{(-\frac{1}{2})}{\frac{6}{4}}\big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\big) = \big(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\big)$

Deci obţinem baza

$$B' = \{y_1 = (1, 1, 0), y_2 = \big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\big), y_3 = \big(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\big)\}$$

c) Fie $B'' = \{z_1, z_2, z_3\}$.

Normăm vectorii bazei B'

$z_1 = \frac{1}{||y_1||} y_1 = \big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\big)$

$z_2 = \frac{1}{||y_2||} y_2 = \big(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\big)$

$z_3 = \frac{1}{||y_3||} y_3 = \big(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\big)$

Exerciţiul 10. Fie sistemul de vectori $S = \{v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (3, 1, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Se cere:

a) Să se ortogonalizeze sistemul de vectori S;

b) Să se completeze sistemul ortogonal obţinut la punctul a) la o bază ortogonală în $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare.

a) $S' = \Big\{x_1 = (1, 2, 1), x_2 = \big(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\big)\Big\}$

b) Se completează S' la o bază în $\mathbb{R}^3$ cu vectori din baza canonică. De exemplu

$B = \Big\{x_1 = (1, 2, 1), x_2 = \big(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\big), x_3 = (0, 1, 0)\Big\}$

Prin procedeul de ortogonalizare se obţine:

$B' = \Big\{y_1 = (1, 2, 1), y_2 = \big(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\big), y_3 = \big(-\frac{6}{25}, \frac{8}{25}, -\frac{2}{5}\big)\Big\}$

Exercițiul 11. Calculați unghiul α dintre vectorii $v_1 = (4, 2)$ și $v_2 = (1, 3)$.

Rezolvare.

$\cos\alpha = \frac{<v_1,v_2>}{||v_1||\cdot||v_2||} = \frac{10}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$< v_1, v_2 >= 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 10$

$||v_1|| = \sqrt{20}$

$||v_2|| = \sqrt{10}$

Deci $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Exercițiul 12. Fie $||a|| = 11$, $||b|| = 23$ și $||a - b|| = 30$.

Calculați $||a + b||$ și $||a - 2b|||$.

Rezolvare.

$$\begin{aligned} ||a-b||^2 &= < a-b, a-b >= \\ &= < a, a > - < a, b > - < a, b > + < b, b >= \\ &= ||a||^2 - 2 < a, b > +||b||^2 \end{aligned}$$

$$30^2 = 11^2 - 2 < a, b > +23^2$$

Obținem : $< a, b >= -125$

Atunci

$$\begin{aligned} ||a+b||^2 &= < a+b, a+b >= \\ &= < a, a > + < a, b > + < a, b > + < b, b >= \\ &= ||a||^2 + 2 < a, b > +||b||^2 = \\ &= 121 + 2(-125) + 23^2 = 400 \end{aligned}$$

Deci $||a + b|| = 20$.

$$\begin{aligned} ||a-2b||^2 &= < a-2b, a-2b >= \\ &= ||a||^2 - 4 < a, b > +4||b||^2 = \\ &= 11^2 - 4(-125) + 4 \cdot 23^2 = 2737 \end{aligned}$$

Deci $||a - 2b|| = \sqrt{2737}$.

Exercițiul 13. Știind că vectorii $u = (2, -1, 0)$ și $v = (1, -3, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, să se determine λ astfel încât unghiul dintre u și v să fie de $\frac{\pi}{3}$.

Rezolvare.

$$\cos\alpha = \frac{< u, v >}{||u|| \cdot ||v||}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$||u|| = \sqrt{5}$$
$$||v|| = \sqrt{10+\lambda^2}$$
$$< u, v >= 5$$

Înlocuind în formula de mai sus obţinem:

$$\sqrt{10+\lambda^2} = 2\sqrt{5}$$

Deci $\lambda = \pm\sqrt{10}$.