# Seminar 4 - ALGEBRĂ

**Exerciţiul 1.** Să se arate că mulţimea $X = \{\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}\}$ este un $\mathbb{Q}$- spaţiu vectorial, faţă de operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire cu un număr raţional.

**Rezolvare.** Se observă că $(X, +)$ este grup abelian.
Fie $\lambda \in \mathbb{Q}$ şi $x_1 = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{2} + \gamma_1\sqrt{3}, x_2 = \alpha_2 + \beta_2\sqrt{2} + \gamma_2\sqrt{3}$.
Verificăm sv2):
$\lambda(x_1 + x_2) = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda(\beta_1 + \beta_2)\sqrt{2} + \lambda(\gamma_1 + \gamma_2)\sqrt{3} = \lambda x_1 + \lambda x_2$.
Analog verificăm celelalte axiome ale spaţiului vectorial.

**Exerciţiul 2.** Studiaţi care din următoarele sisteme sunt liniar dependente/independente, iar în caz de dependenţă, scrieţi relaţia de dependenţă.

i) $S_1 = \left\{ F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \right.$
$\left. F_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2[\mathbb{R}]$;

ii) $S_2 = \{v_1 = X^2 + 2X, v_2 = 2X^2 - X + 1, v_3 = -X^2 + 2x + 2\} \subset \mathbb{R}_2[X]$.

**Rezolvare.**

i) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ cu $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3 + \alpha_4 F_4 = O_2$, adică

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizând proprietăţile matricelor obţinem:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_3 & 2\alpha_1 + 5\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_3 & -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aşadar obţinem sistemul omogen:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Matricea asociată sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observăm *rang* $A = 4$, iar numărul de necunoscute este 4. Cum rangul matricei este egal cu numărul de necunoscute rezultă că vectorii sunt liniar independenţi.

ii) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ cu $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$, adică

$$\alpha_1(X^2 + 2X) + \alpha_2(2X^2 - X + 1) + \alpha_3(-X^2 + 2X + 2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

Ordonăm după puterile lui $X$:

$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)X^2 + (2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3)X + (\alpha_2 + 2\alpha_3) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$

şi obţinem sistemul liniar omogen:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Matricea asociată sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observăm *rang* $A = 3$, iar numărul necunoscutelor este 3. Cum rangul matricei este egal cu numărul de necunoscute rezultă că vectorii sunt liniar independenţi.

**Exerciţiul 3.** Să se arate că mulţimea funcţiilor $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ care satisfac condiţia $f(x) = f(-x)$, pentru orice $x \in (a, -a)$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului tuturor funcţiilor reale definite pe $(-a, a)$.

**Rezolvare.** Fie $f_1, f_2 : (-a, a) \to \mathbb{R}$ astfel încât:

$f_1(x) = f_1(-x)$ şi $f_2(x) = f_2(-x)$, pentru orice $x \in (-a, a)$.

Funcţia $(f_1 + f_2) : (-a, a) \to \mathbb{R}$ are proprietatea:

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = f_1(-x)+f_2(-x) = (f_1+f_2)(-x), \text{ pentru orice } x \in (-a, a)$$

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, funcţia $\alpha f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ are proprietatea:

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha f(-x) = (\alpha f)(-x), \text{ pentru orice } x \in (-a, a).$$

**Exerciţiul 4.** Pentru ce valori ale lui $\lambda \in \mathbb{R}$ matricele

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2\lambda & 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}$$

sunt liniar independente?

**Rezolvare.**

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ cu $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = O_2$, adică

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2\lambda & 5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizând proprietăţile matricelor obţinem:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 & \lambda\alpha_1 - \alpha_2 + 10\alpha_3 \\ -2\alpha_1 + 2\lambda\alpha_2 - 12\alpha_3 & 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aşadar obţinem sistemul omogen:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \lambda\alpha_1 - \alpha_2 + 10\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 2\lambda\alpha_2 - 12\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Matricea asociată sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ \lambda & -1 & 10 \\ -2 & 2\lambda & -12 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricele sunt liniar independente dacă $rangA = 3$.

Din $rangA = 3$ rezultă că $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ \lambda & -1 & 10 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \iff 6\lambda - 18 \neq 0 \iff \lambda \neq 3$

Deci matricele sunt liniar independente pentru $\lambda \in \mathbb{R} - \{3\}$.

**Exerciţiul 5.** Să se verifice dacă polinoamele $2x^2 + 3x$ şi $x + 1$ aparţin spaţiului generat de $\{x^3 + 2x - 1, 2x^2 + 1, x^3 - x\}$.

**Rezolvare.**

Cele două polinoame apaţin spaţiului dacă sunt combinaţii liniare de elementele sistemului de generatori. Deci

$$2x^2 + 3x = \alpha_1(x^3 + 2x - 1) + \alpha_2(2x^2 + 1) + \alpha_3(x^3 - x)$$

$$x + 1 = \beta_1(x^3 + 2x - 1) + \beta_2(2x^2 + 1) + \beta_3(x^3 - x)$$

Aceste relaţii sunt echivalente cu sistemele:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_3 = 3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_3 = 0 \\ 2\beta_2 = 0 \\ 2\beta_1 - \beta_3 = 1 \\ -\beta_1 + \beta_2 = 1 \end{cases}$$

Se observă că primul sistem este compatibil $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$, ceea ce arată că $2x^2 + 3x$ aparţine spaţiului, în timp ce al doilea sistem este incompatibil, deci $x + 1$ nu aparţine acestui spaţiu.

**Exerciţiul 6.** Fie $V$ un spaţiu vectorial şi $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ un sistem de vectori din $V$. să se verifice dacă afirmaţiile sunt adevărate:

i) $\{v_1, v_2\}$ liniar independent $\Longrightarrow$ $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ liniar independent;

ii) $\{v_1, v_2, v_3\}$ liniar independent $\Longrightarrow$ $\{\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \lambda_3 v_3\}$ liniar independent, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$;

iii) $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ bază $\Longrightarrow$ $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ bază, unde $u_1 = v_1, u_2 = v_1 + v_2, ..., u_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

**Rezolvare.**

i) Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha(v_1 + v_2) + \beta(v_1 - v_2) = 0 \iff (\alpha + \beta)v_1 + (\alpha - \beta)v_2 = 0$. Cum $\{v_1, v_2\}$ liniar independent, avem $\alpha + \beta = 0, \alpha - \beta = 0$. Rezultă că $\alpha = \beta = 0$. **Adevărat.**

ii) Dacă $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, atunci afirmaţia este adevărată. Dacă avem, spre exemplu, $\lambda_1 = 0$, atunci obţinem că sistemul $\{v_1, v_2, v_3\}$ este liniar dependent.

iii) Fie $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$ astfel încât

   $a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n = 0 \iff (a_1 + a_2 + ... + a_n)v_1 + (a_2 + ... + a_n)v_2 + ... + a_nv_n = 0$

   Din faptul că $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ este liniar independent rezultă sistemul liniar:

   $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0, a_2 + ... + a_n = 0, ..., a_n = 0$

   Deducem soluţia $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, deci $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ este liniar independent.

**Exerciţiul 7.** Fie $B_\alpha = \{(\alpha, 2, 3), (-1, -1, \alpha), (1, 0, -\alpha)\} \subset \mathbb{R}^3$.

i) Să se arate că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}, B_\alpha$ formează o bază;

ii) Să se determine matricea de trecere de la baza $B_3$ la baza $B_1$;

iii) Determinaţi baza $B$ ştiind că matricea de trecere de la baza $B_1$ la baza $B$ este

$$T_{B_1B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

iv) Determinaţi baza $B'$ ştiind că matricea de trecere de la baza $B'$ la baza $B_2$ este

$$T_{B'B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Rezolvare.**

i) $detT_{BcB_\alpha} = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & \alpha & -\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 3 \neq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Avem $rangT_{BcB_\alpha} = 3$ =nr de vectori din sistem, rezultă că $B_\alpha$ este o bază în $\mathbb{R}^3$.

ii) $B_1 = \{u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (1, 0, -1)\}$.

$B_3 = \{v_1 = (3, 2, 3), v_2 = (-1, -1, 3), v_3 = (1, 0, -3)\}$.

Matricea de trecere de la $B_3$ la $B_1$ este dată de formula

$$T_{B_3B_1} = T_{B_3Bc}T_{BcB_1} = T^{-1}_{BcB_3}T_{BcB_1}$$

Cum $T^{-1}_{BcB_3} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/12 \\ 1/2 & -1 & 1/6 \\ 3/4 & -1 & -1/12 \end{pmatrix}$, iar $T_{BcB_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, avem

$$T_{B_3B_1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 & 1/12 \\ -1 & 2/3 & -1/6 \\ -3/2 & 1/6 & 1/12 \end{pmatrix}$$

iii) Fie $\{w_1, w_2, w_3\}$ vectorii bazei $B$. Cum matricea de trecere de la baza $B_1$ la baza $B$ este $T_{B_1B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ obţinem

$$w_1 = 2u_1 - 3u_2 + 0u_3 = (5, 7, 3)$$

$$w_2 = u_1 - 2u_2 - u_3 = (2, 4, 2)$$

$$w_3 = u_2 + u_3 = (0, -1, 0)$$

iv) Baza $B_2$ este $B_2 = \{b_1 = (2, 2, 3), b_2 = (-1, -1, 2), b_3 = (1, 0, -2)\}$.

Determinăm

$$T^{-1}_{B'B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -4/3 & 7/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = T_{B_2B'}$$

Procedand ca la iii) se obţin vectorii bazei $B' = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$, daţi de $v'_1 = (2, 2, 3), v'_2 = (-\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, -4), v'_3 = (\frac{11}{3}, \frac{13}{3}, 9)$.

**Exerciţiul 8.** Să se completeze sistemul $S = \{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (2, 1, 4)\}$ până la o bază în $\mathbb{R}^3$.

**Rezolvare.**

Avem $rangS = 2$. Este suficient să adăugăm un vector $v = (a, b, c)$ astfel ca sistemul $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ să fie liniar independent, adică determinantul matricei asociate este diferit de zero, de unde obţinem $a+2b-c \neq 0$. Luând, spre exemplu, $a = 1, b = 1$ şi $c = 4$ avem $v_3 = (1, 1, 4)$ şi $B$ este o bază în $\mathbb{R}^3$.

**Exerciţiul 9.** Să se determine matricea de trecere de la baza

$$B = \{v_1 = X^2 + 3X - 1, v_2 = -X + 2, v_3 = -X^2 + 1\} \subset \mathbb{R}_2[X]$$

la baza canonică $B_c = \{e_1 = X^2, e_2 = X, e_3 = 1\} \subset \mathbb{R}_2[X]$ şi să se scrie coordonatele vectorului $f = 2X^2 - 5X + 1$ în baza $B$.

**Rezolvare.**

Matricea de trecere de la $B$ la $B_c$ este

$$T_{BB_c} = T^{-1}_{B_cB}$$

Calculăm $T_{B_cB}$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

$$\alpha_1(X^2 + 3X - 1) + \alpha_2(-X + 2) + \alpha_3(-X^2 + 1) = 0$$

$$X^2\alpha_1 + 3\alpha_1 X - \alpha_1 - \alpha_2 X + 2\alpha_2 - \alpha_3 X^2 + \alpha_3 = 0$$
$$X^2(\alpha_1 - \alpha_3) + X(3\alpha_1 - \alpha_2) + (-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) = 0$$

Aşadar obţinem sistemul omogen:

$$\begin{cases} \alpha_1 \qquad - \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 \qquad = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Atunci:

$$T_{B_cB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Deci

$$T_{B_cB}{}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Coordonatele lui $f$ în baza $B$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = f$$
$$X^2(\alpha_1 - \alpha_3) + X(3\alpha_1 - \alpha_2) + (-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) = 2X^2 - 5X + 1$$

Aşadar obţinem sistemul :

$$\begin{cases} \alpha_1 \qquad - \alpha_3 = 2 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 \qquad = -5 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

Matricea asociată sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta = detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, rezultă sistem compatibil determinat.

Deci aplicăm regula lui Cramer.

$\Delta_{\alpha_1} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$, deci $\alpha_1 = \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta} = -\frac{7}{6}$

$\Delta_{\alpha_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9$, deci $\alpha_2 = \frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta} = -\frac{3}{2}$

$\Delta_{\alpha_3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 19$, deci $\alpha_3 = \frac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta} = -\frac{19}{6}$

Atunci în $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = f$ vom obţine:

$$-\frac{7}{6}v_1 - \frac{3}{2}v_2 - \frac{19}{6}v_3 = f$$

Deci coordonatele vectorului $f$ relativ la baza $B$ sunt:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

**Exerciţiul 10.** Matricea de trecere de la baza $B_1$ la baza

$$B_2 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{3\times 1}$$

este

$$T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Să se determine baza $B_1$.

**Rezolvare.**

Determinăm mai întâi inversa matricei $T_{B_1B_2}$. Deci

$$T_{B_2B_1} = T_{B_1B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

iar dacă notăm cu $\{u_1, u_2, u_3\}$ vectorii bazei $B_1$ obţinem

$$u_1 = -\frac{3}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Exercițiul 11.** Să se arate că

$$U = \{(x, y, z) | x + 2y - 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

este un subspațiu vectorial. Să se determine o bază a lui $U$ și dimensiunea acestui subspațiu.

**Rezolvare.**

Obținem matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\Delta_p = 1$, deci $x$ este necunoscuta principală și $y = \alpha, z = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ necunoscute secundare. Așadar $x = 3\beta - 2\alpha$.

Cum mulțimea $U$ poate fi scrisă

$$U = \{\alpha(-2, 1, 0) + \beta(3, 0, 1) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

deducem că $U$ este un subspațiu vectorial, fiind generat de vectorii $v_1 = (-2, 1, 0), v_2 = (3, 0, 1)$.

Deoarece $rang \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ =numărul de vectori din $B$, deducem că $B = \{v_1, v_2\}$ este o bază a lui $U$, fiind sistem de generatori liniar independent. Dimensiunea lui $U$ este 2 (numărul de vectori din bază).

**Exercițiul 12.** Să se arate că

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a \\ -b & -a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

est un subspațiu vectorial. Să se determine apoi două baze ale sale și să se scrie matricea de trecere de la prima la cea de-a doua bază aleasă.

**Rezolvare.** $U$ poate fi scris sub forma

$$U = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

deci este un subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^{2\times 2}$, fiind generat de sitemul de vectori

$$S = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Deoarece rangul matricei formată din cei doi vectori ai lui $S$ este egal cu numărul de vectori din $S$, adică

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

rezultă că $S$ formează o bază a lui $U$. Schimbând ordinea celor doi vectori obţinem o altă bază a lui $U$ diferită de prima, anume

$$S' = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Fie $T_{SS'} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza $S$ la baza $S'$. Din condiţiile $v_1 = au_1 + cu_2, v_2 = bu_1 + du_2$ echivalente cu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

se obţin $a = 0, b = 1, c = 1, d = 0$, deci $T_{SS'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exerciţiul 13.** Fie $v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (3, 1, 1)$ şi $w = (4, -7, 3)$. Să se determine dacă $w$ aparţine lui $span\{v_1, v_2\}$.

**Rezolvare.** Trebuie să verificăm dacă există $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ astfel incat $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

Obţinem sistemul liniar

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 4 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = -7 \\ \alpha_2 = 3 \end{cases}$$

cu soluţiile $\alpha_1 = -5, \alpha_2 = 3$.

Deci $w = -5v_1 + 3v_2 \in span\{v_1, v_2\}$.

**Exerciţiul 14.** Să se calculeze $Null(A)$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ şi sa se afle o baza pentru $Null(A)$.

**Rezolvare.**

Calculăm $Null(A)$

$$A \cdot X = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ 3x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Deci $Null(A) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, 3x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0\}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 9 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right) L_2 - 2L_1 \to \widetilde{L_2; L_3} - 3L_1 \to L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \widetilde{\tfrac{1}{2}L_1} \to L_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3/2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) L_1 - L_2 \to \widetilde{L_1; L_3} - 6L_2 \to L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -17 & 0 \end{array}\right) -\widetilde{\tfrac{1}{7}L_3} \to L_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 17/7 & 0 \end{array}\right) L_2 - \tfrac{3}{2}L_3 \to \widetilde{L_2; L_1} + \tfrac{1}{2}L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -53/14 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 17/7 & 0 \end{array}\right)$$

Rangul matricei extinse este 3, asadar avem $x_1, x_2, x_3$ necunoscute principale $x_4 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ necunoscuta secundara.

Obţinem $x_1 = \frac{53}{14}\alpha, x_2 = -\frac{5}{14}\alpha, x_3 = -\frac{17}{7}\alpha$.

$$Null(A) = \left\{ (\frac{53}{14}\alpha, -\frac{5}{14}\alpha, -\frac{17}{7}\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \left( \frac{53}{14}, -\frac{5}{14}, -\frac{17}{7}, 1 \right) \right\} = span(B)$$

unde $B = \{(\frac{53}{14}, -\frac{5}{14}, -\frac{17}{7}, 1)\}$ este baza lui $Null(A)$.