Seminar 3 - ALGEBRĂ
SPAŢII VECTORIALE. BAZE ÎN $\mathbb{R}^n$

Definiţia 1. Mulţimea notată :

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \{X = (x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\}$$

se numeşte **spaţiu de dimensiune n**. Un element $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ se numeşte **vector** din $\mathbb{R}^n$.

Pe această mulţime se pot defini operaţiile:

- **suma vectorilor :**

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

unde $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$;
Exemplul 1. Fie $X = (2, 3) \in \mathbb{R}^2$ şi $Y = (-2, 1) \in \mathbb{R}^2$.
Atunci $X + Y = (0, 4) \in \mathbb{R}^2$.
Observaţia 1. Nu se pot aduna vectori din spaţii diferite!

- **înmulţirea unui vector cu un scalar :**

$$\alpha \cdot X = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n),$$

unde $\alpha \in \mathbb{K}$ şi $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
Exemplul 2. Fie $X = (-1, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$ şi $\alpha = 3$.
Atunci $3X = (-3, 3, 9)$.

Spunem că X este spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$ dacă cele două operaţii verifică condiţiile următoare:

sv1) $(X, +)$ grup abelian;

sv2) $\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x_1, x_2 \in X$;

sv3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in X$;

sv4) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in X$;

sv5) $1v = v, \forall x \in X$.

Definiţia 2. Fie $S = \{V_1, V_2, ..., V_p\} \subset \mathbb{R}^n$ un sistem de vectori.

Se numeşte **combinaţie liniară** a vectorilor $V_1, V_2, ..., V_p \in \mathbb{R}^n$ cu scalarii $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in \mathbb{R}$ vectorul:

$$V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_p V_p.$$

Definiţia 3. Un sistem de vectori $S = \{V_1, V_2, ..., V_p\} \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte **liniar independent** dacă oricare ar fi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in \mathbb{R}$, avem

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_p V_p = \theta \implies \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0.$$

Definiţia 4. Un sistem de vectori $S = \{V_1, V_2, ..., V_p\} \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte **liniar dependent** dacă există $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in \mathbb{R}$ nu toţi nuli astfel încât

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_p V_p = \theta.$$

Definiţia 5. Un sistem de vectori $S = \{V_1, V_2, ..., V_p\} \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte **sistem de generatori** în $\mathbb{R}^n$ dacă oricare ar fi $X \in \mathbb{R}^n$, există $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$X = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_p V_p.$$

Studierea liniar independenţei/ dependenţei unui sistem

Pentru a stabili liniar dependenţa/ independenţa unui sistem $S = \{V_1, V_2, ..., V_p\}$ se formează matricea A. Această matrice A este formată din vectori puşi pe coloane.

Dacă rangul matricei A este egal cu numărul de vectori, atunci vectorii sunt liniari independenţi.

Dacă rangul matricei A este diferit de numărul de vectori, atunci vectorii sunt liniari dependenţi.

Fie $B = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ o mulţime de vectori în $\mathbb{R}^n$, adică $u_k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$ cu $x_i^k \in \mathbb{R}, \forall i \in \overline{1, n}$ şi $\forall k \in \overline{1, m}$.

- **Sistemul de vectori B este bază dacă este liniar independent şi sistem de generatori**

- **Sistemul de vectori B este bază dacă este liniar independent şi numărul de vectori este egal cu dimensiunea spaţiului.**

Baze canonice

- $B = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ este bază în $\mathbb{R}^2$
- $B = \{e_1 = (1, 0, ..., o), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 0, 1)\}$ este bază canonică în $\mathbb{R}^n$

Probleme rezolvate

Exerciţiul 1. Studiaţi care din următoarii vectori sunt liniar dependenţi/independenţi, iar în caz de dependenţă, scrieţi relaţia de dependenţă.

i) $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, -1, 1), v_3 = (1, 1, 4)$;

ii) $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, -1, 1), v_3 = (0, 2, 1)$.

Rezolvare.

Metoda I : Folosim definiţia vectorilor liniar dependenţi/independenţi.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ cu $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \theta$, adică

$$\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(0, -1, 1) + \alpha_3(1, 1, 4) = (0, 0, 0)$$
$$(\alpha_1 + \alpha_3, 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3) = (0, 0, 0)$$

Aşadar obţinem sistemul omogen:

$$\begin{cases} \alpha_1 \qquad\quad + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 \quad - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Matricea asociată sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Deoarece *rang* $A = 2$ rezultă că sistemul admite şi soluţii diferite de soluţia banală, deci vectorii sunt liniar dependenţi.

Pentru a scrie relaţia de dependenţă, aflăm o soluţie nenulă a sistemului.

Folosind metodele de rezolvare a sistemelor liniare învăţate în seminarul anterior avem că α_1, α_2 sunt necunoscutele principale, iar α_3 este necunoscută secundară . Notăm $\alpha_3 = a$ şi obţinem:

$$\begin{cases} \alpha_1 & = -a \\ 2\alpha_1 & - \alpha_2 = -a \end{cases}$$

Deci $\alpha_1 = \alpha_2 = -a$.

Relaţia de dependenţă este:

$$-av_1 - av_2 + av_3 = 0$$

$$-v_1 - v_2 + v_3 = 0$$

Metoda II : Folosim criteriul practic pentru studierea liniar dependenţei/independenţei sistemului de vectori.

Matricea asociată sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Atunci

$$S_A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \mathit{L_2 - 2L_1 \to \widetilde{L_2; L_3} - 3L_1 \to L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathit{L_3 + \widetilde{L_2} \to L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece *rang* $S_A = 2$ este diferit de numărul vectorilor (3 vectori), rezultă că vectorii sunt liniar dependenţi. O relaţie de dependenţă liniară se determină ca la Metoda I.

iii) *Metoda I :* Folosim definiţia vectorilor liniar dependenţi/independenţi.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ cu $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \theta$, adică

$$\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(0, -1, 1) + \alpha_3(0, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

Aşadar obţinem sistemul omogen:

$$\begin{cases} \alpha_1 \qquad\qquad\quad = 0 \\ 2\alpha_1 \;\; - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \;\; 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

cu soluţia $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, deci vectorii sunt liniari independenţi.

Metoda II : Folosim criteriul practic pentru studierea liniar dependenţei/independenţei sistemului de vectori.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathit{L_2 - 2L_1 \to \widetilde{L_2; L_3} - 3L_1 \to L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathit{L_3 \widetilde{+ L_2} \to L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Observăm $rang\ S_A = 3$, iar numărul vectorilor este 3. Cum rangul matricei este egal cu numărul de vectori rezultă că vectorii sunt liniar independenţi.

Exerciţiul 2. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii

$$v_1 = (1, -1, 4), v_2 = (2, -3, 1), v_3 = (1, 2, \lambda)$$

să fie liniar dependenţi în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Vectorii sunt liniar dependenţi dacă $rangA < 3$.

Pentru $rangA < 3$ avem că $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff -\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$

Deci vectorii sunt liniari dependenţi pentru $\lambda = 25$.

Exerciţiul 3. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii

$$v_1 = (1, 2, \lambda), v_2 = (-1, 1, 2), v_3 = (\lambda, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$$

să fie liniar independenţi.

Rezolvare.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 2 & 1 & 1 \\ \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vectorii sunt liniar independenţi dacă $rangA = 3$.

Pentru $rangA = 3$ avem că $\begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 2 & 1 & 1 \\ \lambda & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \iff -\lambda^2 + 3\lambda - 2 \neq 0$

Deci vectorii sunt liniari independenţi pentru $\lambda \neq 1, \lambda \neq 2$.

Exerciţiul 4. Să se verifice dacă sistemul

$$S = \{v_1 = (0,0,3), v_2 = (0,-1,1), v_3 = (1,1,0)\}$$

este sistem de generatori.

Rezolvare.

Într-adevăr, dacă $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, din relaţia

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

rezultă sistemul

$$\begin{cases} \alpha_3 = x_1 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = x_2 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = x_3 \end{cases}$$

cu soluţia $\alpha_1 = \frac{x_3 - x_1 + x_2}{3}, \alpha_2 = x_1 - x_2, \alpha_3 = x_1$.

Deci S este un sistem de generatori.

Exerciţiul 5. Să se studieze dacă sistemul de vectori este sistem de generatori în spaţiul vectorial precizat:

$$S_3 = \{v_1 = (2,4,2), v_2 = (2,0,-1), v_3 = (4,4,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Rezolvare. Într-adevăr, dacă $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, din relaţia

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = x,$$

adică $\alpha_1(2,4,2) + \alpha_2(2,0,-1) + \alpha_3(4,4,1) = (x_1, x_2, x_3)$

Aşadar obţinem sistemul :

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = x_1 \\ 4\alpha_1 + 4\alpha_3 = x_2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = x_3 \end{cases}$$

Matricea asociată sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Deci $det\ A = 0$, iar $rang\ A = 2$.
Matricea extinsă este:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pentru $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$ avem $rang\ \overline{A} = 3$.
Cum $rang\ A \neq rang\ \overline{A}$ rezultă că sistemul este incompatibil.
Deci există $x = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ care nu se poate exprima ca o combinaţie liniarăa vectorilor din sistem, aşadar sistemul nu este un sistem de generatori deoarece nu orice vector se poate exprima ca o combinaţie liniară a vectorilor din sistem.

Exerciţiul 6. Stabiliţi dacă sistemul format doar din vectorul nul este liniar dependent/independent.

Rezolvare. Sistemul format doar din vectorul nul, $S = \{0\}$ este liniar dependent pentru că oricare ar fi $\alpha \neq 0 \in K$ avem că

$$0 = \alpha \cdot 0$$

Exerciţiul 7. Stabiliţi dacă sistemul format dintr-un singur vector nenul este liniar dependent/independent.

Rezolvare. Sistemul format dintr-un singur vector nenul, $S = \{v\}, v \neq 0$ este liniar independent pentru că

$$0 = \alpha \cdot v \iff \alpha = 0$$

Exerciţiul 8. Se consideră sistemul de vectori din $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{v_1 = (-1, 2, 0), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (0, 1, 1)\}.$$

i) Să se arate că B formează o bază în $\mathbb{R}^3$.

ii) Să se determine coordonatele vectorului $v = (1, -1, -2)$ relativ la această bază.

Rezolvare.

i) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Cum $rangA = 3$ avem un sistem liniar independent.

Numărul de vectori=dimensiunea spaţiului =3

Aşadar B este bază în $\mathbb{R}^3$.

ii) Pentru a determina coordonatele unui vector într-o bază avem două metode:

Metoda 1:

Pentru a determina coordonatele vectorului $v = (1, -1, -2)$ relativ la baza B folosim definiţia coordonatelor relativ la o bază vectorială.

Rezolvăm sistemul:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = v$$

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = -1 \\ 3\alpha_2 + \alpha_3 = -2 \end{cases}$$

Matricea asociată sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) L_2 + \widetilde{2L_1} \to L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) L_3 - \widetilde{\tfrac{3}{4}L_2} \to L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & -11/4 \end{array}\right)$$

Obţinem $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = -11$.

Deci coordonatele vectorului v relativ la baza B sunt:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Metoda 2 :

Pentru a determina coordonatele vectorului $v = (1, -1, -2)$ relativ la baza B folosim formula:

$$[v]_B = T_{B_cB}^{-1}[v]_{B_c} = T_{BB_c}[v]_{B_c}$$

Avem că

$$[v]_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$T_{B_cB} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Obţinem

$$T_{B_cB}{}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Deci coordonatele vectorului v relativ la baza B sunt:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Exerciţiul 9. Arătaţi că următoarele sisteme de vectori sunt baze şi scrieţi matricele de trecere de la baza canonică la fiecare din aceste baze, precum şi matricea de trecere de la baza B_2 la baza B_1.

$$B_1 = \{u_1 = (1, 3, -1), u_2 = (0, 2, 1), u_3 = (-2, -1, 0)\}$$

$$B_2 = \{v_1 = u_1 - u_2, v_2 = 2u_1 + u_2 - u_3, v_3 = u_2 + u_3\}$$

Rezolvare.
Arătăm că B_1 este bază în $\mathbb{R}^3$.
Studiem liniar independenţa sistemului:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \overline{0}$$

$$\alpha_1(1, 3, -1) + \alpha_2(0, 2, 1) + v_3(-2, -1, 0) = (0, 0, 0)$$

$$(\alpha_1, 3\alpha_1, -\alpha_1) + (0, 2\alpha_2, \alpha_2) + (-2\alpha_3, -\alpha_3, 0) = (0, 0, 0)$$

$$(\alpha_1 - 2\alpha_3, 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2) = (0, 0, 0)$$

Aşadar obţinem sistemul omogen:

$$\begin{cases} \alpha_1 \qquad - 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \qquad = 0 \end{cases}$$

Matricea asociată sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, rezultă că sistemul are doar soluţie banală, deci avem sistem liniar independent

Numărul de vectori=dimensiunea spaţiului =3

Aşadar B_1 este bază în $\mathbb{R}^3$.

Arătăm că B_2 este bază în $\mathbb{R}^3$.

$v_1 = u_1 - u_2 = (1, 3, -1) - (0, 2, 1) = (1, 1, -2)$

$v_2 = 2u_1 + u_2 - u_3 = 2(1, 3, -1) + (0, 2, 1) - (-2, -1, 0) = (4, 9, -1)$

$v_3 = u_2 + u_3 = (0, 2, 1) + (-2, -1, 0) = (-2, 1, 1)$

Numărul de vectori=dimensiunea spaţiului =3

Studiem liniar independenţa sistemului:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \overline{0}$$

Aşadar obţinem sistemul omogen:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 9\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Matricea asociată sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 9 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$detA = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 9 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$, rezultă că sistemul are doar soluţie banală, deci avem sistem liniar independent

Aşadar B_2 este bază în $\mathbb{R}^3$.

Matricea de trecere de la baza canonică la baza B_1

$$T_{B_cB_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matricea de trecere de la baza canonică la baza B_2

$$T_{B_cB_2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 9 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vectorii bazei B_2 sunt exprimaţi în funcţie de vectorii bazei B_1, deci obţinem direct matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2:

$$T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Avem că $T_{B_2B_1} = T^{-1}_{B_1B_2}$.

Deci

$$T^{-1}_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = T_{B_2B_1}$$

Probleme propuse

Exerciţiul 10. Studiaţi care din următoarii vectori sunt liniar dependenţi/independenţi, iar în caz de dependenţă, scrieţi relaţia de dependenţă.

i) $v_1 = (1, 0), v_2 = (3, -2)$

ii) $v_1 = (1, -1), v_2 = (0, 0), v_3 = (1, 1)$

iii) $v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (2, -1, 1)$

iv) $v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (2, -1, 1), v_3 = (1, -1, 1)$

v) $v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (2, -1, 1), v_3 = (3, -1, 0)$

Exerciţiul 11. Să se studieze dacă sistemul de vectori este sistem de generatori în spaţiul vectorial precizat:

$$S = \{v_1 = (-1, 0, 2), v_2 = (2, 0, -1), v_3 = (1, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Exerciţiul 12. Se consideră sistemul de vectori din $\mathbb{R}^3$

$$B = \{v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (2, 1, 2), v_3 = (1, 2, 1)\}.$$

i) Să se arate că B formează o bază în $\mathbb{R}^3$

ii) Să se determine coordonatele vectorului $v = (1, 1, 1)$ relativ la această bază.

Exerciţiul 13. Fie

$$B_1 = \{v_1 = (1, 3, 1), v_2 = (0, 2, 1), v_3 = (-2, -1, 0)\}$$

şi

$$B_2 = \{u_1 = (2, -1, 1), u_2 = (-1, -2, 1), u_3 = (2, 0, -1)\}$$

Să se arate că B_1 şi B_2 sunt baze în $\mathbb{R}^3$ şi să se scrie matricele de trecere de la baza B_1 la B_2 şi de la baza B_2 la B_1.