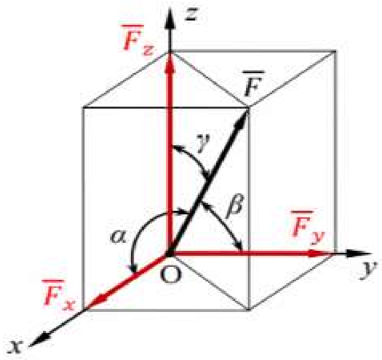
Forța

Forța este o mărime vectorială care reflectă interacțiunea dintre două corpuri (unitatea de măsură Newton)

Expresia analitică a forței în raport cu sistemul de referință poate fi scrisă

$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y + \bar{F}_z$$
$$= F_x \cdot \bar{i} + F_y \cdot \bar{j} + F_z \cdot \bar{k}$$



iar **modulul** forței

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Atenție: forța este un **vector alunecător**, adică forța F poate fi deplasată pe propriul suport fără ca efectul ei asupra rigidului să se modifice (punctul de aplicație se poate deplasa pe direcția forței).

Momentul unei forțe în raport cu punctul O

Pentru forța $\overline{F}$ momentul în raport cu punctul O este vectorul

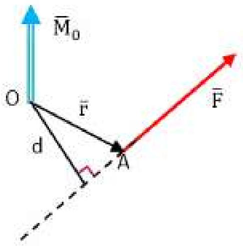
$$\overline{M}_0 = \overline{r} \times \overline{F}$$

având:

- punctul de aplicație în O
- direcția perpendiculară pe planul format de forță și punctul O
- sensul dat de regula burghiului sau mâinii drepte
- modulul

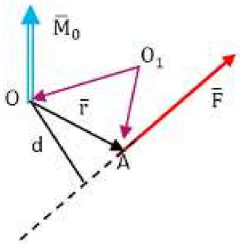
$$M_O = r \cdot F \cdot \sin(\overline{r}, \overline{F}) = F \cdot d$$

unde d este brațul forței



Atenție: Momentul forței față de un alt punct O_1 este diferit

$$\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{O_1}} = \overline{O_1A} \times \overline{F} = (\overline{r} + \overline{O_1O}) \times \overline{F}$$
$$= \overline{r} \times \overline{F} + \overline{O_1O} \times \overline{F} = \overline{M}_O + \overline{O_1O} \times \overline{F}$$
$$= \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} - \overline{\mathbf{OO_1}} \times \overline{\mathbf{F}}$$



Dacă se consideră forța $\overline{F} = F_x\overline{i} + F_y\overline{j} + F_z\overline{k}$ cu punctul de aplicație în A(x,y,z), atunci momentul forței în raport cu punctul O se poate scrie

$$\overline{M}_0 = \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\overline{i} + (zF_x - xF_z)\overline{j} + (xF_y - yF_x)\overline{k} = M_{Ox}\overline{i} + M_{Oy}\overline{j} + M_{Oz}\overline{k}$$

iar modulul este $M_O = \sqrt{{M_{Ox}}^2 + {M_{Oy}}^2 + {M_{Oz}}^2}$

Reducerea sistemului de forțe în raport cu punctul O

A reduce un sistem de forțe într-un punct presupune a găsi un sistem echivalent de forțe care să producă același efect ca și sistemul de forțe dat.

Forța rezultantă

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$$

și cuplul rezultant reprezentat prin momentul

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{F}_i$$

formează sistemul echivalent care se numește **torsorul de reducere** în punctul O și se notează $\boldsymbol{\tau_O(\overline{R}, \overline{M}_O)}$

Atenție: la schimbarea punctului de reducere **forța rezultantă $\overline{\mathbf{R}}$ nu se schimbă** dar momentul se schimbă **– teorema momentelor**

$$\boldsymbol{\overline{M}_{O_1} = \overline{M}_O - \overline{OO_1} \times \overline{R}}$$

unde O_1 este noul punct de reducere

Momentul minimal sau redus

Momentul minimal sau redus

$$M_r = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{R} = \frac{\bar{R}}{R} \cdot \bar{M}_O$$

reprezintă **proiecția momentului $\bar{M}_O$ pe rezultanta $\bar{R}$.**

Ținând cont că momentul minimal M_r este coliniar cu rezultanta $\bar{R}$, se poate scrie vectorial

$$\bar{M}_r = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{R^2} \bar{R}$$

și se obține **torsorul minimal $\tau_O(\bar{R}, \bar{M}_r)$**

Axa centrală

Ecuația **axei centrale**

$$\frac{M_{ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z}$$

În cazul unui sistem de **forțe coplanare** ecuația axei centrale este

$$M_{oz} - (xR_y - yR_x) = 0$$

Cazurile de reducere posibile

Cazul 1: $\overline{R} \cdot \overline{M}_O \neq 0$ implică $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O \neq 0$ se deduce momentul minimal $M_r \neq 0$. În consecință, **sistemul de forțe se reduce la un torsor minimal situat pe axa centrală** care este bine determinată.

Cazul 2: $\overline{R} \cdot \overline{M}_O = 0$, dar $\overline{R} \neq 0$ se deduce momentul minimal $M_r = 0$. În consecință, torsorul minimal este format numai din rezultantă – **Sistemul de forțe se va reduce la rezultanta unică situată pe axa centrală**. Acest caz apare fie dacă:

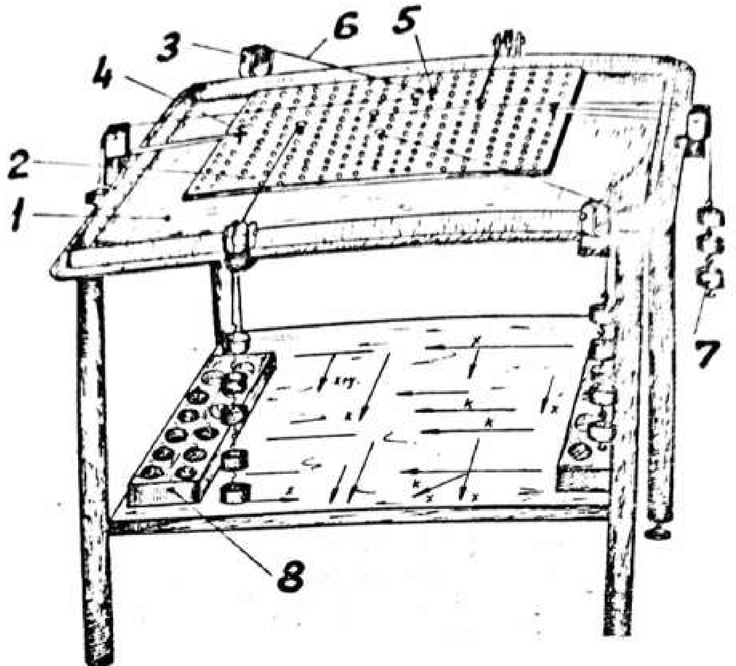
- $\overline{M}_O = 0$ – deci **punctul de reducere O se află pe axa centrală**
- $\overline{R} \perp \overline{M}_O$ – punctul de reducere O nu se află pe axa centrală dar **momentul din punctul de reducere este egal cu momentul rezultantei pe axa centrală**

Cazul 3: $\overline{R} = 0$ și $\overline{M}_O \neq 0$ ceea ce implică și $\overline{R} \cdot \overline{M}_O = 0$ – **Sistemul de forțe se reduce la un cuplu $\overline{M} = \overline{M}_O$**.

Cazul 4: $\overline{R} = 0$ și $\overline{M}_O = 0$ – **Sistemul de forțe este în echilibru.**

Masa Toppler

- În cadrul laboratorului de Mecanică, există **masa Toppler** cu ajutorul căreia se studiază experimental reducerea sistemelor de forțe coplanare și se verifică concordanța dintre rezultatele teoretice și cele experimentale.



Masa Toppler se compune din:

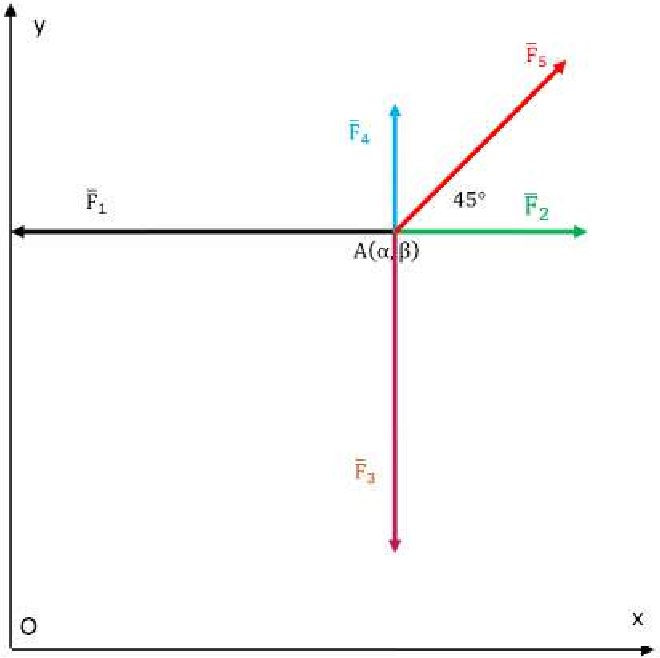
1 - masă pătrată cu placă de sticlă netedă și plană
2 - placă pătrată, prevăzută cu o rețea de găuri (max 20×20), asupra căreia se aplică forțele coplanare. Placa se reazemă pe masa 1 prin intermediul a patru bile, astfel încât se poate mișca ușor în planul mesei (frecările sunt neglijabile)
3 - scripeți cu menghină de fixare
4 - știfturi de fixare a plăcii 2
5 - știfturi pentru aplicarea forțelor Fi
6 - fire flexibilei
7 - greutăți de 1N, 0.5N, 0.25N
8 - cutii pentru greutăți.

Exemplul 1

În punctul $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ acționează sistemul de 5 forțe având direcțiile ca în figură, iar mărimile lor sunt:

$$\mathbf{F_1 = 6[N]}$$
$$\mathbf{F_2 = 3[N]}$$
$$\mathbf{F_3 = 5[N]}$$
$$\mathbf{F_4 = 2[N]}$$
$$\mathbf{F_5 = 3\sqrt{2}[N]} \quad (4.25)$$

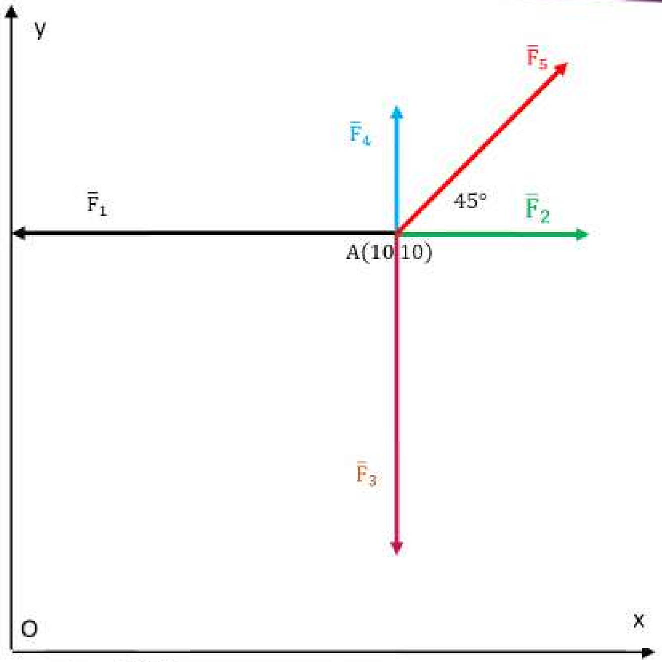
Să se găsească elementelor torsorului de reducere în raport cu originea sistemului de coordonate.



Se impune:

- să se exprime analitic fiecare vector forță $\overline{F}_i$
- să se determine elementele torsorului de reducere
  - Rezultanta $\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$
  - Momentul rezultant $\overline{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \, x\overline{F}_i$

Exemplul 1 – Exprimarea analitică a vectorilor forță. Rezultanta



$\mathbf{F_1} = 6[\mathrm{N}]$
$\mathbf{F_2} = 3[\mathrm{N}]$
$\mathbf{F_3} = 5[\mathrm{N}]$
$\mathbf{F_4} = 2[\mathrm{N}]$
$\mathbf{F_5} = 3\sqrt{2}[\mathrm{N}]$

$$\bar{\mathbf{F}}_1 = F_1(-\bar{\imath}) = -\mathbf{6\bar{\imath}}$$

$$\bar{\mathbf{F}}_2 = F_2\bar{\imath} = \mathbf{3\bar{\imath}}$$

$$\bar{\mathbf{F}}_3 = F_3(-\bar{\jmath}) = -\mathbf{5\bar{\jmath}}$$

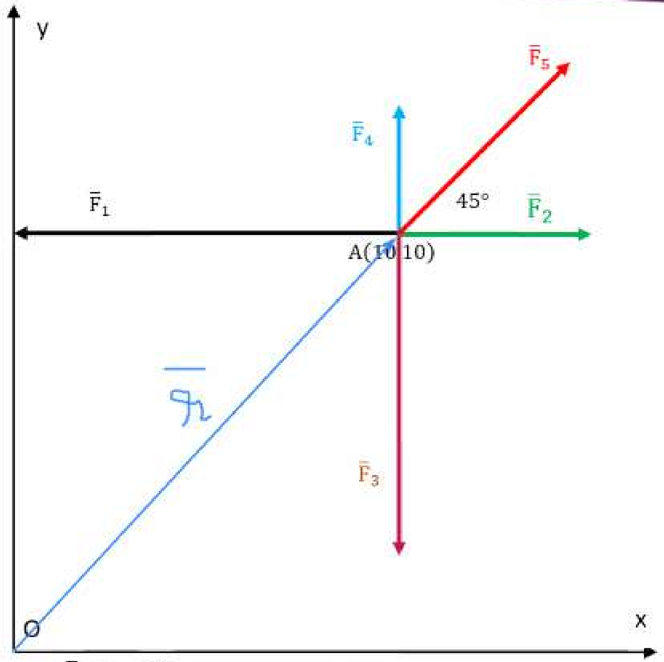
$$\bar{\mathbf{F}}_4 = F_4\bar{\jmath} = \mathbf{2\bar{\jmath}}$$

$$\bar{\mathbf{F}}_5 = F_5 \cos 45\,\bar{\imath} + F_5 \sin 45\,\bar{\jmath} = 3\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\imath} + 3\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\jmath} = \mathbf{3\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}}$$

Rezultanta

$$\bar{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{5} \bar{F}_i = \bar{\mathbf{F}}_1 + \bar{\mathbf{F}}_2 + \bar{\mathbf{F}}_3 + \bar{\mathbf{F}}_4 + \bar{\mathbf{F}}_5 = -\mathbf{6\bar{\imath}} + \mathbf{3\bar{\imath}} - \mathbf{5\bar{\jmath}} + \mathbf{2\bar{\jmath}} + \mathbf{3\bar{\imath}} + \mathbf{3\bar{\jmath}}$$

Exemplul 1 –Momentul forțelor în raport cu punctul O



$\bar{\mathbf{F}}_1 = -6\bar{\imath}$
$\bar{\mathbf{F}}_2 = 3\bar{\imath}$
$\bar{\mathbf{F}}_3 = -5\bar{\jmath}$
$\bar{\mathbf{F}}_4 = 2\bar{\jmath}$
$\bar{\mathbf{F}}_5 = 3\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$

$$\bar{\mathbf{M}}_O(\bar{\mathbf{F}}_1) = \overline{OA} \times \bar{F}_1 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{60\bar{k}}$$

$$\bar{\mathbf{M}}_O(\bar{\mathbf{F}}_2) = \overline{OA} \times \bar{F}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{-30\bar{k}}$$

$$\bar{\mathbf{M}}_O(\bar{\mathbf{F}}_3) = \overline{OA} \times \bar{F}_3 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{-50\bar{k}}$$

$$\bar{\mathbf{M}}_O(\bar{\mathbf{F}}_4) = \overline{OA} \times \bar{F}_4 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{20\bar{k}}$$

$$\bar{\mathbf{M}}_O(\bar{\mathbf{F}}_5) = \overline{OA} \times \bar{F}_5 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Momentul rezultant

$$\bar{\mathbf{M}}_o = \sum_{i=1}^{5} \bar{r}_i \, x \bar{F}_i = \bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) + \bar{M}_O(\bar{F}_3) + \bar{M}_O(\bar{F}_4) + \bar{M}_O(\bar{F}_5) = \mathbf{60\bar{k} - 30\bar{k} - 50\bar{k} + 20\bar{k} + 0} = \mathbf{0}$$

Exemplul 1 – Concluzie

- S-au obținut **elementele torsorul $\boldsymbol{\tau_O(\bar{F}_i)}$**

$$
\begin{cases}
\bar{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\mathbf{F}}_i = \mathbf{0} \\
\bar{\mathbf{M}}_O = \sum_{i=1}^{n} \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i = \mathbf{0}
\end{cases}
$$

deci sistemul de forțe este în echilibru

Exemplul 2

Se consideră **sistemul de 4 forțe** având direcțiile ca în figură,
iar mărimile lor și punctele de aplicație sunt:

$F_1 = 5[N]$ cu punctul de aplicație $A_1(2, \propto)$

$F_2 = 3[N]$ cu punctul de aplicație $A_2(18, \beta)$

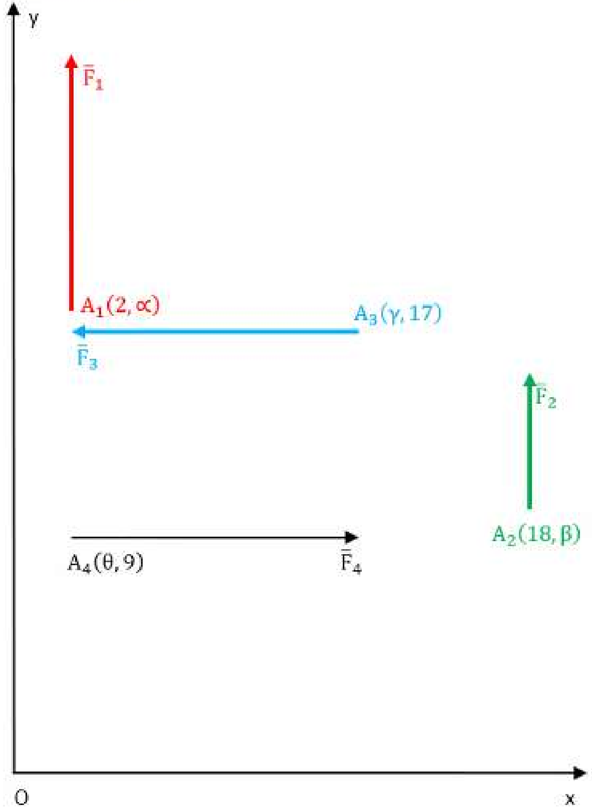
$F_3 = 5[N]$ cu punctul de aplicație $A_3(\gamma, 17)$

$F_4 = 5[N]$ cu punctul de aplicație $A_4(\theta, 9)$

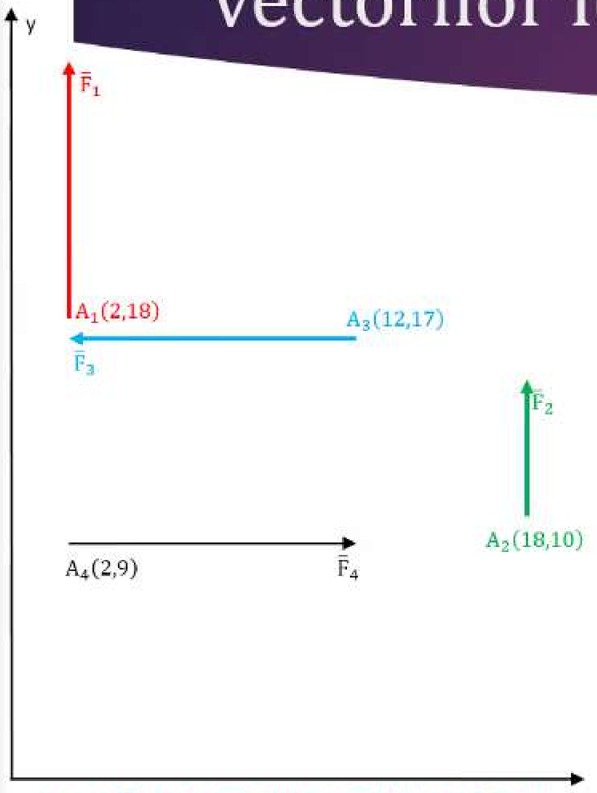
Să se găsească **elementelor torsorului de reducere** în raport cu originea sistemului de coordonate.

Se impune:

- să se exprime analitic fiecare vector forță $\overline{F}_i$
- să se determine elementele torsorului de reducere
  - Rezultanta $\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$
  - Momentul rezultant $\overline{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \, x\overline{F}_i$



Exemplul 2 – Exprimarea analitică a vectorilor forță. Rezultanta



$F_1 = 5[N]$ cu punctul de aplicație $A_1(2, \propto)$
$F_2 = 3[N]$ cu punctul de aplicație $A_2(18, \beta)$
$F_3 = 5[N]$ cu punctul de aplicație $A_3(\gamma, 17)$
$F_4 = 5[N]$ cu punctul de aplicație $A_4(\theta, 9)$

$$\bar{\mathbf{F}}_1 = F_1\bar{\jmath} = \mathbf{5\bar{\jmath}}$$

$$\bar{\mathbf{F}}_2 = F_2\bar{\jmath} = \mathbf{3\bar{\jmath}}$$

$$\bar{\mathbf{F}}_3 = F_3(-\bar{\imath}) = \mathbf{-5\bar{\imath}}$$

$$\bar{\mathbf{F}}_4 = F_4\bar{\imath} = \mathbf{5\bar{\imath}}$$

Rezultanta

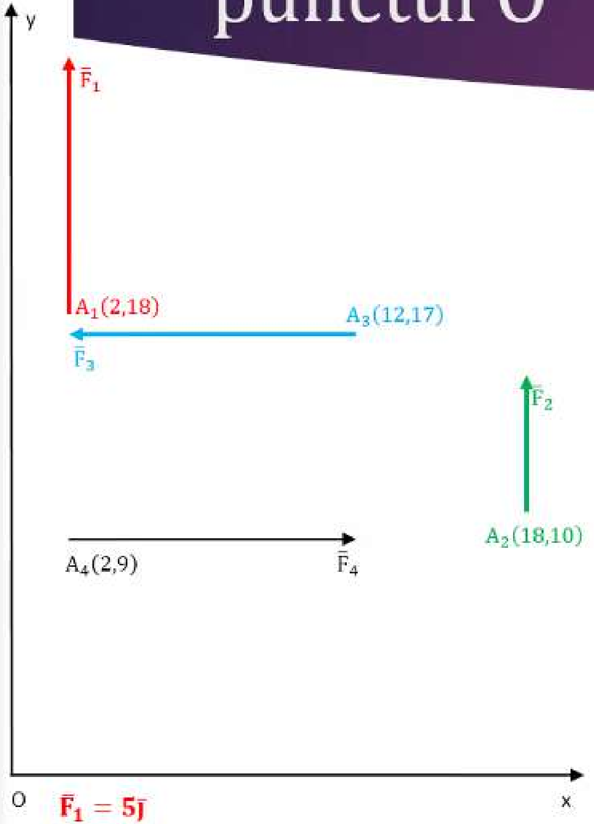
$$\bar{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{4} \bar{F}_i$$

$$= \bar{\mathbf{F}}_1 + \bar{\mathbf{F}}_2 + \bar{\mathbf{F}}_3 + \bar{\mathbf{F}}_4$$

$$= \mathbf{5\bar{\jmath}} + \mathbf{3\bar{\jmath}} - \mathbf{5\bar{\imath}} + \mathbf{5\bar{\imath}}$$

$$= \mathbf{8\bar{\jmath}}$$

Exemplul 2 –Momentul forțelor în raport cu punctul O



$\bar{F}_1 = 5\bar{j}$
$\bar{F}_2 = 3\bar{j}$
$\bar{F}_3 = -5\bar{i}$
$\bar{F}_4 = 5\bar{i}$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_1) = \overline{OA_1} \times \bar{F}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 18 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10\bar{k}$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_2) = \overline{OA_2} \times \bar{F}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 18 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 54\bar{k}$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_3) = \overline{OA_3} \times \bar{F}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 12 & 17 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 85\bar{k}$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_4) = \overline{OA_4} \times \bar{F}_4 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 9 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -45\bar{k}$$

Momentul rezultant

$$\bar{M}_o = \sum_{i=1}^{4} \bar{r}_i x \bar{F}_i$$

$$= \bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) + \bar{M}_O(\bar{F}_3) + \bar{M}_O(\bar{F}_4)$$

$$= 10\bar{k} + 54\bar{k} + 85\bar{k} - 45\bar{k}$$

$$=104\bar{k}$$

Exemplul 2 – Concluzie

- S-au obținut elementele torsorul $\tau_O(\bar{F}_i)$

$$\begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^{4} \bar{F}_i = 8\bar{j} \\ \bar{M}_O = \sum_{i=1}^{4} \bar{r}_i \times \bar{F}_i = 104\bar{k} \end{cases}$$

Se determină Momentul minimal sau redus:

$$M_r = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{R} = \frac{(8\bar{j}) \cdot (104\bar{k})}{\sqrt{8^2}} = 0$$

Deci este **Cazul 2:** $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$, dar $\bar{R} \neq 0$ se deduce momentul minimal $M_r = 0$. În consecință, torsorul minimal este format numai din rezultantă – **Sistemul de forțe se va reduce la rezultanta unică situată pe axa centrală**.

Se determinăm ecuația axei centrale

$$M_{oz} = xR_y - yR_x$$

$$104 = x \cdot 8 - y \cdot 0$$

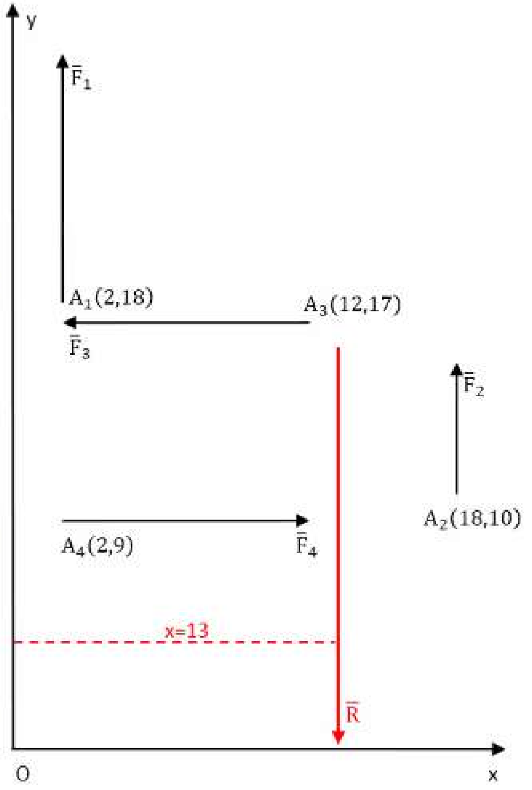
$$x = \frac{104}{8} = 13$$

Se observă că axa centrală nu trece prin centrul de greutate al plăcii C(10,10)
deci având

$\bar{R} = 8\bar{j}$ rezultă că sub acțiunea sistemului de forțe apare **o mișcare de translație după axa y** și în aceleași sens

$\bar{M}_O = 104\bar{k}$ rezultă că sub acțiunea sistemului de forțe apare **o mișcare de rotație în jurul axei z**

Pentru echilibrarea sistemului de forțe, **pe axa centrală se aplică o forță egală cu $\bar{R}$ dar în sens opus**



Problemă

Asupra unui **cub** acționează sistemul de forțe din figură.

Cunoscându-se mărimile forțelor

$F_1 = 2\sqrt{3}F$ (direcția BO_1)

$F_2 = 2F$ (direcția D_1D)

$F_3 = 2\sqrt{2}F$ (direcția AO_1)

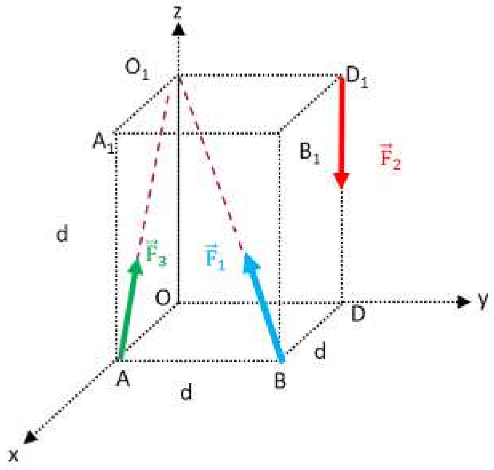
să se determine:

a) torsorul de reducere în punctul O

b) torsorul în punctul B

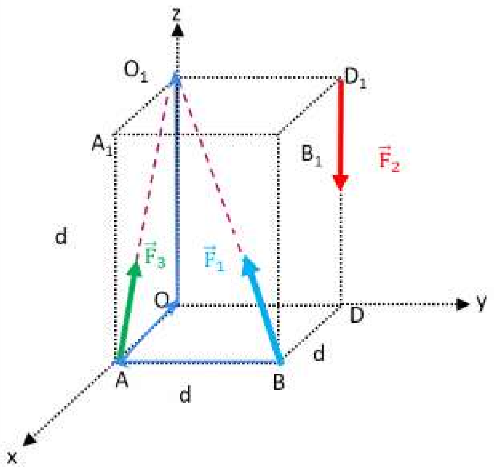
c) momentul minimal (redus)

d) axa centrală



Problemă

Exprimarea analitică a vectorilor forță. Rezultanta



$F_1 = 2\sqrt{3}F$ (direcția BO_1)

$F_2 = 2F$ (direcția D_1D)

$F_3 = 2\sqrt{2}F$ (direcția AO_1)

$$\bar{F}_1 = F_1 \frac{\overline{BO_1}}{BO_1} = F_1 \frac{\overline{BA} + \overline{AO} + \overline{OO_1}}{BO_1} = 2\sqrt{3}F \frac{-d\bar{\imath} - d\bar{\jmath} + d\bar{k}}{d\sqrt{3}} = \mathbf{-2F\bar{\imath} - 2F\bar{\jmath} + 2F\bar{k}}$$

$$\bar{F}_2 = F_2 \frac{\overline{D_1D}}{D_1D} = 2F \frac{-d\bar{k}}{d} = \mathbf{-2F\bar{k}}$$

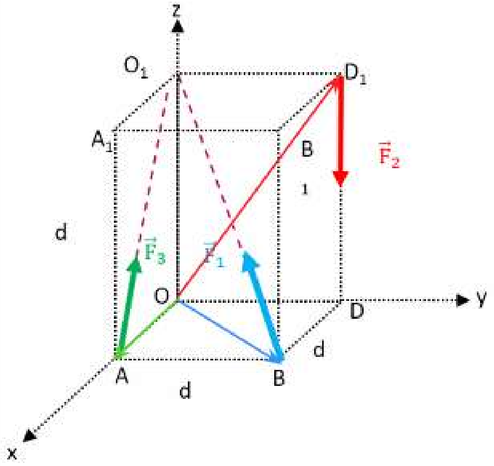
$$\bar{F}_3 = F_3 \frac{\overline{AO_1}}{AO_1} = F_3 \frac{\overline{AO} + \overline{OO_1}}{AO_1} = 2\sqrt{2}F \frac{-d\bar{\imath} + d\bar{k}}{d\sqrt{2}} = \mathbf{-2F\bar{\imath} + 2F\bar{k}}$$

Rezultanta

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{3} \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \mathbf{-2F\bar{\imath} - 2F\bar{\jmath} + 2F\bar{k} - 2F\bar{k} - 2F\bar{\imath} + 2F\bar{k}} = \mathbf{-4F\bar{\imath} - 2F\bar{\jmath} + 2F\bar{k}}$$

Problemă

Momentul forțelor în raport cu punctul O



$\bar{F}_1 = -2F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k}$
$\bar{F}_2 = -2F\bar{k}$
$\bar{F}_3 = -2F\bar{i} + 2F\bar{k}$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_1) = \overline{OB} \times \bar{F}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ d & d & 0 \\ -2F & -2F & 2F \end{vmatrix} = \mathbf{2dF\bar{i} - 2dF\bar{j}}$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_2) = \overline{OD_1} \times \bar{F}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & d & d \\ 0 & 0 & -2F \end{vmatrix} = \mathbf{-2dF\bar{i}}$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_3) = \overline{OA} \times \bar{F}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ d & 0 & 0 \\ -2F & 0 & 2F \end{vmatrix} = \mathbf{-2dF\bar{j}}$$

Momentul rezultant

$$\bar{M}_o = \sum_{i=1}^{3} \bar{r}_i \, x \bar{F}_i$$

$$= \bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) + \bar{M}_O(\bar{F}_3)$$

$$= \mathbf{2dF\bar{i} - 2dF\bar{j} - 2dF\bar{i} - 2dF\bar{j}}$$

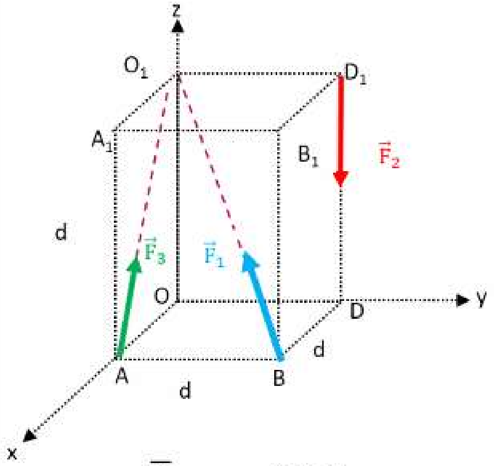
$$= \mathbf{-4dF\bar{j}}$$

Problemă
Elementele torsorului în punctul B

- **elementele torsorului în punctul B** sunt
  Aceeași $\overline{R} = -4F\overline{i} - 2F\overline{j} + 2F\overline{k}$
  Moment în raport cu punctul B diferit $\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{B}} = \overline{M}_O - \overline{OB} \times \overline{R}$

$$= -4dF\overline{j} - \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ d & d & 0 \\ -4F & -2F & 2F \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{-2dF\overline{i} - 2dF\overline{j} - 2dF\overline{k}}$$



$$\tau_B = \begin{cases} \overline{R} = -4F\overline{i} - 2F\overline{j} + 2F\overline{k} \\ \overline{M}_B = -2dF\overline{i} - 2dF\overline{j} - 2dF\overline{k} \end{cases}$$

$\overline{M}_O = -4dF\overline{j}$

Problemă
Momentul minimal

S-au obținut **elementele torsorului în punctul O**

$$\tau_O = \begin{cases} \bar{R} = -4F\bar{\imath} - 2F\bar{\jmath} + 2F\bar{k} \\ \bar{M}_O = -4dF\bar{\jmath} \end{cases}$$

Momentul minimal sau redus este:

$$\mathbf{M_r = \frac{\bar{R}\cdot\bar{M}_O}{R}} = \frac{(-4F\bar{\imath} - 2F\bar{\jmath} + 2F\bar{k})\cdot(-4dF\bar{\jmath})}{\sqrt{(4F)^2 + (2F)^2 + (2F)^2}} = \mathbf{\frac{8dF}{\sqrt{24}}}$$

Cazul 1: $\bar{R}\cdot\bar{M}_O \neq 0$ implică $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O \neq 0$ se deduce momentul minimal $M_r \neq 0$. În consecință, **sistemul de forțe se reduce la un torsor minimal situat pe axa centrală** care este bine determinată.

S-au obținut **elementele torsorului în punctul B**

$$\tau_B = \begin{cases} \bar{R} = -4F\bar{\imath} - 2F\bar{\jmath} + 2F\bar{k} \\ \bar{M}_B = -2dF\bar{\imath} - 2dF\bar{\jmath} - 2dF\bar{k} \end{cases}$$

Momentul minimal sau redus este:

$$M_r = \frac{\bar{R}\cdot\bar{M}_B}{R} = \frac{(-4F\bar{\imath} - 2F\bar{\jmath} + 2F\bar{k})\cdot(-2dF\bar{\imath} - 2dF\bar{\jmath} - 2dF\bar{k})}{\sqrt{(4F)^2 + (2F)^2 + (2F)^2}} = \frac{8dF}{\sqrt{24}}$$

Problemă
Axa centrală

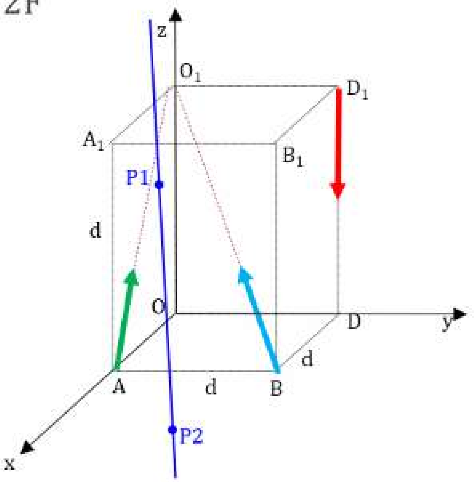
$$\tau_O = \begin{cases} \bar{R} = -4F\bar{\imath} - 2F\bar{\jmath} + 2F\bar{k} \\ \bar{M}_O = -4dF\bar{\jmath} \end{cases}$$

Axa centrală

$$\frac{M_{ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z}$$

$$\frac{0 - (y(2F) - z(-2F))}{-4F} = \frac{-4dF - (z(-4F) - x(2F))}{-2F} = \frac{0 - (x(-2F) - y(-4F))}{2F}$$

$$\begin{cases} 16d - 20z - 8x - 4y = 0 \\ -4d + 4x + 4z - 4y = 0 \end{cases}$$



dacă $y = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{d}{3} \\ z = \frac{2d}{3} \end{cases}$ deci există punctul $\mathbf{P_1\left(\frac{d}{3}, 0, \frac{2d}{3}\right)}$

dacă $z = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{5d}{3} \\ y = \frac{2d}{3} \end{cases}$ deci există punctul $\mathbf{P_2\left(\frac{5d}{3}, \frac{2d}{3}, 0\right)}$