AMINTEŞTE-ŢI

REGULILE DE DERIVARE

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(\lambda f)' = \lambda f'$

unde λ este o constantă

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

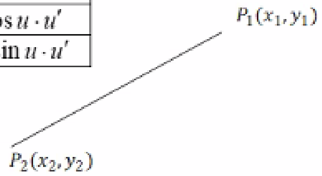
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

DERIVAREA FUNCŢIILOR ELEMENTARE

FUNCŢIA	DERIVATA
C(constanta)	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

DERIVAREA FUNCŢIILOR COMPUSE

FUNCŢIA	DERIVATA
u	u'
u^n	$n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$



Ecuaţia **DREPTEI** este

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

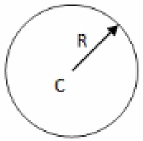
care trece prin punctele $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$

FORMULELE TRIGONOMETRICE

$cos^2 u + sin^2 u = 1$

$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$

$\cos 2u = cos^2 u - sin^2 u = 2cos^2 u - 1 = 1 - 2sin^2 u$



Ecuaţia **CERCUL** este

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

unde

R este raza cercului

C (x_C, y_C) este centrul cercului

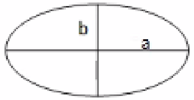
Ecuaţia parametrică

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$$

INTEGRALE

$$\int dt = t + constanta$$

$$\int t\, dt = \frac{t^2}{2} + constanta$$



Ecuaţia **ELIPSEI** este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

unde

a este semiaxa mare

b este semiaxa mică

Ecuaţia parametrică

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

CHILIBARU-OPRIȚESCU CRISTINA

Cinematica punctului material

- **Studiul mişcării** unui punct material faţă de un sistem de referinţă presupune stabilirea:
  - Legii de mişcare. Traiectoriei
  - Vitezei
  - Acceleraţiei

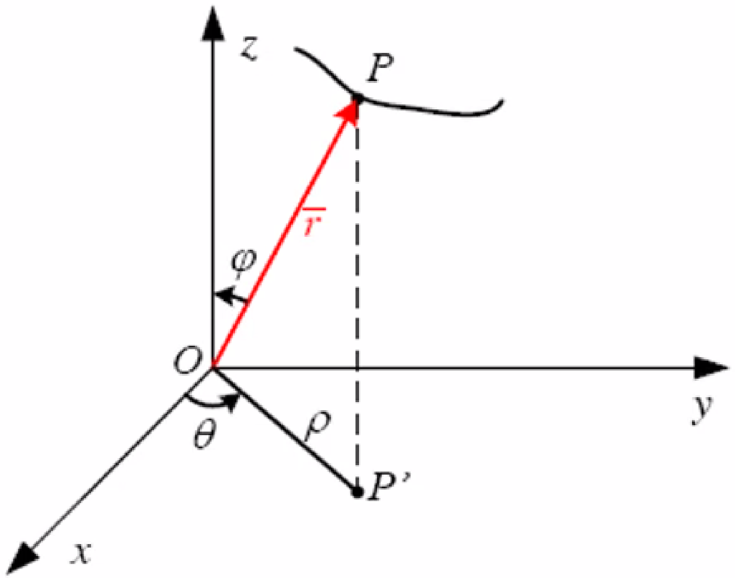
LEGEA DE MIȘCAREA. TRAIECTORIA

Mișcarea punctului material este cunoscută dacă se cunoaște în orice moment poziția dată de

- Vectorul de poziție

$$\bar{r} = \overline{OP} = r(t)$$

- Coordonatele punctului
  - **Carteziene** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$
  - **Cilindrice** $\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = \theta(t) \\ z = z(t) \end{cases}$
  - **Sferice** $\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$



Traiectoria reprezintă locul geometric al pozițiilor succesive ocupate de punctul material – se determină prin eliminarea timpului din ecuațiile parametrice ale mișcării

VITEZA – în coordonate carteziene

- **Viteza** momentană este

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$= \dot{\bar{r}} = \dot{x} \cdot \bar{\imath} + \dot{y} \cdot \bar{\jmath} + \dot{z} \cdot \bar{k}$$

și mărimea

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Viteza este un vector tangent la traiectorie și are sensul dat de mișcarea punctului.

ACCELERAȚIA – în coordonate carteziene

- **Accelerația** momentană este

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

$$= \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x} \cdot \bar{\imath} + \ddot{y} \cdot \bar{\jmath} + \ddot{z} \cdot \bar{k}$$

și mărimea

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Accelerația este un vector îndreptat către interiorul curbei ce reprezintă traiectoria

Cazuri particulare ale mișcării punctului material

- Mișcarea rectilinie uniformă –traiectoria punctului este o dreaptă și modulul vitezei este constant

$$x = x_0 + v_0 t$$
$$v = v_0 = constantă$$

- Mișcarea rectilinie uniform variată – traiectoria punctului este o dreaptă și modulul accelerației este constant

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$
$$v = v_0 + a_0 t$$
$$a = a_0 = constantă$$

Problema

- Știind că punctul P se deplasează după legea

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\cos t \end{cases}$$

să se determine: **traiectoria** (să se reprezinte grafic), **viteza** și **accelerația** la un moment dat

Pentru determinarea traiectoriei se elimină timpul între ecuațiile date.

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\cos t \end{cases}$$

înmulțim prima ecuație cu (-2) și apoi le adunăm

$$-2x + y = -2\cos t + 2\cos t$$

$$\Rightarrow -2x + y = 0$$

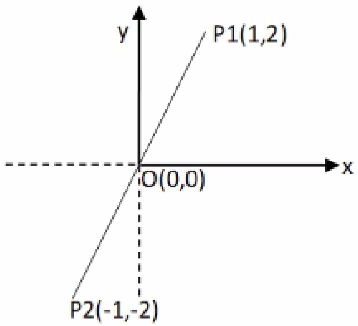
$\boldsymbol{y = 2x}$ reprezintă **ecuația unei drepte**

Pentru a reprezenta grafic legea de mișcare se dau valori timpul

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$t = \pi \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$



Scriem ecuația vectorială a mișcării $\bar{r} = x \cdot \bar{\imath} + y \cdot \bar{\jmath}$

$$\boldsymbol{\bar{r} = \cos t \cdot \bar{\imath} + 2\cos t \cdot \bar{\jmath}}$$

prin derivare obținem **viteza** $\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x} \cdot \bar{\imath} + \dot{y} \cdot \bar{\jmath}$ și mărimea $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

$\boldsymbol{\bar{v} = -\sin t \cdot \bar{\imath} - 2\sin t \cdot \bar{\jmath}}$ $\quad v = \sqrt{(-\sin t)^2 + (-2\sin t)^2} = \sqrt{5}\sin t$

derivând, încă o dată, obținem **accelerația** $\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{x} \cdot \bar{\imath} + \ddot{y} \cdot \bar{\jmath}$ și mărimea $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$

$\boldsymbol{\bar{a} = -\cos t \cdot \bar{\imath} - 2\cos t \cdot \bar{\jmath}}$ $\quad a = \sqrt{(-\cos t)^2 + (-2\cos t)^2} = \sqrt{5}\cos t$

Problema

- Se dă sistemul de bare articulate din figură. Cunoscându-se legea de mișcare (în funcție de timp t)

  $\boldsymbol{\theta = \omega \cdot t^i}$

  Să se determine **traiectoria**, **viteza** și **accelerația punctului M** aflat la mijlocul barei AB

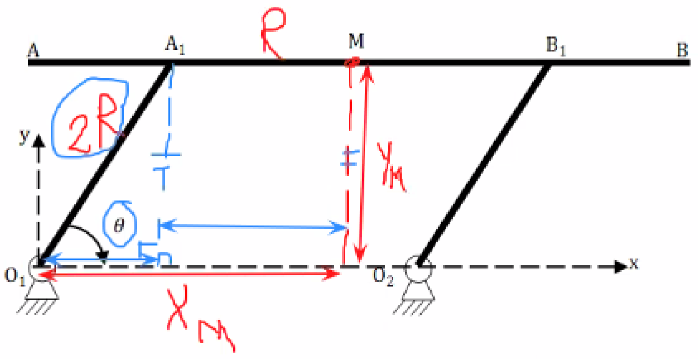
  $O_1A_1 = O_2B_1 = 2R$

  $\cancel{AA_1} = A_1M = MB_1 = B_1B_2 = R$

$$\frac{(x-R)^2}{(2R)^2} = \cos^2$$

$$\frac{y^2}{(2R)^2} = \sin^2$$

$$1$$



$$\begin{cases} x_M = 2R\cos\omega t^i + R \\ y_M = 2R\sin\omega t^i \end{cases}$$

$$(x_M - R)^2 + {y_M}^2 = (2R)^2$$

Traiectoria este un **cerc** cu centrul în (R,0) și de rază 2R

Viteza $\bar{v} = \dot{x}\cdot\bar{\imath} + \dot{y}\cdot\bar{\jmath}$

$$\begin{cases} \dot{x} = -2R\omega i t^{i-1}\sin\omega t^i \\ \dot{y} = 2R\omega i t^{i-1}\cos\omega t^i \end{cases}$$

Accelerația $\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{x}\cdot\bar{\imath} + \ddot{y}\cdot\bar{\jmath}$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2R\omega i(i-1)t^{i-2}\sin\omega t^i - 2R\left(\omega i t^{i-1}\right)^2\cos\omega t^i \\ \ddot{y} = 2R\omega i(i-1)t^{i-2}\cos\omega t^i - 2R\left(\omega i t^{i-1}\right)^2\sin\omega t^i \end{cases}$$

CINEMATICA SOLIDULUI

CHILIBARU-OPRIȚESCU CRISTINA

CINEMATICA solidului

- **Corpul rigid** este compus din particule elementare pentru care distanta dintre oricare două puncte ale sale nu se modifică în timp și în spațiu.

- **Mișcarea unui corp** fată de un sistem de referință este cunoscută , dacă se pot determina pentru fiecare punct din corp:

  - Legile de mișcare. Traiectoria

  - Viteza

  - Accelerația

LEGEA DE MIȘCAREA. TRAIECTORIA Distribuția de VITEZE și ACCELERAȚII

Mișcarea este cunoscută dacă se poate scrie în orice moment poziția dată de:

Vectorul de poziție

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_{10} + \bar{r}$$

Traiectoria – se determină prin eliminarea timpului din ecuațiile parametrice ale mișcării

Distribuția de viteză

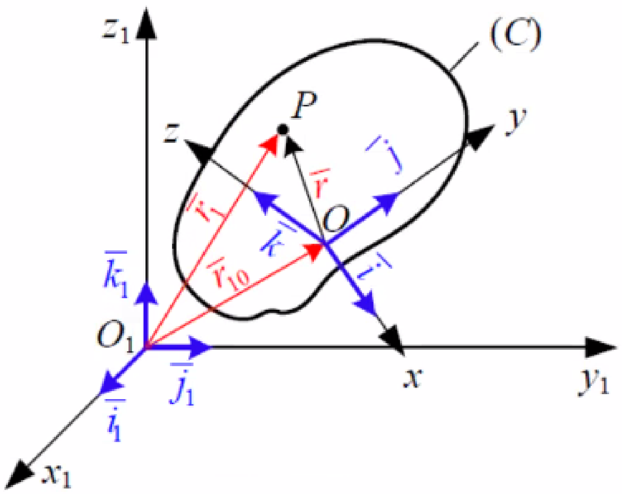
$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

Unde ω este viteza unghiulară de rotație

Distribuția de accelerații

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

Unde ε este accelerația unghiulară de rotație



$O_1x_1y_1z_1$ – sistem de axe fix
$Oxyz$ – sistem de axe mobil

Mişcări particulare

Mişcarea de translaţie

Un corp rigid are o mişcare de *translaţie*, dacă orice dreaptă din rigid, rămâne tot timpul mişcării paralelă cu ea însăşi.

Vectorul de poziţie

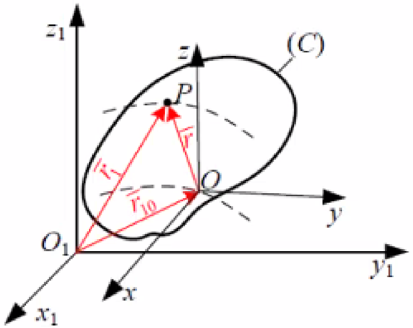
$$\bar{r}_{10} = \bar{r}_{10}(t)$$

Distribuţia de viteză

$$\bar{v} = \bar{v}_0$$

Distribuţia de acceleraţii

$$\bar{a} = \bar{a}_0$$



Mişcarea de rotaţie cu axă fixă

Un corp rigid are o mişcare de *rotaţie cu axă fixă*, dacă tot timpul mişcării, două puncte aparţinând corpului, rămân fixe faţă de un sistem de referinţă. Toate punctele situate pe dreapta care uneşte cele două puncte fixe, rămân de asemenea fixe. Această dreaptă se numeşte **axă de rotaţie**.

Vectorul de poziţie

$$\theta = \theta(t)$$

Distribuţia de viteză

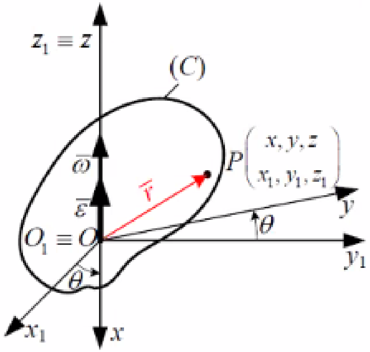
$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

Unde ω este viteza unghiulară de rotaţie

Distribuţia de acceleraţii

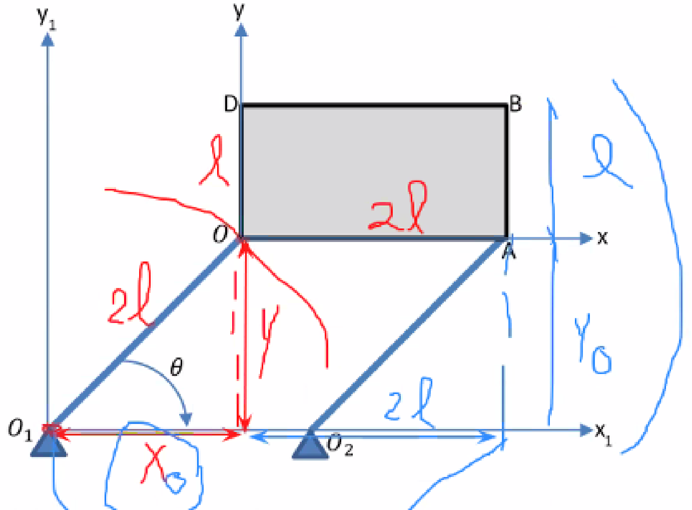
$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

Unde ε este acceleraţia unghiulară de rotaţie



Problema

- Placa dreptunghiulară OABD, cu **dimensiunile** $OA=BD=O_1O_2=2l$ și $AB=OD=l$, este articulată de două bare $OO_1 = AO_2 = 2l$. Știind că **mișcarea** este dată de $\boldsymbol{\theta = 2t^2 + 4}$, să se determine **viteza** și **accelerația** punctului B.



Solidul în mișcarea generală are:

- **Distribuția de viteză** $\overline{v} = \overline{v}_0 + \overline{\omega} \times \overline{r}$

  (ω – viteza unghiulară de rotație)

- **Distribuția de accelerații** $\overline{a} = \overline{a}_0 + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r})$

  (ε – accelerația unghiulară de rotație)

În mișcarea de translație $\overline{v} = \overline{v}_0$ și $\overline{a} = \overline{a}_0$

Se studiază mișcarea punctului O

$$\begin{cases} x_O = 2l\cos\theta \\ y_O = 2l\sin\theta \end{cases}$$

$$x_O^2 + y_O^2 = (2l)^2$$

Traiectoria este un cerc cu centrul în O_1 și de rază 2l

$$\begin{cases} x_O = 2l\cos(2t^2+4) \\ y_O = 2l\sin(2t^2+4) \end{cases}$$

Ca să se obțină **viteza** se derivează

$$\begin{cases} \dot{x}_O = -2l(4t)\sin(2t^2+4) = -8lt\sin(2t^2+4) \\ \dot{y}_O = 2l(4t)\cos(2t^2+4) = 8lt\cos(2t^2+4) \end{cases}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 8lt$$

Ca să se obțină **accelerația** se derivează

$$\begin{cases} \ddot{x}_O = -8l\sin(2t^2+4) - 32lt^2\cos(2t^2+4) \\ \ddot{y}_O = 8l\cos(2t^2+4) - 32lt^2\sin(2t^2+4) \end{cases}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(8l)^2 + (32lt^2)^2}$$

Să se demonstreze că se obține același lucru se scrie legea de mișcare a punctului B

$$\begin{cases} x_B = 2l\cos(2t^2+4) + 2l \\ y_B = 2l\sin(2t^2+4) + l \end{cases}$$

$$(x_B - 2l)^2 + (y_B - l)^2 = (2l)^2$$

Traiectoria este un cerc cu centrul în $(2l, l)$ și de rază 2l

Ca să se obțină **viteza** se derivează

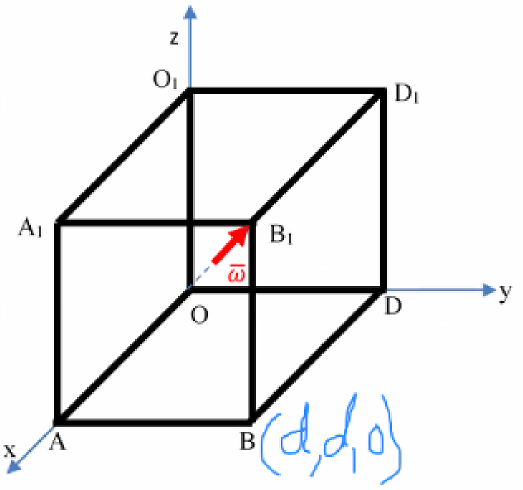
$$\begin{cases} \dot{x}_B = -8lt\sin(2t^2+4) \\ \dot{y}_B = 8lt\cos(2t^2+4) \end{cases}$$

Ca să se obțină **accelerația** se derivează

$$\begin{cases} \ddot{x}_B = -8l\sin(2t^2+4) - 32lt^2\cos(2t^2+4) \\ \ddot{y}_B = 8l\cos(2t^2+4) - 32lt^2\sin(2t^2+4) \end{cases}$$

Problema

- **Un cub** rigid cu muchia d **se rotește în jurul diagonalei OB_1** cu viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega = \varepsilon_O t}$ (ε_O este constantă). Să se calculeze **viteza** și **accelerația** vârfurilor B și O_1.



Solidul în mișcarea generală are:

- **Distribuția de viteză** $\boldsymbol{\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}}$

  (ω – viteza unghiulară de rotație)

- **Distribuția de accelerații** $\boldsymbol{\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})}$

  (ε – accelerația unghiulară de rotație)

Deoarece O se află pe axa de rotație

- $\bar{v}_0 = 0$ deci $\boxed{\boldsymbol{\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}}}$
- $\bar{a}_0 = 0$ și observându-se că $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$, atunci accelerația unui punct va fi $\boldsymbol{\bar{a}} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \boxed{\boldsymbol{\bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}}}$

Se scrie sub formă vectorială viteza unghiulară de rotație

$$\bar{\omega} = \omega \frac{\overline{OB_1}}{OB_1} = \omega \frac{\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BB_1}}{OB_1} = \omega \frac{d\bar{\imath} + d\bar{\jmath} + d\bar{k}}{d\sqrt{3}} = \frac{\varepsilon_O t}{\sqrt{3}}\bar{\imath} + \frac{\varepsilon_O t}{\sqrt{3}}\bar{\jmath} + \frac{\varepsilon_O t}{\sqrt{3}}\bar{k}$$

$$\bar{r}_B = d\bar{\imath} + d\bar{\jmath}$$

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{r}_B = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} & \frac{\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} & \frac{\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} \\ d & d & 0 \end{vmatrix} = -\frac{d\varepsilon_O t}{\sqrt{3}}\bar{\imath} + \frac{d\varepsilon_O t}{\sqrt{3}}\bar{\jmath}$$

$$\bar{r}_{O_1} = d\bar{k}$$

$$\bar{v}_{O_1} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{O_1} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} & \frac{\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} & \frac{\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \frac{d\varepsilon_O t}{\sqrt{3}}\bar{\imath} - \frac{d\varepsilon_O t}{\sqrt{3}}\bar{\jmath}$$

Se scrie sub formă vectorială accelerația unghiulară de rotație

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \frac{\varepsilon_O}{\sqrt{3}}\bar{\imath} + \frac{\varepsilon_O}{\sqrt{3}}\bar{\jmath} + \frac{\varepsilon_O}{\sqrt{3}}\bar{k}$$

$$\bar{a}_B = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_B + \bar{\omega} \times \bar{v}_B = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\varepsilon_O}{\sqrt{3}} & \frac{\varepsilon_O}{\sqrt{3}} & \frac{\varepsilon_O}{\sqrt{3}} \\ d & d & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} & \frac{\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} & \frac{\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} \\ -\frac{d\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} & \frac{d\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\frac{d\varepsilon_O}{\sqrt{3}} - \frac{d(\varepsilon_O t)^2}{3}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{d\varepsilon_O}{\sqrt{3}} - \frac{d(\varepsilon_O t)^2}{3}\right)\bar{\jmath} + \frac{2d(\varepsilon_O t)^2}{3}\bar{k}$$

$$\bar{a}_{O_1} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{O_1} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{O_1} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\varepsilon_O}{\sqrt{3}} & \frac{\varepsilon_O}{\sqrt{3}} & \frac{\varepsilon_O}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} & \frac{\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} & \frac{\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} \\ \frac{d\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} & -\frac{d\varepsilon_O t}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{d\varepsilon_O}{\sqrt{3}} + \frac{d(\varepsilon_O t)^2}{3}\right)\bar{\imath} + \left(-\frac{d\varepsilon_O}{\sqrt{3}} + \frac{d(\varepsilon_O t)^2}{3}\right)\bar{\jmath} - \frac{2d(\varepsilon_O t)^2}{3}\bar{k}$$