Centrul de greutate

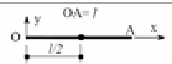
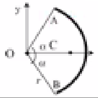
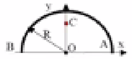
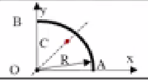
- **Centrul de greutate** este centrul sistemului de forțe paralele format din greutățile $\bar{G}_i$ ale punctelor din care se compune corpul.

Pentru determinarea coordonatelor centrului de greutate al corpurilor complexe se parcurg următoarele etape:

- *Pasul 1. Se împarte corpul complex în corpuri simple pentru care se pot determina centrele de greutate.*

Centrul de greutate

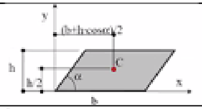
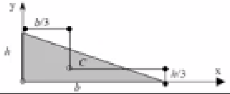
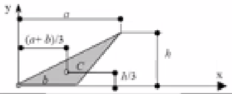
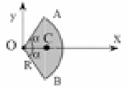
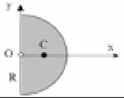
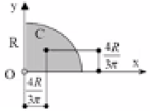
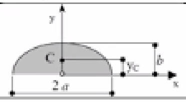
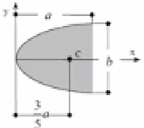
BARE

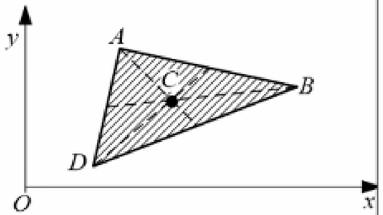
BARE având forma:	*dreaptă*		$OA = l$	$x_C = \frac{l}{2}$	$y_C = 0$
	arc circular		$AB = 2r\alpha$	$x_C = OC = r\frac{\sin \propto}{\propto}$	$y_C = 0$
	semicirculară		$AB = \pi R$	$x_C = 0$	$y_C = \frac{2R}{\pi}$
	sfert de cerc		$AB = \frac{\pi R}{2}$	$x_C = y_C = \frac{2R}{\pi}$	$x_C = y_C = \frac{2R}{\pi}$

Centrul de greutate

PLĂCI

Plăci având forma de:

paralelogram		$A = bh$	$x_c = \frac{b + h\cos\alpha}{2}$	$y_c = \frac{h}{2}$
triunghi dreptunghic		$A = \frac{bh}{2}$	$x_c = \frac{b}{3}$	$y_c = \frac{h}{3}$
triunghi oarecare		$A = \frac{bh}{2}$	$x_c = \frac{a+b}{3}$	$y_c = \frac{h}{3}$
sector circular		$A = \alpha R^2$	$x_c = OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha}$	$y_c = 0$
semicerc		$A = \frac{\pi R^2}{2}$	$x_c = OC = \frac{4R}{3\pi}$	$y_c = 0$
sfert de cerc		$A = \frac{\pi R^2}{4}$	$x_c = y_c = OC = \frac{4R}{3\pi}$	$x_c = y_c = OC = \frac{4R}{3\pi}$
semielipsă		$A = \frac{\pi ab}{4}$	$x_c = 0$	$y_c = \frac{4b}{3\pi}$
parabolă		$A = \frac{2ab}{3}$	$x_c = \frac{3a}{5}$	$y_c = 0$

Placă triunghiulară $A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ $D(x_D, y_D)$		$x_C = \frac{x_A + x_B + x_D}{3}$ $y_C = \frac{y_A + y_B + y_D}{3}$

Centrul de greutate

- *Pasul 2. Se alege un sistem de axe de coordonate în raport cu care se determină coordonatele centrelor de greutate ale corpurilor simple.*
- *Pasul 3. Se determină pozițiile centrelor de greutate pentru corpurile simple și se calculează elementele geometrice ale acestora (lungimi, arii, volume).*
- *Pasul 4. Se completează datele calculate la pasul 3 într-un tabel* de forma următoare:

Nr. crt.	G_i	x_i	y_i	z_i	$G_i \cdot x_i$	$G_i \cdot y_i$	$G_i \cdot z_i$
1							
2							
⋮							
n							
Σ	Σ	--	--	--	Σ	Σ	Σ

În funcție de caracteristicile corpului studiat, tabelul va fi adaptat astfel:

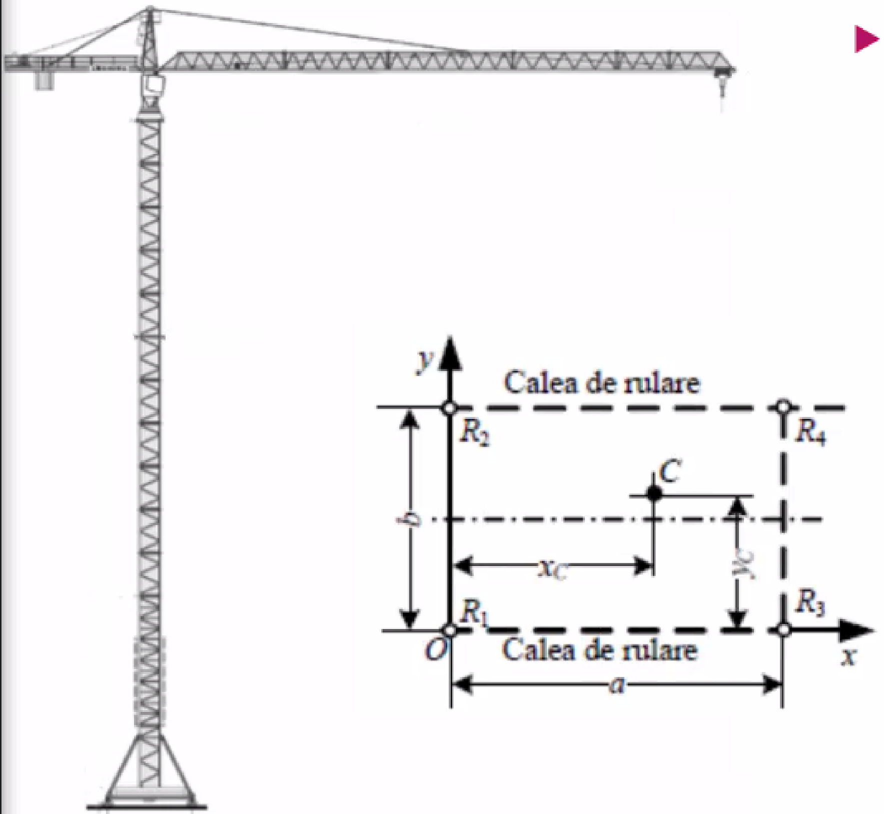
- În cazul corpurilor 2D vom lucra doar cu 2 coordonate (x,y),
- Convențional, se recomandă ca **în cazul corpurilor considerate a fi goluri,** ariile/volumele **să fie trecute cu semnul "-"**, astfel încât, la calculul sumei de arii/volume în acest mod se va obține exact suprafața/volumul util al corpului analizat.

Pasul 5. Se determină coordonatele centrului de greutate al corpului complex, aplicând formulele:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i} \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i} \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i}$$

unde, G_i reprezintă lungimea/aria/volumul, după caz, a corpului i.

Informativ



- În cadrul laboratorului de Mecanică, există **o macara Turn** care să nu se răstoarne trebuie ca suportul rezultantei
  - Greutății proprii,
  - Sarcinii
  - Contragreutății

  să intersecteze planul căii de rulare într-un punct interior dreptunghiului, având ca vârfuri punctele de contact ale roților cu calea de rulare.

Notând cu R_i forțele de apăsare, centrul C are coordonatele:

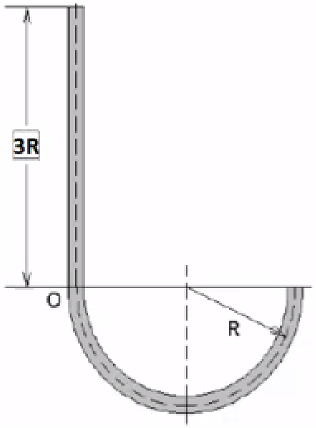
$$x_C = \frac{a(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}, \quad y_C = \frac{b(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

Pentru stabilitatea macaralei sunt necesare condițiile:

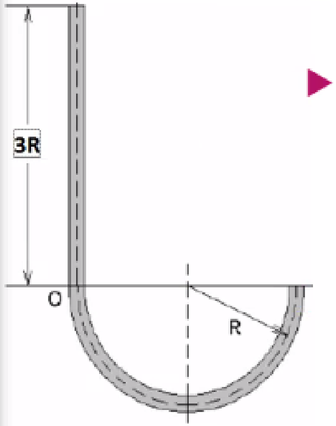
$$0 < x_C < a\ ;\ 0 < y_C < b \ \ (a = 50cm\ , b = 25cm\ )$$

Problema 1

- Să se determine coordonatele centrului de greutate a sistemului de bare din figura de mai jos cunoscând raza R.



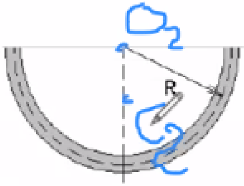
Pasul 1. Se împarte corpul complex în corpuri simple pentru care se pot determina centrele de greutate.



- Se observă că sistemul de bare poate fi împărțit în 2 corpuri: bara liniară verticală de lungime 3R și cea curbată sub formă de semicerc de rază R.

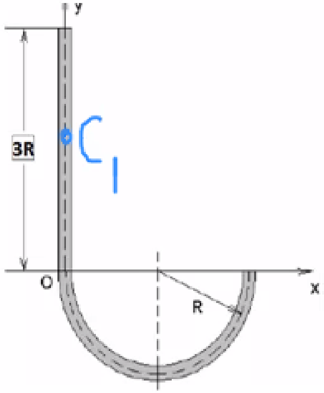
Corpul 1 – bara verticală

Corpul 2 – bara curbată

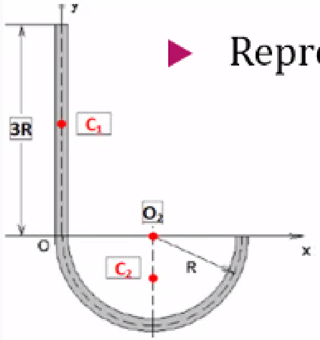


Pasul 2. Se alege un sistem de axe de coordonate în raport cu care se determină coordonatele centrelor de greutate ale corpurilor simple.

- Se va atașa sistemul de referință astfel:



Pasul 3. Se determină pozițiile centrelor de greutate pentru corpurile simple și se calculează elementele geometrice ale acestora (lungimi, arii, volume).



- Reprezentarea poziției centrelor de greutate pentru cele 2 corpuri este realizată în figura următoare:

Vom calcula coordonatele centrelor de greutate C_1 și C_2, astfel:

Bara 1 — Lungimea barei 1 este $l_1=3R$

$x_1=0$

$y_1 = \frac{\text{lungimea barei 1}}{2} = \frac{3R}{2}$

Bara 2 — Bara 2 fiind de forma unui semicerc de rază R, va avea lungimea egală cu lungimea semicercului de rază R, adică

$l_2 = \pi R.$

Deoarece la barele curbate nu putem calcula direct coordonatele centrului de greutate, conform teoriei vom calcula distanța de la centrul arcului de cerc la centrul de greutate al barei, adică lungimea segmentului O_2C_2, astfel:

$$O_2C_2 = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Se observă că măsura unghiului la centru este π rad și obținem unghiul α ca fiind $\alpha=\pi/2$ rad.

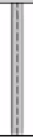
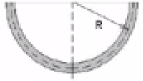
Se obține

$$O_2C_2 = R\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}$$

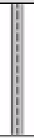
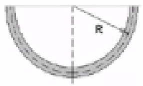
Plecând de la valoarea O_2C_2 calculată, vom obține coordonatele centrului de greutate C_2 în raport cu sistemul de referință ales, astfel:

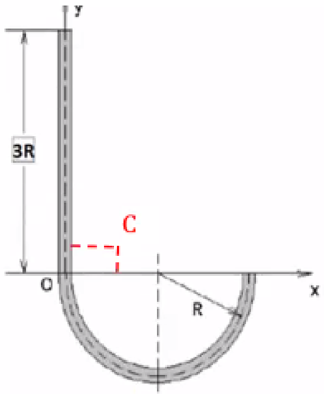
$$x_2 = R$$
$$y_2 = -\frac{2R}{\pi}$$

Pasul 4. Se completează datele calculate la pasul 3 în tabelul următor:

Nr. crt.		l_i	x_i	y_i	$l_i \cdot x_i$	$l_i \cdot y_i$
1.		$3R$	0	$\frac{3R}{2}$	0	$\frac{9R^2}{2}$
2.		πR	R	$-\frac{2R}{\pi}$	πR^2	$-2R^2$
		$\sum l_i$	--	--	$\sum l_i \cdot x_i$	$\sum l_i \cdot y_i$

Pasul 5. Se determină coordonatele centrului de greutate al corpului complex

Nr. crt.	l_i	x_i	y_i	$l_i \cdot x_i$	$l_i \cdot y_i$
1. 	$3R$	0	$\frac{3R}{2}$	0	$\frac{9R^2}{2}$
2. 	πR	R	$-\frac{2R}{\pi}$	πR^2	$-2R^2$
	$\sum l_i$	--	--	$\sum l_i \cdot x_i$	$\sum l_i \cdot y_i$



Vom calcula următoarele sume:

$$\sum l_i = 3R + \pi R$$

$$\sum l_i x_i = 0 + \pi R^2 = \pi R^2$$

$$\sum l_i y_i = \frac{9R^2}{2} - 2R^2 = \frac{5R^2}{2}$$

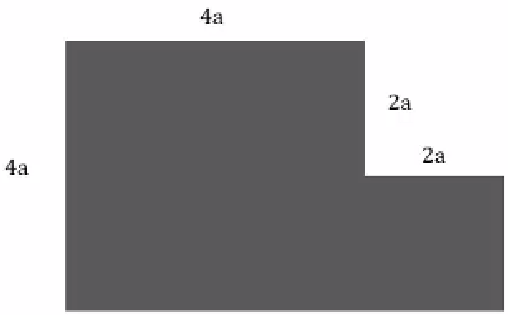
Coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_C = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i} = \frac{\pi R^2}{3R + \pi R} = \frac{\pi R}{3 + \pi} = 0.51R$$

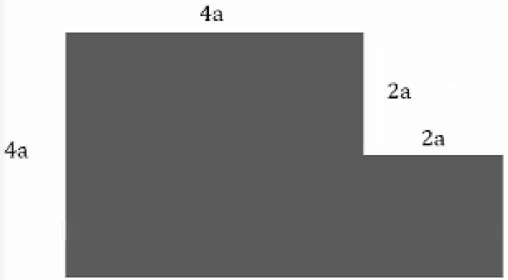
$$y_C = \frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i} = \frac{\frac{5R^2}{2}}{3R + \pi R} = \frac{5R}{6 + 2\pi} = 0.41R$$

Problema 2

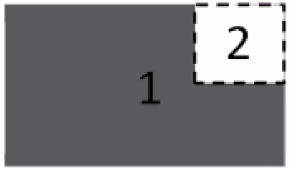
- Să se determine coordonatele centrului de greutate $C(x_C, y_C)$ a plăcii omogene din figura de mai jos, cunoscând dimensiunile laturilor.



Pasul 1. Se împarte corpul complex în corpuri simple pentru care se pot determina centrele de greutate.

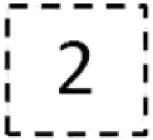


- Placa poate fi descompusă în următoarele corpuri simple:

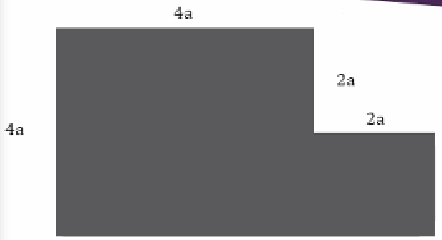


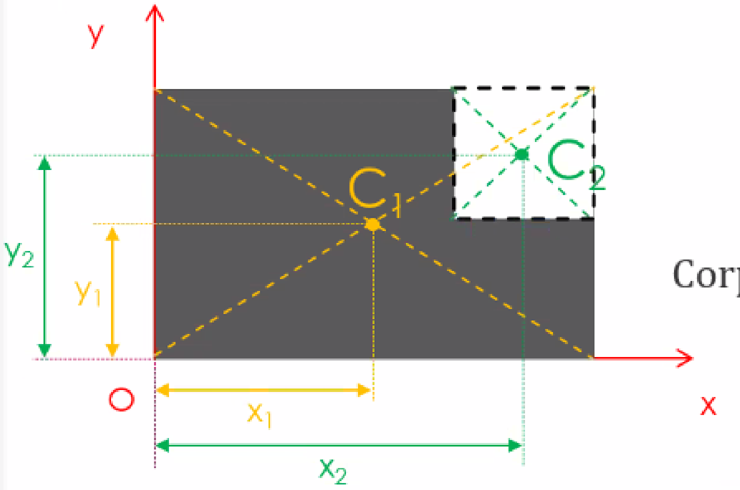
- Corpul 1 – o placă dreptunghiulară de lungime 6a și lățime 4a, considerată a fi plină, din care vom decupa corpul 2

- Corpul 2 – un pătrat de latură 2a, reprezentat în colțul din dreapta sus, care va fi decupat din corpul 1



Pasul 2. Se alege un sistem de axe de coordonate în raport cu care se determină coordonatele centrelor de greutate ale corpurilor simple.





- **Pasul 3.** Se determină poziţiile centrelor de greutate pentru corpurile simple

Corpul 1

$$A_1 = L \cdot l = 6a \cdot 4a = 24a^2$$

$$x_1 = \frac{L}{2} = \frac{6a}{2} = 3a$$

$$y_1 = \frac{l}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$$

Corpul 2

$$A_2 = l^2 = (2a)^2 = 4a^2$$

$$x_2 = 6a - \frac{2a}{2} = 6a - a = 5a$$

$$y_2 = 4a - \frac{2a}{2} = 4a - a = 3a$$

Pasul 4. Se completează datele calculate la pasul 3 în tabelul următor:

Nr. crt.		A_i	x_i	y_i	$A_i \cdot x_i$	$A_i \cdot y_i$
1.		$24a^2$	$3a$	$2a$	$72a^3$	$48a^3$
2.		$-4a^2$	$5a$	$3a$	$-20a^3$	$-12a^3$
		$\sum A_i$	--	--	$\sum A_i \cdot x_i$	$\sum A_i \cdot y_i$

Pasul 5. Se determină coordonatele centrului de greutate al corpului complex

Nr. crt.		A_i	x_i	y_i	$A_i \cdot x_i$	$A_i \cdot y_i$
1.		$24a^2$	$3a$	$2a$	$72a^3$	$48a^3$
2.		$-4a^2$	$5a$	$3a$	$-20a^3$	$-12a^3$
		$\sum A_i$	--	--	$\sum A_i \cdot x_i$	$\sum A_i \cdot y_i$

Vom calcula următoarele sume:

$$\sum A_i = 24a^2 - 4a^2 = 20a^2$$

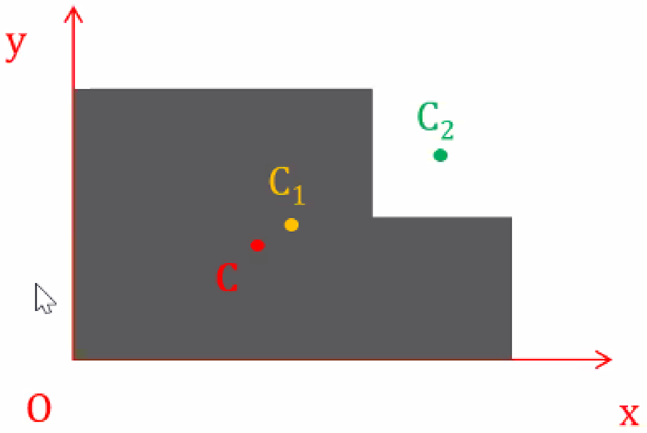
$$\sum A_i x_i = 72a^3 - 20a^3 = 52a^3$$

$$\sum A_i y_i = 48a^3 - 12a^3 = 36a^3$$

Coordonatele centrului de greutate sunt:

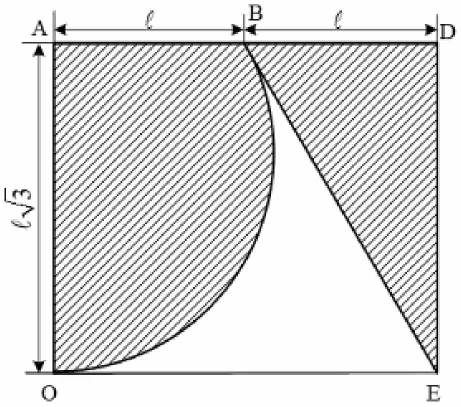
$$x_C = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{52a^3}{20a^2} = \mathbf{2.6a}$$

$$y_C = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{36a^3}{20a^2} = \mathbf{1.8a}$$

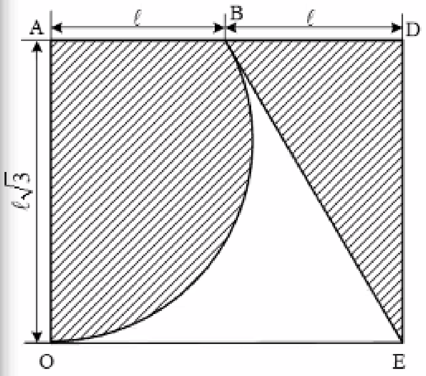


Problema 3

- Să se determine coordonatele centrului de greutate $C(x_C, y_C)$ a plăcii omogene din figura de mai jos cunoscând dimensiunile laturilor și știind că **arcul de cerc este tangent la latura OE**

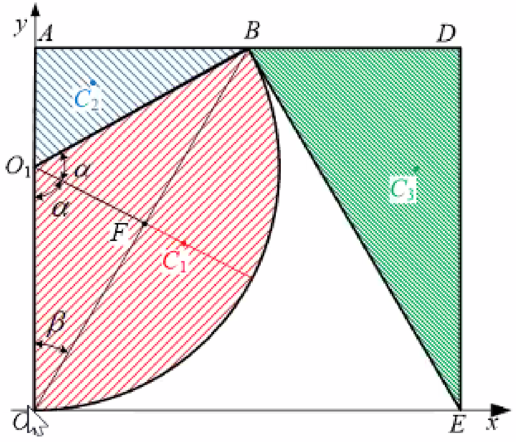


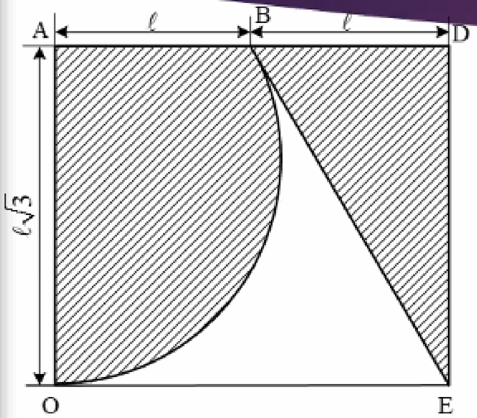
Pasul 1. Se împarte corpul complex în corpuri simple pentru care se pot determina centrele de greutate.

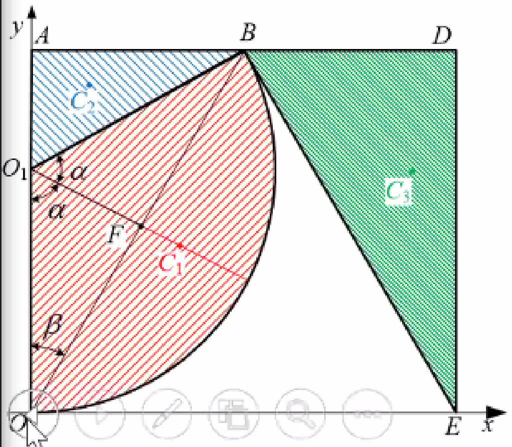


- Placa poate fi descompusă în 3 părți simple, la care centrele de greutate se pot determina: sectorul de cerc 1, triunghiul 2, triunghiul 3.

Pasul 2. Se alege un sistem de axe de coordonate în raport cu care se determină coordonatele centrelor de greutate ale corpurilor simple.







- Pentru sectorul de cerc trebuie să se determine centrul cercului din care face parte, raza şi unghiul la centru 2α. Centrul cercului se găseşte **la intersecția axei Oy** cu **mediatoarea coardei OB**.

Se trasează dreapta OB, obținându-se triunghiul dreptunghic OAB în care:

$$OB^2 = \left(l\sqrt{3}\right)^2 + l^2$$

$$\Rightarrow OB = 2l$$

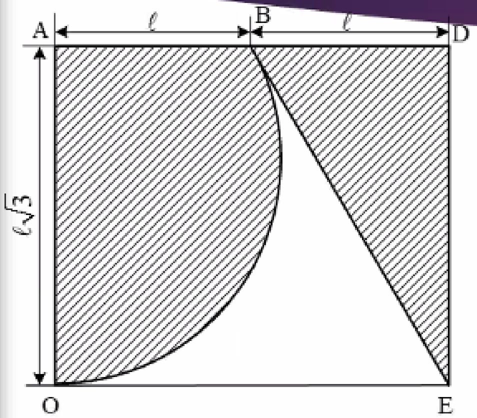
Punctul F se află pe mediatoarea coardei deci este la mijlocul lui OB

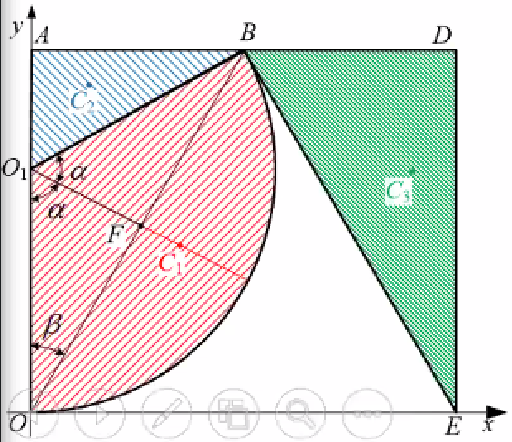
$$OF = \frac{OB}{2} = l$$

Se determină unghiul format de OB cu axa Y

$$tg\beta = \frac{AB}{OA} = \frac{l}{l\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$$





În triunghiul dreptunghic OO_1F se determină

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Deci $\widehat{OO_1B} = 2\alpha = \frac{2\pi}{3}$

$$\boldsymbol{OO_1} = \boldsymbol{O_1B} = \frac{OF}{\cos\beta} = \frac{l}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boldsymbol{\frac{2l\sqrt{3}}{3}} = \boldsymbol{R}$$

Se observă că $OB = \boldsymbol{BE} = OE = \boldsymbol{2l}$ deci triunghiul OBE este triunghi echilateral $\Rightarrow \widehat{OBE} = \frac{\pi}{3}$

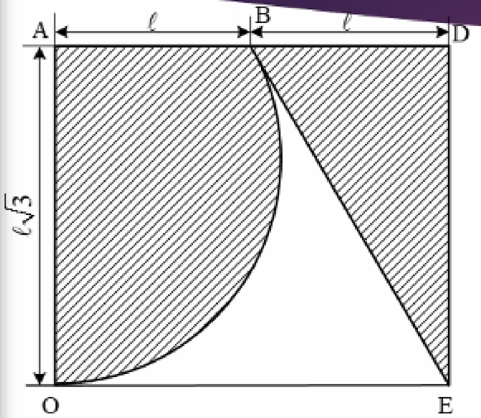
Cum $\widehat{OO_1B} = \widehat{O_1OB} = \frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow \widehat{O_1BE} = \frac{\pi}{2}$ deci BE este tangentă în B la O_1B

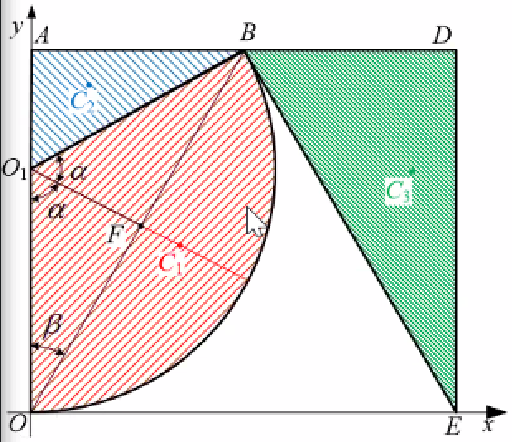
Se calculează

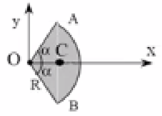
$$\boldsymbol{O_1C_1} = \frac{2}{3}R\frac{sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3}\frac{2l\sqrt{3}}{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{2l}{\pi}$$

$$\boldsymbol{O_1A} = OA - OO_1 = l\sqrt{3} - \frac{2l\sqrt{3}}{3} = \boldsymbol{\frac{l\sqrt{3}}{3}}$$

Pasul 3. Se determină pozițiile centrelor de greutate pentru corpurile simple





sector circular		$A = \alpha R^2$ $\quad x_c = OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin \propto}{\propto}$	$y_c = 0$

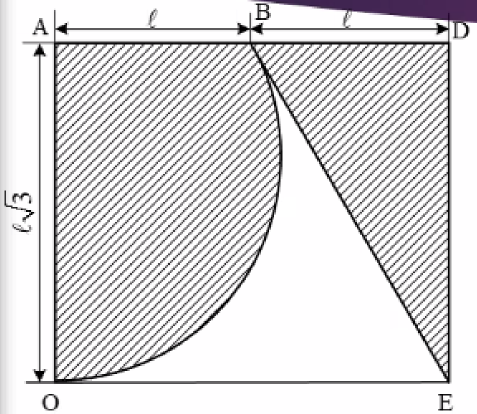
Corpul 1

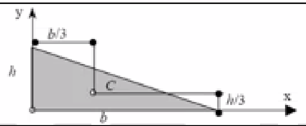
$$A_1 = \frac{\pi}{3} R^2 = \frac{\pi}{3} \left(\frac{2l\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{4\pi l^2}{9}$$

$$x_1 = O_1 C_1 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{2l}{\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{\pi}$$

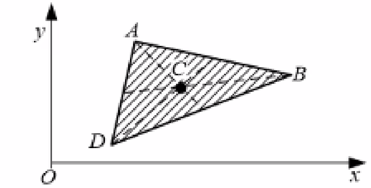
$$y_1 = R - O_1 C_1 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{2l\sqrt{3}}{3} - \frac{2l}{\pi} \frac{1}{2} = l \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{\pi} \right)$$

Pasul 3. Se determină pozițiile centrelor de greutate pentru corpurile simple



triunghi dreptunghic		$A = \frac{bh}{2}$	$x_C = \frac{b}{3}$	$y_C = \frac{h}{3}$

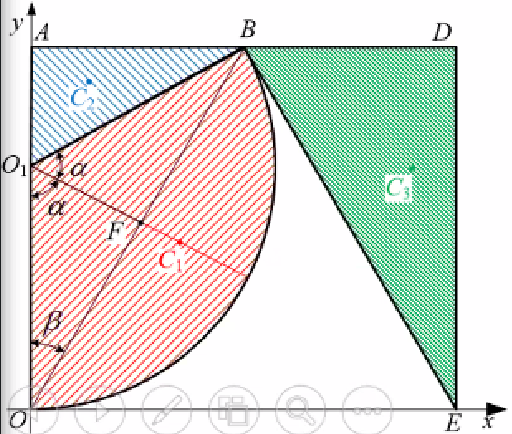
Corpul 2

Placă triunghiulară $A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ $D(x_D, y_D)$		$x_C = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ $y_C = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

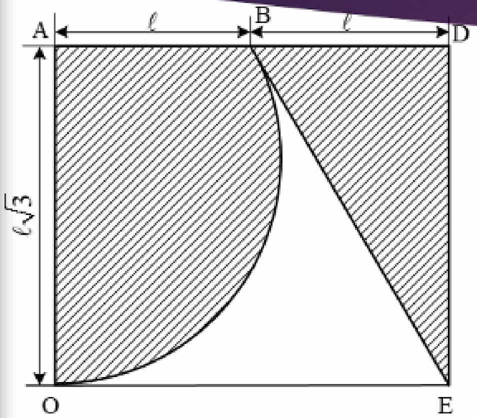
$$A_2 = \frac{1}{2}\frac{l\sqrt{3}}{3}l = \frac{l^2\sqrt{3}}{6}$$

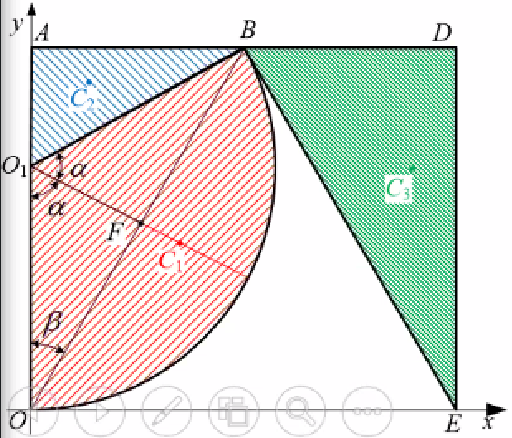
$$x_2 = \frac{l}{3}$$

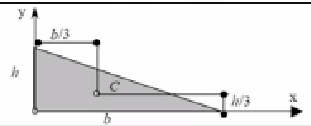
$$y_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2l\sqrt{3}}{3} + l\sqrt{3} + l\sqrt{3}\right) = \frac{8l\sqrt{3}}{9}$$



Pasul 3. Se determină pozițiile centrelor de greutate pentru corpurile simple





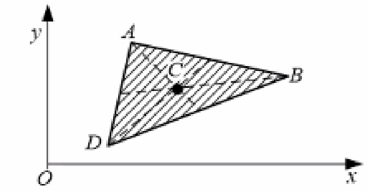
triunghi dreptunghic		$A = \frac{bh}{2}$	$x_C = \frac{b}{3}$	$y_C = \frac{h}{3}$

Corpul 3

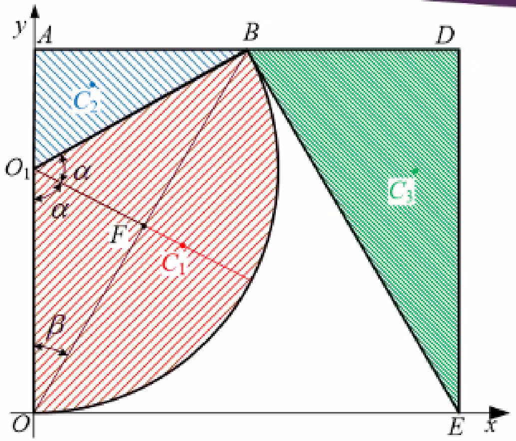
$$A_3 = \frac{1}{2} l\sqrt{3} l = \frac{l^2\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(l + 2l + 2l) = \frac{5l}{3}$$

$$y_3 = \frac{1}{3}\left(0 + l\sqrt{3} + l\sqrt{3}\right) = \frac{2l\sqrt{3}}{3}$$

Placă triunghiulară $A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ $D(x_D, y_D)$		$x_C = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ $y_C = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Pasul 4. Se completează datele calculate la pasul 3 în tabelul următor:



Nr. corp	A_i	x_i	y_i	$A_i \cdot x_i$	$A_i \cdot y_i$
1.	$\frac{4\pi l^2}{9}$	$\frac{l\sqrt{3}}{\pi}$	$l\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{\pi}\right)$	$\frac{4\sqrt{3}l^3}{9}$	$l^3\left(\frac{8\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{4}{9}\right)$
2.	$\frac{l^2\sqrt{3}}{6}$	$\frac{l}{3}$	$\frac{8l\sqrt{3}}{9}$	$\frac{l^3\sqrt{3}}{18}$	$\frac{4l^3}{9}$
3.	$\frac{l^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5l}{3}$	$\frac{2l\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5l^3\sqrt{3}}{6}$	l^3
Σ	$l^2\frac{6\sqrt{3}+4\pi}{9}$	---	---	$\frac{4l^3\sqrt{3}}{3}$	$l^3\left(1 + \frac{8\pi\sqrt{3}}{27}\right)$

Pasul 5. Se determină coordonatele centrului de greutate al corpului complex

$$x_C = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{\frac{4l^3\sqrt{3}}{3}}{l^2\frac{6\sqrt{3}+4\pi}{9}} = \frac{12\sqrt{3}}{6\sqrt{3}+4\pi} l = 0.9l$$

$$y_C = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{l^3\left(1+\frac{8\pi\sqrt{3}}{27}\right)}{l^2\frac{6\sqrt{3}+4\pi}{9}} = \frac{27+8\pi\sqrt{3}}{3(6\sqrt{3}+4\pi)} l = 1.02l$$