Echilibrul sistemelor de corpuri

- Noțiuni teoretice -

CHILIBARU-OPRIȚESCU CRISTINA

Recording

ECHILIBRUL CORPULUI RIGID

- Un corp rigid este în **echilibru** dacă sistemul de forțe (forțe date și de legătură) care acționează asupra sa este în echilibru, adică elementele torsorului de reducere în raport cu un punct oarecare O (orice punct) sunt nule

$$\vec{R} = 0$$

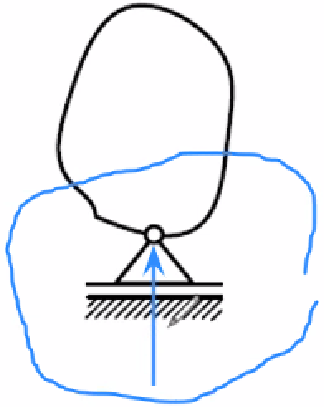
$$\vec{M}_O = 0$$

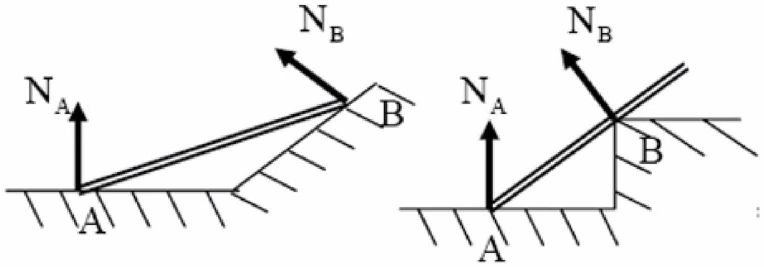
- Ecuațiile de echilibru sunt:

$$\begin{cases} \sum \bar{F}_d + \sum \bar{F}_l = 0 \\ \sum \bar{M}_d + \sum \bar{M}_l = 0 \end{cases}$$

TIPURI DE LEGĂTURI

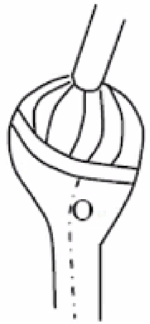
- **Rezemarea**
- introduce o legătură (reacțiune)

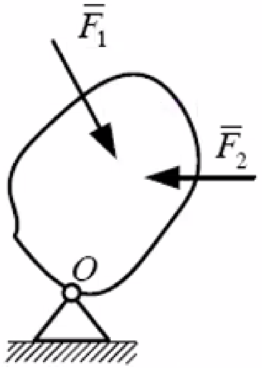


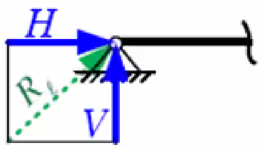


TIPURI DE LEGĂTURI

- **Articulaţia (reazemul fix)**
- introduce două legături (reacţiuni)

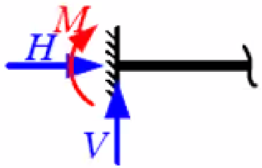


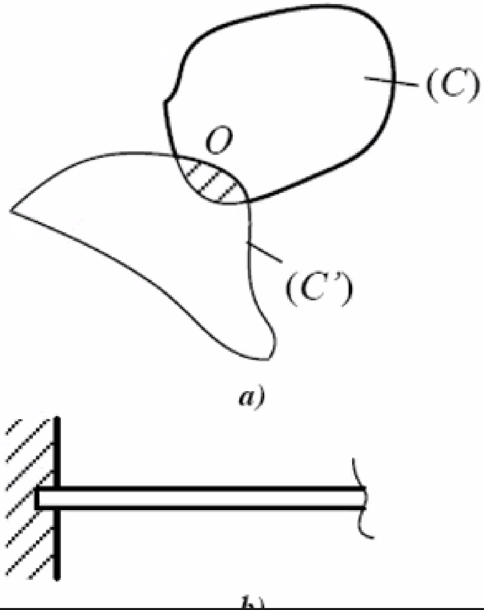




TIPURI DE LEGĂTURI

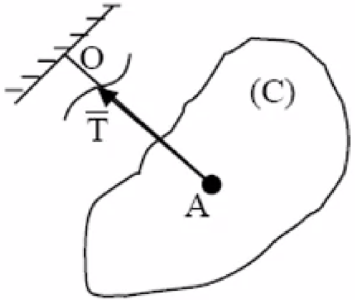
- **Încastrarea**
- introduce 3 legături: 2 reacțiuni și un moment de încastrare



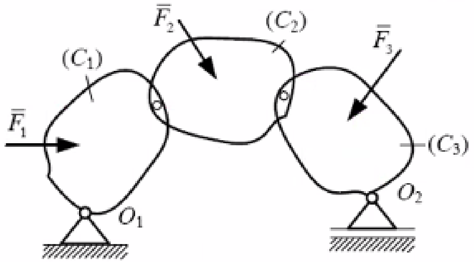


TIPURI DE LEGĂTURI

- **Legătura prin fir**
- Introduce o legătură (reacțiune): tensiune în fir



ECHILIBRUL SISTEMELOR DE CORPURI

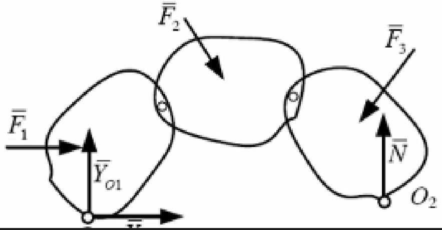


- Dacă sistemul de solide rigide este **în echilibru**, rezultă că fiecare rigid solid trebuie să fie în echilibru.

Pentru rezolvarea problemei de echilibru se utilizează **metodele:**

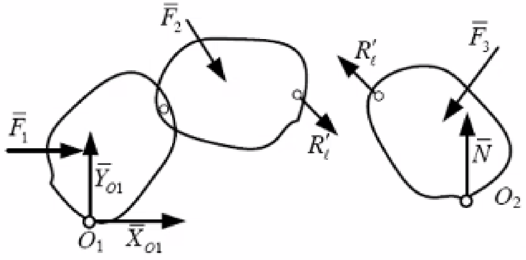
Metoda solidificării sistemului.

Se consideră sistemul de corpuri ca un singur corp solidificat, asupra căruia acționează sistemul de forțe exterioare date. Se aplică axioma legăturilor pentru sistemul de corpuri solidificat pentru care se scriu ecuațiile de echilibru



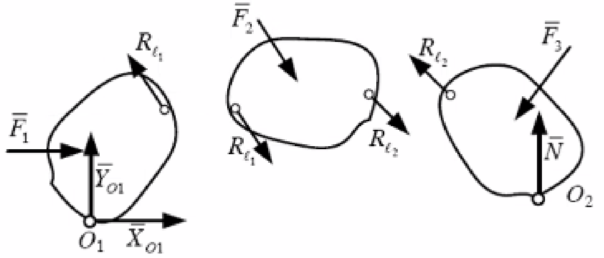
Metoda izolării parțiale.

Se separă părți din sistem pentru care se aplică axioma legăturilor. Ecuațiile de echilibru se scriu pentru fiecare parte a sistemului.

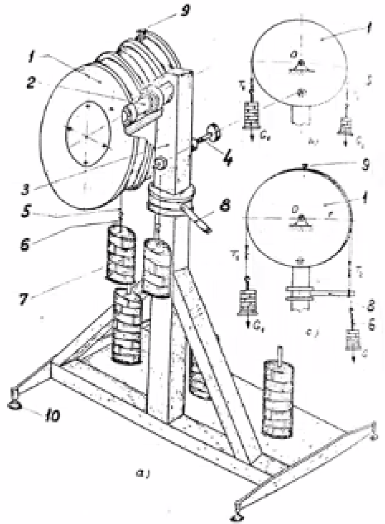


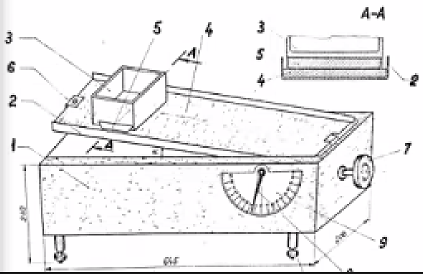
Metoda separării corpurilor.

Se separă fiecare corp al sistemului pentru care se scriu ecuațiile de echilibru. La separarea corpurilor trebuie să se țină seama că forțele de legătură interioare sistemului trebuie să fie egale și de sens contrar.



Informativ – Frecarea

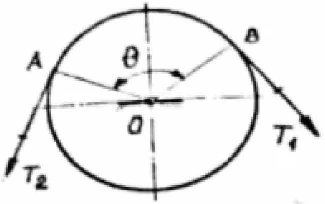




În cadrul laboratorului de Mecanică, există **un dispozitiv** pentru:

1. **studiul experimental al frecării firelor**. Se poate determina coeficientul de frecare de aderență dintre fir și discul pe care se înfășoară

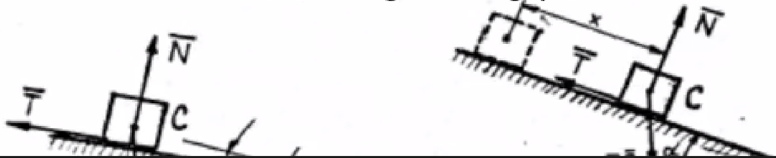
$$\mu_0 = \frac{1}{\theta} \ln \frac{T_1}{T_2}$$



2. **determinarea experimentală a coeficienților de frecare** de aderență și de alunecare dintre corpuri. Există 2 situații:

a)Corpul rămâne în repaus $\alpha \leq \varphi_0$ și la echilibru coeficient de frecare de aderență este

$$\mu_0 = tg\alpha = tg\varphi_0$$



b)Corpul alunecă pe plan $\alpha > \varphi_0$ și se obține coeficient de frecare de alunecare

$$\mu = tg\alpha - \frac{2\ell}{g t_1^2 \cos\alpha}$$

t_1 timpul în care corpul parcurge distanța planului ℓ

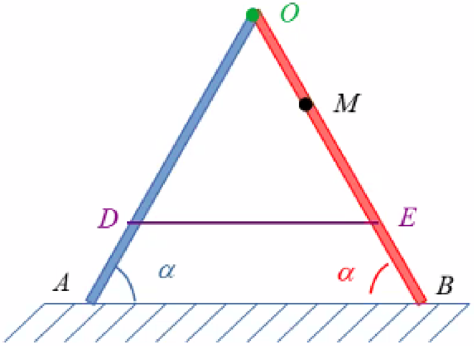
Echilibrul sistemelor de corpuri

- probleme-

CHILIBARU-OPRIȚESCU CRISTINA

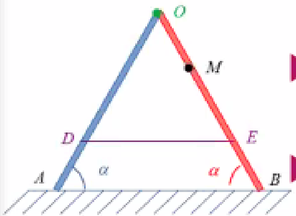
Problema 1

- Se consideră o scară formată din două bare OA și OB articulate în O și rezemate pe pământ în punctele A și B. Barele sunt de lungime $OA = OB = 2a$, de greutatea G. În punctul M se află un om de greutate P. Această scară este susținută printr-un fir DE care se află la distanța $AD = BE = h$ față de pământ. Știind că distanța $OM = d$ să se determine reacțiunile din reazemele A și B, efortul în firul DE precum și recțiunea din articulația O.

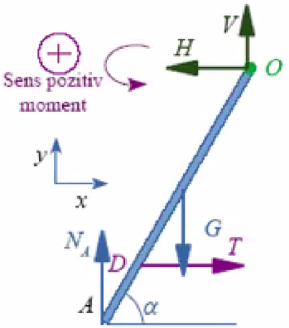


Recording

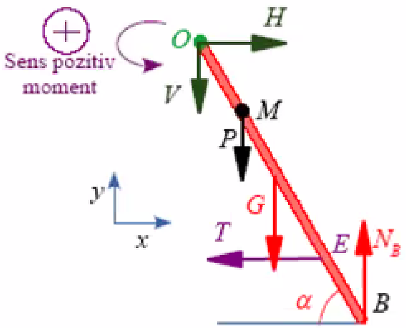
Separarea corpurilor



- Deoarece se dorește să se determine toate reacțiunile, inlcusiv cele din legăturile interioare (articulația A și firul DE) se va utiliza **metoda izolării**:
- Se separă fiecare corp în parte (bară) și se introduc forțele date (greutățile G și P) și forțele de legătură:

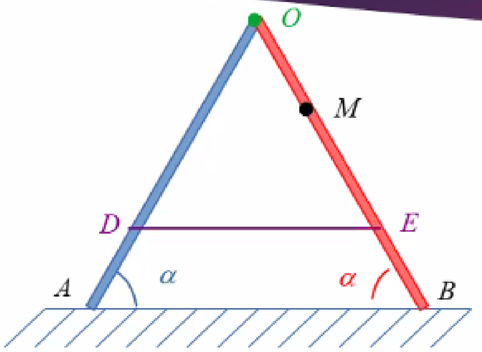


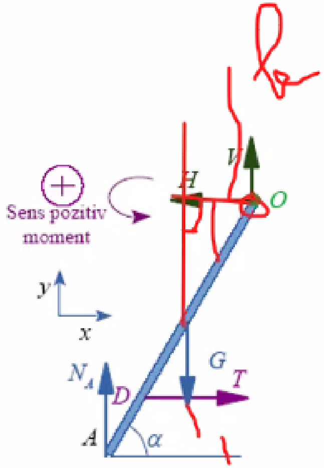
- **reazemele** introduc normalele N_A respectiv N_B;
- **articulația *O*** introduce asupra unei bare o reacțiune a cărei direcție și sens nu se cunoaște, dar care se poate considera ca fiind descompusă după două direcții: verticală V și orizontală H. Deoarece barele sunt articulate în punctul O reacțiunea din bara OA este egală și de sens contrar cu cea din bara OB;
- **firul** introduce un efort în fir care are direcția firului, sensul fiind dinspre corpul care se izoleaza spre locul în care se secționează firul.



Recording

Bara 1-reprezentarea forțelor date și de legătură; ecuațiile de echilibru





- $\sum X = 0$

  $T - H = 0$ (1)

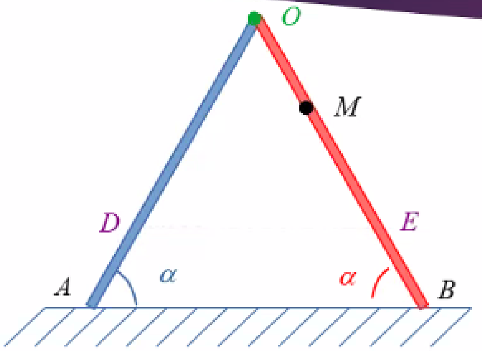
- $\sum Y = 0$

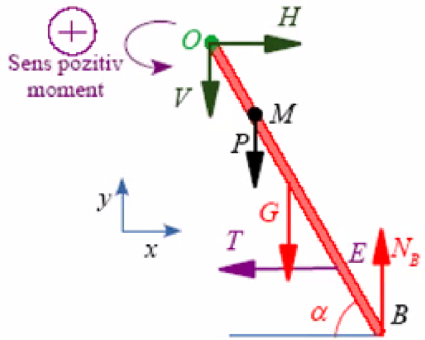
  $N_A - G + V = 0$ (2)

- $\sum M_O = 0$

  $-N_A \cdot 2a \cdot cos\alpha + T \cdot (2a - h) \cdot sin\alpha + G \cdot a \cdot cos\alpha = 0$ (3)

Bara 2-reprezentarea forțelor date și de legătură; ecuațiile de echilibru





- $\sum X = 0$

$$-T + H = 0 \tag{4}$$

- $\sum Y = 0$

$$N_B - G - P - V = 0 \tag{5}$$

- $\sum M_O = 0$

$$N_B \cdot 2a \cdot cos\alpha - T \cdot (2a - h) \cdot sin\alpha - G \cdot a \cdot cos\alpha - P \cdot d \cdot cos\alpha = 0 \tag{6}$$

$$T - H = 0 \qquad (1)$$

$$N_A - G + V = 0 \qquad (2)$$

$$-N_A \cdot 2a \cdot cos\alpha + T \cdot (2a - h) \cdot sin\alpha + G \cdot a \cdot cos\alpha = 0 \qquad (3)$$

$$T - H = 0 \qquad (4)$$

$$N_B - G - P - V = 0 \qquad (5)$$

$$N_B \cdot 2a \cdot cos\alpha - T \cdot (2a - h) \cdot sin\alpha - G \cdot a \cdot cos\alpha - P \cdot d \cdot cos\alpha = 0 \qquad (6)$$

Din ecuația (6) rezultă:

$$N_B = \frac{T \cdot (2a - h) \cdot sin\alpha + G \cdot a \cdot cos\alpha + P \cdot d \cdot cos\alpha}{2a \cdot cos\alpha} = \frac{T \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha + \frac{G}{2} + \frac{P \cdot d}{2a} \qquad (7)$$

Se înlocuiește în ecuația (5)și rezultă:

$$V = N_B - G - P = \frac{T \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha + \frac{G}{2} + \frac{P \cdot d}{2a} - G - P = \frac{T \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha - \frac{G}{2} + \frac{P \cdot d}{2a} - P \qquad (8)$$

Se înlocuiește în ecuația (2) și rezultă:

$$N_A = G - V = G - \frac{T \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha + \frac{G}{2} - \frac{P \cdot d}{2a} + P = 3\frac{G}{2} - \frac{T \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha + P \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right) \qquad (9)$$

Tensiunea din fir

$$T - H = 0 \quad (1)$$

$$N_A - G + V = 0 \quad (2)$$

$$-N_A \cdot 2a \cdot cos\alpha + T \cdot (2a - h) \cdot sin\alpha + G \cdot a \cdot cos\alpha = 0 \quad (3)$$

$$T - H = 0 \quad (4)$$

$$N_B - G - P - V = 0 \quad (5)$$

$$N_B \cdot 2a \cdot cos\alpha - T \cdot (2a - h) \cdot sin\alpha - G \cdot a \cdot cos\alpha - P \cdot d \cdot cos\alpha = 0 \quad (6)$$

$$N_A = 3\frac{G}{2} - \frac{T \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha + P \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right) \quad (9)$$

Din ecuația (3) se poate scrie:

$$N_A = \frac{T \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha + \frac{G}{2} \quad (10)$$

Fiind aceași reacțiune se poate scrie (9)=(10):

$$3\frac{G}{2} - \frac{T \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha + P \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right) = \frac{T \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha + \frac{G}{2}$$

$$G + P \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right) = \frac{2 \cdot T \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha$$

de unde rezultă **efortul în fir**:

$$\boldsymbol{T = \frac{G + P \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right)}{(2a - h) \cdot tg\alpha} \cdot a}$$

Recording

Reacțiunea din reazemul A

Cunoscându-se efortul din fir

$$T = \frac{G + P \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right)}{(2a - h) \cdot tg\alpha} \cdot a$$

se determină din ecuația (10)

$$N_A = \frac{T \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha + \frac{G}{2}$$

recțiunea din reazemul *A*:

$$N_A = \frac{\frac{G + P \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right)}{(2a - h) \cdot tg\alpha} \cdot a \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha + \frac{G}{2} = \frac{G}{2} + \frac{P}{2} \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right) + \frac{G}{2}$$

$$\mathbf{N_A = G + \frac{P}{2} \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right)}$$

Reacțiunea din reazemul B

Cunoscându-se efortul din fir

$$T = \frac{G + P \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right)}{(2a - h) \cdot tg\alpha} \cdot a$$

se determină din ecuația (7)

$$N_B = \frac{T \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha + \frac{G}{2} + \frac{P \cdot d}{2a}$$

recțiunea din reazemul *B*:

$$N_B = \frac{\frac{G + P \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right)}{(2a - h) \cdot tg\alpha} \cdot a \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha + \frac{G}{2} + \frac{P \cdot d}{2a} \cdot tg\alpha = \frac{G}{2} + \frac{P}{2} \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right) + \frac{G}{2} + \frac{P \cdot d}{2a} = G + \frac{P}{2} + \frac{P \cdot d}{4a}$$

$$\boldsymbol{N_B = G + \frac{P}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{2a}\right)}$$

Componenta verticală a reacțiunii din articulația O

Cunoscându-se efortul din fir

$$T = \frac{G + P \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right)}{(2a - h) \cdot tg\alpha} \cdot a$$

din ecuația (8)

$$V = \frac{T \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha - \frac{G}{2} + \frac{P \cdot d}{2a} - P$$

rezultă:

$$V = \frac{\frac{G + P \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right)}{(2a - h) \cdot tg\alpha} \cdot a \cdot (2a - h)}{2a} \cdot tg\alpha - \frac{G}{2} + \frac{P \cdot d}{2a} - P = \frac{G + P \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right)}{2} - \frac{G}{2} + \frac{P \cdot d}{2a} - P = -\frac{P}{2} + \frac{P \cdot d}{4a}$$

$$\boldsymbol{V = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{d}{2a} - 1\right)}$$

Componenta orizontală a reacțiunii din articulația O

Cunoscându-se efortul din fir

$$T = \frac{G + P \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right)}{(2a - h) \cdot tg\alpha} \cdot a$$

din ecuația (1) care este identică cu (4)

$$T - H = 0$$

rezultă:

$H = T$

$$\mathbf{H = \frac{G + P \cdot \left(1 - \frac{d}{2a}\right)}{(2a - h) \cdot tg\alpha} \cdot a}$$

Problema 2

Grinda orizontală omogenă din figură, de greutate G este supusă la legătură prin fir și se sprijină în punctul B pe un plan înclinat.

Să se calculeze:

a) valoarea unghiului pentru care grinda se află în echilibru în poziția dată, frecarea cu planul înclinat fiind neglijabilă;

b) efortul din fir în acest caz.

Se dau

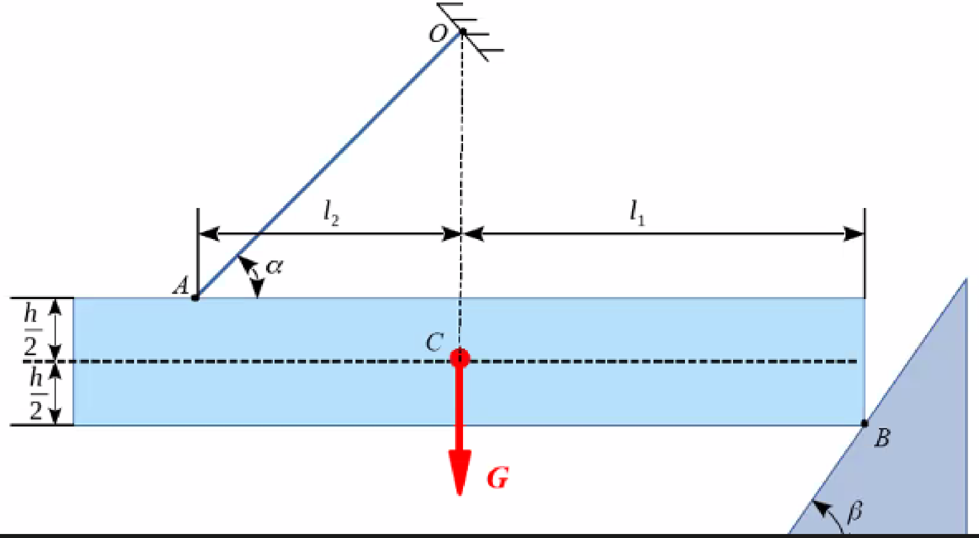
$G = 1200N$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$

$l_2 = 0{,}8m$

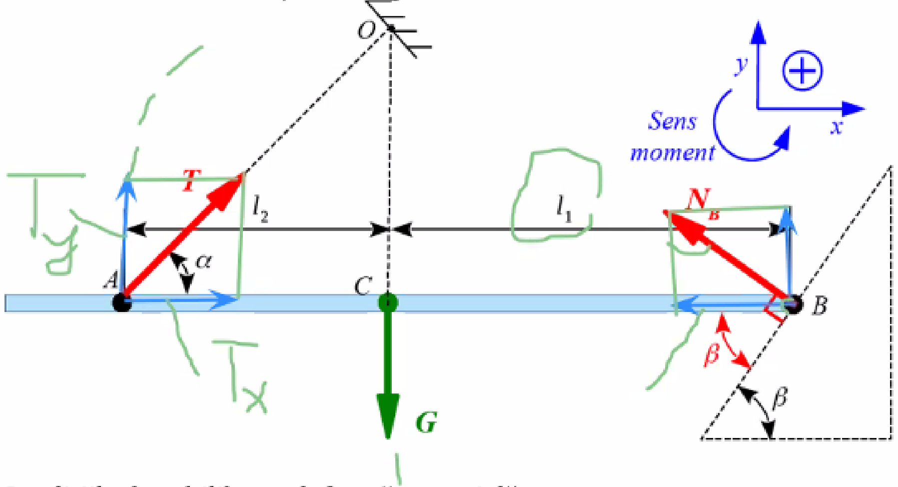
$l_1 = 1m$

$h = 0{,}2m$



CAZ 1 Pentru început se consideră cazul în care grinda este o bară de secțiune neglijabilă, precum în figură.

Se aplică axioma legăturilor: se îndepărtează legăturile și în locul acestora se introduc forțele de legătură



Se proiectează pe sistemul de axe ales:

$$\sum X = 0$$

$$T \cdot cos\alpha - N_B \cdot sin\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0$$

$$T \cdot sin\alpha - G + N_B \cdot cos\beta = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-(l_1 + l_2) \cdot T \cdot sin\alpha + l_1 \cdot G = 0 \qquad (3)$$

- Condițiile de echilibru sub formă vectorială sunt:

$$\begin{cases} \sum \bar{F_d} + \sum \bar{F_l} = 0 \\ \sum \bar{M_d} + \sum \bar{M_l} = 0 \end{cases}$$

Unde Forța dată este G, iar forțele de legătură sunt T, și N_B

Din ecuația (3)

$$-(l_1 + l_2) \cdot T \cdot sin\alpha + l_1 \cdot G = 0$$

se poate determina **efortul din fir**:

$$\boldsymbol{T = \frac{l_1}{(l_1 + l_2) \cdot sin\alpha} \cdot G}$$

Se înlocuiește efortul din fir în ecuația (1)

$$T \cdot cos\alpha - N_B \cdot sin\beta = 0$$

și se determină reacțiunea normală:

$$N_B = T \cdot \frac{cos\alpha}{sin\beta} = \frac{l_1}{(l_1 + l_2) \cdot sin\alpha} \cdot G \cdot \frac{cos\alpha}{sin\beta} \qquad (4)$$

Se înlocuiește efortul din fir $\boldsymbol{T = \frac{l_1}{(l_1+l_2)\cdot sin\alpha} \cdot G}$

în ecuația (2) $T \cdot sin\alpha - G + N_B \cdot cos\beta = 0$

și se determină reacțiunea normală:

$$N_B = \frac{G - T \cdot sin\alpha}{cos\beta} = \frac{G}{cos\beta} - \frac{l_1}{(l_1 + l_2) \cdot sin\alpha} \cdot G \cdot \frac{sin\alpha}{cos\beta} = \frac{G}{cos\beta} - \frac{l_1}{(l_1 + l_2)} \cdot G \cdot \frac{1}{cos\beta} = \frac{G}{cos\beta} \cdot \left(1 - \frac{l_1}{(l_1 + l_2)}\right) = \frac{G}{cos\beta} \cdot \frac{l_2}{(l_1 + l_2)}$$

(5)

Deoarece ecuațiile (4)

$$N_B = \frac{l_1}{(l_1 + l_2) \cdot sin\alpha} \cdot G \cdot \frac{cos\alpha}{sin\beta}$$

și (5) reprezintă același element, se pot egala între ele și rezultă:

$$\frac{l_1}{(l_1 + l_2) \cdot sin\alpha} \cdot G \cdot \frac{cos\alpha}{sin\beta} = \frac{G}{cos\beta} \cdot \frac{l_2}{(l_1 + l_2)}$$

$$\frac{l_1}{sin\alpha} \cdot \frac{cos\alpha}{sin\beta} = \frac{l_2}{cos\beta}$$

$$\frac{sin\beta}{cos\beta} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$$

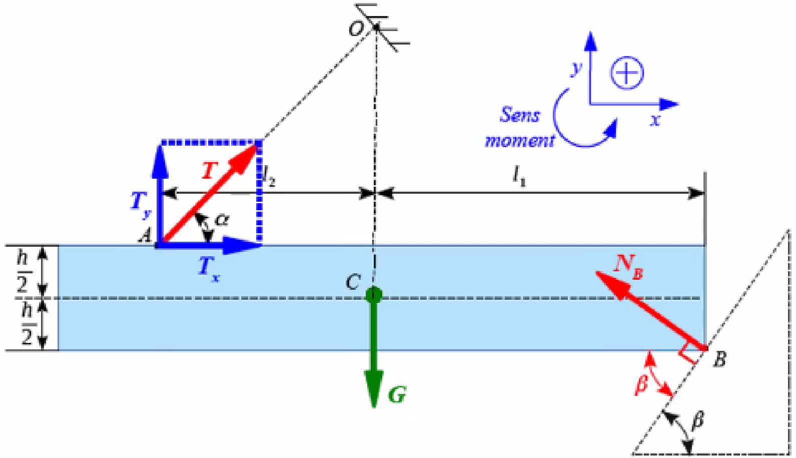
rezultă

$$tg\beta = \frac{l_1}{l_2 \cdot tg\alpha}$$

deci unghiul va fi:

$$\boldsymbol{\beta = arctg\left(\frac{l_1}{l_2 \cdot tg\alpha}\right)}$$

CAZ 2 Pentru grinda de secțiune dată, se aplică axioma legăturilor asemănător cazului anterior.



$$\sum X = 0$$

$$T \cdot cos\alpha - N_B \cdot sin\beta = 0 \qquad (6)$$

$$\sum Y = 0$$

$$T \cdot sin\alpha - G + N_B \cdot cos\beta = 0 \qquad (7)$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-(l_1 + l_2) \cdot T \cdot sin\alpha - h \cdot T \cdot cos\alpha + l_1 \cdot G = 0 \qquad (8)$$

Recording

$$T \cdot cos\alpha - N_B \cdot sin\beta = 0 \qquad (6)$$

$$T \cdot sin\alpha - G + N_B \cdot cos\beta = 0 \qquad (7)$$

$$-(l_1 + l_2) \cdot T \cdot sin\alpha - h \cdot T \cdot cos\alpha + l_1 \cdot G = 0 \qquad (8)$$

Din ecuația (8) se determină **efortul din fir**:

$$\boldsymbol{T = \frac{l_1 \cdot G}{(l_1 + l_2) \cdot sin\alpha + h \cdot cos\alpha}}$$

Se înlocuieşte efortul din fir în ecuația (6) şi se determină reacţiunea normală:

$$N_B = T \cdot \frac{cos\alpha}{sin\beta} = \frac{l_1}{(l_1 + l_2) \cdot sin\alpha + h \cdot cos\alpha} \cdot G \cdot \frac{cos\alpha}{sin\beta} \qquad (9)$$

Se înlocuieşte efortul din fir în ecuația (7) şi se determină reacţiunea normală:

$$N_B = \frac{G - T \cdot sin\alpha}{cos\beta} = \frac{G}{cos\beta} - \frac{l_1}{(l_1 + l_2) \cdot sin\alpha + h \cdot cos\alpha} \cdot G \cdot \frac{sin\alpha}{cos\beta} = \frac{G}{cos\beta} \cdot \left(1 - \frac{l_1 \cdot sin\alpha}{(l_1 + l_2) \cdot sin\alpha + h \cdot cos\alpha}\right)$$
$$= \frac{G}{cos\beta} \cdot \frac{l_2 \cdot sin\alpha + h \cdot cos\alpha}{(l_1 + l_2) \cdot sin\alpha + h \cdot cos\alpha} \qquad (10)$$

Recording

Deoarece ecuațiile (9) $N_B = \frac{l_1}{(l_1+l_2)\cdot sin\alpha + h\cdot cos\alpha} \cdot G \cdot \frac{cos\alpha}{sin\beta}$

și (10) $N_B = \frac{G}{cos\beta} \cdot \frac{l_2\cdot sin\alpha + h\cdot cos\alpha}{(l_1+l_2)\cdot sin\alpha + h\cdot cos\alpha}$

reprezintă același element, se pot egala între ele și rezultă:

$$\frac{l_1}{(l_1 + l_2)\cdot sin\alpha + h\cdot cos\alpha} \cdot G \cdot \frac{cos\alpha}{sin\beta} = \frac{G}{cos\beta} \cdot \frac{l_2\cdot sin\alpha + h\cdot cos\alpha}{(l_1 + l_2)\cdot sin\alpha + h\cdot cos\alpha}$$

$$l_1 \cdot \frac{cos\alpha}{sin\beta} = \frac{l_2\cdot sin\alpha + h\cdot cos\alpha}{cos\beta}$$

$$tg\beta = \frac{l_1\cdot cos\alpha}{l_2\cdot sin\alpha + h\cdot cos\alpha}$$

deci **unghiul va fi:**

$$\boldsymbol{\beta = arctg\left(\frac{l_1\cdot cos\alpha}{l_2\cdot sin\alpha + h\cdot cos\alpha}\right)}$$