

ISBN 987-43-9433-1

$$R \subset A \times B$$

$$M^2 = 21$$

# **MATEMATICA DISCRETA Y LOGICA**

$$O(n^3)$$

$$\Delta = \{(a, a)\}$$

$$G = (A, R)$$

ING. ROBERTO H. FANJUL

**MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA**  
**PRIMERA EDICIÓN**

**ROBERTO H. FANJUL**

ISBN 987-43-9433-1, edición original publicada por

© Roberto H. Fanjul

San Miguel de Tucumán, Argentina

**Copyright © 2005 Roberto H. Fanjul**

España 2919, (T4001AEG)

San Miguel de Tucumán, Tucumán, Argentina

Todos los derechos reservados

Email: [rfanjul@arnet.com.ar](mailto:rfanjul@arnet.com.ar)

**ISBN 987-43-9433-1**

**Derechos Reservados**

Quedan reservados todos los derechos para todos los países. Esta obra es propiedad intelectual de su autor. Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño gráfico de la tapa y de las páginas interiores pueden ser reproducidas, almacenadas o transmitida de ninguna forma, por ningún medio, sea este electrónico, mecánico, grabación, fotocopia, o cualquier medio sin la previa autorización por escrito del propietario de los derechos del copyright.

Queda hecho el depósito que previene la ley 11.723

**Impreso en Argentina – Printed in Argentina**  
**Septiembre de 2005**

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

# MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA

## CAPITULO I: SINTAXIS Y SEMÁNTICA DEL LENGUAJE FORMAL 1

1.- LOS ORÍGENES DE LA LÓGICA MATEMÁTICA	1
1.1.- LENGUAJE FORMAL (SINTAXIS Y SEMÁNTICA)	3
1.1.1.- ALGUNOS ARGUMENTOS LÓGICOS IMPORTANTES	5
1.2.- MATERIAL SIMBÓLICO O ALFABETO DEL LENGUAJE	7
1.2.1.- VARIABLES Y CONSTANTES PROPOSICIONALES	7
1.2.2.- CONECTORES PROPOSICIONALES	8
1.2.3.- SÍMBOLOS DE PUNTUACIÓN	9
1.2.4.- REGLAS DE PRIORIDAD	10
1.3.- CADENAS DE CARACTERES, LONGITUD, CONCATENACIÓN	11
1.4.- EL LENGUAJE DEL CALCULO DE PROPOSICIONES O CONJUNTO F DE EXPRESIONES BIEN FORMADAS (EBF)	11
1.4.1.- REGLAS DE BUENA FORMACIÓN	12
1.4.2.- RAZONAMIENTO POR RECURRENCIA SOBRE LA FORMACIÓN DE LAS EXPRESIONES	13
1.4.3.- NO AMBIGÜEDAD DEL LENGUAJE CONSTRUIDO	13
1.4.4.- DECIDIBILIDAD DEL CONJUNTO F DE LAS EXPRESIONES BIEN FORMADAS	14
1.5.- CONVENCIONES PARA ABREVIAR LA ESCRITURA	15
1.6.- OPERADORES O CONECTIVOS MONODIADICOS	15
1.7.- OPERADORES O CONECTIVOS DIÁDICOS	15
1.8.- OPERADORES O CONECTIVOS TRIÁDICOS	16
1.9.- NOCIÓN GENERAL DE LA SEMÁNTICA DEL LENGUAJE FORMAL	17
1.10.- DEFINICIÓN ALGEBRAICA DE LA SEMÁNTICA DEL LENGUAJE PROPOSICIONAL	17
1.10.1.- DISTRIBUCIÓN DE LOS VALORES DE VERDAD (D.D.V.V.)	17
1.10.2.- EVALUACIÓN DE LAS EBF	18
1.11.- TABLAS DE VERDAD	21
1.12.- DEFINICIÓN DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS	23
1.12.1.- FORMULAS PROPOSICIONALES	26
1.12.2.- INTERPRETACIONES BOOLEANAS	28
1.13.- TAUTOLOGÍA, CONTRADICCIÓN E INDEFINIDOS	29
1.14.- SATISFACTORIO, VALIDEZ Y CONSECUENCIA	35
1.15.- LÓGICA TRIVALENTE (LUKASIEWICZ)	36
1.16.- PROBLEMAS DEL CAPITULO I	37

ISBN 987-43-9433-1



## **CAPITULO II: DECISIÓN EN EL LENGUAJE FORMAL**

**44**

2.1.- NOCIÓN GENERAL DE SISTEMAS AXIOMÁTICOS	44
2.1.1.- PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS AXIOMÁTICOS	45
2.2.- LA LÓGICA PROPOSICIONAL COMO UN SISTEMA AXIOMÁTICO	45
2.2.1.- SISTEMAS GENTZEN	46
2.2.2.- SISTEMA AXIOMÁTICO DE RUSSEL	48
2.2.3.- SISTEMA AXIOMÁTICO DE HILBERT	49
2.3.- NOCIÓN GENERAL DE LA DECISIÓN EN EL LENGUAJE FORMAL	51
2.4.- LA DECISIÓN POR LAS FORMAS NORMALES	51
2.4.1.- LA TRANSFORMACIÓN DE UNA EBF EN FORMA NORMAL	52
2.4.2.- INTERPRETACIÓN DE LAS FORMAS NORMALES Y DECISIÓN	53
2.5.- ENUNCIADOS Y FORMAS DE ENUNCIADOS	58
2.6.- EL RAZONAMIENTO	59
2.6.1.- FORMAS DE RAZONAMIENTO Y FORMAS DE ENUNCIADOS	62
2.6.2.- LA DECISIÓN EN EL RAZONAMIENTO	65
2.7.- LAS IMPLICACIONES Y DERIVACIONES LÓGICAS	66
2.7.1.- IMPLICACIONES LÓGICAS	66
2.7.2.- SISTEMAS PARA DERIVACIONES	68
2.7.3.- TEOREMA DE LA DEDUCCIÓN	69
2.8.- LA DECISIÓN POR CUADRO SEMÁNTICO	71
2.9.- PROBLEMAS CAPITULO II	76

## **CAPITULO III: LÓGICA DE PREDICADOS**

**80**

3.1.- INTRODUCCIÓN	80
3.1.1.- REGLAS DE INFERENCIA	80
3.1.2.- LA LÓGICA TIENE NOTACIÓN TRADICIONAL	81
3.1.3.- CUANTIFICADORES DETERMINAN QUE ELEMENTOS SON CIERTOS	83
3.1.4.- VOCABULARIO DE LA LÓGICA DE PREDICADO	84
3.2.- ESTRUCTURA RELACIONAL DE UNA LÓGICA DE PREDICADO	86
3.2.1.- RELACIONES Y PREDICADOS	87
3.3.- SINTAXIS DE LENGUAJES DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN	88
3.3.1.- FORMULAS DE PREDICADOS	91
3.4.- SEMÁNTICA DEL LENGUAJE DE PREDICADOS DE 1er ORDEN	94
3.4.1.- INTERPRETACIONES	94
3.4.2.- VALUACIONES (VALORIZACIÓN)	97
3.4.3.- VALORES SEMÁNTICOS/NOTACIONES	98
3.4.4.- CUMPLIMENTACIÓN DE FORMULAS	98
3.4.5.- VERDAD Y MODELOS	99



3.5.- EQUIVALENCIA LÓGICA Y SUBSTITUCIÓN	101
3.6.- CUADROS SEMÁNTICOS	105
3.7.- DERIVACIÓN: Generalización y Particularización	113
3.7.1.- PARTICULARIZACIÓN UNIVERSAL	113
3.7.2.- GENERALIZACIÓN UNIVERSAL	115
3.7.3.- TEOREMA DE LA DEDUCCIÓN Y LA GENERALIZACIÓN UNIVERSAL	117
3.7.4.- ELIMINACIÓN DE LOS CUANTIFICADORES UNIVERSALES	119
3.7.5.- GENERALIZACIÓN EXISTENCIAL	121
3.7.6.- PARTICULARIZACIÓN EXISTENCIAL	123
3.8.- PROBLEMAS CAPITULO III	125

## **CAPITULO IV: RETICULO Y ALGEBRA DE BOOLE**

### **131**

4.1.- INTRODUCCIÓN	131
4.1.1.- COMPENDIO DE DEFINICIONES	131
4.2.- REPRESENTACIÓN DE RELACIONES	135
4.2.1.- MEDIANTE TABLAS	135
4.2.2.- MEDIANTE GRAFOS DIRIGIDOS	135
4.2.3.- MEDIANTE MATRICES	136
4.3.- CLAUSURA REFLEXIVA, SIMÉTRICA Y TRANSITIVA DE UNA RELACIÓN	138
4.4.- CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENANDOS	144
4.4.1.- DIAGRAMAS DE HASSE	144
4.4.2.- ELEMENTOS CARACTERÍSTICOS DE UN CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO	145
4.4.3.- INMERSIÓN DE UN ORDEN PARCIAL EN UN ORDEN TOTAL	148
4.5.- RETÍCULO	150
4.6.- ÁLGEBRA DE BOOLE COMO UN SISTEMA AXIOMÁTICO	154
4.6.1.- CONCEPTO	154
4.6.2.- PRINCIPIO DE DUALIDAD EN EL ÁLGEBRA DE BOOLE	155
4.6.3.- TEOREMAS EN EL ÁLGEBRA DE BOOLE	155
4.6.4.- TABLAS DE VERDAD EN EL ALGEBRA DE BOOLE	157
4.7.- LAS FUNCIONES EN EL ÁLGEBRA DE BOOLE $B^n$	158
4.7.1.- EXPRESIONES EN EL ÁLGEBRA DE BOOLE $B^n$	158
4.8.- IMPLEMENTACIÓN DE FUNCIONES BOOLEANAS	160
4.9.- PROBLEMAS CAPITULO IV	164

## **CAPITULO V: TEORIA DE GRAFOS**

### **171**

5.1.- INTRODUCCIÓN (¿QUE ES UN GRAFO?)	171
--	-----



5.2.- SUBGRAFOS	174
5.3.- MATRICES ASOCIADAS A UN GRAFO. GRADO DE UN VÉRTICE	177
5.4.- ISOMORFISMO DE GRAFOS	180
5.5.- CLASES DE GRAFOS	182
5.6.- CONEXIÓN EN GRAFOS	185
5.7.- NÚMERO DE CAMININOS, MATRIZ DE ADYACENCIA Y CONEXIÓN	189
5.8.- CAMINOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS	191
5.9.- GRAFOS PLANOS	193
5.10.- PROBLEMAS DEL CAPITULO V	196

## **CAPITULO VI: ÁRBOLES** **204**

6.1.- DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS	205
6.1.1.- CONTANDO EL NÚMERO DE ÁRBOLES DISTINTOS	208
6.2.- ÁRBOLES CON RAÍZ	212
6.2.1.- RELACIÓN ENTRE $a$ Y $h$ EN UN ÁRBOL $q$ -ario	216
6.3.- ÁRBOL RECUBRIDOR	218
6.3.1.- EL NÚMERO DE ÁRBOLES RECUBRIDORES DE UN ÁRBOL	219
6.3.2.- ÁRBOL RECUBRIDOR DE MENOR PESO	221
6.4.- ÁRBOL BINARIO	224
6.4.1.- LA PODA DE UN ÁRBOL BINARIO	226
6.5.- ÁLGORITMOS DE BUSQUEDA EN UN ÁRBOL	228
6.5.1.- ALGORITMO DE BÚSQUEDA EN PROFUNDIDAD	228
6.5.2.- ALGORITMO DE BÚSQUEDA EN ANCHURA	228
6.6.- PROBLEMAS CAPITULO VI.	230
6.7.- BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA	235

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

# MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA

## CAPITULO I

### SINTAXIS Y SEMÁNTICA DEL LENGUAJE FORMAL

En nuestra práctica diaria, cuando platicamos, escuchamos una conversación, vemos una película, leemos, etc., de acuerdo con lo que vemos u oímos, asentimos afirmando o negando. Si estamos de acuerdo, lo vemos como *"lógico"*, si lo vemos como algo absurdo o disparatado, expresamos con cierta molestia: *¡ eso es "ilógico" !*. Situación esta que nos lleva a formularnos las siguientes preguntas: ¿qué nos permite considerar un hecho, proposición, idea como *"lógico"* o *"ilógico"*?

#### 1.- LOS ORÍGENES DE LA LÓGICA MATEMÁTICA

El estudio de la lógica fue iniciado por los antiguos griegos cuyo sistema educativo recalca la competencia en la filosofía y la retórica. La lógica fue utilizada para formalizar la **deducción**, la derivación de nuevas declaraciones verdaderas a partir de suposiciones. Dado un conjunto de premisas, presumiblemente aceptadas por todos, la deducción de acuerdo a las reglas de la lógica, asegura que también la conclusión es verdadera. La retórica, el arte del buen hablar en público, incluye el estudio de la lógica que define las reglas que deben ser practicadas por todas las personas en todos lados en un debate público.

Las reglas de la lógica fueron clasificadas y denominadas. Una de las más famosas reglas de la lógica, **el silogismo**, se presenta de la siguiente forma:

- 1.- Todos los hombres son mortales.
- 2.- X es un hombre.
- 3.- Por lo tanto, X es un mortal.

Si suponemos que las premisas son verdaderas, las dos primeras oraciones, entonces la Ley del Silogismo nos asegura que la tercera oración es verdadera independientemente de la identidad de X. En particular si X es un hombre determinado tal como Sócrates, podemos *deducir* que Sócrates es mortal.

El uso de una notación imprecisa, tal como lo es un lenguaje natural, significa que el uso descuidado de la lógica puede llevarnos a declarar que ciertas declaraciones falsas son verdaderas, o a declarar que una declaración o proposición es verdadera aún cuando dicha afirmación de verdad no necesariamente dependa de las premisas. Un ejemplo adecuado al anterior comentario, es el siguiente silogismo dado por Smullyan:

- 1.- Algunos automóviles hacen ruido.
- 2.- Mi automóvil es algún automóvil.
- 3.- Por lo tanto, mi automóvil hace ruido.

Sin embargo, aún un cuidadoso uso de la lógica puede llevarnos a situaciones

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

inexplicables, tales como las denominadas **paradojas**, las que son declaraciones auto-contradictorias. ¿Es la siguiente declaración S verdadera? Esta oración es falsa.

Si S es verdadera, entonces es cierto (verdadero) que la oración S es falsa. Inversamente, si S es falsa, entonces es una oración verdadera. Paradojas, tal como la Paradoja de Liar justamente nos muestra cuan difícil puede ser definir un sistema lógico.

El marco filosófico de la lógica construida por los Griegos permanece intacto hasta nuestros días, lo que está demostrado a través del uso inalterable de las palabras griegas *teorema* y *axioma*. Sin embargo, hasta el siglo XIX, la lógica nunca supero a sus orígenes para convertirse en una herramienta científica, quizás debido a la falta de una notación simbólica apropiada. Aún más, desafortunadamente la familiaridad con la lógica no es más requerida en nuestro sistema educacional.

Los matemáticos eventualmente revivieron el estudio de la lógica para formalizar el concepto de la *demostración* matemática. A medida de que las teorías matemáticas se hicieron cada vez más complejas, algunos matemáticos cuestionaron la legitimidad de todo el proceso deductivo. Una posible defensa de la deducción matemática es formalizar un sistema de lógica en el cual el conjunto de probables declaraciones o proposiciones es el mismo que el conjunto de las proposiciones verdaderas. En otras palabras, (i) no podemos probar declaraciones falsas, y (ii) si una declaración o proposición es un hecho verdadero, existe una demostración en algún lado esperando que algún matemático brillante la descubra. La investigación estimulada por este plan, denominado el *Programa de Hilbert*, dio como resultado un desarrollo, no justamente como un sistema lógico de acuerdo a la filosofía griega, sino como un conjunto extensivo de teoremas que caracterizan al sistema. La *Lógica Matemática* define sistema de lógica apropiados para estudiar las matemáticas y desarrolla la teoría matemática de estos sistemas. Incidentalmente, la esperanza de Hilbert fue destrozada cuando Gödel demostró que existen declaraciones *verdaderas* de la aritmética que no pueden ser probadas.

La Lógica tradicional distingue tres entidades lógicas de complejidad creciente: **el concepto, el juicio, el razonamiento**. El concepto, como entidad ideal que representa a una realidad cualquiera, nada nos dice de esa realidad, se limita a mostrarla. El concepto árbol, por ejemplo, cumple la función de aludir a la realidad árbol. Pero no afirma o niega algo del árbol, no se le atribuye o rechaza un predicado cualquiera. Esto último es precisamente lo que hace el juicio. Es decir vincula dos conceptos, uno sujeto, otro predicado, a través de un término relacionante, la cópula verbal es. El esquema de todo juicio afirmativo es:

**S es P**

Donde **S** es el **concepto sujeto**, **P** es el **concepto predicado** y **es** el término que enlaza a ambos. Un ejemplo de juicio: El árbol es viejo.

Los razonamientos se construyen con juicios, así como los juicios se construyen con conceptos. Un ejemplo de razonamiento muy simple, es el siguiente:

***Todos los árboles son vegetales***  
***El Lapacho es un árbol***  
***El Lapacho es vegetal***

En esta primera parte trataremos principalmente con los juicios. Pero no los llamaremos juicios, pues esta palabra conserva un fuerte residuo psicológico, puede engañarnos al sugerirnos que estamos tratando a los juicios como procesos mentales. Emplearemos indistintamente las palabras **proposición** y **enunciado** para referirnos al juicio como realidad lógica, es decir como entidad formal y vacía de significado real. A menudo daremos un contenido significativo cualquiera a las proposiciones por razones didácticas, para facilitar la comprensión de algunos temas volviéndolos más intuitivos. Pero la Lógica, ciencia de las formas puras del

ISBN 987-43-9433-1





pensamiento, no necesita en principio recurrir a esas significaciones para su constitución.

### **1.1.- LENGUAJE FORMAL (SINTAXIS Y SEMÁNTICA)**

Cada lógica da lugar a un lenguaje (realmente un lenguaje formal) para realizar declaraciones acerca de los objetos y para realizar razonamientos acerca de las propiedades de esos objetos. La visualización de la lógica de esta forma es muy general y actualmente nos centralizamos en particular en los denominados objetos matemáticos, programas de computación y en estructuras de datos. Las declaraciones en un lenguaje lógico están construidos de acuerdo a un conjunto predefinido de reglas de formación (dependiendo del lenguaje) denominadas **Reglas de Sintaxis**.

Uno puede preguntarse porque es necesario un lenguaje especial, y porque un lenguaje natural no es adecuado para llevar a cabo un razonamiento lógico. La primera razón es que cualquier lenguaje natural en general es muy rico en contenido y no puede ser descrito formalmente. La segunda razón, la cual es aún más seria, es que el significado de una oración en un determinado lenguaje natural es ambigüo, sujeto a diferentes interpretaciones dependiendo del contexto y de las suposiciones implícitas al lenguaje. Si el objeto bajo estudio es el de realizar argumentos precisos y rigurosos acerca de las afirmaciones y demostraciones, se requiere de un lenguaje preciso cuya sintaxis pueda describirse completamente con solo algunas reglas simples y cuya semántica pueda definirse una manera no ambigua.

Otro factor importante es el laconismo. Los lenguajes naturales tienden a ser verborragicos, y aún las declaraciones matemáticas más simples se hacen excesivamente largas (y poco claras) cuando se expresan con estos tipos de lenguajes. Los lenguajes lógicos que definiremos contienen símbolos especiales usados para abreviar sintácticamente las construcciones del lenguaje.

Un lenguaje lógico puede ser utilizado de diferentes formas. Por ejemplo, un lenguaje puede ser utilizado como un **Sistema de Deducción**; o sea para construir pruebas o refutaciones. Este uso del lenguaje lógico es conocido como la **Teoría de la Comprobación**. En este caso, se especifica un conjunto de hechos denominados **axiomas** y un conjunto de reglas de deducción (reglas de inferencia) y el objetivo es determinar cuales son los hechos que se derivan de los axiomas y de las reglas de inferencia. Cuando utilizamos la lógica como un sistema de comprobación, no nos interesamos en el significado de las declaraciones que estamos manipulando, pero si estamos interesados en la distribución de estas declaraciones, y específicamente, en que pruebas o refutaciones pueden construirse. En este sentido, las declaraciones del lenguaje son visualizadas como hechos fríos, y las manipulaciones involucradas son puramente mecánicas, hasta el punto tal de que pueden ser realizadas por una computadora. Esto no significa que encontrar una prueba para una declaración no requiere creatividad, pero donde la interpretación de la declaración es irrelevante. El uso de la lógica es similar a la práctica de un juego. Se dan ciertos hechos y reglas, y se supone que los jugadores son perfectos, en el sentido de que ellos obedecen siempre a las reglas. Ocasionalmente puede suceder que siguiendo las reglas nos lleve a inconsistencias, en cuyo caso puede ser necesario revisar las reglas.

Sin embargo, las declaraciones expresadas en un lenguaje lógico a menudo tienen un determinado significado. El segundo uso de un lenguaje formal es la de expresar declaraciones que reciben un significado cuando ellas poseen lo que se denomina una interpretación. En este caso, el lenguaje de la lógica es utilizado para formalizar propiedades de estructuras y determinar cuando una declaración es verdadera dentro de una determinada estructura o contexto. Este uso del lenguaje lógico o formal es denominado como la **Teoría del Modelo**.

Uno de los aspectos interesantes de la teoría del modelo es que nos obliga a tener una definición precisa y rigurosa del concepto de verdad de la estructura. Dependiendo de la interpretación que uno posea en la mente, la verdad puede tener un significado bastante diferente. Por ejemplo, que una declaración sea verdad o falsa puede depender de sus parámetros. Una declaración verdadera bajo todas las interpretaciones de los parámetros es definida como válida.

ISBN 987-43-9433-1



Una suposición matemática útil (y bastante razonable) es que la verdad de una declaración puede ser obtenida a partir de la verdad (o falsedad) de sus partes (sub declaraciones). Desde un punto de vista técnico, esto significa que la verdad de una declaración o proposición está definida por recursión de la estructura sintáctica de la proposición. La noción de verdad que hemos descrito (debida a Tarski) formaliza la anterior intuición, y es firmemente justificada en términos de los conceptos del álgebra y sus correspondientes homomorfismos.

Los dos aspectos descritos no son independientes y es la interacción entre la teoría de los modelos y la teoría de la comprobación lo que hace de la lógica una herramienta efectiva e interesante. Podemos decir que la teoría de los modelos y la de la comprobación forman una dupla en la que cada una individualmente se complementa con la otra. Para ilustrar este punto, consideremos el problema de encontrar un procedimiento para listar todas las proposiciones verdaderas en cierta clase de contexto. Puede ser que comprobando la verdad de las proposiciones requiera de una computación infinita. Más aún, si la clase de estructura puede ser contemplada por un conjunto finito de axiomas, podemos encontrar un procedimiento de comprobación que nos de la respuesta buscada.

Inversamente, supongamos que poseemos un conjunto de axiomas y deseamos conocer si la teoría resultante (el conjunto de consecuencias) es consistente, en el sentido de que no obtenemos una proposición y su negación a partir de los axiomas. Si descubrimos una estructura en la cual puede verse que los axiomas y sus consecuencias son verdaderas, podremos decir que la teoría es consistente, ya que algunas proposiciones y sus negaciones podrían ser ciertas (en esta estructura).

Para resumir, un lenguaje lógico tiene cierta **sintaxis** y el significado o **semántica**, de una declaración o proposición expresada en este lenguaje está dado por una interpretación en su estructura. Dados un lenguaje lógico y su semántica, podemos tener una o más **sistemas de comprobación** para este sistema lógico.

Un sistema de comprobación es solo aceptable si cada fórmula probable o demostrable es realmente válida. En este caso, decimos que el sistema de demostración es **sólido**. Luego, tratamos de comprobar que el sistema de comprobación está **completo**. Un sistema de comprobación está completo si cada fórmula válida es demostrable. Dependiendo de la complejidad de la semántica de una lógica dada, no siempre es posible encontrar un sistema de comprobación completo para tal o cual lógica. Este es el caso, por ejemplo, para las lógicas de segundo orden. Sin embargo, existe un sistema de comprobación completo para la lógica proposicional y para la lógica de predicados de primer orden. En el caso de los predicados de primer orden, ello solo significa que puede encontrarse un procedimiento tal que, si la fórmula de entrada es válida, el procedimiento se detendrá y producirá una comprobación.. Pero ello no proporciona un procedimiento de decisión para determinar la validez.

Existen diversas maneras de comprobar la perfección del sistema de prueba o de comprobación. Casualmente, muchas comprobaciones estableciendo la perfección solo muestran que una fórmula A es válida, por lo tanto existe una prueba para A. Sin embargo, tal argumento no nos proporciona un método para **construir** una prueba de A (en el sistema formal). Solo se demuestra la existencia de la comprobación. Este es el caso particular de las denominadas **Comprobaciones de Henkin**. Para ejemplificar este punto en un modo más colorido y comprensible, la situación anterior es comparable a ir a un restaurante donde decimos que existe una excelente cena en el menú, pero que un chef inexperto no sabe como preparar esta cena. Esto puede ser satisfactorio para un filósofo, pero no para un científico en computación !. Sin embargo, existe una aproximación que nos da un procedimiento para construir un método de comprobación de si una fórmula es válida. Esta es la aproximación utilizada en un Sistema de Gentzen (Sistemas de Cuadros Semánticos). Además, da como resultado de que pueden obtenerse todos los teoremas de la lógica de predicados de primer orden, utilizando esta aproximación.

La lógica proposicional es el sistema lógico con la semántica más simple. Sin embargo muchos de los conceptos y técnicas utilizadas para estudiar la lógica proposicional es

ISBN 987-43-9433-1



generalizada para la lógica de predicado de primer orden. En la lógica de predicado existen proposiciones atómicas (o fórmulas atómicas o átomos) y proposiciones o fórmulas compuestas construidas con las proposiciones atómicas y con los conectivos lógicos. Los hechos o expresiones atómicas son interpretados como que son verdaderos o falsos. Una vez que los átomos en una proposición compuesta han recibido una interpretación, puede computarse el valor de verdad de la proposición. Técnicamente, esto es una consecuencia del hecho de que el conjunto de proposiciones es una estructura cerrada generada libremente e inductivamente. Ciertas proposiciones compuestas son verdaderas para todas las interpretaciones posibles. Ellas son denominadas **tautologías**. Intuitivamente, una tautología es una **verdad universal**. Por lo que podemos concluir que las tautologías juegan un papel fundamental en la lógica proposicional o lógica formal.

### **1.1.1.- ALGUNOS ARGUMENTOS LÓGICOS IMPORTANTES**

Como ejemplo de un argumento lógicamente válido, consideremos las siguientes oraciones declarativas:

1.- ***Si la demanda crece, entonces las compañías se expanden.***

2.- ***Si las compañías se expanden, entonces contrata trabajadores***

~~3.- ***Si la demanda crece, entonces las compañías contratan trabajadores***~~

Este argumento lógico tiene tres líneas, y cada línea contiene una afirmación u oración declarativa. Las oraciones de las líneas 1 y 2 proporcionan las **premisas** del argumento, y la línea 3 contiene la conclusión. Se puede argumentar contra las premisas y reivindicar que son erróneas. Sin embargo, tan pronto como las premisas sean aceptadas, la conclusión también debe aceptarse, porque se sigue lógicamente de las premisas y por lo tanto, el argumento es válido.

Consideremos otro ejemplo de un argumento que es válido lógicamente:

1.- ***Este programa de computadora tiene error, o la entrada es errónea.***

2.- ***La entrada no es errónea.***

~~3.- ***Este programa de computadora tiene un error.***~~

Nuevamente existen dos premisas, que corresponden a las líneas 1 y 2 del argumento. Estas premisas pueden ser verdaderas o falsas en un caso en particular. Sin embargo, si las premisas son verdaderas, no podemos evitar la conclusión de que el programa de computadora tiene errores. Esta conclusión se desprende lógicamente de las premisas.

Utilizando afirmaciones como las dadas, Aristóteles desarrolló patrones de argumentos correctos y falsos. Primero, observó que muchas de las declaraciones utilizadas en lógica son realmente **declaraciones compuestas**; esto es, que constan de varias partes, cada una de las cuales es una afirmación o declaración por derecho propio. El primer ejemplo contiene la siguiente declaración como una de sus premisas:

***Si la demanda crece, entonces las compañías se expanden***

Esta declaración tiene dos partes, que son declaraciones por derecho propio. Son ***“la demanda crece”*** y ***“las compañías se expanden”***. Estas dos afirmaciones están conectadas mediante: ***“Si ... entonces”***. Es segundo argumento contiene la declaración siguiente:

***Este programa de computadora tiene error, o la entrada es errónea.***

Nuevamente esta declaración contiene dos partes: ***“ Este programa de computadora tiene***

ISBN 987-43-9433-1



**error**” y **“la entrada es errónea”**. Ambas partes son declaraciones y están conectadas mediante la palabra **“o”**.

Para ver que argumentos son correctos y cuáles no, Aristóteles abrevió los enunciados esenciales de los argumentos, sustituyéndolos por letras. De esta forma el patrón de argumentos válidos se puede describir concisamente. Siguiendo la convención de Aristóteles, utilizaremos letras mayúsculas para denotar las declaraciones esenciales. La letra **P** puede expresar la declaración **“la demanda crece”**, la letra **Q** puede expresar la declaración **“las compañías se expanden”**, y la letra **R** puede representar la declaración **“las compañías contratan trabajadores”**. Utilizando estos símbolos, podemos expresar el argumento que involucra el crecimiento de la demanda, de la siguiente forma:

**1.-Si P, entonces Q**

**2.-Si Q, entonces R**

---

**3.-Si P, entonces R**

Aristóteles incluso dio nombre a este tipo de argumento, lo denominó **silogismo hipotético**. En el silogismo hipotético **P**, **Q** y **R**, pueden representar a cualquier declaración. Por ejemplo, si **P** representa: **“El gato ve al pez”**, **Q** para **“El gato agarra al pez”** y **R** **“El gato se come al pez”**, entonces el silogismo hipotético se convierte en:

**1.-Si el gato ve al pez, entonces el gato agarra al pez.**

**2.-Si el gato agarra al pez, entonces el gato se come al pez.**

---

**3.-Si el gato ve al pez, entonces se come al pez.**

Las premisas de este argumento pueden ser verdaderas o falsas. El gato puede estar bien entrenado y nunca hará algo tan desagradable como el de atrapar al pez. Más aún, incluso si el gato agarra al pez, puede decirse que la comida para gatos es preferible al pez vivo. Sin embargo, tan pronto como aceptamos las premisas, no tenemos otra opción que aceptar la conclusión, que es que el gato se come al pez, si ve al pez.

Otro patrón para un argumento correcto puede demostrarse haciendo que **P**, y **Q** representen declaraciones o afirmaciones en el argumento de error del programa. **P** representa **“Este programa de computadora tiene un error”** y **Q** representa **“la entrada es errónea”**. Utilizando estas abreviaturas, el argumento puede expresarse de la siguiente manera:

**1.- P o Q**

**2.- No P**

---

**3.- P**

Este argumento se denomina **silogismo disyuntivo** y es un argumento fundamental en la lógica. Obsérvese, otra vez, que las premisas pueden ser verdaderas o falsas, pero si son consideradas verdaderas, entonces la conclusión es inevitable.

Existe un argumento lógico extremadamente importante, denominado el **modus ponens**. Este modus ponens puede formularse de la siguiente forma:

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

1.- **Si  $P$  entonces  $Q$**

2.-  **$P$**

3.-  **$Q$**

Por ejemplo, si  $P$  es "**El semáforo se pone en rojo**" y  $Q$  es "**Los coches paran**", entonces las premisas "**Si el semáforo se pone en rojo, entonces los coches paran**" y "**El semáforo se pone en rojo**" permite concluir "**Los coches paran**".

Determinar cuáles patrones de razonamiento lógico son válidos, y cuáles no lo son, es una parte esencial de la lógica y será tratado posteriormente en los próximos capítulos.

Las declaraciones o afirmaciones involucradas en los argumentos lógicos tienen una propiedad especial: que son o verdaderas o falsas, y que no pueden ser nada más. En lógica, tales declaraciones se denominan **proposiciones**.

## **1.2.- MATERIAL SIMBÓLICO O ALFABETO DEL LENGUAJE**

El **alfabeto  $L$**  del lenguaje formal, es un conjunto conformado por tres conjuntos sin elementos en común (conjuntos disyuntos). Ellos son:

- 1.- El conjunto  $V$  de variables proposicionales. Este conjunto es infinito y enumerable.

$$V = \{ p_1, p_2, \dots, p_n, \dots \}$$

- 2.- El conjunto  $K$  de conectores proposicionales.

$$K = \{ \neg \} \cup \{ \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow \}$$

denominados respectivamente: negación, conjunción (AND), disyunción (OR), implicación lógica y doble implicación lógica (ssi).

- 3.- El conjunto  $P$  de símbolos de puntuación o paréntesis. Este conjunto es de naturaleza impropia.

$$P = \{ (, ) \}$$

En consecuencia el alfabeto, correspondiente a un lenguaje formal para la lógica, está definido por la unión de los tres conjuntos antes detallados.

$$L = V \cup K \cup P$$

### **1.2.1.- VARIABLES Y CONSTANTES PROPOSICIONALES**

Decimos que una proposición representa a todos los tipos y formas de oraciones declarativas del lenguaje natural. Decimos que una proposición es simple o atómica cuando no contiene a otra proposición. Tal es el caso del siguiente ejemplo:

***El niño juega***

Pero si decimos:

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

***El niño juega y no llora***

fácilmente pueden distinguirse aquí dos proposiciones: El niño juega, El niño no llora. Ambas están unidas por la conjunción **y**. En lógica esta conjunción recibe un tratamiento diferente del gramatical. Mientras la conjunción gramatical **y** enlaza adjetivos, sustantivos, verbos, etc. la conjunción lógica enlaza solamente proposiciones. Cuando tal enlace es de dos o más proposiciones simples, como en el último ejemplo, el resultado es una proposición compuesta o molecular.

Definiremos a una proposición compuesta como aquella proposición formada por dos o más proposiciones simples unidas entre sí por alguna partícula lógica. Se establece además que cualquier proposición simple puede ser simbolizada por las letras minúsculas p, q, r, s, t, etc.

Las letras antes mencionadas, que por convención representan proposiciones, reciben el nombre de **variables lógicas**. Así como en las matemáticas se emplean variables como x, y, z, que pueden recibir cualquier valor (valores numéricos fijos como 1, 345, 5, etc.), así también en lógica las variables p, q, r, s, t, etc. pueden recibir valores fijos, constantes. Cuáles valores? Los siguientes dos valores: **V** y **F**. Es decir los valores de verdad y falsedad.

Por emplear dos valores esta lógica recibe el nombre de **Lógica Bivalente**. Hay otras lógicas que emplean más de dos valores, que reconocen en las proposiciones no sólo su carácter de verdaderas o falsas sino algunos valores más, como por ejemplo, "más falso que verdadero", "ni falso ni verdadero". Según el número de valores que emplee, la lógica construida sobre ellos será trivalente, tetravalente, polivalente, fuzzy o borrosa, etc.

En esta lógica bivalente, pues, distinguiremos elementos cuyo valor es variable (p, q, r, s, t, etc.) y otros cuya significación es constante (V, F). En este último grupo debemos incluir a las conectivas, porque todas ellas poseen un sentido invariable.

La lógica proposicional se detiene en las proposiciones entendidas como un todo, sin desarticularlas en sus partes componentes (sujeto, predicado, conector) como hacen otros capítulos de la lógica. Tampoco tiene en cuenta el **sentido** de las proposiciones. Se desentiende igualmente de saber cómo se estableció que tal o cual proposición es verdadera (V) o falsa (F). Acaso se diga: si a esta lógica no le interesa el contenido de las proposiciones, ni el análisis formal de las partes que las componen, ni cómo saber cuándo son verdaderas o falsas, acaso queda algo de lo que pueda ocuparse respecto de las proposiciones?.

Ese algo parecerá, en un principio, nada o muy poco: la lógica proposicional quiere saber que derivaciones formales se obtienen al combinar proposiciones verdaderas o falsas.

### **1.2.2.- CONECTORES PROPOSICIONALES**

Ya se vio en la sección anterior (1.1.1.) un tipo de partícula lógica o conector proposicional, definido como aquel elemento que interconecta dos o más proposiciones atómicas; el conector **y**, que en la lógica se lo escribe con un símbolo especial. Pero la lógica proposicional y también el lenguaje natural emplean otras partículas o conectores para interconectar proposiciones simples. Por ejemplo:

***Le cuentan un cuento o no se duerme***

También, se establece una vinculación entre las proposiciones "le cuentan un cuento" y "no se duerme". Esta vez las proposiciones simples no están unidas por la conjunción, sino por la disyunción. Enumeremos ahora las partículas o conectivos más importantes, con su correspondiente simbolización, que se emplea en la lógica proposicional y/o simbólica:



CONECTIVO	DENOMINACIÓN	LECTURA EN ESPAÑOL
$\wedge$	Conjunción	y
$\vee$	Disyunción	o
$\Rightarrow$	Implicación o Condicional	si ... entonces
$\Leftrightarrow$	Bicondicional o Equivalencia	si y sólo si ... entonces
$\neg$	Negación	no

Todas ellas reciben el nombre de **conectivas lógicas** y también el de **functores de verdad**. Si se establece que cualquier proposición puede ser simbolizada por las letras minúsculas p, q, r, s, t, etc.,

$p \wedge q$  , se leerá p y q

$p \vee q$  , se leerá p o q

$p \Rightarrow q$  , se leerá : si p, entonces q

$p \Leftrightarrow q$  , se leerá : si y sólo si p, entonces q

$\neg p$  , se leerá: no p (o también: no es el caso que p)

Se observará que el último conectivo lógico, " $\neg$ ", actúa sobre una sola proposición, sin unir, como las cuatro anteriores, dos proposiciones. Por eso la negación, se dice, es una conectiva unaria o monaria, en tanto que las restantes son conectivas binarias.

### **1.2.3.- SÍMBOLOS DE PUNTUACIÓN**

En un idioma natural se apela a símbolos de puntuación que permiten ordenar a grupos de palabras y separarlos de otros. Sin dicha puntuación, el sentido de las frases puede alterarse considerablemente. Es conocida la anécdota de Sarmiento reprendiendo ásperamente a una maestra por su negligencia ante el empleo de la coma. Sarmiento -se cuenta- hizo escribir a un alumno en la pizarra esta misma frase con la diferencia de la ubicación de una coma y el añadido de otra:

***La maestra dijo, Sarmiento es ignorante.***

***La maestra, dijo Sarmiento, es ignorante.***

La diferencia de sentido es manifiesta. Para evitar esa anarquía, también las matemáticas usan de símbolos de puntuación. En el ejemplo:  $13 - 4 + 2$  podemos ver la misma incertidumbre acerca del sentido de la operación que vimos en el ejemplo de la coma. En efecto, ante dicha operación podemos llegar a dos resultados: 7 ú 11. Para expresar el primer resultado, la puntuación correcta será:  $13 - (4 + 2)$ . Para el segundo:  $(13 - 4) + 2$ .



También en la lógica se emplean signos de puntuación para evitar equívocos en las expresiones. Si nos encontramos con esta fórmula (mal formada, tal como veremos más adelante) ;  $p \Rightarrow q \wedge r$ , dudaremos entre las siguientes dos interpretaciones:

$$(p \Rightarrow q) \wedge r$$

$$p \Rightarrow (q \wedge r)$$

Se podrán utilizar paréntesis, corchetes y llaves, significando lo mismo desde el punto de vista de la sintaxis del lenguaje formal, como veremos más adelante. Los dos ejemplos anteriores, lo mismo que la fórmula  $\neg (p \wedge \neg q)$ , que será analizado como equivalente de  $p \Rightarrow q$ , emplean paréntesis. Pero a veces la extensión de la fórmula exige la utilización de otros paréntesis, lo que lleva a confusión sin saber realmente que encierra cada uno, por lo cual es permitido utilizar corchetes o llaves:

$$[(p \vee q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow p \quad (1)$$

$$\neg \{[(p \vee q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow p\} \quad (2)$$

Fácil es ver que tiene mayor alcance siempre la conectiva que está fuera del signo de puntuación. En (1) tiene mayor alcance la implicación fuera del corchete que la conjunción dentro del corchete. Este, a su vez, tiene mayor alcance que la disyunción y la implicación encerrada en los paréntesis.

En (2) la negación es la conectiva que afecta más, pues afecta a todo el conjunto. Le sigue la implicación externa al corchete, pero dentro de la llave. En tercer lugar la conjunción que une los dos paréntesis. Finalmente éstos, la disyunción y el condicional, sólo afectan a las dos proposiciones encerradas en los paréntesis respectivos. También se notará que el paréntesis tiene menor alcance que el corchete y éste que la llave, desde este punto de vista aceptado en la sintaxis del lenguaje formal.

#### 1.2.4.- REGLAS DE PRIORIDAD

Muy poca gente trabaja con expresiones completamente entre paréntesis, porque tales expresiones son largas y con frecuencia difíciles de leer. En particular, los paréntesis externos de una expresión son casi siempre omitidos. Por lo tanto en lugar de  $(p \wedge q)$ , escribimos  $p \wedge q$  y en lugar de  $((p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q))$  se escribe  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ . Cuando hacemos esto, no debemos olvidar nunca añadir paréntesis detrás cuando la expresión en cuestión esté compuesta con alguna otra expresión. Los paréntesis dentro de la expresión también pueden ser omitidos. Para interpretar correctamente la expresión resultante, se utilizan las llamadas **reglas de prioridad o precedencia**. Generalmente, cada conectivo tiene dada una prioridad, y los conectivos con una prioridad más alta introducen una unión más fuerte que los conectivos con una prioridad más baja.

El conectivo  $\neg$  tiene siempre la prioridad más alta. Por consiguiente  $\neg p \vee q$  debe ser entendida como  $(\neg p) \vee q$  y no como  $(\neg p \vee q)$ . En el caso de los conectivos binarios, la prioridad más alta esta dada por  $\wedge$ , seguida de  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ , y  $\Leftrightarrow$ , en ese orden. En la expresión  $p \wedge q \vee r$ , por ejemplo,  $\wedge$  tiene la prioridad sobre  $\vee$  cuando forma sub expresiones y debe ser entendida como  $(p \wedge q) \vee r$ . De igual modo  $p \Rightarrow q \vee r$  debe ser entendida como  $p \Rightarrow (q \vee r)$ , porque  $\vee$  toma prioridad sobre  $\Rightarrow$ . El conectivo correspondiente a la doble implicación  $\Leftrightarrow$  recibe la prioridad más baja, lo que implica que la expresión  $p \Leftrightarrow q \Rightarrow r$  debe entenderse como  $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$ .

**Definición 1.1.-** Un conectivo u operador binario se denomina **asociativo por la izquierda** si el conectivo por la izquierda tiene prioridad sobre el conectivo sobre la derecha. Un conectivo binario se denomina **asociativo por la derecha** si el conectivo por la derecha tiene prioridad sobre el conectivo por la izquierda.





### 1.3.- CADENAS DE CARACTERES, LONGITUD, CONCATENACIÓN

Disponiendo símbolos o signos del alfabeto  $L$ , uno tras otro conformamos series finitas de signos o cadenas de signos. A estas series las denominamos **CADENAS DE CARACTERES**.

En los siguientes ejemplos indicamos algunos casos de cadenas de caracteres que son proposiciones atómicas y/o compuestas.

#### Ejemplo 1.3.1:

$$"p_1 \Rightarrow \wedge \vee", " \neg () p_1 \neg \neg \neg ", "(p_2 \Rightarrow p_3)"$$

Definimos los siguientes casos particulares de cadenas de caracteres:

#### Ejemplo 1.3.2:

$$((p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)), (\neg A_1 \Leftrightarrow (A_1 \Rightarrow A_2)), (A_1 \vee A_2), (A_1 \wedge A_2)$$

**CADENA VACÍA:** es aquella cadena que no contiene ningún signo o símbolo del alfabeto  $L$  y la denotamos de la siguiente forma: " $< >$ ".

**CONCATENACIÓN:** Cuando colocamos dos cadenas, una a continuación de la otra, obtenemos otra cadena y que la representaremos por " $\cap$ " y que es una ley de composición interna a la que denominamos concatenación, es asociativa pero no es conmutativa.

$$(A \cap B) \cap C \text{ es lo mismo que } A \cap (B \cap C)$$

$$A \cap B \text{ es diferente de } B \cap A$$

**CADENA NEUTRA:** La cadena vacía es denominada también cadena neutra a derecha e izquierda para la concatenación (no altera a la cadena concatenada con ella).

$$A \cap < > = < > \cap A = A$$

Denominamos al conjunto de todas las cadenas de caracteres, en el marco del alfabeto  $L$ , como  $L^*$ . El par ordenado  $(L^*, \cap)$  es una estructura matemática axiomática del tipo monoidal (ley de composición interna y asociativa).

**LONGITUD DE UNA CADENA:** Es igual al número de signos o símbolos que constituyen a dicha cadena.

### 1.4.- EL LENGUAJE DEL CALCULO DE PROPOSICIONES O CONJUNTO F DE EXPRESIONES BIEN FORMADAS (EBF)

Existe un único tipo de cadenas, a partir del alfabeto  $L$ , que nos interesa, el denominado conjunto de **EXPRESIONES BIEN FORMADAS (EBF) O FORMULAS PROPOSICIONALES**.

Dicho conjunto, denominado  $F$ , constituye el lenguaje del cálculo proposicional. Si  $L^*$  es el conjunto de todas las cadenas dentro del marco del alfabeto  $L$ , nuestro lenguaje  $F$ , será un subconjunto de  $L^*$ , o sea que  $F \subset L^*$ .



## ENUMERABILIDAD DEL CONJUNTO F

Todo lenguaje constituido a partir de un alfabeto A enumerable, es también enumerable. Sea el alfabeto  $A = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , luego a todo conjunto finito de cadenas de A, le asociamos el simple orden alfabético, definido a partir del orden propio de A. Tal orden es denominado **ORDEN LEXICOGRÁFICO**.

### Ejemplo 1.4.1:

$L_0 = \{s_0s_1, s_1s_0s_1, s_0s_0s_1\}$  y se ordena de la siguiente forma :

$(s_0s_0s_1$	$s_0s_1$	$s_1s_0s_1)$
$\{ \Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow \}$
$( 1$	$2$	$3 )$

### 1.4.1.- REGLAS DE BUENA FORMACIÓN

El conjunto F de todas las EBF, se define por un conjunto de Reglas RECURRENTES, denominadas "**REGLAS DE BUENA FORMACIÓN**" y son las que a continuación detallamos:

#### REGLA I

*Una variable proposicional cualquiera es una EBF.*

$\forall p \in V; p \in F$  o lo que es lo mismo  $V \subset F$

#### REGLA II

*Las sub reglas siguientes permiten formar nuevas EBF, a partir de EBF ya existentes.*

#### REGLA II - 1

*Si A es una EBF, entonces  $\neg A$  es una EBF.*

#### REGLA II - 2

*Si A y B son EBF, entonces  $(A * B)$  es una EBF, donde  $*$   $\in K - \{\neg\}$ , es decir que \* es uno de los siguientes conectores: " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\Rightarrow$ ", " $\Leftrightarrow$ ".*

#### REGLA III

*Es también denominada la regla de CLAUSURA. Solamente las cadenas formadas por las REGLAS I, II - 1 y II - 2 son EBF.*

### Ejemplo 1.4.2:

"p", " $\neg p$ ", " $((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow t))$ "

Contra ejemplo:  $(p \wedge q \Rightarrow p)$

### Ejemplo 1.4.3: Ejemplos de variaciones con los símbolos de puntuación

$(p \wedge q \Rightarrow p)$  es una variación de  $((p \wedge q) \Rightarrow p)$

$(p \wedge q \vee r)$  es una variación de  $(p \wedge (q \vee r))$

$(p \vee q \vee r)$  es una variación de  $((p \vee q) \vee r)$



### 1.4.2.- RAZONAMIENTO POR RECURRENCIA SOBRE LA FORMACIÓN DE LAS EXPRESIONES

Debido a que las EBF son recurrentes, podemos establecer por RECURRENCIA las propiedades de las EBF.

Para establecer que toda EBF posee una propiedad P determinada, basta con demostrar que

- 1.- Todas las EBF iniciales (fijadas por la Regla I) poseen la propiedad P.
- 2.- Qué la aplicación de la Regla II - 1 a una EBF que posee P, da nacimiento a una EBF que posee P y que la aplicación de la Regla II - 2 a dos EBF que poseen P, da nacimiento a una EBF que posee P.

Traduciendo esta metodología a un lenguaje más accesible, podemos decir lo siguiente:

*Sea P una propiedad. La etapa 1, equivale a demostrar P para las fórmulas de complejidad 0.*

La etapa 2, equivale a demostrar la propiedad P para una fórmula cualquiera F, a partir de la suposición que cualquier fórmula de complejidad estrictamente inferior a F posee la propiedad P, lo que implica que si:

$$F = \neg G, G \text{ posee } P \text{ y que si } F = (G * H), G \text{ y } H \text{ poseen } P.$$

### EJEMPLO DE DEMOSTRACIÓN POR RECURRENCIA

Toda EBF contiene un número igual de paréntesis abiertos y de paréntesis cerrados.

- 1.- Es cierto para las EBF atómicas: una variable proposicional se escribe sin paréntesis.
- 2.- Sea F una fórmula cualquiera. Toda fórmula de complejidad estrictamente inferior a F posee la propiedad.  
F puede ser de dos tipos (a)  $F = \neg G$  y (b)  $F = (G * H)$ , donde (\*) es un conector binario, G y H son EBF de complejidad estrictamente inferior a F.

**Caso (a):** Por hipótesis, G posee un número igual de paréntesis abiertos y cerrados. Luego  $\neg G$  posee esta propiedad.

**Caso (b):** G y H poseen un número igual de paréntesis abiertos y cerrados (por ser EBF de complejidad inferior). Luego  $(G * H)$  contiene solamente un paréntesis abierto y uno cerrado, además de los que contienen G y H.

### 1.4.3.- NO AMBIGÜEDAD DEL LENGUAJE CONSTRUIDO

El lenguaje que hemos construido está exento de ambigüedad, esto significa que:

- 1.- Si una EBF A es de la forma  $\neg B$ , no existe una EBF B' distinta de B, tal que  $\neg B'$  sea lo mismo que A.
- 2.- Si una EBF A es de la forma  $(B * C)$ , donde \* designa un conector binario, no existirán EBF B' y C' distintas de B y C, tales que  $(B' * C')$  sea la misma expresión que A.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

#### **1.4.4.- DECIDIBILIDAD DEL CONJUNTO F DE LAS EXPRESIONES BIEN FORMADAS**

Como determinar si una cadena determinada es una EBF?

Si A es de longitud moderada, por simple lectura determinamos si A es o no es una EBF.

No existe un límite superior para una cadena y en consecuencia la simple lectura puede ser insuficiente. Es necesario buscar un procedimiento seguro, que al cabo de un número FINITO de etapas no diga, si A es o no es una EBF. Este procedimiento es un **ALGORITMO**.

Toda EBF que no está reducida a un variable proposicional única contiene un **Conector Principal**. Se busca si la cadena tiene un conector que cumpla con esta función. En caso negativo (y si la cadena no se reduce a una sola variable), la cadena no es una EBF.

En caso afirmativo, se debe verificar, empleando el mismo método, si las cadenas unidas por el conector principal son EBF, utilizando el mismo método o sea buscando el conector principal de cada una de las cadenas componentes y así sucesivamente.

Consideremos a continuación el Algoritmo desarrollado:

Sea C la cadena de caracteres que debemos examinar:

(1)  $C = " p "$  (donde p es cualquier v.p.) **STOP. EBF**

(2)  $C = \neg A$  (donde A designa una cadena) **TESTEAR A**

(3)  $C = ( B )$  (donde B designa una cadena)

3.1 B No termina con un paréntesis cerrado ")" **LEER B DE DERECHA A IZQUIERDA, BUSCAR EL PRIMER CONECTOR BINARIO**

3.1.1 Se encuentra uno:  $B = C * D$  **TESTEAR C Y D**

3.1.2 No se encuentra conector. **STOP. NO EBF**

3.2 B termina con ")" **LEER B DE DERECHA A IZQUIERDA BUSCAR EL PRIMER CONECTOR BINARIO POSTERIOR AL PRIMER PARÉNTESIS ABIERTO "(" DE INDICE NULO EN B (donde el índice de una aparición de paréntesis es el número totalizado en esa aparición, luego de haber contado + 1 por cada paréntesis abierto y - 1 por cada paréntesis cerrado)**

3.2.1 Se encuentra uno:  $B = E * F$  **TESTEAR E Y F**

3.2.2 No se encuentra **STOP. NO EBF**

(4) No nos encontramos en ninguna de las situaciones precedentes. **STOP. NO EBF**

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

### 1.5- CONVENCIONES PARA ABREVIAR LA ESCRITURA

- 1.- En general suprimimos los paréntesis exteriores y escribiremos, por ejemplo " $p \vee (q \vee r)$ " en lugar de " $(p \vee (q \vee r))$ ".
- 2.- Eventualmente reemplazaremos los paréntesis por corchetes o llaves sin prestar a esto último ninguna significación particular.
- 3.- Hasta ahora hemos respetado la convención que consiste, para hablar de una cadena de caracteres, en escribir dicha cadena entre comillas, por ejemplo, hemos escrito " $(p \Rightarrow q)$ " es una EBF".  
Por un abuso de escritura universalmente aceptado, escribiremos en adelante " $(p \Rightarrow q)$  es una EBF".

#### OBSERVACIÓN

Los signos  $a, b, c, \dots, A, B, \dots, *, \text{etc.}$ , que solemos introducir para determinar, ya sea una variable proposicional, ya sea un conector o una fórmula, no pertenece al alfabeto  $L$  del lenguaje artificial; como las comillas, pertenecen a la lengua que utilizamos para hablar del lenguaje artificial y que llamamos metalenguaje. Estos signos son denominados **VARIABLES SINTÁCTICAS**. Destaquemos en este sentido, que el enunciado de las reglas, son en general las variables sintácticas quienes intervienen.

### 1.6- OPERADORES O CONECTIVOS MONODIADICOS

Existen un conjunto de conectores u operadores monodiadicos, igual a un total de 4 (cuatro), a los cuales se los denomina como **Conectores  $f$** . Estos conectores son:

- $f_0$  Una función cuyo resultado es siempre falso, independientemente del valor que tome la proposición a la cual afecta.
- $f_1$  Corresponde al conector de la negación,  $\neg p$ , discutido previamente en este capítulo.
- $f_2$  Una función que simplemente entrega el mismo valor de la proposición afectada por el conectivo considerado:  $f_2(p) \equiv p$
- $f_3$  Una función cuyo resultado es siempre verdadero, independientemente del valor que tome la proposición a la cual afecta.

### 1.7.- OPERADORES O CONECTIVOS DIÁDICOS

Existen 16 posibles conectores diádicos o binarios, identificados con las letras  $g_0$  a  $g_{15}$ . De estos, seis representan a conectivos degenerados correspondientes a **verum** (función binaria que siempre retorna el valor verdadero, una tautología binaria  $g_{15}$ ), **falsum** (que siempre retorna el valor falso de la proposición a la cual afecta,  $g_0$ ),  $p$  (siempre toma el valor de  $p$ ,  $g_{12}$ ),  $q$  (siempre toma el valor de  $q$ ,  $g_{10}$ ),  $\neg p$  (siempre toma el valor de  $\neg p$ ,  $g_3$ ), y  $\neg q$  (siempre toma el valor de  $\neg q$ ,  $g_5$ ), dejando 10 conectivos realmente de interés para las aplicaciones lógicas. Por supuesto dentro de ellos están los conectivos considerados más comunes, como por ejemplo; la disyunción  $\vee$  ( $g_{14}$ ), la conjunción  $\wedge$  ( $g_8$ ), la doble implicación  $\Leftrightarrow$  ( $g_9$ ), y la implicación  $\Rightarrow$  (la cual no es conmutativa, por lo tanto existen dos conectivos  $g_{11}$  y  $g_{13}$ ). Los cinco conectivos restantes se detallan a continuación:

- $g_6$  Este es el conectivo denominado **OR Exclusivo** o la **No Equivalencia**, representado por el símbolo  $\nabla$ , la negación de la equivalencia. Este conectivo puede ser representado por la siguiente expresión:



$$p \vee q =_{\tau} (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$$

De un modo alternativo podemos expresar este conectivo de la siguiente forma:

$$p \vee q =_{\tau} (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$$

- $g_1$  Este es el conectivo **NOR** o **Junta Denegada** o **Flecha de Pierce**, el cual puede ser denotado por el siguiente símbolo:  $\downarrow$ .  
Puede ser representada como la negación de la disyunción, expresada de la siguiente forma:

$$p \downarrow q =_{\tau} \neg (p \vee q) =_{\tau} \neg p \wedge \neg q$$

- $g_1$  Este es el conectivo **NAND** o de **Incompatibilidad** o el **Pincel de Sheffer**, está denotado por el siguiente símbolo  $/$  y es considerado como la negación de la conjunción de la siguiente forma:

$$p / q =_{\tau} \neg (p \wedge q) =_{\tau} \neg p \vee \neg q$$

- $g_4, g_2$  Estas dos funciones son consideradas como la **No Implicación**, denotadas por el símbolo  $\rightarrow$  y representada por la siguiente expresión o fórmula lógica:

$$p \rightarrow q =_{\tau} \neg (p \Rightarrow q) =_{\tau} p \wedge (\neg q)$$

## 1.8.- OPERADORES O CONECTIVOS TRIÁDICOS

Podemos utilizar los mismos argumentos para determinar los Operadores o Conectivos Triádicos, aquellos que toman tres operandos o proposiciones simples. Algunos de ellos son de interés directo sobre un total 256 posibles conectivos. Estos conectivos triádicos son difíciles de escribirlos como operadores, ya que no pueden ser representados por un simple símbolo infijo. Describiremos aquellos que son considerados importantes, a saber:

### Disyunción Condicionada

Es representada por la siguiente expresión:

$$[p, q, r] =_{\tau} (q \wedge p) \vee (\neg q \wedge r)$$

La proposición del medio  $q$  actúa como un llave de determinado tipo.

### Incompatibilidad Condicionada

Está relacionada con el anterior conectivo, y se escribe de la siguiente forma:

$$[[p, q, r]] =_{\tau} (q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge \neg r)$$

Además es la negación de la Disyunción Condicionada, tal como se indica:

$$[[p, q, r]] =_{\tau} \neg [p, q, r]$$

### $L_2$ (Mayoría)

El conectivo considerado:

$$L_2(p, q, r)$$

toma el valor verdadero si y sólo si dos o más de las proposiciones participantes toman el valor verdadero.  $L_2$  significa **al menos dos**. Este conectivo puede ser expresado de la siguiente forma:

$$L_2(p, q, r) =_{\tau} (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$$

Alternativamente podemos utilizar la disyunción condicionada y escribir la siguiente expresión:

$$L_2(p, q, r) =_{\tau} [q \vee r, p, q \wedge r]$$

### $L_1$ (Al Menos Uno)

De la misma forma que definimos el anterior conectivo, definimos ahora el conectivo  $L_1(p, q, r)$ , de la siguiente forma:

$$L_1(p, q, r) =_{\tau} p \vee q \vee r$$

### $L_3$ (Al Menos Tres)

De la misma forma que definimos el anterior conectivo, definimos ahora el conectivo  $L_3(p, q, r)$ , de la siguiente forma:

$$L_3(p, q, r) =_{\tau} p \wedge q \wedge r$$

ISBN 987-43-9433-1



## 1.9.- NOCIÓN GENERAL DE LA SEMÁNTICA DEL LENGUAJE FORMAL

En el capítulo precedente definimos la sintaxis del lenguaje proposicional. Pudimos comprobar que posee las dos buenas propiedades que la hace utilizable en lógica formal, la decidibilidad sintáctica y la no ambigüedad de lectura.

El presente capítulo tiene por función definir una **interpretación** para el lenguaje proposicional. Hasta ahora, en efecto, nuestras EBF o expresiones del lenguaje son puras combinaciones de signos sin sentido alguno. La definición de una interpretación revierte esta situación y dota al lenguaje de un poder singular de expresión. Este aspecto del lenguaje se denomina **SEMÁNTICA DEL LENGUAJE FORMAL**.

## 1.10.- DEFINICIÓN ALGEBRAICA DE LA SEMÁNTICA DEL LENGUAJE PROPOSICIONAL

**Advertencia:** A los efectos de poder tratar de la manera booleana la semántica del lenguaje, confundiremos los valores de verdad (FALSO, VERDADERO) con la dupla (0, 1).

### 1.10.1.- DISTRIBUCIÓN DE LOS VALORES DE VERDAD (D.D.V.V.)

Una distribución de los valores de verdad es una aplicación  $\delta$  del conjunto  $V$  de todas las variables proposicionales sobre el conjunto  $Z = \{0, 1\}$ .

$$\delta : V \rightarrow Z$$

El conjunto de todas las distribuciones de valores de verdad será el siguiente cardinal  $2^{\text{card}(V)}$ . Denominaremos  $V_{\{0, 1\}}$  como el conjunto de todas las distribuciones de verdad y en general  $A_B$  es el conjunto de todas las aplicaciones de un conjunto  $A$  sobre un conjunto  $B$ . Donde

**A** es el conjunto de partida y **B** el conjunto de llegada.

### 1.10.2.- EVALUACIÓN DE LAS EBF

Sea **F** una fórmula donde figuran los átomos  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_K$ . La semántica formal **no** dice bajo que condición  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_K$  son verdaderos o falsos. Lo que permite deducir, en cambio, es cómo un **Interpretación** determinada de  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_K$ , es decir, una determinada distribución de valores de verdad restringida a  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_K$ , determina el valor de verdad de la fórmula **F**.

Por ejemplo, de la semántica formal se deduce que si una distribución de verdad, asigna a la variable **p** el valor 0 y a la variable **q** el valor 1, el valor de verdad ( $\delta(p) = 0$  y  $\delta(q) = 1$ ) de la fórmula  $p \Rightarrow q$  es 1, el de la fórmula  $p \wedge q$  es 0, el de la fórmula  $\neg p$  es 1, etc.

En general estos valores se introducen por medio de las 5 (cinco) "tablas de verdad" correspondientes a cada uno de los conectivos lógicos o proposicionales. Sin embargo, esto apenas daría la semántica de las fórmulas más simples, conectadas por un solo conectivo, cuando en realidad es necesario definir la semántica de **toda** expresión del lenguaje. Sólo la definición por recurrencia puede satisfacer esta exigencia.

### DEFINICIÓN POR RECURRENCIA DE LA SEMÁNTICA DE LAS EBF

Sea  $\delta$  una distribución de valores de verdad, de forma tal que asigna a las variables proposicionales  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$ , valores tomados del conjunto  $\{0, 1\}$ , que anotaremos de la siguiente forma  $\delta(p_1), \delta(p_2), \dots, \delta(p_n), \dots$ , denominadas funciones de verdad.

Definir el valor de verdad que toma una fórmula **A** de acuerdo con las distribuciones  $\delta$ , es definir una aplicación  $\Phi_\delta$  del conjunto **F** de las EBF sobre el conjunto  $Z = \{0, 1\}$ .

$$\Phi_\delta : F \rightarrow \{0, 1\}$$

La función  $\Phi_\delta$  se define por recurrencia de la siguiente forma:

1.-  $\Phi_\delta(p) = \delta(p) \quad ; \quad \forall p \in V$

2.-  $\Phi_\delta(\neg A) = \neg' \Phi_\delta(A) = 1 - \Phi_\delta(A)$

Donde el signo "-" designa la simple diferencia aritmética.

3.-  $\Phi_\delta(A \wedge B) = \wedge'(\Phi_\delta(A), \Phi_\delta(B)) = \text{MIN}(\Phi_\delta(A), \Phi_\delta(B))$

Donde "MIN" designa el mínimo de acuerdo con el orden natural de la aritmética.

Ejemplo:  $\text{MIN}(0, 0) = 0, \text{MIN}(1, 0) = 0, \text{MIN}(1, 1) = 1$

4.-  $\Phi_\delta(A \vee B) = \vee'(\Phi_\delta(A), \Phi_\delta(B)) = \text{MAX}(\Phi_\delta(A), \Phi_\delta(B))$

Donde "MAX" designa el máximo de acuerdo con el orden natural de la aritmética.

Ejemplo:  $\text{MAX}(0, 0) = 0, \text{MAX}(1, 0) = 1, \text{MAX}(1, 1) = 1$

5.-  $\Phi_\delta(A \Rightarrow B) = \Rightarrow'(\Phi_\delta(A), \Phi_\delta(B)) = \text{MAX}(\Phi_\delta(\neg A), \Phi_\delta(B))$

6.-  $\Phi_\delta(A \equiv B) = \equiv'(\Phi_\delta(A), \Phi_\delta(B)) = \text{MIN}(\Phi_\delta(A \Rightarrow B), \Phi_\delta(B \Rightarrow A))$





**Observaciones:**

- 1.- No se deben confundir los conectivos proposicionales  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ , que son signos del lenguaje formal, con las funciones inducidas por cada uno de los conectivos y que los denominamos :  $\neg', \wedge', \vee', \Rightarrow', \Leftrightarrow'$ .
- 2.- La definición formal de la semántica exige en principio, para conocer el valor de verdad  $\Phi_\delta$  de una fórmula F, que esté definida por la aplicación  $\delta$ , cuyo conjunto de partida es **V**.

**Teorema de Restricción**

El valor de verdad de EBF sólo depende de la variables proposicionales (v.p.) que intervienen en esta EBF.

**Demostración**

Sea F una EBF y **a** una variable proposicional, que no figura en F. Sea  $\delta$  una distribución de valores de verdad cualquiera. Definimos  $\delta'$  de la siguiente manera:

$$\delta'(p) = \delta(p) \quad \text{si } p \neq a$$

$$\delta'(p) = 1 - \delta(a)$$

Demostremos que  $\Phi_{\delta'}(F) = \Phi_\delta(F)$  por inducción sobre la formación de F:

- 1.-  $F = p$ , luego  $a \neq p$  y por definición  $\delta'(p) = \delta(p)$ . Por lo tanto, se cumplirá que :  $\Phi_\delta(p) = \Phi_{\delta'}(p)$ .
- 2.-  $F = \neg G$ ,  $\Phi_\delta(F) = 1 - \Phi_\delta(G)$ .  
Pero por hipótesis de recurrencia  $\Phi_\delta(G) = \Phi_{\delta'}(G)$ . Luego tenemos que :  
$$\Phi_\delta(F) = 1 - \Phi_{\delta'}(G) = \Phi_{\delta'}(\neg G) = \Phi_{\delta'}(F).$$
- 3.-  $F = G * H$  (donde \* es cualquier conectivo binario del lenguaje)  
$$\Phi_\delta(F) = **(\Phi_\delta(G), \Phi_\delta(H)) = **_{H.R.}(\Phi_{\delta'}(G), \Phi_{\delta'}(H)) = \Phi_{\delta'}(F)$$

**Observaciones:**

- 1.- En lo sucesivo llamaremos **L (F)** (Se lee lenguaje de F) al conjunto de variables proposicionales, que figuran en la fórmula F.
- 2.- Esta inducción puede servir de esqueleto para las pruebas venideras; el esquema es el siguiente:
  - (a) Probar la propiedad para toda la fórmula atómica.
  - (b) Suponer que la propiedad está demostrada para **toda** fórmula de complejidad **estrictamente** inferior a k y demostrar la propiedad para **toda** fórmula de complejidad igual a k (recurrencia amplia). Esto equivale a darse una fórmula F cualquiera y descomponerla según los dos únicos casos que se presentan de acuerdo a la sintaxis del lenguaje: 2.1.  $F = \neg G$  ; 2.2.  $F = G * H$ .

**Algunas Consideraciones Respecto De Las Funciones De Verdad**

En la expresión matemática  $x = 2.y$ , se establece una vinculación tal entre las variables x e y, que cualquiera sea el valor de y, x asumirá un valor equivalente al valor de y multiplicado

ISBN 987-43-9433-1



por 2. El valor de  $x$ , pues, depende del valor de  $y$ . Eso quiere expresarse cuando se afirma que  $x$  es una función de  $y$ .

También la lógica estudia la relación funcional que existe entre las variables proposicionales y/o EBF. Consideremos el siguiente ejemplo:

**Las naranjas maduran y el invierno se avecina.**

que simbolizamos como  $p \wedge q$ , es una fórmula o EBF molecular. Será como toda proposición, verdadera o falsa. A la lógica le interesa establecer de qué modo el valor de verdad (V o F) de las proposiciones moleculares depende, es una función, de los valores de verdad de las proposiciones que componen a dichas proposiciones moleculares. En nuestro ejemplo, la proposición compuesta será verdadera cuando las proposiciones "**las naranjas maduran**", "**el invierno se avecina**" sean ambas verdaderas. Bastará que una de ellas sea falsa para que la proposición compuesta también lo sea. Y si son falsas las dos proposiciones atómicas, con mayor razón será también falsa la proposición molecular. Cuando el valor de verdad de una proposición compuesta depende de los valores de verdad de las proposiciones que la componen, estamos ante una función de verdad.

Se preguntará, ¿ acaso no ocurre eso siempre?, ¿ acaso el valor de verdad de una proposición compuesta no depende invariablemente de las proposiciones que la componen ? La respuesta es negativa. Pues hay proposiciones moleculares cuya verdad o falsedad no están condicionadas solamente por los valores de verdad de las proposiciones componentes. Veamos:

**Las naranjas maduran porque el invierno se avecina**

Hemos reemplazado en el mismo ejemplo el conectivo lógico  $\wedge$  por otro no lógico , "**porque**". Este último alude a un modo de relación entre fenómenos de la realidad. Aquí puede ocurrir que ambas proposiciones atómicas sean verdaderas y que la proposición compuesta no lo sea. Tal sería el caso si "**Las naranjas maduran**" fuera un fenómeno cuya causa no es "**El invierno se avecina**". La proposición compuesta que comentamos exige, por un lado, que ambas proposiciones componentes sean verdaderas. Por otro, que sea verdadero también el nexo objetivo que vincula ambos órdenes de fenómenos. A esto se debe que una proposición compuesta semejante no sea función de las proposiciones componentes. Y como la lógica es una disciplina formal, ese tipo de conectivas como "porque", "a fin de qué", por ej., que suponen una referencia al mundo real, no serán consideradas por ella.

Tradicionalmente se distingue entre la **compresión** y la **extensión** de las proposiciones.

***La compresión es el significado de la proposición, aquello que ella significa.***

***La extensión es el ámbito, mayor o menor según que la proposición sea universal, particular o individual, al cual la proposición hace referencia.***

Si la lógica actual no se ocupa de la compresión, es decir del contenido significativo de las proposiciones, será **extensional**. Pero ¿ qué debe entenderse por extensión de una proposición ?. No la amplitud de realidad que la proposición abarca, porque la lógica es ciencia formal, no se vincula con los hechos del mundo. Para la lógica proposicional, la extensión de una proposición se reduce a cubrir este ámbito mínimo: ser verdadera o falsa.

En rigor, para esta lógica hay sólo dos proposiciones; una verdadera, otra falsa. Las infinitas proposiciones posibles pueden reducirse a dos grupos. el de las verdaderas, el de las falsas. Todas las verdaderas son equivalentes. Todas las falsas son equivalentes. La lógica bivalente no distingue (pues no se ocupa del sentido) entre:

**El hombre llegó a la luna**

**Kant fue alemán**



Le basta saber que son verdaderas. Tampoco ve diferencia alguna entre:

**La Tierra es cuadrada**

**Los monos hablan sánscrito**

Arriba dijimos que cuando el valor de verdad de una proposición molecular depende de los valores de verdad de las proposiciones que la componen, estamos ante una función de verdad. Pero no es imprescindible que una función de verdad sea una proposición molecular. Un esquema proposicional más simple, como  $\neg p$ , por ejemplo, también es función de verdad.

### **1.11.- TABLAS DE VERDAD**

Veamos ahora con más detalles cómo un esquema proposicional realizado con una o más variables y conectivos es función de verdad de la proposición o proposiciones que la componen. Para ello formamos una **Tabla de Verdad**. Esta tabla se compone de dos partes. Una, ubicada a la izquierda, es la columna de **referencia**. Se coloca allí todos los valores posibles que pueden asumir una o más proposiciones. Si se trata de una sola proposición, la columna de referencia será:

<b>p</b>	
V	
F	

Si se emplean dos proposiciones, la columna de referencia es más compleja:

<b>p</b>	<b>q</b>	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

Si se utilizan tres variables proposicionales, la tabla tendrá la siguiente forma:

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>r</b>	
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

La columna de referencia es el punto de partida para el cálculo proposicional. Cada una de sus líneas horizontales constituye una o más premisas para resolver qué valor le corresponden a una fórmula ubicada en el lado derecho de la tabla. Veamos un ejemplo, el más simple. Si queremos conocer cuál es el valor de verdad de la fórmula  $\neg p$ , empleamos la tabla con una sola variable:

<b>p</b>	<b><math>\neg p</math></b>
V	F
F	V

La columna ubicada debajo de  $\neg p$  es la **columna matriz** de dicha fórmula. Ella muestra el resultado del cálculo; cuando **p** es **V** (valor consignado en la primer línea horizontal de la columna de referencia),  $\neg p$  es **F**; cuando **p** es **F** (segunda línea),  $\neg p$  es **V**. Nótese, pues, que la proposición  $\neg p$  es una función de (depende de) los valores de la proposición **p**, que forma parte de  $\neg p$ .

### **1.12.- DEFINICIÓN DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS**

En el ejemplo del apartado anterior, hemos mostrado cómo  $\neg p$  es una función de verdad. Pero hemos definido también la negación. En efecto, la columna de la derecha, la columna matriz donde consignamos los resultados del cálculo, define al elemento " $\neg$ ", operador monódico. Daremos a continuación las tablas de verdad de los restantes conectivos lógicos o funtores de verdad.



\* La conjunción o producto lógico:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Es decir que la conjunción de dos proposiciones sólo es verdadera cuando ambas proposiciones lo son. Basta que una de ellas sea falsa para que también lo sea la proposición compuesta.

\* La disyunción o suma lógica:

Es preciso distinguir en este conectivo dos sentidos muy diferentes que también posee la "O" en el lenguaje español. Veamos los dos ejemplos siguientes:

**Juan es escritor o músico**  
**La mesa es rectangular o circular**

En el último ejemplo, las dos proposiciones vinculadas por "O" son incompatibles. Una excluye a la otra y lo mismo ocurre al revés. Para que la proposición molecular sea verdadera, pues, es preciso que una de las proposiciones componentes sea falsa y es preciso también que otra sea verdadera. En el primer ejemplo, en cambio no hay incompatibilidad entre ambas proposiciones. "Juan es escritor" y "Juan es músico" pueden ser ambas verdaderas. Lo cual no ocurre con "La mesa es circular" y "La mesa es rectangular".

Llamaremos **Inclusiva** a este tipo de disyunción que acepta la verdad de ambas proposiciones componentes, pero exige que una de las proposiciones sea verdadera para que también el conjunto lo sea. Llamamos **Exclusiva** a la disyunción que impone como requisito para que la proposición compuesta sea verdadera, que una de las proposiciones componentes sea falsa y la otra verdadera. Para esta disyunción exclusiva empleamos un signo propio : " $\vee$ ". Su tabla de verdad o matriz es distinta de " $\vee$ ".

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \vee\vee q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Como veremos, puede prescindirse de la disyunción exclusiva sin que ello acarree dificultades para el cálculo. Puede, en efecto, expresarse lo mismo que la expresión compuesta  $p \vee\vee q$  recurriendo al bicondicional.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

\* **El bicondicional o equivalencia :**

p	q	$p \equiv q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Lo que afirma el bicondicional es que **p** es condición necesaria y suficiente para **q**, del mismo modo que **q** es condición necesaria y suficiente para **p**. En

**Si y sólo si un sistema está aislado, entonces su energía total es constante.**

Queremos afirmar que la primera proposición es equivalente a la segunda, que cualquiera de ambas es condición necesaria y suficiente de la otra. En pocas palabras, que ambas proposiciones son equivalentes. En nuestro ejemplo hemos tomado dos proposiciones cuyas significaciones son fácticamente equivalentes. Pero ello no debe ocurrir.

**Si y sólo si los vegetales vuelan, entonces Sócrates vive.**

**Si y sólo si la leche alimenta, la tierra se mueve.**

En estos dos ejemplos la tabla nos informa que existe equivalencia. El primero, en efecto, es un ejemplo de la última línea horizontal (F, F); el segundo lo es de la primera línea (V, V). Los resultados muestran, en ambos casos, V. A nadie se le escapará que dicha equivalencia está lejos de cumplirse en el campo de las significaciones de las proposiciones en cuestión. Pero debemos recordar una vez más que la significación no es tomada en cuenta por la lógica de las proposiciones. ¿De qué equivalencia hablamos, entonces?. Pura y simplemente de ésta: F es equivalente a F, por eso las dos proposiciones del primer ejemplo dan V; igualmente V es equivalente a V, por eso las dos proposiciones del segundo ejemplo conducen al resultado V.

\* **El condicional o implicación:**

Este conectivo presenta algunas dificultades, pues su equivalencia con el giro gramatical "**Si ..... entonces**" es solo parcial. En efecto, "**Si ..... entonces**" en el lenguaje español permite conectar dos proposiciones en muy diversos sentidos. Los siguientes ejemplos son algunos de ellos:

- 1 Si es mamífero, es vertebrado.
- 2 Si el peso supera los mil kilogramos, la balanza se estropea.
- 3 Si estuviera muerto no respiraría.
- 4 Si se decide hoy, lo hará mañana.
- 5 Si todos los triángulos son figuras, el escaleno es figura.

Todos son enunciados hipotéticos. En la estructura de estos enunciados hay, al menos, tres elementos importantes: (a) el **antecedente**, es decir la proposición comprendida entre el signo "Si" y el signo "entonces"; (b) el **consecuente**, o sea la proposición que sigue al signo "entonces"; (c) la afirmación de que siendo verdadero el antecedente, el consecuente también lo será. Es



decir que estos enunciados afirman, no que el antecedente sea verdadero, sino que en caso de serlo también lo será el consecuente. Esto quiere afirmarse cuando se dice que el antecedente **implica** al consecuente.

Ahora bien, esa implicación es de naturaleza múltiple. Los ejemplos antes mencionados son algunos modos de implicación. Los dos primeros establecen una relación entre dos órdenes de la realidad; 1 señala un vínculo permanente entre dos fenómenos; 2 indica no sólo un nexo constante entre dos hechos sino que además la producción del segundo por el primero, es decir apunta a un nexo causal. 3 alude no ya a una vinculación entre dos fenómenos reales sino posibles. Es más sugiere que el antecedente es falso, que no es un hecho. De ahí el nombre de contra fácticos que reciben estos enunciados hipotéticos formulados de un modo subjuntivo. Los órdenes que enlaza 4 son de distinta naturaleza; uno pertenece al ámbito de la conciencia, el otro forma parte de la realidad. 5 muestra una implicación completamente distinta porque no se refiere ni a la realidad ni a un hecho de conciencia; establece un nexo entre dos órdenes formales, ideales. Aquí el antecedente implica necesariamente, forzosamente al consecuente.

Pero entre tantas diferencias (y otras muchas que aún pueden señalarse) de sentido que tiene "**Si ..... entonces**" en un idioma natural, como el español, habrá quizás un elemento común, un parentesco básico afín a esos múltiples sentidos. La lógica, cuando emplea el signo " $\Rightarrow$ " pretende representar ese núcleo descarnado del concepto de implicación, sin procurar recoger en él, las múltiples significaciones que le otorga el lenguaje natural.

Cualquiera sea el ejemplo de condicional que tomemos, lo que allí se afirma básicamente es que aceptando la verdad del antecedente, el consecuente no puede ser falso. Es decir que al afirmar que  $p \Rightarrow q$ , suponemos que  $p \wedge \neg q$  será una proposición falsa. En la oración 1, por ejemplo, decir "**Es mamífero y no vertebrado**" sería precisamente lo opuesto de lo que el condicional quiso afirmar. Ahora bien, si la oración "**Es mamífero y no vertebrado**" es lo opuesto de "**Si es mamífero entonces es vertebrado**", una proposición **equivalente** a este último condicional, será la negación de "**Es mamífero y no vertebrado**". En símbolos lógicos, tal negación se expresa de la siguiente forma:  $\neg (p \wedge \neg q)$ . Esta fórmula es, efectivamente, equivalente a  $p \Rightarrow q$ . Por lo tanto, en la tabla de verdad ambas fórmulas tendrán igual matriz de valores de verdad. Veamos:

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg (p \wedge \neg q)$	$p \Rightarrow q$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V

Esta vez hemos utilizado la misma columna de referencia para calcular el valor de varias proposiciones. Como queríamos establecer el valor de  $\neg (p \wedge \neg q)$ , empezamos calculando  $\neg q$ , luego  $p \wedge \neg q$ . Para el cálculo de Esta última fórmula usamos como referencia la columna de  $p$  y la de  $\neg q$ ; se tuvo en cuenta, asimismo, la definición de conjunción. Una vez resuelto  $p \wedge \neg q$ , es fácil resolver también su negación. Para ello simplemente se invierten los valores de verdad de la fórmula  $p \wedge \neg q$ .

Resumiendo, una proposición molecular formada por el signo de implicación es verdadera o cuando su consecuente es verdadero o cuando su antecedente es falso. El único caso en que es falsa se da cuando siendo verdadero el antecedente, su consecuente es falso.



### 1.12.1.- FORMULAS PROPOSICIONALES

En lugar de utilizar la palabra proposición o expresión proposicional, podemos utilizar la palabra **fórmula**, o más bien específicamente **fórmula proposicional**. Las fórmulas aceptadas sintácticamente pueden describirse como que tienen una gramática libre de contexto simple similar a las gramáticas BNF utilizadas para describir lenguajes de programación.

La sintaxis es de la misma forma, pero expresada matemáticamente diferente a lo visto en las secciones y capítulos anteriores, utilizando nuevos conceptos empleados por Chomsky. Nos servirá además como base simbólica de la teoría en la construcción de compiladores.

Las reglas gramaticales son de la siguiente forma:

$$\text{símbolo} ::= \text{símbolo} - 1 \dots \text{símbolo} - N$$

donde *símbolo* puede ser reemplazado por cualquier secuencia de *N* símbolos. Reglas de la forma:

$$\text{símbolo} ::= \text{símbolo} - 1 \mid \dots \mid \text{símbolo} - N$$

donde esta regla significa que *símbolo* puede ser reemplazado por cualquiera de los símbolos del lado derecho de la regla. Los símbolos que aparecen en el lado izquierdo son denominados **no terminales**, mientras que los símbolos que aparecen a la derecha de la regla son denominados **terminales**. Los no terminales representan gramaticalmente clases mientras que los terminales son palabras del lenguaje. Comenzando en un no terminal inicial, describir un no terminal reemplazándolo con una secuencia de símbolos del lado izquierdo de la regla. Esta construcción finaliza cuando la secuencia de símbolos consiste únicamente de terminales. Tal cadena de símbolos está **correcta sintácticamente** o **bien formada** en el lenguaje definido por la gramática.

En el cálculo proposicional los terminales son los conectivos lógicos y el conjunto de símbolos arbitrarios denominados como el conjunto de **proposiciones atómicas o átomos**. Los átomos son denotados con letras minúsculas del alfabeto y posiblemente con subíndice.

**Definición 1.12.1:** Una **fórmula** en el cálculo proposicional es una cadena generada por la siguiente gramática:

$$\begin{aligned} \text{fórmula} &::= p && \text{Para cualquier } p \in P \\ \text{fórmula} &::= \neg \text{fórmula} \\ \text{fórmula} &::= \text{fórmula op fórmula} \\ \text{op} &::= \vee \mid \wedge \mid \Rightarrow \mid \Leftarrow \mid \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Por ejemplo, la siguiente secuencia de símbolos muestra la derivación de la fórmula proposicional  $p \wedge q$ , a partir de una *fórmula* no terminal inicial.

- 1.- *fórmula*
- 2.- *fórmula op fórmula*
- 3.- *fórmula  $\wedge$  fórmula*
- 4.-  *$p \wedge$  fórmula*
- 5.-  *$p \wedge q$ ,*

Cada fórmula tiene un único **árbol de formación** asociado con la representación de la aplicación de las reglas gramaticales utilizadas a tal fin. La Figura 2.4.1 indica el árbol de formación que representa la siguiente fórmula:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \Rightarrow \neg q$$





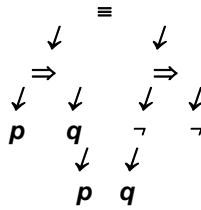


Figura 1.12.1 Árbol de Formación

de acuerdo con la siguiente derivación :

- 1.- *fórmula*
- 2.- *fórmula*  $\equiv$  *fórmula*
- 3.- *fórmula*  $\Rightarrow$  *fórmula*  $\equiv$  *fórmula*
- 4.-  $p \Rightarrow$  *fórmula*  $\equiv$  *fórmula*
- 5.-  $p \Rightarrow q \equiv$  *fórmula*
- 6.-  $p \Rightarrow q \equiv$  *fórmula*  $\Rightarrow$  *fórmula*
- 7.-  $p \Rightarrow q \equiv \neg$  *fórmula*  $\Rightarrow$  *fórmula*
- 8.-  $p \Rightarrow q \equiv \neg p \Rightarrow$  *fórmula*
- 9.-  $p \Rightarrow q \equiv \neg p \Rightarrow \neg$  *fórmula*
- 10.-  $p \Rightarrow q \equiv \neg p \Rightarrow \neg q$

Sin embargo, la anterior secuencia de símbolos es ambigua y puede ser igualmente representada por otro árbol de formación, que por ejemplo puede ser obtenido expandiendo los no terminales en una secuencia diferente. Existen tres modos diferentes de resolver ambigüedades si ellas representan fórmulas. La secuencia lineal de símbolos puede ser creada por un pre-orden transversal del árbol de formación:

- \* Considerar la raíz.
- \* Considerar el sub-árbol izquierdo.
- \* Considerar el sub-árbol derecho.

otorgando la siguiente expresión para el primer árbol :

$$\equiv \Rightarrow pq \Rightarrow \neg p \neg q$$

y la siguiente expresión para el segundo árbol :

$$\Rightarrow p \equiv q \neg \Rightarrow p \neg q$$

Esta notación es denominada **Notación Polaca** luego que el grupo de lógicos comandados por J. Lukasiewicz la inventaran a principios de siglo. La notación es difícil de interpretar para muchas personas y no es muy utilizada, excepto en la representación interna de una expresión en una computadora y en algunas operaciones de cálculo. La ventaja de la notación polaca es que una expresión puede ser ejecutada o calculada en un orden lineal a medida que aparecen los símbolos.

El segundo modo de resolver una ambigüedad es a través de la utilización de paréntesis. La gramática deberá cambiarse a las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} \text{fórmula} &::= p && \text{Para cualquier } p \in P \\ \text{fórmula} &::= (\neg \text{fórmula}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{fórmula} &::= (\text{fórmula } op \text{ fórmula}) \\ op &::= \vee \mid \wedge \mid \Rightarrow \mid \Leftarrow \mid \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Las dos fórmulas siguientes son ahora representadas por distintas cadenas y de esa forma no existirá ambigüedad:

$$((p \Rightarrow q) \equiv ((\neg q) \Rightarrow (\neg p)))$$

$$(p \Rightarrow (q \equiv (\neg (p \Rightarrow (\neg q)))))$$

El problema con los paréntesis es que cargan demasiado a las fórmulas y las hacen difícil de leerlas.

El tercer modo de resolver la ambigüedad dentro de las fórmulas o expresiones lógicas es definir las convenciones de precedencia y de asociatividad entre los conectivos lógicos. A través del uso de los paréntesis podemos determinar y obtener la asociatividad en las fórmulas proposicionales. El orden de precedencia de los conectivos lógicos en las fórmulas es el siguiente de mayor a menor :

$$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow, \equiv$$

### 1.12.2.- INTERPRETACIONES BOOLEANAS

Consideremos las expresiones aritméticas. Dada una expresión  $E$  tal como por ejemplo la siguiente  $a * b + 2$ , podemos asignar valores a los elementos  $a$  y  $b$  y luego evaluar la expresión. Por ejemplo si  $a = 2$  y  $b = 3$  entonces la evaluación de  $E$  es de 8. Debemos ahora definir un concepto análogo para las fórmulas booleanas o expresiones lógicas, o más bien las denominadas interpretaciones booleanas, que por razones históricas utilizan terminologías diferentes.

Antes de seguir adelante debemos incluir una regla más dentro de la sintaxis de las fórmulas proposicionales y es aquella que considera a dos proposiciones atómicas constantes **falsas y verdaderas**, que de algún modo es similar a la valorización de las expresiones lógicas o de las proposiciones. En consecuencia tenemos que:

$$\text{fórmula} ::= \text{falso} \mid \text{verdadero}$$

**Definición 1.12.2.1:** Sea  $A$  una fórmula proposicional y sea el conjunto  $\{p_1, \dots, p_n\}$  de proposiciones o átomos que aparecen en  $A$ . Una **Interpretación** para  $A$  es la siguiente función:

$$v : \{p_1, \dots, p_n\} \Rightarrow \{V, F\}$$

o sea que  $v$  asigna uno de los valores de verdad  $F$  o  $V$  a la fórmula  $A$  de acuerdo a los valores de verdad asignados en las diferentes tablas de verdad para cada uno de los conectivos lógicos.

Por ejemplo, dada la siguiente fórmula:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

y la interpretación siguiente :

$$v(p) = F, \quad v(q) = V$$

en función de tal interpretación podemos calcular el valor de verdad de la fórmula :

$$v(p \Rightarrow q) = V$$



$$\begin{aligned}v(\neg q) &= F \\v(\neg p) &= V \\v(\neg q \Rightarrow \neg p) &= V \\v((p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)) &= V\end{aligned}$$

Ya que cada fórmula  $A$  está representada por un único árbol de formación,  $v$  está bien definida. Ello significa que dado un  $A$  y una interpretación  $v$ ,  $v(A)$  tiene exactamente un valor cuando la definición inductiva se lleva a cabo. Si tratamos de usar la definición sobre la cadena  $p \Rightarrow q \Rightarrow p$  sin el concepto de árbol de formación, entonces para  $v(p) = F$  y  $v(q) = V$ , la interpretación  $v(A)$  podrá evaluarse como  $V$  o  $F$  dependiendo del orden de la evaluación :

$$\begin{aligned}v(p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) &= V \\v((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) &= F\end{aligned}$$

Como un punto técnico, es conveniente decir que  $v$  es una interpretación para  $A$  si  $v$  asigna valores al menos a los átomos de  $A$ . Si se asigna a más átomos que aquellos que aparecen en  $A$ , podemos ignorar las asignaciones extras cuando computamos  $v(A)$ .

### 1.13.- TAUTOLOGÍA, CONTRADICCIÓN E INDEFINIDOS

Hemos empleado las tablas de verdad para mostrar cómo una función de verdad depende efectivamente de los valores de verdad de la proposición o de las proposiciones que la componen. En la columna izquierda, que llamamos de referencia, colocamos todos los valores de verdad posibles que pueden asumir dichas proposiciones componentes. En la columna derecha, que llamamos matriz, consignamos los resultados del cálculo.

En segundo lugar, hemos utilizado las tablas de verdad para definir cada una de los conectivos lógicos. Pero aún existen otros usos más que haremos de las tablas de verdad:

- 1.- Para determinar el valor de verdad de las proposiciones.
  - 2.- Para determinar el carácter de las proposiciones.
  - 3.- Para descubrir relaciones entre proposiciones dadas.
  - 4.- Para determinar la validez de razonamientos.
- A continuación veremos cada uno de estos ejemplos de las tablas, salvo el último que lo trataremos más adelante.

#### 1.- Para determinar el valor de verdad de las proposiciones componentes

Cualquier esquema proposicional que enlace sus proposiciones componentes con una o más conectivos lógicos, ya lo indicamos, tiene un valor de verdad determinado. La determinación de dicho valor puede hacerse recurriendo a la tabla. En el apartado anterior vimos dos ejemplos sencillos,  $\neg p \vee \neg (p \wedge \neg q)$ , cuyos valores de verdad calculamos usando como punto de partida la columna de referencia. Aunque la complejidad de la fórmula aumente, la tabla nos permitirá en forma mecánica establecer cuáles valores corresponden a la misma.

Veamos el ejemplo siguiente: Deseamos determinar el valor de la fórmula

$$\neg [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)]$$

Para ello seguimos este orden: calculamos primero los conectores de menor alcance (el condicional y la conjunción), luego el que los sigue en mayor alcance (el bicondicional) y finalmente el de mayor alcance (la negación). Las matrices primera y segunda (todas las matrices se colocan debajo del conectivo, pues él determina los valores de la fórmula) se calcularon te-



niendo en cuenta la columna de referencia; la tercer matriz está construida en base a las dos primeras y la cuarta matriz en función de la tercera. Como se verá, es imprescindible para poder hacer el cálculo de valores de verdad tener presente las definiciones de los diferentes conectivos o conectores lógicos.

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(p \wedge q)$	$(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge q)$	$\neg[(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge q)]$
V	V	V	V	V	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V

## 2.- Para determinar el carácter de las proposiciones

Veamos ahora cómo la tabla permite determinar el carácter de las proposiciones. Tomemos los siguientes ejemplos:  $(p \vee q)$ ;  $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$ ;  $p \wedge (\neg p \wedge q)$

p	q	$(p \vee q)$	$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$	$p \wedge (\neg p \wedge q)$
V	V	V	V V V	F F
V	F	V	F V F	F F
F	V	V	V V V	F V
F	F	F	V V V	F F

Si se observan los valores de verdad que muestran las tres EBF (dichos valores están ubicados en todos los casos debajo del conectivo de mayor alcance) se percibirá una notable diferencia entre ellos; el primero es verdadero algunas veces (tres veces) y falso otra; el segundo es siempre verdadero y el tercero es siempre falso. Los enunciados o fórmulas del primer tipo, aquellos que a veces son falsos y otros verdaderos, reciben el nombre de **INDEFINIDOS**. Los del segundo tipo, siempre verdaderos, se denominan **TAUTOLOGÍAS**; los del tercer tipo, siempre falsos, son denominados **CONTRADICCIONES**.

Definiremos estos tres tipos de expresiones recurriendo a las nociones de **Avaloración** y de **Dominio**, introducidas por Carnap. Se entiende por Avaloración al conjunto de combinaciones de los valores de verdad de una fórmula. Tomemos por ejemplo, la fórmula  $p \vee q$ : debajo de ella están los resultados del cálculo, que son cuatro según se parta de los valores VV, VF, FV o FF de las proposiciones componentes. Esos cuatro resultados constituyen la avaloración de  $p \vee q$ . Dominio, en cambio, alude solamente a aquellos casos de avaloración verdaderos. En la expresión lógica considerada, el dominio es igual a tres. El dominio se denomina **pleno** cuando coincide con la avaloración, cuando todas las combinaciones entre V y F dan por resultado siempre V. El dominio se dice **vacío** cuando en la avaloración sólo figuran F, cuando todas las combinaciones entre V y F conducen a F.

Ahora podemos definir a la **Tautología** como aquella fórmula cuyo dominio es pleno, o en la que todas las interpretaciones son verdaderas. Esto también suele denominarse como que el modelo es válido. A la **contradicción** como aquella fórmula que tiene un dominio vacío, o cuando todas las interpretaciones son falsas, suele decirse que la fórmula no es **satisfacible o satisfecha**. A la **indefinida** (o **sintética**) como una fórmula cuyo dominio es parcial, es decir que incluye V en su avaloración, pero también F, o cuando las interpretaciones son algunas falsas y

otras verdaderas, en cuyo caso diremos que la fórmula es satisfacible o que está satisfecha.

Recordemos el concepto de **interpretación**. Interpretar una fórmula es adjudicarle un contenido significativo. El ejemplo  $p \wedge q$ , es una fórmula vacía y como tal la estudia la lógica. Pero podemos convenir dentro de cierto contexto, que  $p \wedge q$  signifique "**El zorzal silba y el loro habla**", por ejemplo. Decimos entonces que la fórmula considerada está interpretada. Ahora bien, ocurre que cuando interpretamos las fórmulas lógicas descubrimos que sus propiedades son muy distintas según se trate de una tautología, de una contradicción o de una fórmula indefinida. Lo veremos en los siguientes ejemplos:

La segunda fórmula,  $p \vee \neg p$ , es tautológica. Si la interpretamos, es fácil ver que nada nos informa sobre la realidad. En efecto, "**El zorzal silba o el zorzal no silba**", nada me permite conocer sobre el comportamiento real del zorzal. Sé que es verdad que o el zorzal silba o no lo hace, su conducta ha de ser una u otra. Pero no sé cuál es porque la tautología nada me informa. Algo semejante ocurre con el tercer ejemplo, que es una contradicción,  $p \wedge \neg p$ . Ante una afirmación como "**El zorzal silba y el zorzal no silba**", no dudamos en desecharla como indudablemente falsa pues atribuye simultáneamente dos conductas contradictorias al zorzal. Nos resulta imposible concebir que el zorzal esté silbando y no lo esté haciendo. Aunque de distinto modo, las fórmulas contradictorias interpretadas hacen algo semejante a las tautologías: nada nos informa sobre los hechos.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

El segundo ejemplo, en cambio, algo nos informa sobre la realidad cuando es interpretado. Efectivamente, si se que  $p \wedge q$  es verdadero, si se que "**El zorzal silba y el loro habla**" es verdadero, tengo un conocimiento del modo de ser de la realidad en cuestión. No ocurre aquí, lo que ocurría con  $p \vee \neg p$ . Pues podíamos estar seguros de que esta última expresión era absolutamente verdadera y sin embargo nada conocer de la realidad que hablaba. La verdad de  $p \wedge q$  es más **fuerte** que la de  $p \vee \neg p$  cuando ponemos en vinculación ambas fórmulas con la realidad. La tautología parece ser un esquema no apto para retener significados del mundo real. La contradicción es un esquema incompatible con la realidad. Las fórmulas indefinidas, en cambio, pueden expresar una significación real.

Para terminar este punto recordemos que nuestro propósito era mostrar cómo la tabla de verdad sirve para determinar el carácter de las proposiciones, es decir determinar en forma indudable, si cualquier fórmula, EBF o enunciado es contradictoria, tautológica o indefinida. Hemos visto varios ejemplos. Si al resolver el valor de verdad de una fórmula nos damos con que su matriz tiene dominio pleno estamos ante una tautología; si el dominio es vacío, ante una contradicción y si es parcial estamos ante una fórmula indefinida o sintética.

### 3.- Para descubrir relaciones entre las proposiciones dadas

Veamos cómo la tabla de verdad sirve también para descubrir relaciones diferentes entre dos fórmulas cualesquiera. Observemos los siguientes dos ejemplos:

$$p \Rightarrow q \quad \text{y} \quad \neg (\neg p \vee q)$$

A simple vista no podemos saber qué relación guardan ambas fórmulas entre sí. Pero



haciendo la tabla de verdad de ambas esa relación puede mostrarse claramente a través de ella.

Salta a la vista que la matriz de la segunda fórmula (ubicada bajo la negación fuera del paréntesis) es inversa punto por punto a la matriz de la primera fórmula; cuando aquella es F, ésta es V; cuando aquella es V, ésta es F. Decimos, en casos así, que una fórmula es la negación de la otra, que una contradice a la otra y viceversa. En suma, que la relación entre ambas es la **contradicción**.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg (\neg p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Pero existen otras relaciones posibles. Consideremos las siguientes dos expresiones lógicas:

$$p \wedge q \quad \text{y} \quad p \equiv q$$

Recordemos sus correspondientes tablas de verdad:

p	q	$p \wedge q$	$p \equiv q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	V

¿Qué ocurrirá si entre ambas matrices colocamos el signo de la implicación? Es decir, ¿qué resultado tendrá esta fórmula que combina las dos anteriores por medio del condicional?  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \equiv q)$ . Recurramos nuevamente a la tabla:

p	q	$(p \wedge q)$	$\Rightarrow$	$(p \equiv q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	V

El resultado de la implicación es siempre V. Es decir que la primera fórmula o expresión lógica  $(p \wedge q)$  implica a la segunda  $(p \equiv q)$ . Entre dos fórmulas cualesquiera dadas, recurriendo a la tabla puede establecerse fácilmente (como en el ejemplo considerado), si una de ellas implica a la otra o no. Notar que en el ejemplo realizado, que si bien  $(p \wedge q)$  implica  $(p \equiv q)$ , no ocurre lo mismo al revés:  $(p \equiv q)$  implica a  $(p \wedge q)$ . Por esta sencilla razón: hay un caso en que el antece-



dente  $(p \equiv q)$  es ahora V y el consecuente  $(p \wedge q)$  es F, en la última línea horizontal. La implicación en ese caso único, sería falsa. Pero ese caso de F basta para que la matriz de la implicación no sea una tautología.

En resumen, la relación entre ambas fórmulas es de implicación si  $(p \wedge q)$  es antecedente, pero no lo es si  $(p \equiv q)$  es el antecedente.

Pero existe una relación posible entre dos fórmulas que para nosotros tendrá mayor utilidad en los cálculos a realizar en otros apartados. Como en los dos casos anteriores, también aquí la tabla pone al descubierto esta nueva relación.

Tomemos nuevamente dos ejemplos:  $\neg(p \wedge q)$  y  $(\neg p \vee \neg q)$

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p \vee \neg q)$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

Las matrices de ambas fórmulas son idénticas, son equivalentes. Es decir que si colocamos entre ambas el signo del conectivo bicondicional o equivalencia, obtendremos una matriz tautológica, una matriz que sólo tendrá V. Lo mismo ocurrirá con este segundo ejemplo :  $\neg(p \vee q)$  y  $(\neg p \wedge \neg q)$ .

p	q	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p \wedge \neg q)$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

Ambas fórmulas son, pues, equivalentes. Es decir que la fórmula compuesta por estas últimas:

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

es tautológica. Y también la resultante de unir las dos del primer ejemplo con el bicondicional:

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

**Ambas tautologías, como todas las tautologías, son Teoremas de la lógica proposicional.**

Los dos teoremas mostrados anteriormente reciben el nombre de **Teoremas de De Morgan**.

Pero estas equivalencias tienen para nosotros un particular interés. Porque, como se puede observar, no sólo son equivalentes dos fórmulas entre sí en los ejemplos dados. Existen en ellas, además, un detalle importante: emplean conectivos diferentes y a pesar de ello sus



matrices son idénticas. Ello hace que nos preguntemos, en una forma más general: ¿toda fórmula expresada por un conectivo tiene su equivalente en otra expresión bien formada que utiliza un conectivo diferente?. La respuesta a ello es afirmativa. Veamos ahora a qué reglas debe someterse el traslado de una fórmula a su equivalente con un conectivo diferente. Empecemos con la conjunción y con la disyunción.

- (a).- Para pasar de una expresión expresada en conjunción a otra expresión equivalente expresada en disyunción: primero cambiar el valor del conjunto (si el conjunto está negado, pasa a ser afirmativo y viceversa). Segundo, cambiar también el valor de las proposiciones componentes.

Esto es lo que se hizo en el ejemplo  $\neg (p \wedge q)$ . Primero se cambió el valor del conjunto y segundo se invirtió también el de las proposiciones componentes,  $p$  y  $q$ ; el resultado fue la fórmula equivalente:  $(\neg p \vee \neg q)$ . Es importante destacar que la misma regla se emplea para pasar de disyunción a conjunción. Es lo que vimos en el segundo teorema de De Morgan. La fórmula original era  $\neg (p \vee q)$ . Siguiendo iguales indicaciones que en el caso anterior, resulta la fórmula equivalente expresada en conjunción :  $(\neg p \wedge \neg q)$ .

Si se construyen las tablas de las siguientes equivalencias, se comprobará que todas ellas son tautologías, o teoremas:

$$(p \wedge q) \equiv \neg (\neg p \vee \neg q)$$

$$(\neg p \wedge q) \equiv \neg (p \vee \neg q)$$

$$\neg (p \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee q)$$

$$(p \vee q) \equiv \neg (\neg p \wedge \neg q)$$

- (b).- Para pasar de una fórmula expresada en conjunción a otra fórmula equivalente, pero expresada en condicional, la regla que utilizamos es distinta a la anterior. Esta vez debemos, primero cambiar el valor del conjunto y, segundo, cambiar el valor del segundo miembro. Por ejemplo,  $(p \wedge q)$  será equivalente a la expresión  $\neg (p \Rightarrow \neg q)$ , lo cual se confirma fácilmente con la siguiente tabla:

p	q	$(p \wedge q)$	$\neg (p \Rightarrow \neg q)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

La misma regla nos permite pasar de condicional a conjunción. Es lo que se hizo cuando definimos la implicación  $(p \Rightarrow q)$  como sinónimo o equivalente de la expresión  $\neg (p \wedge \neg q)$ .

- (c).- Para pasar de disyunción a condicional o viceversa, la regla indica simplemente: cambiar solamente el valor del primer miembro. La proposición  $(p \vee q)$ , por ejemplo, será equivalente a  $(\neg p \Rightarrow q)$ .





p	q	$(p \vee q)$	$(\neg p \Rightarrow q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

Y la implicación  $(p \Rightarrow q)$  será equivalente a una disyunción siguiendo la misma regla. En este caso será  $(\neg p \vee q)$ , otra fórmula equivalente del condicional. Esta última expresión será, forzosamente, también equivalente a  $\neg(p \wedge \neg q)$  y que, como se vio anteriormente, era también equivalente a la implicación.

No hemos agotado las equivalencias. Simplemente consideramos algunas de ellas, que serán importantes para el cálculo posterior. Indicaremos a continuación algunas de las equivalencias más importantes y que son de gran utilidad en el cálculo proposicional. Debemos recordar que todas ellas son teoremas o tautologías.

- |      |   |                          |
|------|---|--------------------------|
| (1)  | $(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ | Bicondicional            |
| (2)  | $(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$   | Bicondicional            |
| (3)  | $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$  | Conmutación de $\vee$    |
| (4)  | $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$  | Conmutación de $\wedge$  |
| (5)  | $[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$                            | Asociación de $\vee$     |
| (6)  | $[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r]$                    | Asociación de $\wedge$   |
| (7)  | $\neg(\neg p) \equiv p$   | Doble Negación           |
| (8)  | $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$                      | Transposición            |
| (9)  | $p \equiv (p \vee p)$   | Tautología               |
| (10) | $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \equiv [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$     | Exportación              |
| (11) | $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$             | Distributiva de $\wedge$ |
| (12) | $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$               | Distributiva de $\vee$   |

#### 1.14.- SATISFACTORIO, VALIDEZ Y CONSECUENCIA

**Definición 1.14.1:** Una fórmula proposicional  $A$  es **satisfactoria** si su valor es verdadero en **alguna** interpretación. Una interpretación satisfactoria es denominada como un **modelo** para  $A$ . Una fórmula  $A$  es **válida** si su valor es verdadero **para todas** interpretaciones, a lo cual lo denotamos como:  $\models A$



**Definición 1.14.2:** Una fórmula proposicional  $A$  es **no satisfactoria** o **contradictoria** si no es satisfactoria, o sea que, su valor es falso para **todas** interpretaciones. Es **no válida** o **falsa** si no es válida, o sea que, es falsa para **algunas** interpretaciones.

### 1.15.- LÓGICA TRIVALENTE (LUKASIEWICZ)

Consideramos una lógica con tres valores de verdad designados por las letras "**V**", "**F**" y "**I**" (**Verdadero, Falso, Indeterminado**), con los mismos conectivos lógicos: Negación " $\neg$ ", Conjunción " $\wedge$ ", Disyunción " $\vee$ ", Condicional " $\Rightarrow$ " y Bicondicional " $\equiv$ ", definidos por las tablas de verdad siguientes:

$p$	$\neg p$
V	I
I	F
F	V

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \equiv q$
V	V	V	V	V	V
V	I	V	I	I	I
V	F	V	F	F	F
I	V	V	I	I	I
I	I	I	I	I	I
I	F	I	F	I	I
F	V	V	F	V	F
F	I	I	F	V	I
F	F	F	F	V	V

Llamaremos **Tautología**, como en la lógica bivalente, a las expresiones bien formadas que toman el valor V para cualquier combinación de valores de verdad de las proposiciones o EBF componentes de la expresión dada. De igual forma tendremos las **Contradicciones** (siempre falso) y las **Indefiniciones** (siempre indeterminados).

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

**1.16.- PROBLEMAS DEL CAPITULO I**

- 1.- ¿Cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones?
- (a) 9 es múltiplo de 3
  - (b) El Sol gira alrededor de la Tierra
  - (c) ¿Qué hora es?
  - (d) Les deseo Felices Pascuas
  - (e) La parte continental de la República Argentina tiene una superficie de 2.791.810 Km<sup>2</sup>.
  - (f) Hoy llueve.
  - (g) Desde Tucumán a Salta
- 2.- ¿Cuáles son proposiciones atómicas y cuales compuestas?
- (a) Juan y Javier son altos
  - (b) Juan y Javier son primos
  - (c) Todos los gatos tienen cola
  - (d) El coche que pasó era verde o azul
  - (e) 2 es divisor de 8 y 12
  - (f) Salgo de paseo, si no llueve
- 3.- Traduzca las siguientes oraciones compuestas a la notación de la lógica formal:
- (a) O el fuego fue producido por incendio premeditado o fue producido por combustión espontánea.
  - (b) Si el agua es clara, entonces Enrique puede ver el fondo del piletón o es un tonto.
  - (c) O Juan no está aquí o María está, y Elena ciertamente está.
  - (d) Si hay más gatos que perros, entonces hay más caballos que perros y hay menos serpientes que gatos.
  - (e) El hombre de la Luna es una patraña y si lo mismo es verdad de Santa Claus, muchos niños son engañados.
  - (f) Si las pelirrojas son amables y las rubias no tienen pecas, entonces la lógica es confusa.
  - (g) Si las habitaciones son escasas o la gente quiere vivir con sus parientes políticos y si la gente no quiere vivir con sus parientes políticos, entonces las habitaciones son escasas.
  - (h) Si Juan rinde testimonio y dice la verdad, será encontrado culpable; y si no rinde testimonio, será encontrado culpable.
  - (i) Si Racine no era un compatriota de Galileo, entonces o Descartes no nació en el siglo dieciséis o Newton no nació antes que Shakespeare.
  - (j) Si se elevan los precios o los salarios, habrá inflación. Si hay inflación, entonces el Congreso debe regularla, o el pueblo sufrirá. Si el pueblo sufre, los congresistas se harán impopulares. El Congreso no regulará la inflación y los congresistas no se volverán impopulares. En consecuencia, no subirán los precios.
  - (k) Si el mercado es perfectamente libre, entonces un solo proveedor no puede afectar los precios. Si un solo proveedor no puede afectar los precios, entonces hay un gran número de proveedores. Hay, en efecto, un gran número de proveedores. En consecuencia el mercado es perfectamente libre.
- 4.- Sean las siguientes variables proposicionales:  
 $n$  = "Nueva York es más grande que Chicago";  
 $w$  = "Nueva York está al norte de la ciudad de Washington";  
 $c$  = "Chicago es más grande que la ciudad de Nueva York"  
 Escribir en el lenguaje natural las siguientes expresiones bien formadas del lenguaje formal:
- (a)  $(n \vee c)$
  - (b)  $(n \wedge c)$
  - (c)  $(\neg n \wedge \neg c)$
  - (d)  $(n \Leftrightarrow (\neg w \vee c))$
  - (e)  $((w \vee \neg c) \Rightarrow n)$
  - (f)  $((w \vee n) \Rightarrow (w \Rightarrow \neg c))$
  - (g)  $((w \Leftrightarrow \neg n) \Leftrightarrow (n \Leftrightarrow c))$
  - (h)  $\{(w \Rightarrow n) \Rightarrow [(n \Rightarrow \neg c) \Rightarrow (\neg c \Rightarrow w)]\}$

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

- 5.- Sean  $p, q, r$  las siguientes proposiciones:  
 $p$  = "está lloviendo",  $q$  = "el sol está brillando",  $r$  = "hay nubes en el cielo"  
 traduzca la siguiente notación lógica, utilizando  $p, q, r$  y los conectivos lógicos.
- Está lloviendo y el sol está brillando.
  - Si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo.
  - Si no está lloviendo, entonces el sol no está brillando y hay nubes en el cielo.
  - El sol está brillando si y solo si está lloviendo.
  - Si no hay nubes en el cielo, entonces el Sol está brillando.
- 6.- Sean las siguientes variables proposicionales:  
 $p$  = "Jane Austen fue contemporáneo de Beethoven";  
 $q$  = "Beethoven fue contemporáneo de Gauss";  
 $r$  = "Gauss fue contemporáneo de Napoleón";  
 $s$  = "Napoleón fue contemporáneo de Julio Cesar"  
 Escribir en el lenguaje natural las siguientes expresiones bien formadas del lenguaje formal:
- $((p \wedge q) \wedge r)$
  - $(p \Rightarrow s)$
  - $((p \wedge q) \Leftrightarrow (r \wedge \neg s))$
  - $((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (s \Rightarrow r))$
  - $\{(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow s)]\}$
  - $(p \wedge (q \wedge r))$
  - $((p \wedge q) \wedge (r \wedge s))$
  - $((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (s \Leftrightarrow r))$
  - $((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (s \Leftrightarrow r))$
  - $(s \Rightarrow p)$
- 7.- Sean  $p, q, r$  definidas como en el ejercicio 3. Traducir las siguientes expresiones al lenguaje natural castellano:
- $(p \wedge q) \Rightarrow r$
  - $\neg p \Leftrightarrow (q \vee r)$
  - $\neg (p \vee q) \wedge r$
  - $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$
  - $\neg (p \Leftrightarrow (q \vee r))$
- 8.- Cuales de las siguientes son proposiciones?
- $x^2 = x$  para todo  $x \neq 0$  ú
  - $x^2 = x$  para algún  $x \neq 0$  ú
  - $x^2 = x$
  - $x^2 = x$  para exactamente una  $x \neq 0$  ú
  - $xy = xz$  implica  $y = z$
  - $xy = xz$  implica  $y = z$  para toda  $x, y, z \neq 0$  ú
- 9.- Proporcione las reciprocas de las siguientes proposiciones:
- $p \vee q$
  - Si soy listo entonces soy rico
  - Si  $x^2 = x$  entonces  $x = 0$  o  $x = 1$
  - Si  $2 + 2 = 4$  entonces  $2 + 4 = 8$
- 10.- Expresar las siguientes proposiciones condicionales de otra manera:
- La botella contiene una etiqueta de advertencia si contiene ácido.
  - Los coches paran si el semáforo está en rojo.
  - Si Juan está en el granero, entonces Pablo estará en el granero también.
  - Marco es rico solo si es feliz.
  - No se trabaja, no se paga
- 11.- Traduzca las siguientes oraciones al cálculo proposicional y dé el alcance de todas las conexiones lógicas:
- María practica básquetbol, pero su hermano fútbol y voleibol
  - Si 5 es mayor que 3, y 3 es mayor que 2, entonces 5 es mayor que 2
  - Si no llueve, iremos al cine o al teatro
  - Me curaré, si tomo los remedios y hago reposo.
  - La extracción de minerales es provechosa si la concentración de mineral es alta pero sólo si la distancia hasta el mercado es corta.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

- 12.-** Usando las equivalencias lógicas correspondientes encuentre una afirmación equivalente a las siguientes:
- (a) No es cierto que el esté informado y sea honesto.
  - (b) Si las mercancías no fueron entregadas, el cliente no debe haber pagado.
  - (c) Esta tarde ni llueve ni nieva
  - (d) Si él esta en la oficina, le daremos las noticias.
  - (e) No es cierto que, si llueve nos reuniremos en el club
- 13.-** Encuentre la negación de los siguientes enunciados aplicando las equivalencias lógicas correspondientes:
- a) Juan estudia Ingles y Computación
  - b)  $|-3| = 3$  y  $2 \geq 3$
  - c) Juan y Javier aprobaron el examen.
  - d) Podemos comprar esta casa o comprar un auto
  - e) Es suficiente que sea feriado para que no trabaje.
  - f) Si no hay sol, no iré a la pileta.
  - g) Si no hay paga, no hay trabajo
  - h) El programa es legible solamente si está bien estructurado.
  - i) El público se dormirá cuando el presidente de la sesión dicte la conferencia
  - j) Nos veremos en el parque en caso que no llueva
  - k) Si llueve, nos reuniremos en el club o en la casa de María
  - l) Solicitaré un préstamo, si viajo a Brasil o a Chile.
  - m) Terminar de escribir mi programa antes del almuerzo es necesario para que juegue al tenis esta tarde.
  - n) María puede subir a la motocicleta de Luís sólo si usa el casco
- 14.-** Determinar si las expresiones lógicas del Problema N° 4, son las denominadas expresiones bien formadas (EBF), utilizando las Reglas de buena formación.
- 15.-** Determinar si las expresiones lógicas del Problema N° 6, son las denominadas expresiones bien formadas (EBF), utilizando las Reglas de buena formación.
- 16.-** Determinar si las expresiones lógicas del Problema N° 7, son las denominadas expresiones bien formadas (EBF), utilizando las Reglas de buena formación.
- 17.-** Sean **p, q y r** variables proposicionales (EBF) o fórmulas atómicas distintas. Determinar si las expresiones lógicas siguientes son expresiones bien formadas (EBF), utilizando las Reglas de buena formación.
- |  |  |
|--|--|
| <p>(a) <math>(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)</math></p> <p>(c) <math>(p \vee \neg p)</math></p> <p>(d) <math>(p \Rightarrow \neg p \Rightarrow q)</math></p> <p>(f) <math>\{[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow q] \Rightarrow p\}</math></p> <p>(h) <math>((p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r))</math></p> <p>(j) <math>(p \wedge q) \Rightarrow [p \Leftrightarrow (q \vee r)]</math></p> <p>(k) <math>\{p \wedge [q \Rightarrow [(p \wedge \neg p) \Rightarrow (q \vee \neg q)]] \wedge (q \Rightarrow q)</math></p> | <p>(b) <math>(p \Rightarrow (p \vee q) \vee r)</math></p> <p>(e) <math>((p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p))</math></p> <p>(g) <math>\{p \Rightarrow [q \Rightarrow (q \Rightarrow p)]\}</math></p> <p>(i) <math>[p \vee (\neg p \wedge q)] \vee (\neg p \wedge \neg q)</math></p> |
|--|--|
- 18.-** Aunque normalmente utilizaremos "implica" y "si ..... entonces" para describir una implicación, en la práctica surgen otras palabras y frases como las de los siguientes ejemplos.  
Sean *p, q y r* las siguientes proposiciones:

***p* = "la bandera está puesta,"**  
***q* = "I = 0"**  
***r* = "la subrutina S ha terminado"**

Traducir cada una de las siguientes proposiciones a símbolos usando las letras *p, q, r* y los conectivos lógicos.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

- (a) Si la bandera está puesta entonces  $I = 0$ .
- (b) La subrutina S ha terminado si la bandera está puesta.
- (c) La bandera está puesta si la subrutina S no termina.
- (d) Siempre que  $I = 0$  la bandera está puesta.
- (e) La subrutina S ha terminado sólo si  $I = 0$ .
- (f) La subrutina S ha terminado sólo si  $I = 0$  o la bandera está puesta.

Notar la ambigüedad del punto (f); hay dos respuestas distintas, cada una con su propia validez. ¿Ayudaría la puntuación?

19.- Construir un algoritmo que me permita determinar si una expresión, proposición compuesta, o fórmula lógica es una expresión bien formada (usar como comparación el ejemplo indicado en el Capítulo I de los apuntes de clase).

- 20.- (a) Demostrar que  $x = -1$  es un contraejemplo de " $(x + 1)^2 \geq x^2$  para toda  $x \in \mathbb{R}$ "
- (b) Encontrar otro contraejemplo.
- (c) ¿Puede servir de contraejemplo cualquier número no negativo? Justifique su respuesta.

21.- Construir la tabla de verdad para cada una de las siguientes expresiones bien formadas lógicas siguientes:

- |  |   |
|--|---|
| (a) $(n \vee c)$   | (b) $(n \wedge c)$  |
| (c) $(\neg n \wedge \neg c)$   | (d) $(n \Leftrightarrow (\neg w \vee c))$   |
| (e) $((w \vee \neg c) \Rightarrow n)$                                    | (f) $((w \vee n) \Rightarrow (w \Rightarrow \neg c))$   |
| (g) $((w \Leftrightarrow \neg n) \Leftrightarrow (n \Leftrightarrow c))$ | (h) $\{(w \Rightarrow n) \Rightarrow [(n \Rightarrow \neg c) \Rightarrow (\neg c \Rightarrow w)]\}$ |

22.- Construir la tabla de verdad para cada una de las siguientes expresiones bien formadas lógicas siguientes:

- |  |   |
|--|---|
| (a) $((p \wedge q) \wedge r)$                                    | (b) $(p \wedge (q \wedge r))$   |
| (c) $(s \Rightarrow p)$  | (d) $(p \Rightarrow s)$   |
| (e) $((p \wedge q) \wedge (r \wedge s))$                         | (f) $((p \wedge q) \Leftrightarrow (r \wedge \neg s))$                                    |
| (g) $((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (s \Leftrightarrow r))$  | (h) $((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (s \Rightarrow r))$                              |
| (i) $((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (s \Leftrightarrow r))$ | (j) $\{(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow s)]\}$ |

23.- Construir la tabla de verdad para cada una de las siguientes expresiones bien formadas lógicas siguientes:

- |   |   |
|---|---|
| (a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$        | (b) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$     |
| (c) $\neg p \Leftrightarrow (q \vee r)$ | (d) $\neg (p \Leftrightarrow (q \vee r))$ |
| (e) $\neg (p \vee q) \wedge r$          |   |

24.- Construir la tabla de verdad para cada una de las siguientes expresiones bien formadas lógicas siguientes:

- |   |  |
|---|--|
| (a) $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$   | (b) $(p \Rightarrow (p \vee q) \vee r)$                        |
| (c) $(p \vee \neg p)$   | (e) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p))$        |
| (d) $(p \Rightarrow \neg p \Rightarrow q)$  | (g) $\{p \Rightarrow [q \Rightarrow (q \Rightarrow p)]\}$      |
| (f) $\{[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow q] \Rightarrow p\}$   | (i) $[p \wedge (\neg p \wedge q)] \vee (\neg p \wedge \neg q)$ |
| (h) $((p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge \vee r))$  |  |
| (j) $(p \wedge q) \Rightarrow [p \Leftrightarrow (q \vee r)]$   |  |
| (k) $\{p \wedge [q \Rightarrow [(p \wedge \neg p) \Rightarrow (q \vee \neg q)]] \wedge (q \Rightarrow q)\}$ |  |

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

- 25.-** Aplicando las correspondientes definiciones y propiedades, determinar cual de las expresiones lógicas del problema 21 son tautologías, indefiniciones o contradicciones.
- 26.-** Aplicando las correspondientes definiciones y propiedades, determinar cual de las expresiones lógicas del problema 22 son tautologías, indefiniciones o contradicciones.
- 27.-** Aplicando las correspondientes definiciones y propiedades, determinar cual de las expresiones lógicas del problema 23 son tautologías, indefiniciones o contradicciones.
- 28.-** Aplicando las correspondientes definiciones y propiedades, determinar cual de las expresiones lógicas del problema 24 son tautologías, indefiniciones o contradicciones.
- 29.-** Transformar las siguientes expresiones lógicas en otras equivalentes con la conectiva que se indique en cada caso y simplificar si es posible:

- (a)  $(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$  a conjunción  
 (b)  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)]$  a conjunción  
 (c)  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow r$  a disyunción  
 (d)  $\neg(\neg p \vee q)$  a condicional  
 (e)  $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)$  a disyunción  
 (f)  $(\neg p \wedge q) \Rightarrow (\neg q \vee p)$  a conjunción  
 (g)  $(p \Rightarrow \neg q) \wedge (p \vee \neg q)$  a condicional  
 (h)  $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$  a conjunción  
 (i)  $(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \Rightarrow \neg q)$  a condicional

- 30.-** Utilizando las propiedades de la lógica formal, simplificar las siguientes expresiones y/o expresarlas únicamente como disyunciones:

- (a)  $(r \Leftrightarrow (\neg w \vee s))$   
 (b)  $((w \wedge 5p) \Rightarrow q)$   
 (c)  $((w \vee p) \Rightarrow (w \Rightarrow \neg p))$   
 (d)  $((w \Leftrightarrow 5s) \Leftrightarrow (s \Leftrightarrow p))$   
 (e)  $\{(w \Rightarrow p) \Rightarrow [(p \Rightarrow \neg w) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow w)]\}$   
 (f)  $[(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

- 31.-** Utilizando las propiedades de la lógica formal, simplificar las siguientes expresiones y/o expresarlas únicamente como conjunciones:

- (a)  $((p \wedge q) \vee (p \Rightarrow s))$   
 (b)  $((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee \neg q))$   
 (c)  $((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow \neg p))$   
 (d)  $((\neg p \Rightarrow q) \vee (s \Rightarrow r))$   
 (e)  $((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (s \Leftrightarrow r))$   
 (f)  $\{(p \vee q) \Rightarrow [(q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow s)]\}$

- 32.-** Utilizando las propiedades de la lógica formal, simplificar las siguientes expresiones y/o expresarlas únicamente como conjunciones:

- (a)  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow p)$   
 (b)  $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \vee p)$   
 (c)  $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$   
 (d)  $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)$   
 (e)  $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$   
 (f)  $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg p] \Rightarrow \neg q$   
 (g)  $[(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)]$   
 (h)  $p \wedge \neg[\neg(p \Rightarrow q) \vee q]$   
 (i)  $\neg[(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)]$   
 (j)  $p \Rightarrow (p \vee q)$

- 33.- (I)** Elimine  $\Rightarrow$  y  $\Leftrightarrow$  de las siguientes expresiones:

- (a)  $(p \Rightarrow (q \wedge r))$   
 (b)  $((p \vee s) \Leftrightarrow \neg q)$   
 (c)  $(r \Leftrightarrow s) \Rightarrow p$   
 (d)  $((p \Leftrightarrow s) \wedge (s \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r))$   
 (e)  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Leftrightarrow q)$



( II ) Inserte  $\Rightarrow$  y  $\Leftrightarrow$  en las siguientes expresiones:

- a)  $(\neg s \vee (p \wedge q))$
- b)  $(p \wedge \neg (q \wedge r))$
- c)  $(\neg (p \wedge q) \vee r)$
- d)  $((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$

**34.-** ( I ) Utilizando las Leyes Lógicas, demuestre las siguientes equivalencias:

- a)  $\neg ((p \wedge q) \vee p) \equiv (\neg p \wedge q)$
- b)  $(p \wedge (q \wedge (r \wedge \neg p))) \equiv F$ , donde F es la constante proposicional "Falso"
- c)  $((\neg q \vee (q \wedge r)) \vee \neg r) \equiv V$ , donde V es la constante proposicional "Verdadero"
- d)  $\neg (\neg p \vee \neg (r \vee s)) \equiv ((p \wedge r) \vee (p \wedge s))$
- e)  $((p \vee r) \wedge (q \vee s)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge s) \vee (r \wedge q) \vee (r \wedge s))$
- f)  $((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \equiv ((p \vee q) \Rightarrow r)$
- g)  $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \equiv (p \Rightarrow (q \wedge r))$
- h)  $((p \wedge q) \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
- i)  $(p \Rightarrow q) \equiv ((p \wedge \neg q) \Rightarrow F)$
- j)  $(p \vee (p \wedge (p \vee q))) \equiv p$
- k)  $(p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)) \equiv (p \vee q \vee r)$
- l)  $(p \wedge ((\neg q \mid (r \wedge r)) \vee \neg (q \vee ((r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s))))$

( II ) Simplifique las siguientes expresiones. Establezca cada ley que use.

- a)  $((p \wedge V) \wedge (q \vee F))$
- b)  $(p \wedge (q \wedge (r \wedge \neg p)))$
- c)  $((p \wedge V) \wedge (q \wedge \neg p))$
- d)  $((p \vee (q \wedge s)) \vee (\neg q \wedge s))$
- e)  $\neg ((p \wedge \neg (q \vee \neg r))$
- f)  $(p \vee \neg (p \wedge \neg (q \vee r)))$
- g)  $((\neg p \vee q) \wedge (p \wedge (p \wedge q)))$
- h)  $(\neg (q \wedge r \wedge \neg q) \wedge p)$
- i)  $((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee q$
- j)  $(\neg (p \vee q) \vee ((\neg p \wedge q) \vee \neg q))$
- k)  $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge (r \vee \neg q)))$

=====

ISBN 987-43-9433-1





TABLA 1: EQUIVALENCIAS LÓGICAS	
$\neg\neg p \equiv p$	Doble negación
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ $(p \Rightarrow q) \equiv (q \Rightarrow p)$	Leyes conmutativas
$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r))$ $((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$	Leyes asociativas
$(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$	Leyes Distributivas
$(p \vee p) \equiv p$ $(p \wedge p) \equiv p$	Leyes de idempotencia
$(p \vee F) \equiv p$ $(p \wedge V) \equiv p$	Leyes de Identidad
$(p \vee V) \equiv V$ $(p \wedge F) \equiv F$	Leyes de Dominación
$(p \vee \neg p) \equiv V$ $(p \wedge \neg p) \equiv F$	Leyes de los Inversos
$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$ $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$	Leyes de De Morgan
$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$	Ley de la Contrarecíproca
$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$ $\neg(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$	Leyes del Condicional
$((p \wedge q) \vee p) \equiv p$ $((p \vee q) \wedge p) \equiv p$	Leyes de Absorción

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

# MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA

## CAPITULO II

### DECISIÓN EN EL LENGUAJE FORMAL

#### 2.1.- NOCIÓN GENERAL DE SISTEMAS AXIOMÁTICOS

Un sistema axiomático, en matemática, consiste en los siguientes objetos :

- i) **términos primitivos** constituidos por elementos, conjuntos o relaciones, cuya naturaleza no queda especificada de antemano.
- ii) **axiomas**, que son fundamentalmente funciones proposicionales cuantificadas, relativas a las variables que representan a los términos primitivos; es decir, son propiedades a las que deben satisfacer dichos términos primitivos. Los axiomas definen implícitamente a éstos.
- iii) **definiciones**, de todos los términos no primitivos.
- iv) **teoremas**, es decir, propiedades que se deducen de los axiomas.

Anexado al Sistema Axiomático se admite la lógica bivalente, con cuyas leyes es posible demostrar los teoremas de la teoría. Cuando se sustituyen las variables o términos primitivos por significados concretos, se tiene una interpretación del sistema axiomático; si esta interpretación es tal que los axiomas se convierten en proposiciones verdaderas, entonces se tiene un modelo del sistema axiomático. En este caso, todo lo demostrado en abstracto en el sistema es válido para el modelo, y nada hay que probar en particular.

#### Ejemplo 2.1.1.

Consideremos el siguiente sistema axiomático.

- i) **términos primitivos**. Un conjunto **A**, y una relación **R** definida en A, es decir:

$$R \subset A \times A$$

No se especifica aquí cuál es el conjunto ni se define la relación.

- ii) **axiomas**

$A_1$ : **R** es reflexiva en A.

$A_2$ : **R** es antisimétrica en A.

$A_3$ : **R** es transitiva en A.

Los tres axiomas pueden resumirse en el siguiente : **R** es una relación de orden amplio en A.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

iii) **definición:** en  $A$  se considera la relación  $S$ , tal que:

$$(a, b) \in S \equiv (b, a) \in R$$

iv) **teoremas:** Demostramos la siguiente propiedad relativa a  $S$ :

$S$  es reflexiva en  $A$ .

$$\forall a : a \in A \rightarrow (a, a) \in R \text{ por } A_1$$

$$(a, a) \in R \rightarrow (a, a) \in S \text{ por iii)}$$

Entonces, por la ley del silogismo hipotético, resulta:

$$\forall a : a \in A \rightarrow (a, a) \in S \text{ y en consecuencia, } S \text{ es reflexiva en } A.$$

Con un procedimiento análogo, se demuestra que  $S$  es antisimétrica y transitiva en  $A$ . Ello significa que la relación  $S$ , inversa de  $R$ , determina un orden amplio en  $A$ .

Damos las siguientes interpretaciones para este sistema axiomático:

- a).- Si  $A$  es el conjunto de los números reales, y  $R$  es la relación de "menor o igual", se verifican  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ . La relación  $S$  es, en este caso, la de "mayor o igual". Se tiene un modelo del sistema axiomático.
- b).- Si  $A$  es el conjunto de las partes de un conjunto  $U$ , y  $R$  es la relación de inclusión, entonces valen los axiomas y se tiene otro modelo del sistema.

### 2.1.1.- PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS AXIOMÁTICOS

No toda elección arbitraria de términos primitivos y de propiedades relativas a estos, caracteriza un determinado sistema axiomático. Es necesario que de los axiomas no se derive ninguna contradicción, O si en el sistema aparecen dos axiomas o teoremas contradictorios, entonces el sistema es incompatible o inconsistente.

Otra propiedad es la independencia del sistema, en el sentido de que ningún axioma puede probarse a expensas del resto de los axiomas presentes dentro del sistema. La no independencia no niega la consistencia del sistema.

### 2.2.- LA LÓGICA PROPOSICIONAL COMO UN SISTEMA AXIOMÁTICO

El análisis del cálculo proposicional ha seguido un orden determinado; este orden está bien lejos de constituir lo que comúnmente denominamos como **Sistema**. Es decir una organización tal del conocimiento en la que unos aspectos de la misma se **deducen** de otros aspectos y que unos determinados símbolos se **definan** a partir de otros símbolos.

Un conjunto de conocimientos constituye un sistema deductivo o axiomático, cuando a partir de ciertos puntos de apoyo no definidos, ni demostrados, se define y se demuestra ese conjunto de conocimientos. Un sistema axiomático, dentro de la lógica proposicional, consiste en los siguientes objetos:

- i) **términos primitivos** constituidos por proposiciones y por conectivos principales lógicos. En algunos casos son denominados también como símbolos terminales cuando son simples y no terminales cuando son compuestos.
- ii) **axiomas y teoremas**, que fundamentalmente son funciones proposicionales, relativas a las variables que representan a los términos primitivos; es decir, son



tautologías que deben satisfacer dichos términos primitivos. Los axiomas son fbf tautológicas que no pueden ser deducidos de otras fbf tautológicas, es decir son independientes. En cambio los teoremas son fbf tautológicas que pueden ser deducidos o probados a través de la utilización de los axiomas.

- iii) **definiciones**, expresiones, fórmulas lógicas que son derivadas de los teoremas o axiomas y que a veces son considerados como términos no primitivos.
- iv) **reglas**, es decir, propiedades que deben cumplir las proposiciones o fórmulas lógicas. De entre ellas tenemos:

**Reglas de Formación.** Son aquellas que dan lugar a la constitución sintáctica del sistema axiomático cuando el mismo es considerado como un lenguaje formal.

**Reglas Transformación** Son aquellas que permiten la transformación de fbf tautológicas en otras fbf tautológicas y además existen las denominadas Reglas de Inferencia, las que definen las operaciones sintácticas por la cual pueden generarse nuevas fórmulas fbf.

- v) **signos auxiliares o términos no primitivos** constituidos por todos aquellos elementos no primitivos, entre ellos podemos considerar los símbolos de puntuación lógicos.

### 2.2.1.- SISTEMAS GENTZEN

El sistema axiomático **G** ha describirse a continuación es denominado como el **Sistema Gentzen** en honor al lógico que inventó este sistema formal.

**DEFINICIÓN 2.1:** *El sistema formal **G** consiste de axiomas y de reglas de inferencia. Un **Axioma** es cualquier conjunto de fórmulas **U** que contienen un par complementario de literales:  $\{p, \neg p\} \in U$  y las reglas de inferencia son de la siguiente forma:*

$$\frac{U_1 \cup (\alpha_1, \alpha_2)}{U_1 \cup (\alpha)}$$

donde las descomposiciones  $\alpha$  y  $\beta$ , se indican en las figuras 4.2.1 y 4.2.2. El conjunto de fórmulas por encima de la línea son denominadas **premisas** y el conjunto de fórmulas por debajo de la línea es denominada como la **conclusión**.

A partir de las premisas podemos **inferir** la conclusión o que la conclusión puede ser **probada o comprobada** a partir de las premisas. Intuitivamente, si tenemos pruebas independientes de dos fórmulas podemos en consecuencia inferir su conjunción y si tenemos una prueba de un conjunto de fórmulas podemos entonces inferir sus conjunciones.

**DEFINICIÓN 2.2:** *Una **prueba** en **G** es una secuencia de fórmulas tal que cada elemento es un axioma o puede ser inferido a partir de uno o dos elementos previos de una secuencia utilizando una regla de inferencia. Si **A** es el último elemento de una secuencia, la secuencia es denominada como una **prueba** de **A** y de este modo **A** es **demostrable**. Notación empleada  $\vdash A$*



$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
$A$	$\neg\neg A$	
$\neg (A_1 \wedge A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \vee A_2$	$A_1$	$A_2$
$A_1 \Rightarrow A_2$	$\neg A_1$	$A_2$
$A_1 \Leftarrow A_2$	$A_1$	$\neg A_2$
$\neg (A_1 \equiv A_2)$	$\neg (A_1 \Rightarrow A_2)$	$\neg (A_2 \Rightarrow A_1)$

Figura 2.2.1: Reglas  $\alpha$  de Inferencia para el Sistema Gentzen

La comprobación es escrita como una secuencia de conjuntos de fórmulas las que son numeradas para una referencia conveniente. A la derecha de cada conjunto numerado de fórmulas colocamos la **justificación** con la cual cada conjunto puede ser inferido. La justificación puede ser el axioma a aplicarse o una regla de inferencia aplicada al conjunto o conjuntos de fórmulas en el paso anterior de la secuencia. Si se ha utilizado una regla de inferencia, debe ser identificada como regla- $\alpha$  o regla- $\beta$  sobre el conectivo principal de la conclusión y el número o números de las líneas conteniendo las premisas.

$\beta$	$\beta_1$	$\beta_2$
$\neg (B_1 \vee B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \wedge B_2$	$B_1$	$B_2$
$\neg (B_1 \Rightarrow B_2)$	$B_1$	$\neg B_2$
$\neg (B_1 \Leftarrow B_2)$	$\neg B_1$	$B_2$
$B_1 \equiv B_2$	$B_1 \Rightarrow B_2$	$B_2 \Rightarrow B_1$

Figura 2.2.2: Reglas  $\beta$  de Inferencia para el Sistema Gentzen

Consideremos un ejemplo:

**Ejemplo 2.2.1:**  $\vdash (p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$

**Demostración:**

- |     |                                     |                                       |
|-----|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 1.- | $\neg p, q, p$                      | Axioma                                |
| 2.- | $\neg q, q, p$                      | Axioma                                |
| 3.- | $\neg (p \vee q), q, p$             | Regla- $\beta$ - $\vee$ , (1), (2)    |
| 4.- | $\neg (p \vee q), q \vee p$         | Regla- $\alpha$ - $\vee$ , (3)        |
| 5.- | $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$ | Regla- $\alpha$ - $\Rightarrow$ , (4) |

Podemos realizar la comprobación en el Sistema de Gentzen utilizando cualquiera de los métodos de decisión explicados en el Capítulo III.



### 2.2.2.- SISTEMA AXIOMÁTICO DE RUSSEL

Los elementos básicos del sistema proposicional de Russel son los siguientes:

#### A.- Términos Primitivos

- |    |                |               |
|----|----------------|---------------|
| 1: | " $\neg$ "     | Negación.     |
| 2: | " $\vee$ "     | Disyunción    |
| 3: | <b>p, q, s</b> | Proposiciones |

#### B.- Axiomas o Teoremas

- A<sub>1</sub>:**  $(p \vee q) \Rightarrow p$
- A<sub>2</sub>:**  $q \Rightarrow (p \vee q)$
- A<sub>3</sub>:**  $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$
- A<sub>4</sub>:**  $(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)]$

#### C.- Definiciones

- 1:  $p \Rightarrow q \equiv \text{df. } (\neg p \vee q)$
- 2:  $p \wedge q \equiv \text{df. } \neg (\neg p \vee \neg q)$
- 3:  $(p \equiv q) \equiv \text{df. } (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

#### D.- Reglas

##### a).- De Formación

- 1: Las fórmulas p, q, r, s están bien formadas (fbf).
- 2: Si p es una fbf, entonces  $\neg p$  es una fbf.
- 3: Si una conectiva lógica está flanqueada por una fbf, el conjunto constituye una fbf.

##### b).- De Transformación

- 1: **Regla de Sustitución Uniforme.** Si en una tautología (axioma o teorema) sustituimos una variable proposicional en todos los casos por una fbf, la fórmula resultante también es tautológica.
- 2: **Regla de Inferencia.** Si en una implicación, que es teorema, el antecedente lo es también, en consecuencia el consecuente es también un teorema.

#### E.- Signos Auxiliares

- 1: Todos los símbolos de puntuación lógica.

**Ejemplo N° 1:** Consideremos el siguiente ejemplo de utilización de la Regla de Sustitución Uniforme, la que nos permite que a partir de cualquier tautología (axioma o teorema) llegar a otra fbf igualmente tautológica.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

$A_2$	1)	$q \Rightarrow (p \vee q)$
En 1) $p \Rightarrow q / q$	2)	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [p \vee (p \Rightarrow q)]$

Otro ejemplo de reemplazo es considerar el siguiente ejercicio:

$A_3$	1)	$(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$
En 1) def. de $\Rightarrow$	2)	$(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \vee p)$

### 2.2.3.- SISTEMA AXIOMÁTICO DE HILBERT

Al comparar este Sistema Axiomático de Hilbert con el de Russel, podemos indicar las diferencias que se presentan y que son las que se presentan en los Términos Primitivos a los que se agregan la Implicación y la Conjunción; y dentro de los Axiomas debemos considerar 10 (diez) más importantes, sin embargo enunciaremos algunos otros teoremas o tautologías.

#### A.- Términos Primitivos

1:	" $\neg$ "	Negación.
2:	" $\vee$ "	Disyunción
3:	" $\wedge$ "	Conjunción
4:	" $\Rightarrow$ "	Implicación
5:	$p, q, s$	Proposiciones

#### B.- Axiomas o Teoremas

$A_1:$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	
$A_2:$	$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$	
$A_3:$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	Simplificación
$A_4:$	$(p \wedge q) \Rightarrow q$	Simplificación
$A_5:$	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q)))$	
$A_6:$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	Adición
$A_7:$	$q \Rightarrow (p \vee q)$	Adición
$A_8:$	$(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)]$	
$A_9:$	$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p)]$	
$A_{10}:$	$p \vee \neg p$	

A partir de ahora enunciamos teoremas (a veces son definidos como propiedades de los símbolos no terminales) dentro del sistema axiomático de Hilbert, los que como ya hemos definido no son axiomas, pero pueden ser deducidos de los 10 axiomas considerados.

- 11.-  $p \equiv p$
- 12.-  $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- 13.-  $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \equiv (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
- 14.-  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
- 15.-  $(q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
- 16.-  $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$
- 17.-  $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
- 18.-  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r)))$
- 19.-  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((r \Rightarrow s) \Rightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)))$
- 20.-  $(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r))$
- 21.-  $(\neg p \equiv q) \equiv (p \equiv \neg q)$



22.⊢	$(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$	
23.⊢	$(\neg p \Rightarrow p) \equiv p$	Tautología
24.⊢	$(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$	De Morgan
25.⊢	$(p \vee q) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$	De Morgan
26.⊢	$p \equiv \neg\neg p$	Doble Negación
27.⊢	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$	Conmutativa de $\vee$
28.⊢	$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$	Conmutativa de $\wedge$
29.⊢	$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$	Asociativa de $\vee$
30.⊢	$p \equiv (p \vee p)$	Idempotencia
31.⊢	$p \equiv (p \wedge p)$	Idempotencia
32.⊢	$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$	Transposición
33.⊢	$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributiva

**C.- Definiciones**

Def.:  $p \Rightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \equiv \neg(p \wedge \neg q)$

**D.- Reglas**

**a).- De Formación**

- 1: Las fórmulas  $p, q, r, s$  están bien formadas (fbf).
- 2: Si  $p$  es una fbf, entonces  $\neg p$  es una fbf.
- 3: Si una conectiva lógica está flanqueada por una fbf, el conjunto constituye una fbf.

**b).- De Transformación**

- 1: **Regla de Sustitución Uniforme.** Si en una tautología (axioma o teorema) sustituimos una variable proposicional en todos los casos por una fbf, la fórmula resultante también es tautológica.
- 2: **Regla de Inferencia.** Consideramos la regla del **Modus Ponens**

$$\begin{array}{rcl}
 (p \Rightarrow q) \wedge p & \Rightarrow & q \\
 \hline
 & & \therefore q
 \end{array}$$

**E.- Signos Auxiliares**

- 1: Todos los símbolos de puntuación lógica.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330



### **2.3.- NOCIÓN GENERAL DE LA DECISIÓN EN EL LENGUAJE FORMAL**

En los capítulos anteriores vimos dos puntos importantes, que ahora pondremos en relación. El primero es el empleo de la tabla de verdad para determinar el carácter de una proposición, fórmula o EBF. Dicha determinación tiene en la lógica un nombre técnico: **Decisión**. Para decidir con certeza lógica, si una expresión bien formada es tautológica, contradictoria o indefinida, se recurre a diferentes procedimientos. Uno de ellos, como vimos en el capítulo anterior, es la tabla de verdad. Estos procedimientos son mecánicos y finitos. **Mecánicos**, porque sin interpretar la fórmula, sin intuir significado alguno, podemos concluir en que la misma es o invariablemente verdadera, o invariablemente falsa o unas veces falsa y otras veces verdadera. **Finitos**, pues por compleja que sea la fórmula, en un número limitado de pasos y siguiendo reglas precisas, puede establecerse el carácter de la expresión lógica.

El segundo punto ya considerado en los capítulos anteriores, es la posibilidad de traducir una fórmula, expresada con un conectivo, a otra fórmula equivalente que emplea un conectivo distinto o diferente.

Dentro de estos procedimientos, tenemos las formas normales, razonamiento y formas de razonamiento, reducción al absurdo, y método del árbol. En este capítulo estudiaremos todos estos métodos o procedimientos de decisión.

### **2.4.- LA DECISIÓN POR LAS FORMAS NORMALES**

Cuando hablamos de poner en relación ambos temas, los dos puntos mencionados en el apartado anterior, pensamos en un procedimiento de decisión que emplee la transformación de una fórmula dada en otra fórmula derivada y equivalente a la original. Esto es lo que hace el procedimiento llamado de decisión por **Formas Normales**.

Las **formas normales o canónicas**, llamadas así acaso porque el pensamiento expresado en ellas ofrece mayor claridad, son fórmulas o EBF construidas solamente con los conectivos lógicos de conjunción y disyunción y bajo ciertas condiciones.

Existen dos formas normales; la **forma normal conjuntiva** (que abreviamos de la siguiente forma: **f.n.c.**) y la **forma normal disyuntiva** (que abreviamos **f.n.d.**).

#### **Forma Normal Conjuntiva**

**Una forma normal conjuntiva es una serie continua de conjunciones y donde los factores de esas conjunciones son sólo disyunciones.**

Por ejemplo, consideremos lo siguiente expresión lógica que es una **f.n.c.**:

$$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

#### **Forma Normal Disyuntiva**

**Una forma normal disyuntiva es una serie continua de disyunciones y donde los factores de esas disyunciones son sólo conjunciones.**

Por ejemplo, consideremos lo siguiente expresión lógica que es una **f.n.d.**:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

Ambas formas normales deben aún cumplir con este otro requisito: **no deben tener negaciones compactas, es decir negaciones que afecten a proposiciones moleculares o**



**compuestas. La negación puede aparecer solamente en una forma normal afectando a las proposiciones atómicas o simples.**

La diferencia visible entre una y otra forma normal es, como se habrá notado en los ejemplos dados, que mientras la **f.n.c.** emplea a la conjunción como conectivo de mayor alcance y a la disyunción como conectivo de menor alcance, en la **f.n.d.** se utiliza a la conjunción como conectivo de menor alcance y a la disyunción como conectivo de mayor alcance.

Para la transformación de una expresión lógica dada en una forma normal emplearemos especialmente las reglas que permitan pasar de un conectivo a otro en la expresión. Muy importantes también serán los teoremas de la distribución, asociación y conmutación, propiedades éstas, que caracterizan a la conjunción y a la disyunción. Más adelante iremos incorporando otros teoremas a los ya conocidos y cuyo uso facilitará la transformación de cualquier expresión o fórmula a una forma normal.

Para utilizar las formas normales como procedimiento de decisión, deben seguirse dos pasos generales: transformar primero la fórmula dada en una forma normal; en segundo lugar interpretar la forma normal para saber si la misma es tautológica, contradictoria o indefinida.

#### 2.4.1.- LA TRANSFORMACIÓN DE UNA EBF EN FORMA NORMAL

Tomemos el ejemplo más simple:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$$

Esta expresión no es una forma normal, no coincide con ninguna de las definiciones de forma normal. Por lo pronto incluye el signo de la implicación, conectivo que no aceptan las formas normales. Lo primero que realizaremos será eliminar el mencionado conectivo, convertirlo en alguno de los que permiten las formas normales.

- |    |                                       |                                 |
|----|---------------------------------------|---------------------------------|
| 1) | $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ | Fórmula dada                    |
| 2) | $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$   | Definición de " $\Rightarrow$ " |

El paso dos es una forma normal conjuntiva. Consideremos otro ejemplo simple:

- |    |  |                           |
|----|--|---------------------------|
| 1) | $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$ | Fórmula dada              |
| 2) | $\neg (p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$   | Def. de " $\Rightarrow$ " |
| 3) | $\neg (\neg p \vee q) \vee (p \wedge q)$     | Def. de " $\Rightarrow$ " |
| 4) | $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$        | T. de De Morgan           |

La expresión indicada en (4) es una forma normal conjuntiva. Pero puede suceder que el resultado no sea tan claro, como en los ejemplos vistos, el carácter de forma normal de la expresión a la que se llegó por medio de las transformaciones. Consideremos el siguiente ejemplo en el cual se muestra un caso de esa situación en que a pesar de no cumplir en forma aparente con los requisitos de la f.n., la expresión realmente es una f.n.:

- |    |                                   |                           |
|----|-----------------------------------|---------------------------|
| 1) | $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ | Fórmula dada              |
| 2) | $\neg p \vee (\neg q \vee p)$     | Def. de " $\Rightarrow$ " |
| 3) | $\neg p \vee \neg q \vee p$       | Asociatividad             |
| 4) | $p \vee \neg p \vee q$            | Conmutatividad            |

La expresión en (4) es una forma normal conjuntiva. Puede objetarse que la misma no cumple con los requisitos de una f.n., no es una conjunción de disyunciones, pues sólo se ven disyunciones en ella. La cuestión se aclara si mostramos que la expresión (4) es idéntica a la siguiente expresión:



$$(p \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg p \vee q)$$

Esta fórmula es idéntica en su valor de verdad a (4). Muestra de una forma clara el aspecto total de una f.n.c.. Pero es redundante y reiterativa, ya que el segundo paréntesis no agrega nada a la fórmula. De igual forma, en lógica, como en matemática, podemos simplificar y reducir de esta forma la expresión, sin repeticiones inútiles. En este caso la simplificación puede realizarse gracias al siguiente teorema:  $(p \wedge p) \equiv p$ .

El ejemplo que acabamos de considerar es una f.n.c. de un solo miembro, es una forma normal degenerada. Como caso límite de esa situación podemos tomar a  $p$ , que es una forma normal.

Consideremos el siguiente ejemplo:

1)	$(p \equiv q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	Fórmula dada
2)	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	Def. de " $\equiv$ "
3)	$\neg [(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)] \vee (\neg p \vee q)$	Def. de " $\Rightarrow$ "
4)	$[\neg (\neg p \vee q) \vee \neg (\neg q \vee p)] \vee (\neg p \vee q)$	T. de De Morgan
5)	$[(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)] \vee (\neg p \vee q)$	T. de De Morgan
6)	$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (\neg p \vee q)$	Asociatividad

Es preciso tener en cuenta que todas las expresiones transformadas son equivalentes a la original. Es por eso de que las formas normales pueden ser un método de decisión. A través de ellas podremos determinar si la expresión lógica original es tautológica, contradictoria o indefinida.

Deber tenerse en cuenta asimismo, que para obtener un f.n. pueden existir varios caminos. En el ejemplo anterior (cuyo punto final mostrará una forma normal disyuntiva), podríamos haber partido de otra definición de bicondicional y seguir un ordenamiento diferente en las transformaciones. Pero cualquiera sea el camino seguido, llegaremos siempre a una f.n.c y a una f.n.d., ambas equivalentes. Es decir cada fórmula tiene una f.n.c. y una f.n.d., pero lo recíproco no es válido, porque una misma forma normal corresponde a muchas fórmulas.

#### 2.4.2.- INTERPRETACIÓN DE LAS FORMAS NORMALES Y DECISIÓN

Las dos formas normales no sólo se diferencian por el empleo distinto que hacen de la conjunción y de la disyunción. Cada f.n. revela algo importante de la expresión original. La f.n.c. nos informa acerca de la verdad de la expresión. Veamos de qué forma. Consideremos el ejemplo siguiente:

$$(p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) \quad \text{f.n.c.}$$

tenemos el caso de una conjunción cuyos dos factores o paréntesis son verdaderos. Y lo son ambos, por simbolizar el clásico **Principio Lógico del Tercero Excluido**, uno de los tres principios formulados por la lógica tradicional. Este principio afirma que dos proposiciones contradictorias no pueden ser ambas falsas:  $(p \vee \neg p)$ ,  $p$  o no  $p$  significa que una es verdadera o la otra lo es. No existe una tercera posibilidad. Interpretese con cualquier ejemplo esa fórmula y se verá que es tautológica ("Las mariposas son canarios" o "Las mariposas no son canarios", "El espacio es infinito" o "El espacio no es infinito", etc.). Ahora bien, si la conjunción que vimos une dos tautologías, entonces es verdadero. Pues una conjunción exige, para ser verdadera, que los miembros unidos por ella sean ambos verdaderos. En este caso se cumple. Pero existe algo más. Una expresión como:

$$(p \vee \neg p \vee q)$$



es igualmente tautológica, por el solo hecho de que  $p \vee \neg p$  forma parte de ella. En efecto, cualquiera sea el valor de  $q$ , el valor de verdad del conjunto será verdadero. Si construimos la tabla de  $p \vee \neg p$ , siempre tendremos verdadero. Si a partir de ahí, construimos la tabla de  $(p \vee \neg p) \vee q$ , como ya existe una columna de dominio total, cualquiera sea el valor de  $q$ , el resultado de su disyunción con una tautología será otra tautología. Debido a que una disyunción exige para ser verdadera que al menos uno de sus factores lo sea. Podemos expandir la fórmula, agregarle cuántas proposiciones queramos ( $r, s, t, u$ , etc.) a las anteriores, siempre será un conjunto tautológico. La tautología del Tercero Excluido transmitirá su carácter de invariablemente verdadera a cualquier fórmula que lo incluya y le agregue proposiciones mediante la disyunción:

$$(p \vee \neg p \vee q \vee r \vee t \vee s), \text{ como } (p \vee \neg p), \text{ es también tautología.}$$

En resumen, **la conjunción de disyunciones, sin negaciones compactas (forma normal conjuntiva), es tautológica si cada factor incluye una variable proposicional y su negación.** Por eso decíamos que la f.n.c. nos informaba acerca de la verdad o no de una expresión lógica, o sea si es o no una tautología. Si la f.n.c. no tiene una variable proposicional y su negación en cada uno de los factores, entonces la expresión no será tautológica. Lo importante es que la f.n.c. solo nos permite decidir si la fórmula de la cual empezamos, es tautológica o no. Pero, como ya sabemos, existen fórmulas contradictorias y también indefinidas. Una forma normal disyuntiva nos informará acerca de que si una expresión es contradictoria o no. Consideremos el siguiente ejemplo:

$$(p \wedge q \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg q)$$

Se trata de una f.n.d... Y es contradictoria, porque cada una de las expresiones que vincula la disyunción incluye una variable proposicional y su negación. Es decir que ambos factores son falsos, contradictorios. Como se recordará, este era el único caso en que una disyunción es falsa. Si en la f.n.c. nos basábamos en el Principio del Tercero Excluido, ahora estamos empleando otro principio lógico no menos importante, el **Principio de la Contradicción**.

Este principio afirma que dos proposiciones contradictorias ( $p$  y  $\neg p$ ) no pueden ser ambas verdaderas. Si en una conjunción de dos o más variables proposicionales aparece una proposición y su negación, la fórmula o expresión es automáticamente contradictoria. Es fácil ver porqué; por ejemplo consideremos  $(p \wedge q \wedge \neg p)$ , la cual es falsa cualquiera sea el valor de verdad de  $q$ , pues la presencia de  $p$  y de  $\neg p$  en la expresión hace invariablemente falso a uno de los términos de la conjunción. Y un término falso en una conjunción es suficiente para que la expresión sea falsa.

En resumen, **la disyunción de conjunciones, sin negaciones compactas (forma normal disyuntiva), es contradictoria si cada factor incluye una variable proposicional y su negación.** Por eso hemos dicho que la f.n.d. nos informa si la expresión lógica dada es contradictoria o no, nos informa acerca de la falsedad de la fórmula original. Si la f.n.d. no tiene una variable proposicional y su negación, en todos sus factores, la expresión original no es falsa, no es contradictoria.

Del análisis realizado hasta ahora con las formas normales, se desprenden dos interrogantes aún no contestados, a saber:

- (a).- Si una f.n.c. no es tautológica, ¿cómo decidir si la expresión es contradictoria o indefinida?. Pues la f.n.c. sólo nos informa si es tautológica o no la fórmula original o de partida.
- (b).- Si una f.n.d. no es contradictoria, ¿cómo podemos determinar si la expresión es tautológica o indefinida? Pues si la f.n.d. no es contradictoria, eso significa que la expresión original es, una vez al menos, verdadera. Pero nos resta saber si es siempre verdadera, o unas veces si y otras no.



Los dos interrogantes tienen una sola respuesta: en ambos casos es preciso transformar una forma normal en otra. Si es f.n.c. transformarla en f.n.d. y si es f.n.d. transformarla en f.n.c.. Es decir que para determinar si una forma normal es indefinida, es preciso transformar esa forma normal en la otra forma normal. El método es claro si se tiene en cuenta que las dos formas normales nos dan información restringida, es tautología o contradicción. Y como existe una tercera posibilidad, el carácter indefinido de la expresión, si realizamos la transformación de una forma normal en otra, ocurrirá forzosamente alguna de estas posibilidades:

- 1).- La f.n.c. no es tautológica. Transformada en f.n.d., se observa que no es contradictoria. Entonces es indefinida.
- 2).- La f.n.c. no es tautológica. Transformada en f.n.d. cada factor incluye una variable proposicional y su negación. Entonces es una contradicción.
- 3).- La f.n.d. no es contradictoria. Transformada en f.n.c., se observa que no es tautológica. Entonces es indefinida.
- 4).- La f.n.d. no es contradictoria. Transformada en f.n.c. cada factor incluye una variable proposicional y su negación. Entonces es una tautología.

El problema consiste ahora en saber como transformar una f.n.c. en una f.n.d. y viceversa, para luego decidir si la fórmula es indefinida o no. Esa transformación se realiza utilizando la Propiedad Distributiva. En los teoremas 11 y 12 de la lista de teoremas del Capítulo II, podemos ver en qué consiste y a qué reglas se somete la distribución. El teorema:

$$[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

afirma que la conjunción (producto lógico) es distributivo respecto de la disyunción (suma lógica). La misma propiedad la tiene el producto algebraico con respecto a la suma:

$$[3 \times (4 + 6)] = 30 \equiv [(3 \times 4) + (3 \times 6)] = 30$$

Cuando decimos que la conjunción es distributiva respecto de la disyunción, estamos aceptando que el producto lógico de disyunciones (y por lo tanto también una f.n.c.) es equivalente a una disyunción de conjunciones (o sea una f.n.d.). Para efectuar la transformación debemos proceder de la siguiente forma:

- (a).- Distribuir cada variable proposicional de un factor con cada variable proposicional de los factores restantes.
- (b).- En esa distribución debe invertirse la ubicación de los conectivos: la conjunción, que tenía mayor alcance, pasa a tener el alcance menor, pasa a unir las variables de los nuevos factores. La disyunción, que tenía el menor alcance, pasa a tener mayor alcance, a unir los factores entre sí.

Consideremos el siguiente ejemplo:

- |    |  |                  |
|----|--|------------------|
| 1) | $(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee r)$   | f.n.c.           |
| 2) | $(\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge p) \vee (\neg q \wedge r)$ | Por Distribución |
| 3) | $(p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge r)$ | Por Distribución |

La expresión (1) es una f.n.c., que como no tiene una variable proposicional y su negación en cada factor, no es tautología. En (2), por el teorema de la distribución, la f.n.c es transformada en f.n.d., y aplicamos la propiedad conmutativa en (3) para poder ver mejor si todos los factores poseen una variable proposicional y su negación. Pero como observamos que ello se cumple únicamente en el primer factor, la f.n.d. no es contradictoria. En consecuencia es indefinida. Se

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

cumplió la posibilidad 1.

Veamos ahora el otro teorema de la propiedad distributiva, el que nos permite transformar una f.n.d. en una f.n.c.:

$$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

El teorema afirma que la suma lógica (disyunción) es distributiva con respecto al producto lógico (conjunción). Dicha propiedad no la posee la suma algebraica o aritmética:

$$\{[3 + (2 \times 3)] = 9\} \neq \{[(3 + 2) \times (3 + 3)] = 30\}$$

En cambio la disyunción (suma lógica) acepta la distribución con el producto lógico (conjunción). Ello puede confirmarse fácilmente mediante la tabla de verdad.

La propiedad distributiva de la disyunción con relación a la conjunción nos permite transformar una disyunción de conjunciones a una conjunción de disyunciones. También aquí es preciso distribuir cada variable proposicional de un factor con cada variable proposicional de los factores restantes e invertir el alcance de los conectivos.

Consideremos el siguiente ejemplo:

1)	$(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)$	f.n.d.
2)	$(p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p)$	Por Distribución

La f.n.d. no es contradictoria y la transformamos en una f.n.c.. Como ésta no incluye en todos sus factores a una variable proposicional y su negación, no es tautológica. Por lo tanto es una expresión lógica indefinida. Luego se verá que los paréntesis segundo y tercero de la expresión (2) pueden simplificarse, en un tercer paso. Como ambos son tautologías, al eliminarlos de la expresión no altera en nada el valor de verdad de la fórmula total y quedará reducida a la siguiente expresión:  $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p)$ .

Debemos tomar en cuenta una variante de la propiedad distributiva:

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee p)$$

Observar que en esta fórmula el conectivo de mayor alcance aparece también en el segundo factor. En casos como el indicado, el factor se distribuye en bloque, de la forma dada a continuación:

1)	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee p)$	Expresión dada
2)	$(\neg q \vee p \vee p) \wedge (\neg q \vee p \vee \neg q)$	Por Distribución

La distribución ofrece algunas dificultades cuando se trata de más de dos miembros. Los ejemplos siguientes indicarán como debemos proceder en cada caso:

1)	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee s)$	f.n.c.
----	--	--------

Su correspondiente f.n.d. es la siguiente expresión:

$$(p \wedge \neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg p \wedge s) \vee (p \wedge r \wedge \neg q) \vee (p \wedge r \wedge s) \vee (q \wedge \neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p \wedge s) \vee (q \wedge r \wedge \neg q) \vee (q \wedge r \wedge s)$$

Se observará que hemos distribuido primero la primera variable proposicional del primer miembro con la primera del segundo y ambas con las restantes variables del tercer miembro. Así surgen los dos primeros miembros de la f.n.d.. Luego está distribuida la primera variable del primer miembro con la segunda del segundo y ambas con las variables del tercer miembro: de allí los miembros



tercero y cuarto de la f.n.d.. Finalmente se realizó lo mismo con la segunda variable del primer miembro; fácil es ver que los cuatro últimos miembros de la f.n.d. se diferencian de los cuatro primeros en que donde éstos tienen  $p$ , aquellos tienen  $q$ .

$$2) \quad (p \wedge q) \vee (r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \vee s) \quad \text{f.n.d.}$$

Esta vez tenemos como ejemplo una f.n.d., que tiene un miembro (el último) cuyo conectivo es el mismo que el de mayor alcance de la fórmula. En casos así, como ya vimos, se distribuye compactamente dicho miembro:

$$\begin{aligned} & (\neg q \vee s \vee p \vee r \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee s \vee p \vee r \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee s \vee p \vee s \vee \neg p) \wedge \\ & (\neg q \vee s \vee p \vee s \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee s \vee q \vee r \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee s \vee q \vee r \vee \neg r) \wedge \\ & (\neg q \vee s \vee q \vee s \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee s \vee q \vee s \vee \neg r) \quad \text{f.n.c.} \end{aligned}$$

Aunque aumente el número de variables dentro de cada paréntesis y también la cantidad de factores, debe distribuirse siguiendo el principio antes señalado: **distribuir cada variable de un paréntesis con cada variable de los restantes paréntesis.**

Ahora estamos en condiciones de utilizar las formas normales (disyuntiva y conjuntiva) como un método o procedimiento de decisión. Decidamos, pues, si la expresión lógica siguiente es contradictoria, tautológica o indefinida:

1)	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	Fórmula dada
2)	$\neg (p \Leftrightarrow q) \vee (\neg p \vee q)$	Def. de " $\Rightarrow$ "
3)	$\neg [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \vee (\neg p \vee q)$	Def. de " $\Leftrightarrow$ "
4)	$[\neg (p \wedge q) \wedge \neg (\neg p \wedge \neg q)] \vee (\neg p \vee q)$	T. de De Morgan
5)	$[(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)] \vee (\neg p \vee q)$	T. de De Morgan

La expresión (5) aún no es una forma normal. Para continuar con las transformaciones hasta lograrlo, utilizaremos la propiedad distributiva. Para hacer más fácil el método, reduciremos la complejidad de la expresión (5) utilizando las letras mayúsculas R, S, T, etc., como elementos metalógicos para representar fórmulas o expresiones lógicas cualesquiera. Veamos cómo:

$$5) \quad \frac{[(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)] \vee (\neg p \vee q)}{(R \wedge S) \vee T}$$

Donde  $(R \wedge S) \vee T$  tiene una estructura general idéntica que la expresión (5). Apliquemos en consecuencia la propiedad distributiva a esta nueva expresión y reemplacemos luego nuevamente los signos metalógicos por las fórmulas que representan:

6)	$[(R \wedge S) \vee T] \equiv [(R \vee T) \wedge (S \vee T)]$	Por Distributiva
7)	$[(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee q)] \wedge [(p \vee q) \vee (\neg p \vee q)]$	Reemplazo Metodológicos
8)	$(\neg p \vee \neg q \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee q \vee \neg p \vee q)$	Asociatividad
9)	$(\neg p \vee \neg p \vee q \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg p \vee q \vee q)$	Conmutativa
10)	$(\neg p \vee q \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg p \vee q)$	Por Simplificación

Hemos obtenido como resultado final una f.n.c., cuyos dos paréntesis incluyen una variable proposicional y su negación, en consecuencia la fórmula es tautológica.

En el paso (10) hemos simplificado, o sea hemos eliminado las repeticiones innecesarias. Teníamos dos veces  $\neg p$  en el primer miembro y también dos veces  $q$  en el segundo miembro, ambas repeticiones no agregaban nada al valor de verdad de la expresión del paso (9). La simplificación se hizo en función del teorema que ya mencionamos en el capítulo II:  $(p \vee p) \equiv p$ . Existen otros teoremas que permiten simplificar expresiones lógicas. Por ejemplo, cuando existe una tautología conocida como miembro de una conjunción, dicha tautología puede eliminarse. Por



ejemplo:

$$(\neg p \vee p) \wedge (q \vee r)$$

Podemos simplificar el primer miembro o paréntesis, porque el valor de verdad de ese conjunto depende únicamente del valor de verdad de  $(q \vee r)$ , ya que  $(\neg p \vee p)$  es siempre verdadero. La simplificación se realiza en función del siguiente teorema lógico:

$$[p \wedge (q \vee \neg q)] \equiv p.$$

Es decir que en una f.n.c. no tautológica podemos simplificar todos aquellos miembros o factores que incluyan una variable y su negación. En efecto, el valor de la expresión no se alterará si suprimimos esas tautologías. Por ejemplo:

$$[(p \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p \vee q)] \equiv [q \vee r] \wedge (r \vee p \vee q)$$

Algo semejante podemos realizar con las f.n.d. no contradictorias. En ellas podemos simplificar todos aquellos factores que contengan una variable proposicional y su negación. El valor de la expresión lógica permanecerá intacto si eliminamos esas contradicciones. Por ejemplo:

$$[(p \wedge q \wedge \neg q) \vee (r \wedge q \wedge s)] \equiv (r \wedge q \wedge s)$$

Para finalizar, agregaremos nuevos teoremas a la lista anterior y cuyo empleo facilitará la decisión por el método de las formas normales.

(13)	$(p \wedge p) \equiv p$	Simplificación de " $\wedge$ "
(14)	$[p \vee (q \wedge \neg q)] \equiv p$	
(15)	$[p \wedge (q \vee \neg q)] \equiv p$	
(16)	$[(p \wedge q) \Rightarrow p] \equiv (p \Rightarrow p)$	Simplificación de " $\Rightarrow$ "
(17)	$[(p \wedge q) \Rightarrow q] \equiv (q \Rightarrow q)$	Simplificación de " $\Rightarrow$ "
(18)	$[(p \wedge q) \vee (r \wedge s)] \equiv [(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)]$	Distributiva
(19)	$[(p \wedge q) \vee (r \vee s)] \equiv [(r \vee s \vee p) \wedge (r \vee s \vee q)]$	Distributiva
(20)	$\neg (p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \neg q)$	Bicondicional negado
(21)	$\neg (p \Leftrightarrow q) \equiv (\neg p \Leftrightarrow q)$	Bicondicional negado

## 2.5.- ENUNCIADOS Y FORMAS DE ENUNCIADOS

Para distinguir entre enunciados y formas de enunciados, distinción que hasta aquí no hemos realizado, utilizaremos la noción de constante proposicional. Una constante proposicional se simboliza con las letras mayúsculas (letras iniciales A, B, C, D, etc.) y representa sólo una proposición dentro del contexto. El siguiente ejemplo :

**Los vegetales tienen clorofila o el cedro no es vegetal**

puede representarse mediante constantes proposicionales de la siguiente forma :

$$A \vee \neg B$$

Pero nos preguntamos, ¿acaso no representamos mediante variables proposicionales a proposiciones semejantes de la siguiente forma :  $p \vee \neg q$ ? ¿Qué diferencia existe entre las dos expresiones lógicas  $A \vee \neg B$  y  $p \vee \neg q$ ? ¿Qué distingue a una variable proposicional de una constante proposicional?.

La respuesta es la siguiente: la constante es una proposición. "**A**", por ejemplo, representa sólo a "**Los vegetales tienen clorofila**" dentro del contexto. La variable "**p**", en cambio, no representa a esa proposición, sino sólo a su posible valor de verdad (V o F). Es decir





que mientras la constante tiene un sentido ( $\neg B$  significa "El cedro no es un vegetal"), la variable no tiene ningún sentido ( $\neg p$ , por ejemplo, alude a V o F de la proposición "El cedro no es un vegetal", pero no a su sentido).

Si hacemos la tabla de verdad de  $(p \vee \neg q)$ , veremos que existen cuatro posibilidades para ella. En cambio con  $A \vee \neg B$  no podemos construir la tabla de verdad, pues sólo tiene una posibilidad: es verdadera (por razones extralógicas). Esto significa que las constantes proposicionales aluden a realidades, se refieren a ellas. En cambio una variable proposicional se refiere a posibilidades, a posibles valores de verdad, sin aludir a realidad alguna porque no tiene significado alguno.

Ahora podemos decir que una forma de enunciado es una fórmula o expresión lógica EBF, construida con variables proposicionales. Si se reemplazan las variables por constantes proposicionales, cuidando en todos y en cada caso de sustituir la misma variable por la misma constante, obtenemos un enunciado. Continuando con la significación atribuida a  $A$  y a  $\neg B$ , los ejemplos siguientes muestran enunciados y sus correspondientes formas:

<u>Enunciados</u>	<u>Formas de Enunciados</u>
1) $A \wedge B$	1) $p \wedge q$
2) $A \Rightarrow \neg B$	2) $p \Rightarrow \neg q$
3) $\neg A \vee A$	3) $\neg p \vee p$
4) $B \wedge \neg B$	4) $p \wedge \neg p$

Decimos que cada enunciado es un caso de sustitución de su correspondiente forma de enunciado. Notemos lo siguiente: el enunciado (2) es falso, porque se trata de un condicional cuyo antecedente es verdadero y su consecuente falso. Pero su correspondiente forma de enunciado no es falsa, sino indefinida. Si construimos la tabla de verdad de  $p \Rightarrow \neg q$ , veremos que tiene tres valoraciones verdaderas y una falsa. Ello significa que la falsedad del enunciado  $A \Rightarrow \neg B$ , no proviene de que su correspondiente forma de enunciado sea también falsa (contradicción).

Fácil sería, en efecto, encontrar otra sustitución verdadera de la misma forma de enunciado: "Si es triángulo, entonces no es cuadrado", por ejemplo. En casos así decimos que se trata de enunciados **indefinidos o contingentes**, pues su verdad o falsedad depende del contenido y no de su forma.

El enunciado (4), también es falso pero por razones distintas que el anterior. Aquí su falsedad proviene de ser un caso de sustitución de una forma de enunciado contradictorio. No se encontrará, en efecto, un solo caso de sustitución verdadero de  $p \wedge \neg p$ .

Razonamiento semejante podemos realizar también con los dos enunciados restantes. El enunciado (1) es verdadero pero contingente, pues su forma de enunciado es indefinida. Es decir que su verdad depende del contenido, del significado de sus enunciados componentes, y no de su forma de enunciado. En cambio el enunciado (3) es verdadero en razón de constituir un caso de sustitución de una forma de enunciado tautológico.

## 2.6.- EL RAZONAMIENTO

Hasta este punto nos hemos dedicado a los enunciados y a sus formas. Sobre la base de lo que hemos estudiado, podremos avanzar hacia la comprensión de lo que es un razonamiento.

**Un razonamiento está constituido por enunciados de tal modo que el último (conclusión) se deriva con necesidad lógica de los anteriores (premisas).**



Así como distinguimos entre enunciados y formas de enunciados, veremos también que existen razonamientos y formas de razonamientos. Analizaremos los ejemplos siguientes:

**Razonamiento**

V Si Güemes es salteño es argentino

V Es argentino

V Luego es salteño

V Si Güemes es tucumano es argentino

V Es argentino

F Luego es tucumano

F Si la ballena es vertebrado vive en la selva

V Es vertebrado

F Luego vive en la selva

V Si la ballena es mamífero es vertebrado

V Es mamífero

V Luego es vertebrado

**Forma de Razonamiento**

1)  $p \Rightarrow q$   
 $q$   
 $\therefore p$

2)  $p \Rightarrow q$   
 $q$   
 $\therefore p$

3)  $p \Rightarrow q$   
 $p$   
 $\therefore q$

4)  $p \Rightarrow q$   
 $p$   
 $\therefore q$

Como podemos observar, el razonamiento está formado por enunciados. En tanto que la forma de razonamiento está formada por variables proposicionales. Por lo cual podemos decir, que un razonamiento resulta de sustituir, en una forma de razonamiento las variables proposicionales por constantes proposicionales, reemplazando siempre la misma variable por la misma constante.

Los ejemplos (1) y (2) tienen la misma forma de razonamiento. El ejemplo (1) tiene premisas verdaderas y conclusión verdadera, en tanto que en el ejemplo (2), se llega a conclusión falsa a cuando hemos partido de premisas verdaderas. Cuando una forma de razonamiento permite esto último, o sea extraer conclusión falsa de premisas verdaderas, decimos que se trata de una **forma de razonamiento inválida**.

En cambio las formas de razonamiento (3) y (4) no permiten la derivación de una conclusión falsa a partir de premisas verdaderas, porque se trata de formas de razonamiento válidas. Si intentamos buscar un caso de sustitución de este tipo, donde exista conclusión falsa a partir de premisas verdaderas, no lo encontraremos.

Un razonamiento es válido, cuando en un caso de sustitución de una forma válida de razonamiento. Y es inválido, cuando es un caso de sustitución de una forma inválida de razonamiento.

En los ejemplos considerados existe algo curioso. La forma de los razonamientos (1) y (2), que es inválida, permite sin embargo que en ciertos casos de sustitución, las premisas y conclusión sean verdaderas. Tal cual lo es el caso (1). La forma de los razonamientos (3) y (4), forma válida, permite que una de las premisas y la conclusión sean falsas, caso (3). Esto revelaría que la validez o invalidez de las formas de razonamiento, es en alguna medida independiente de la verdad o falsedad de las variables proposicionales, que la componen. Lo extraño es que definimos validez e invalidez de las formas de razonamiento en función de la verdad o falsedad de las proposiciones componentes.

¿Qué ocurre, pues?. Definimos las nociones de validez e invalidez a pelando a la relación que guardan premisas y conclusión respecto de sus valores de verdad. Y ahora afirmamos que la validez o invalidez sería independiente de esos valores, según parecen mostrar los ejemplos (1) y (3). Y no sólo ese par de afirmaciones parece contradictoria sino también esta otra: al comienzo dijimos que la lógica es una ciencia formal, que para nada tiene en cuenta el contenido de las proposiciones. Pero ahora hemos definido la validez de una forma de razonamiento, como aquella

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

forma que no permite un caso de sustitución donde haya premisas verdaderas y conclusión falsa. Y sustituir en una forma de razonamiento es, dijimos, reemplazar variables por constantes, es decir formas vacías ( $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ , etc.) por constantes con un significado específico. ¿No es esto una contradicción?. Entre la forma ( $V$ ,  $F$ ) y el contenido de las proposiciones, la lógica como ciencia formal debe optar por la primera, desechar el contenido. Y aquí, al parecer, hemos realizado lo contrario:

**Primero:** definimos la validez y la invalidez recurriendo a la sustitución, o sea al contenido.

**Segundo:** nos sorprendimos diciendo que la validez y la invalidez de las formas de razonamiento es independiente de la verdad o falsedad de las premisas, y de la conclusión, es decir de la forma de los enunciados componentes.

Un mismo análisis nos permitirá solucionar las dos contradicciones mencionadas anteriormente. Cuando decimos que los ejemplos (1) y (2) tienen la misma forma, decíamos algo que necesita de una mayor precisión. La forma general es la misma, pero consideremos estrictamente por un momento la idea de que la lógica toma como forma de las proposiciones a  $V$  y  $F$ . Estos signos pueden ser reemplazados por otros convencionalmente ( $0$ ,  $1$ ;  $/$ ,  $//$ ; etc), ya que los mismos no se utilizan en su significación gnoseológica. Si nos ubicamos en ese formalismo exigente, la **forma** de un enunciado, como por ejemplo, **( $p \vee q$ )**, asumirá las siguientes subformas posibles de valores de verdad: ( $V \vee V$ ), ( $V \vee F$ ), ( $F \vee V$ ) y ( $F \vee F$ ). Esto es precisamente lo que muestran las tablas. Ante la forma general de los razonamientos (1) y (2), podemos análogamente decir que existen en ella subformas posibles:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \frac{V \Rightarrow V}{V} & \text{b)} & \frac{F \Rightarrow V}{V} \\ & \therefore V & & \therefore F \\ \text{c)} & \frac{V \Rightarrow F}{F} & \text{d)} & \frac{F \Rightarrow F}{F} \text{ etc.} \\ & \therefore V & & \therefore V \end{array}$$

(a) y (b) son las subformas que corresponden a los razonamientos (1) y (2). Podemos ahora precisar nuestra definición de validez. No hablaremos de que una forma general de razonamiento es válida si no tiene sustituciones de constantes proposicionales que sean verdaderas en las premisas y falsas en la conclusión. Diremos más bien que **una forma general de razonamiento es válida si no tiene alguna sub forma que permite la conclusión Falsa (F) a partir de premisas Verdaderas (V).**

Esta definición es más formal, pues no hace reposar en el contenido significativo de las constantes, la noción lógica de validez. De esta forma hemos contestado a la segunda contradicción mencionadas anteriormente. Veamos ahora que sucede con la primera contradicción mencionada.

Para comprender mejor la respuesta, nos anticiparemos a algo que se verá luego con más detalle: **toda forma de razonamiento tiene una correspondiente forma de enunciado.** La forma de enunciado que corresponde a la siguiente forma de razonamiento:

$$\frac{p \Rightarrow q}{q} \therefore p \quad \text{Es :} \quad [(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$$

Construimos la tabla de verdad de esta forma de enunciado:



p	q	$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$				
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F

Las cuatro subformas de que antes hablamos aparecen en cada línea horizontal de la tabla; (a) es la primera línea; (b) es la tercera línea; (c) es la segunda línea y (d) es la cuarta línea.

Recordemos la respuesta a la segunda contradicción: una forma general de razonamiento es inválida cuando tiene un caso de sustitución de variables cuyo valor general es V en las premisas y F en la conclusión. La tercer línea de la tabla es un caso de sustitución de este tipo; su sola presencia basta para invalidar la forma general de razonamiento. Contestemos ahora a la primera contradicción: dentro de una forma general válida de razonamiento los valores de premisas y conclusión pueden ser cualesquiera, menos el caso siguiente: premisas V y conclusión F. Si esto último se da existirá invalidez. **Es decir que una forma general válida de razonamiento permite entera libertad de combinaciones entre los valores de las premisas y conclusión (es independiente de esas combinaciones) salvo en este punto, en que es inflexible: no permitir obtener conclusión F de premisas V.**

Notar que si empezáramos de otra definición de validez, como la siguiente: "una forma de razonamiento es válida si nos garantiza concluir en verdad", tendríamos que aceptar como válidas las subformas (a), (c) y (d) de la forma general inválida de razonamiento y también muchas otras formas inválidas de razonamiento.

### 2.6.1.- FORMAS DE RAZONAMIENTO Y FORMAS DE ENUNCIADOS

Como vimos, una forma válida de razonamiento acepta solamente estas relaciones posibles entre premisas y conclusión:

<u>Premisas</u>	<u>Conclusión</u>
V	V
F	V
F	F

Una forma inválida, en cambio, permite además la siguiente cuarta posibilidad:

<u>Premisas</u>	<u>Conclusión</u>
V	F

Nótese que los casos aceptados por la forma válida coincide punto a punto con el dominio del condicional. En efecto, el condicional es verdadero cuando el consecuente es verdadero o el antecedente es falso. Y una forma de razonamiento es válida cuando únicamente tiene sustituciones de variables cuyo valor general es F en las premisas o V en la conclusión.

Por otro lado el condicional es falso cuando tiene antecedente verdadero y consecuente falso. Y la forma de razonamiento es inválida cuando tiene al menos un caso de sustitución de variables proposicionales, cuyo valor general es V en las premisas y F en la conclusión.



Todo esto quiere decir que el signo "∴" colocado entre las premisas y la conclusión tiene un comportamiento semejante al condicional "⇒". Esto nos permite, que al sustituir "∴" por "⇒", encontrar para cualquier razonamiento un enunciado que le corresponda. Por ejemplo:

<u>Razonamiento</u>	<u>Enunciado correspondiente</u>
$  \begin{array}{l}  A \Rightarrow B \\  1) \quad B \Rightarrow C \\  \hline  A \vee B \\  \therefore C \vee B  \end{array}  $	$2) \quad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (A \vee B) \Rightarrow (C \vee B)$

En (2) hemos unido las distintas premisas del razonamiento (1), mediante la conjunción. Este procedimiento está justificado por una de las formas válidas de razonamiento que veremos más adelante.

Destaquemos que si bien a todo razonamiento le corresponde un enunciado, que une las premisas mediante la conjunción y reemplaza "∴" por "⇒", lo recíproco no es válido: **no todo enunciado tiene su correspondiente razonamiento**. El siguiente enunciado  $(A \vee B)$ , por ejemplo, no puede ser convertido en razonamiento, no tiene una proposición que se derive de otra u otras proposiciones. De lo dicho, podemos concluir en la siguiente regla general: **toda forma de enunciado cuyo conectivo de mayor alcance sea "⇒", tiene su correspondiente forma de razonamiento**.

Consideremos los siguientes ejemplos:

<u>Forma de Enunciados</u>	<u>Forma de Razonamiento Correspondiente</u>
1) $[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow p$	$  \begin{array}{l}  1) \quad (p \wedge q) \vee r \\  \hline  \therefore p  \end{array}  $
2) $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$	$  \begin{array}{l}  2) \quad p \Rightarrow q \\  \quad \quad \neg q \\  \hline  \therefore \neg p  \end{array}  $
3) $p \Rightarrow q$	$  \begin{array}{l}  3) \quad p \\  \hline  \therefore q  \end{array}  $

Podemos preguntarnos ahora, qué relación guarda una forma de razonamiento con su forma de enunciado correspondiente. La respuesta que obtenemos es la siguiente: si la forma de enunciado es tautológica, entonces la forma de razonamiento es válida. Si la forma de enunciado es contradictoria o indefinida, la forma de razonamiento es inválida. Porque si válida es una forma de razonamiento cuando no acepta que de premisas verdaderas, se concluya en falsedad, la forma de enunciado correspondiente sólo puede ser tautológica. Porque ¿qué ocurriría si la forma de enunciado en cuestión fuese indefinida?.

Como en esta forma de enunciado el conectivo de mayor alcance es "⇒", si su columna matriz tuviera unas veces V y otras F, ocurriría en aquellos casos donde hay F precisamente aquello que no consiente una forma válida de razonamiento: que de premisas (antecedentes en la forma de enunciado) verdaderas se determine una conclusión (consecuente en la forma de enunciado) falsa.

Con mayor razón, si la forma de enunciado correspondiente a la forma de razonamiento fuera contradictoria, esa situación inaceptable por la definición de validez se repetiría en cada caso de avaloración de la forma de enunciado en cuestión. De manera que, como vimos antes, mientras los enunciados y sus formas pueden ser tautológicos, indefinidos y contradictorios, los razonamientos y sus formas son válidos o inválidos.



<u>Forma de Razonamiento</u>	<u>Forma de Enunciado</u>
Válida	Tautológica
Inválida	Indefinida o Contradictoria

Mostremos en un ejemplo lo que venimos diciendo. Para lo cual recurrimos nuevamente a la tabla de verdad, las cuales permiten también decidir sobre la validez o invalidez de los razonamientos. Primero es preciso convertir el razonamiento dado a su correspondiente forma de razonamiento; luego transformarlo a su forma de enunciado. Y ya sabemos como se trata a una forma de enunciado para decidir sobre su carácter tautológico, contradictorio o indefinido mediante la tabla. Si el resultado es una tautología, el razonamiento es válido. Si el resultado del cálculo es contradictorio o indefinido, el razonamiento y su forma de razonamiento es inválido. Consideremos el siguiente ejemplo:

<u>Razonamiento</u>	<u>Forma de Razonamiento</u>	<u>Forma de Enunciado</u>
Si los árboles cantan son vegetales	(V) $p \Rightarrow q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \neg p] \Rightarrow \neg q$
No cantan	(V) $\neg p$	
Luego no son vegetales	(F) $\therefore \neg q$	

Un vistazo a los valores de premisas y conclusión nos anticipa desde ya la invalidez del razonamiento. Pero construyamos la tabla de verdad de la forma de enunciado correspondiente, para decidir si la invalidez proviene que la forma de enunciado sea contradictoria o indefinida.

p	q	$[(p \Rightarrow q) \wedge \neg p] \Rightarrow \neg q$				
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

La matriz de la implicación de mayor alcance es indefinida. La forma de razonamiento, pues, (lo mismo que el razonamiento) es inválida. Indicamos a continuación una lista de formas válidas de razonamiento con sus correspondientes nombres:

- 1)  $p \Rightarrow q$   
 $p$   
 -----  
 $\therefore q$  **Modus Ponens**
- 2)  $p \Rightarrow q$   
 $\neg q$   
 -----  
 $\therefore \neg p$  **Modus Tollens**



3)	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \end{array}$	Silogismo Hipotético
4)	$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$	Silogismo Disyuntivo
5)	$\begin{array}{l} (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \\ (p \vee r) \\ \hline \therefore (q \vee s) \end{array}$	Dilema Constructivo
6)	$\begin{array}{l} (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \therefore \neg p \vee \neg r \end{array}$	Dilema Destructivo
7)	$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$	Simplificación
8)	$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$	Conjunción
9)	$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$	Adición

### 2.6.2.- LA DECISIÓN EN EL RAZONAMIENTO

Si, como hemos visto en los apartados anteriores, a todo razonamiento le corresponde una forma de enunciado, es fácil comprender que los métodos de decisión aplicados a enunciados permiten decidir también sobre la validez o invalidez de los razonamientos. Las formas normales, por ejemplo, que permiten decidir sobre si un enunciado es tautológico, contradictorio o indefinido, también deciden la validez o invalidez de un razonamiento dado. Sólo debemos considerar la relación entre razonamiento y enunciado correspondiente: aquel es válido -únicamente cuando éste es tautológico; e inválido cuando el enunciado es indefinido o contradictorio. Dado un razonamiento cualquiera, pues, si queremos decidir por las formas normales si es válido o no, tendremos que proceder de la siguiente forma: transformar el razonamiento en su enunciado correspondiente; aplicar a éste el método de las formas normales; si el resultado establece que el enunciado es tautológico, el razonamiento es válido; si el enunciado resulta ser indefinido o contradictorio, el razonamiento es inválido. El empleo de las formas normales para decidir la naturaleza de un razonamiento, es particularmente útil cuando el número de proposiciones, que componen al razonamiento en cuestión, es abultado. En esos casos la decisión por las tablas requiere una proliferación de columnas de referencia para realizar el cálculo y eso complica demasiado la decisión.



## 2.7.- LAS IMPLICACIONES Y DERIVACIONES LÓGICAS

Estudiaremos ahora la implicación lógica y la forma en que puede utilizarse como base de un razonamiento válido. Hay, por supuesto, razonamientos que no son válidos y algunos de ellos serán identificados en secciones posteriores. Los argumentos o razonamientos no válidos se los denominan **falacias**. Utilizando el método de la tabla de verdad, se puede distinguir entre razonamientos válidos y falacias.

Los patrones de razonamiento pueden expresarse de diferentes forma, tal cual vimos en secciones anteriores. En el idioma español, la conclusión se establece típicamente después de las premisas, y se presenta mediante palabras tales como: **“por tanto”, “como consecuencia”** y **“en conclusión”**. En los razonamientos presentados en secciones anteriores, enumerábamos primero todas las premisas, una debajo de la otra. Existía una línea horizontal por debajo de la última premisa, y debajo de esta línea, estaba la conclusión. En el caso del **modus ponens**, esto tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{array}{ll} 1) & P \Rightarrow Q \\ & P \\ & \text{-----} \\ & \therefore Q \end{array} \quad \text{Modus Ponens}$$

Si el esquema de razonamiento es válido, y sólo entonces, utilizaremos el símbolo  $\models$  para separar las premisas de la conclusión. Considerando el ejemplo anterior, la forma de enunciado válido tendrá el siguiente aspecto:

$$p, p \Rightarrow q \models q$$

Un razonamiento es válido si la conclusión se deduce lógicamente, siempre que se cumplan todas las premisas. Esto significa que la conjunción de todas las premisas implica lógicamente la conclusión. Por lo tanto, si **A** es la conjunción de todas las premisas y **B** es la conclusión, se tiene que demostrar que  $A \Rightarrow B$  es una tautología. En otras palabras se tiene que demostrar que  $A \Rightarrow B$  o, equivalentemente que,  $A \models B$ .

### 2.7.1- IMPLICACIONES LÓGICAS

Cualquier tautología de la forma  $p \Rightarrow q$  se denomina **Implicación Lógica**. Ya hemos trabajado bastante con las implicaciones lógicas. Hemos establecido, por ejemplo, que  $P \Rightarrow V$  y  $F \Rightarrow P$  son expresiones que resultan verdaderas para todos los valores de verdad de **P**, lo cual convierte a estas dos expresiones en tautologías. Por lo tanto  $P \models V$  y  $F \models P$ . Las implicaciones lógicas son tautologías y cualquier tautología lógicamente puede ser utilizada como la base de un esquema o forma de enunciado lógico. Específicamente si **P** es una expresión cualquiera  $p \models V$  justifica el esquema  $P \models V$ . El esquema o forma de enunciado  $F \models P$  puede demostrarse de manera similar. Las equivalencias lógicas crean implicaciones lógicas, según se indica en el teorema siguiente:

**TEOREMA 2.1.-** Si **C** y **D** son dos expresiones lógicas y si  $C \equiv D$  entonces  $C \models D$  y  $D \models C$ .

Como aplicación del teorema, consideremos la siguiente forma de enunciado:

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)) \models q$$





Esta equivalencia conduce a la siguiente forma de enunciado e implicación lógica importante:

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)) \Rightarrow q$$

Por supuesto, cualquier implicación lógica se puede demostrar mediante la tabla de verdad.

**Ejemplo 2.7.1.-** Demostrar las siguientes formas de enunciados son tautologías o enunciados válidos  $p \Rightarrow (p \vee q)$  y  $(p \wedge q) \Rightarrow p$ .

(a) Tabla de verdad para  $p \Rightarrow (p \vee q)$

$p$	$q$	$(p \vee q)$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Tabla 2.7.1

(b) Tabla de verdad para  $(p \wedge q) \Rightarrow p$ .

$p$	$q$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Tabla 2.7.2

Ambas implicaciones lógicas tienen nombres: se denominan, respectivamente, la **Ley de Adición** y la **Ley de Simplificación**. Consideremos la siguiente expresión, correspondiente al **Silogismo Hipotético**, que puede expresarse de la siguiente forma:

$$(p \Rightarrow q), (q \Rightarrow r) \models (p \Rightarrow r)$$



p	q	r	$(p \Rightarrow q)$	$(q \Rightarrow r)$	Premisas	$(p \Rightarrow r)$	Válido
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Tabla 2.7.3: Tabla de Verdad de Silogismo Hipotético

Consideremos el caso en el que si todas las premisas son verdaderas, y este es el caso sólo si  $p$  y  $q$  son F, entonces la conclusión  $\neg p$  es verdadera. La forma de enunciado correspondiente a un razonamiento como el considerado, se denomina **Modus Tollens**.

$$(p \Rightarrow q), \neg q \models \neg p$$

P	q	$(p \Rightarrow q)$	$\neg q$	Premisas	Conclusión $\neg p$	Válido
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Tabla 2.7.4: Tabla de verdad de Modus Tollens

## 2.7.2.- SISTEMAS PARA DERIVACIONES

Existen diferentes sistemas para hacer derivaciones. Todos estos sistemas tienen las siguientes características en común.

- 1.- Existe una lista dada de argumentos o formas de razonamientos lógicos admisibles, llamados **Reglas de Inferencia**. Esta lista se la conoce con el nombre de **L**.
- 2.- La derivación por si misma es una lista de expresiones lógicas. Originalmente esta lista esta vacía. Se le pueden añadir expresiones a ésta si constituyen una premisa o si pueden obtenerse a partir de expresiones previas, aplicando una de las reglas de inferencia. Este proceso continua hasta que se alcanza la conclusión.



Si existe una derivación para la conclusión  $C$ , dado que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son las premisas y dado que  $L$  es el conjunto de reglas de inferencia admisibles, entonces escribimos:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash_L C$$

**Ejemplo 2.7.2:** Demostrar el siguiente enunciado

$$(P \Rightarrow Q), (Q \Rightarrow \neg R), (\neg P \Rightarrow \neg R) \models \neg R$$

Derivación Formal	Regla de Inferencia	Comentario
1.- $(P \Rightarrow Q)$	Premisa	
2.- $(Q \Rightarrow \neg R)$	Premisa	
3.- $(\neg P \Rightarrow \neg R)$	Premisa	
4.- $(P \Rightarrow \neg R)$	1, 2 SH	Silogismo Hipotético entre filas 1 y 2
5.- $\neg R$	3, 4 Cs	Ley de Casos entre 3 y 4

**Nota:** La regla de Inferencia conocida como la **Ley de Casos** está indicada en el siguiente esquema o enunciado:

$$(A \Rightarrow B), (\neg A \Rightarrow B) \models B$$

Obsérvese que en la mayoría de los sistemas para derivaciones formales, el conjunto  $L$  de reglas de inferencia es fijo. No puede utilizarse ninguna regla de inferencia a menos que se incluya en  $L$  como una regla de inferencia admisible. Dentro de esas reglas de inferencia tenemos: Ley de Combinación, de Simplificación, Ley de Adición, Modus Ponens, Modus Tollens, Silogismo Hipotético, Silogismo Disyuntivo, Ley de Casos, Eliminación e Introducción de Equivalencia y Ley de Inconsistencia.

### 2.7.3.- TEOREMA DE LA DEDUCCIÓN

Para demostrar que  $(A \Rightarrow B)$  en matemáticas se utilizan con frecuencia el siguiente argumento informal:

- 1.- Se supone  $A$  y se añade  $A$  a las premisas.
- 2.- Se demuestra  $B$ , utilizando  $A$ , si es necesario.
- 3.- Se prescinde de  $A$ , lo que significa que  $A$  no es necesariamente verdadera, y se escribe  $(A \Rightarrow B)$ .

**Ejemplo 2.7.3.-** Una pareja tiene un niño, y están esperando un segundo hijo. Demostrar que si el segundo hijo es una niña entonces la pareja tendrá una niña y un niño.

Sea  $P$  "el primer hijo es un niño" y  $Q$  "el segundo hijo es una niña". Queremos demostrar que  $Q \Rightarrow P \wedge Q$ , dado que la premisa es  $P$ . De acuerdo con el método en discusión puede hacerse de la siguiente forma:

- 1.-  $P$  es verdadero, la pareja tiene un niño



- 2.- Se supone  $Q$ ; esto es, se supone que el segundo hijo es una niña.
- 3.- A partir de  $P$  y de  $Q$ , concluya  $P \wedge Q$  por la ley de combinación.
- 4.- En este momento, se nos permite concluir que  $Q \Rightarrow P \wedge Q$ .  $Q$  puede ahora ser licenciada, esto es  $Q \Rightarrow P \wedge Q$  es verdadera aun si  $Q$  resulta falsa como resultado: en este caso  $Q \Rightarrow P \wedge Q$  es trivialmente verdadera.

Es clara la razón por la cual es válido este patrón para realizar demostraciones. Cuando demostramos  $A \Rightarrow B$ , solamente necesitamos considerar el caso en que  $A$  es verdadera: si  $A$  es falsa,  $A \Rightarrow B$  es trivialmente verdadera. Si  $A$  es verdadera entonces puede añadirse a las premisas. Lo que muestra la validez del procedimiento. Esencialmente, el argumento establece que una hipótesis puede convertirse en un antecedente de un condicional. Este es el contenido del **Teorema de la Deducción**, que se enuncia de la siguiente forma:

**TEOREMA 2.2.-** Sean  $A$  y  $B$  dos expresiones y sean  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , las premisas. Si  $B, A_1, A_2, A_3, \dots$ , juntos implican lógicamente  $C$ , entonces  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , implican lógicamente  $B \Rightarrow C$ .

Junto con este teorema, las reglas de inferencia admisibles, mencionadas anteriormente, forman un sistema completo de deducción.

**Ejemplo 2.7.4.-** Utilizar el teorema de la deducción para derivar el Silogismo Hipotético. Usar el Modus Ponens (MP) como única regla de inferencia.

Demostrar:  $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R \models P \Rightarrow R$

Derivación Formal	Regla de Inferencia	Comentario
1.- $(P \Rightarrow Q)$	Premisa	
2.- $(Q \Rightarrow R)$	Premisa	
3.- $P$	Hipótesis	Se supone $P$
4.- $Q$	1, 3 MP	Modus Ponens entre filas 1, 3
5.- $R$	2, 4 MP	Modus Ponens entre filas 2, 4
6.- $(P \Rightarrow R)$	TD (Teorema de la Deducción)	Se prescinde de $P$ , esto es, $P$ deja de suponerse verdadero y se concluye $P \Rightarrow R$

**Ejemplo 2.7.5.-** Mostrar que  $P \Rightarrow Q$ , y  $P \Rightarrow \neg Q$  puede utilizarse para la derivación de  $\neg P$ .

Demostrar:  $P \Rightarrow Q, P \Rightarrow \neg Q \models \neg P$



Derivación Formal	Regla de Inferencia	Comentario
1.- $(P \Rightarrow Q)$	Premisa	
2.- $(P \Rightarrow \neg Q)$	Premisa	
3.- $P$	Hipótesis	Se supone $P$ para derivar una contradicción.
4.- $Q$	1, 3 MP	Modus Ponens entre filas 1, 3
5.- $\neg Q$	2, 3 MP	Modus Ponens entre filas 2, 3
6.- $Q \wedge \neg Q$	4, 5 C	Las líneas 4 y 5 proporcionan la contradicción deseada
7.- $\neg P$	Negación	Puesto que la hipótesis $P$ conduce a una contradicción, se permite concluir que $\neg P$

Corresponde a una demostración indirecta. En la demostración formal se utiliza la palabra **"Negación"** para indicar que  $\neg P$  ha sido derivada y que la suposición  $P$  se descarta en lo sucesivo.

## 2.8.- LA DECISIÓN POR CUADRO SEMÁNTICO

El método del cuadro semántico es un algoritmo relativamente eficiente para la decisión y su comprobación en el cálculo proposicional. El principio es muy simple, pues para comprobar la satisfiabilidad debemos buscar siempre un modelo.

**DEFINICIÓN 2.4.-** *Un **literal** es una proposición simple o una fórmula atómica o la negación de la fórmula atómica. Definimos a  $\{p, \neg p\}$  como el par complementario de literales, si y solo si  $p$  es una fórmula atómica.*

**DEFINICIÓN 2.5.-** *Para cualquier tipo de fórmula  $A$ , el conjunto  $\{A, \neg A\}$  es el par complementario de fórmulas.  $A$  es el complemento de  $\neg A$  y por lo tanto  $\neg A$  es el complemento de  $A$ .*

Consideremos la siguiente fórmula  $A \equiv p \wedge (\neg p \vee \neg p)$  y sea  $v$  una interpretación arbitraria para  $A$ .

\*  $v(A) = V$  si y solo si tanto  $v(p) = V$  y  $v(\neg p \vee \neg p) = V$

\* En consecuencia  $v(A) = V$  si y solo si se cumple que:

- |                |   |                 |
|----------------|---|-----------------|
| 1.- $v(p) = V$ | y | $v(\neg q) = V$ |
| 2.- $v(p) = V$ | y | $v(\neg p) = V$ |

De esta forma hemos reducido la prueba de satisfiabilidad de  $A$  a la prueba de satisfiabilidad de



sus literales.

Recordemos las siguientes definiciones:

**DEFINICIÓN 2.6.-** Una fórmula  $A$  es **satisfactoria**, si su valor es verdadero para alguna interpretación. Una interpretación satisfactoria es denominada como un **Modelo** de  $A$ . La notación empleada para un modelo es :  $\models A$

**DEFINICIÓN 2.7.-** Una fórmula es **Válida** si su valor es verdadero para todas las interpretaciones.

**DEFINICIÓN 2.8.-** Una fórmula lógica o proposición compuesta es **Insatisfactoria o Contradictoria**, si la misma no es satisfactoria, o sea que es FALSA (F) para todas sus interpretaciones.

**DEFINICIÓN 2.9.-** Una fórmula lógica es **Inválida o No Válida o Falsificable**, si no es válida, o sea que su valor es FALSO (F) para alguna interpretación de sus valores de verdad.

Consideremos la siguiente fórmula:

$$B \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$$

\*  $v(B) = V$  ssi  $v(p \vee q) = V$  y  $v(\neg p \wedge \neg q) = V$

\* En consecuencia  $v(B) = V$  si y solo si  $v(p \vee q) = V$  y  $v(\neg p) = V$  y  $v(\neg q) = V$ .

\* En consecuencia  $v(B) = B$  si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1.-  $v(p) = v(\neg p) = v(\neg q) = V$  o bien

2.-  $v(q) = v(\neg p) = v(\neg q) = V$

Como ambos conjuntos de literales contienen pares complementarios, ninguno de ellos es satisfactorio y en consecuencia podemos concluir que es imposible encontrar un modelo para  $B$ , de modo que  $B$  es insatisfactorio.

La búsqueda sistemática nos lleva fácilmente a la simplicidad, si lo visualizamos de una manera básica o de una forma gráfica obtendremos una herramienta muy potente y muy simple de utilizar. A través de ello emplearemos el método del árbol y por descomposición sucesiva de la expresión o fórmula lógica, podremos analizar la misma.

Lo cual nos conlleva a un conjunto de literales. Si este conjunto contiene a su vez un conjunto complementario de literales, lo identificaremos marcándolo a través de una **X** (insatisfactorio), mientras que un conjunto satisfactorio será marcado a través de un círculo, de la forma siguiente, O.

El árbol etiquetado que resulta de esta descomposición y análisis posterior recibe el nombre de **CUADRO SEMÁNTICO**. Consideremos la expresión  $B$ , descompuesta a través de las denominadas **Reglas  $\alpha$** , indicada en la Figura 2.8.2



$$\begin{array}{c}
 p \wedge (\neg q \vee \neg p) \\
 \Downarrow \\
 p, \neg q \vee \neg p \\
 \Downarrow \quad \Downarrow \\
 p, \neg q \quad p, \neg p \\
 O \quad X
 \end{array}$$

Figura 2.8.1: Expresión Lógica A

$$\begin{array}{c}
 (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q) \\
 \Downarrow \\
 p \vee q, \neg p \wedge \neg q \\
 \Downarrow \\
 p \vee q, \neg p, \neg q \\
 \Downarrow \quad \Downarrow \\
 p, \neg p, \neg q \quad q, \neg p, \neg q \\
 X \quad X
 \end{array}$$

Figura 2.8.2: Variación de Expresión Lógica B

$$\begin{array}{c}
 (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q) \\
 \Downarrow \\
 p \vee q, \neg p \wedge \neg q \\
 \Downarrow \quad \Downarrow \\
 p, \neg p \wedge \neg q \quad q, \neg p \wedge \neg q \\
 \Downarrow \quad \Downarrow \\
 p, \neg p, \neg q \quad q, \neg p, \neg q \\
 X \quad X
 \end{array}$$

Figura 2.8.3: Variación de Expresión Lógica B

Podemos considerar una variación del cuadro semántico para la expresión B si utilizamos las denominadas **Reglas  $\beta$** , tal cual se indica en la Figura 2.8.3.

Una presentación concisa de las reglas utilizadas para la creación de los cuadros o marcos semánticos, puede indicarse, si las fórmulas lógicas son clasificadas tomando en cuenta la negación y el conectivo principal.

Existen dos tipos de reglas de este tipo; las denominadas Reglas  $\alpha$  y las denominadas Reglas  $\beta$ .

- 1.- Las fórmulas  $\alpha$  que son conjuntivas y satisfactorias si y solo si ambas sub fórmulas  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  también son satisfactorias.



$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
$\neg \neg A$	$A$	
$A_1 \wedge A_2$	$A_1$	$A_2$
$\neg (A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg (A_1 \Rightarrow A_2)$	$A_1$	$\neg A_2$
$\neg (A_1 \Leftarrow A_2)$	$\neg A_1$	$A_2$
$A_1 \Leftrightarrow A_2$	$A_1 \Rightarrow A_2$	$A_2 \Rightarrow A_1$

Figura 2.8.4: Reglas de Cuadro Semántico para Fórmulas  $\alpha$

- 2.- Las fórmulas  $\beta$  que son disyuntivas y son satisfactorias aún si solo una de las sub fórmulas  $\beta_1$  y/o  $\beta_2$  es satisfactoria.

$\beta$	$\beta_1$	$\beta_2$
$B_1 \vee B_2$	$B_1$	$B_2$
$\neg (B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \Rightarrow B_2$	$\neg B_1$	$B_2$
$B_1 \Leftarrow B_2$	$B_1$	$\neg B_2$
$\neg (B_1 \Leftrightarrow B_2)$	$\neg (B_1 \Rightarrow B_2)$	$\neg (B_2 \Rightarrow B_1)$

Figura 2.8.5: Reglas de Cuadro Semántico para Fórmulas  $\beta$

### CONSTRUCCIÓN DEL CUADRO SEMÁNTICO

- \* Cada nodo del cuadro semántico **T** será marcado y etiquetado con un conjunto de fórmulas. Inicialmente **T** consiste de un nodo simple, etiquetado con un conjunto simple **{c}**. Es cuadro semántico se construye inductivamente de la siguiente forma :
- \* Seleccionar una hoja **I** no marcada sobre el árbol de descomposición. Esta hoja **I** es etiquetada por el conjunto de fórmulas **U(I)**, utilizando las siguientes reglas.
  - \* Si **U(I)** es un conjunto de literales, comprobar si existe un par complementario de literales del tipo **{p,  $\neg$  p}** en **U(I)**.
    - Si es así marcar la hoja como **Cerrada X**.
    - Si no es así marcar la hoja como **Abierta O**
  - \* Si **U(I)** no es un conjunto de literales, elegir una fórmula en **U(I)**, de la siguiente forma



- Si la fórmula A es una **fórmula- $\alpha$** , crear un nuevo nodo I' como hijo del nodo I y etiquetarlo como I', de la siguiente forma :

$$U(I') = (U(I) - \{A\}) \cup (\alpha_1, \alpha_2)$$

(En el caso de que A sea  $\neg \neg A$ , no existe la sub fórmula  $\alpha_2$ )

- Si la fórmula B es una **fórmula- $\beta$** , crear dos nuevos nodos I' y I'' como hijos de I, Etiquetar a I' con la siguiente fórmula :

$$U(I') = (U(I) - \{B\}) \cup (\beta_1)$$

y etiquetar I'' con la siguiente fórmula :

$$U(I'') = (U(I) - \{B\}) \cup (\beta_2)$$

La construcción termina cuando todas las hojas del árbol están marcadas con un símbolo X o bien O.

**DEFINICIÓN 2.10:** Un cuadro cuya construcción ha finalizado se lo denomina **Cuadro Completo**. Un cuadro completo se dice que está **Cerrado** si todas sus hojas están marcadas con la notación de cerrado, de otra forma o modo se dice que el cuadro está **Abierto**.

**TEOREMA 2.3:** Sea T un cuadro semántico completo para una fórmula A. La expresión A es **No Satisfactoria** si y solo si T es cerrado.

**COROLARIO 2.1:** La expresión A es una expresión lógica satisfactoria si y solo si T está abierto.

**COROLARIO 2.2:** La expresión A es una expresión lógica válida si y solo si el cuadro semántico para  $\neg A$  es cerrado.

Consideremos el siguiente ejemplo. Podemos demostrar que la siguiente expresión  $\neg(p \wedge \neg p)$  es válida utilizando en el cuadro semántico el conjunto de la Reglas- $\alpha$  y Reglas- $\beta$ .

$$\neg \neg (p \wedge \neg p)$$

$\Downarrow$

$$p \wedge \neg p$$

$\Downarrow$

$$p, \neg p$$

X

**Cerrado para  $\neg A$  y Abierto para todo A**

**Figura 2.8.6: Cuadro Semántico para  $\neg (p \wedge \neg p)$**

Consideremos otro ejemplo:  $B \equiv p \vee (q \wedge \neg q)$



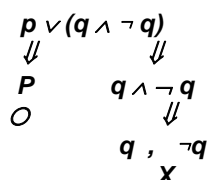


Figura 2.8.7: Cuadro Semántico de  $p \vee (q \wedge \neg q)$

## 2.9.- PROBLEMAS CAPITULO II

- 1.- Utilizando las propiedades de la lógica formal, simplificar las siguientes expresiones y/o expresarlas únicamente como conjunciones: determinar las formas normales conjuntivas (fnc) y las formas normales disyuntivas (fnd):

- |   |   |
|---|---|
| (a) $((p \wedge q) \vee (p \Rightarrow s))$             | (b) $((p \Rightarrow q) \equiv (p \vee \neg q))$                              |
| (c) $((p \equiv q) \Rightarrow (q \equiv \neg p))$      | (d) $((\neg p \Rightarrow q) \vee (s \Rightarrow r))$                         |
| (e) $((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (s \equiv r))$ | (f) $\{(p \vee q) \Rightarrow [(q \equiv r) \Rightarrow (r \Rightarrow s)]\}$ |

- 2.- Utilizando las propiedades de la lógica formal, simplificar las siguientes expresiones y/o expresarlas únicamente como conjunciones: determinar las formas normales conjuntivas (fnc) y las formas normales disyuntivas (fnd):

- |   |  |
|---|--|
| (a) $((p \vee q) \Rightarrow (q \vee p))$   | (c) $(p \equiv \neg p)$  |
| (b) $(p \Rightarrow ((p \vee q) \equiv r))$   | (e) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \equiv p))$             |
| (d) $(p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q))$  | (g) $p \Rightarrow [q \Rightarrow (q \vee p)]$                 |
| (f) $[(p \wedge q) \equiv q] \Rightarrow p$   | (i) $[p \sqcup (\neg p \wedge q)] \vee (\neg p \wedge \neg q)$ |
| (h) $((p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r))$   |  |
| (j) $(p \wedge q) \equiv [p \Rightarrow (q \vee r)]$  |  |
| (k) $\{p \wedge [q \Rightarrow ((p \wedge \neg p) \Rightarrow (q \vee \neg q))]\} \wedge (q \Rightarrow q)$ |  |

- 3.- Determinar si las siguientes expresiones lógicas, a través de las fnc y fnd, son tautologías, contradicciones, o indefiniciones.

- |  |  |
|--|--|
| (a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow p)$   | (b) $\neg (p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \wedge p)$      |
| (c) $(p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q)$  | (d) $(p \equiv q) \Rightarrow \neg (p \Rightarrow q)$      |
| (e) $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$   | (f) $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg p] \Rightarrow \neg q$ |
| (g) $[(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)]$   |  |
| (h) $p \wedge \neg [\neg (p \Rightarrow q) \vee q]$  |  |
| (i) $\neg [(p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q)] \equiv [\neg (p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q)]$ |  |
| (j) $p \Rightarrow (p \vee q)$   |  |

- 4.- Determinar si las expresiones lógicas consideradas en el Problema 1, a través de las fnc y fnd, son tautologías, contradicciones, o indefiniciones.

- 5.- Determinar si las expresiones lógicas consideradas en el Problema 2, a través de las fnc y fnd, son tautologías, contradicciones, o indefiniciones.



**6.-** Determinar la correspondiente forma de enunciado de las siguientes formas de razonamiento y determinar si los razonamientos equivalentes son válidos o inválidos:

- (a)  $[(A \Rightarrow B) \wedge ((A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B))] \Rightarrow (A \vee B)$
- (b)  $((A \wedge B) \wedge (A \equiv B)) \Rightarrow (A \vee B)$
- (c)  $[(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \wedge ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))] \Rightarrow (B \vee C)$
- (d)  $[A \vee (\neg A \wedge B)] \wedge (\neg A \wedge \neg B) \wedge [(A \Rightarrow B) \wedge \neg B] \Rightarrow \neg B$
- (i)  $\neg[(A \vee B) \equiv (A \Rightarrow C)] \wedge \neg(A \vee B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow \neg(A \vee C)$

**7.-** Determinar si las formas de enunciados consideradas en el Problema 1, utilizando el método de reducción por el absurdo, son tautologías, contradicciones, o indefiniciones. Luego determinar las formas de razonamiento y determinar si el correspondiente razonamiento es válido o inválido.

**8.-** Determinar si las formas de enunciados consideradas en el Problema 2, utilizando el método de reducción por el absurdo, son tautologías, contradicciones, o indefiniciones. Luego determinar las formas de razonamiento y determinar si el correspondiente razonamiento es válido o inválido.

**9.-** Determinar si las formas de enunciados consideradas en el Problema 3, utilizando el método de reducción por el absurdo, son tautologías, contradicciones, o indefiniciones. Luego determinar las formas de razonamiento y determinar si el correspondiente razonamiento es válido o inválido.

**10.-** Sea  $\oplus$  (OR exclusivo) la función de verdad definida por la siguiente proposición:

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

- (a) Probar que  $\oplus$  (OR exclusivo) es conmutativo y asociativo.
- (b) Probar que las siguientes expresiones son tautologías:  
 $\neg p \equiv p \oplus 1$  ;  $p \oplus 0 \equiv p$  ;  $p \oplus p \equiv 0$

**11.-** Mostrar que los siguientes argumentos son válidos usando el concepto de

i) tautología y ii) contradicción.

- a)  $(p \vee q), \neg p, (\neg p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)$
- b)  $(p \Rightarrow q), (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$
- c)  $(p \vee q), (p \Rightarrow r), (q \Rightarrow r) \Rightarrow r$

**12.-** Para cada uno de los siguientes argumentos válidos indique cual de las reglas de inferencia dadas en la Tabla 2 se utilizan:

**a)** Si el Sr. Juárez o la Sra. Juárez ganan más de \$30.000 al año, la familia Juárez puede pasar sus vacaciones en Hawai. Puesto que yo sé que, o el Sr. Juárez o su esposa, ganan más de \$30.000, concluyo que la familia puede afrontar sus vacaciones en Hawai.

**b)** Si Juan descubre que el producto que le vendiste está defectuoso, se pondrá furioso. Desafortunadamente ha descubierto que el producto está defectuoso. Por lo tanto Juan va a estar furioso

**c)** Si José estuvo ayer en el partido, necesitará dormir. José no pudo dormir. Por consiguiente él no fue al partido.



d) Si está caluroso y húmedo, entonces obviamente está caluroso también.

e) Si no llueve, iré a la quinta. Pero no puedo ir a la quinta. Por consiguiente lloverá.

**13.-** Dar una derivación para los argumentos lógicos siguientes:

- a)  $p, (p \Rightarrow (q \vee r)), ((q \vee r) \Rightarrow s) \Rightarrow s$
- b)  $(p \Rightarrow q), (q \Rightarrow r), \neg r \Rightarrow \neg p$
- c)  $p, (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$
- d)  $(p \vee q), (p \Rightarrow r), (q \Rightarrow r) \Rightarrow r$
- e)  $(p \Rightarrow q), (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$
- f)  $(p \Rightarrow r), (\neg p \Rightarrow q), (q \Rightarrow s) \Rightarrow (\neg r \Rightarrow q)$
- g)  $(p \Rightarrow q), (q \Rightarrow (r \wedge s)), (\neg r \vee (\neg t \vee u)), (p \wedge t) \Rightarrow u$
- h)  $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)), (p \vee s), (t \Rightarrow q), \neg s \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg t)$

**14.-** Analizar la validez de los siguientes argumentos:

- a) Si Rosa obtiene el puesto de supervisor y trabaja mucho, entonces obtendrá un aumento. Si obtiene el aumento, entonces comprará un auto nuevo. Ella no ha adquirido un auto nuevo. Por lo tanto, Rosa no ha obtenido el puesto de supervisor o no ha trabajado mucho.
- b) Si Domingo va a la carrera de autos, Elena se enojará mucho. Si Rafael juega cartas toda la noche, Carmen se enojará. Si Elena o Carmen se enojan, le avisarán a Verónica (su abogado). Verónica no ha tenido noticias de estos dos clientes. En consecuencia ni Domingo fue a las carreras ni Rafael jugó cartas toda la noche.

**15.-** Determinar si las formas de enunciados consideradas en el Problema 1, utilizando el método del cuadro semántico, son tautologías, contradicciones, o indefiniciones. Luego determinar si el correspondiente razonamiento es válido o inválido.

**16.-** Determinar si las formas de enunciados consideradas en el Problema 2, utilizando el método del cuadro semántico, son tautologías, contradicciones, o indefiniciones. Luego determinar si el correspondiente razonamiento es válido o inválido.

**17.-** Determinar si las formas de enunciados consideradas en el Problema 3, utilizando el método del cuadro semántico, son tautologías, contradicciones, o indefiniciones. Luego determinar si el correspondiente razonamiento es válido o inválido.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

TABLA 2: PRINCIPALES REGLAS DE INFERENCIA	
$A, B \Rightarrow A \wedge B$	Ley de combinación
$A \wedge B \Rightarrow A$ $A \wedge B \Rightarrow B$	Leyes de simplificación
$A \Rightarrow A \vee B$ $B \Rightarrow A \vee B$	Leyes de adición
$A, A \Rightarrow B \Rightarrow B$	Modus Ponens
$\neg B, A \Rightarrow B \Rightarrow \neg A$	Modus Tollens
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \Rightarrow A \Rightarrow C$	Silogismo Hipotético
$A \vee B, \neg A \Rightarrow B$ $A \vee B, \neg B \Rightarrow A$	Silogismo disyuntivo
$A \Rightarrow B, \neg A \Rightarrow B \Rightarrow B$	Ley de casos
$A \Leftrightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow B$ $A \Leftrightarrow B \Rightarrow B \Rightarrow A$	Eliminación de la equivalencia
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow A \Rightarrow A \Leftrightarrow B$	Introducción de la equivalencia
$A, \neg A \Rightarrow B$	Ley de inconsistencia

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

# MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA

## CAPITULO III

### LÓGICA DE PREDICADOS

#### 3.1.- INTRODUCCIÓN

La lógica es un agregado potente a nuestra colección de paradigmas para resolver problemas. De la misma forma que otros paradigmas, la lógica tiene al mismo tiempo ventajas seductivas como desventajas incómodas.

Por el lado positivo, las ideas de la lógica, que han madurado durante varios siglos, son concisas y comprendidas universalmente, como lo es el Latín. Más aún, hasta épocas recientes, los lógicos han enfocado en **probar cosas acerca de lo** que podemos hacer con el conocimiento. Consecuentemente, cuando el dominio de un problema es atacado con éxito por la lógica, como lo es en la matemática, estamos con suerte, pues podemos conocer los límites de lo que podemos realizar con lo que nos está permitido. Por el lado negativo, la lógica puede ser como una cama de Procusto, pues concentrarnos sobre la lógica puede llevarnos a concentrarnos sobre la matemática de la lógica desviando nuestra atención de las técnicas valorizadas de resolver problemas que resisten el análisis matemático.

Para comprender mejor estos puntos, introducimos la notación, la idea de demostración y las reglas de inferencia, tal como las del **modus ponens**, **modus tolens**, y **resolución**, que hacen posible crear nuevas expresiones a partir de las existentes. Luego, utilizando resolución, exploraremos la **demostración por refutación** y **resolución de prueba de teoremas**. Introduciremos los denominados **operadores** en la lógica haciendo posible la planificación basada en la lógica, pero que crea dificultades. Por ejemplo, debe existir un modo de identificar las expresiones que persisten cuando se aplican varias operaciones. Esto es conocido como el **problema del marco**.

Finalmente, mientras que la resolución de la demostración de teoremas es potente, algunas veces el mejor camino es **la demostración utilizando propagación comprimida**. Este último método facilita las **justificaciones**, haciendo posible separar suposiciones simplificadas, sin peligro para mantener ciertas a las expresiones.

#### 3.1.1.- REGLAS DE INFERENCIA

Sabemos que algo es un pájaro, si ese algo tiene plumas o si vuela o si pone huevos. Estos hechos pueden expresarse a través de reglas antecedente-consecuente de la siguiente forma:

<b>Regla 13</b>	<b>If</b>	el animal tiene plumas
	<b>then</b>	es un pájaro
<b>Regla 14</b>	<b>If</b>	el animal vuela pone huevos
	<b>then</b>	es un pájaro



### 3.1.2.- LA LÓGICA TIENE NOTACIÓN TRADICIONAL

En la lógica, para expresar el sentido de una regla antecedente-consecuente concernientes a pájaros y plumas, necesitamos una forma para capturar la idea de que algo tiene plumas y de que algo es un pájaro. Esto es realizado utilizando **predicados**, los predicados son **funciones** que mapean objetos, como **argumentos**, en VERDADERO o FALSO. Por ejemplo, con la forma normal de interpretar los predicados Plumas y Pájaros y el objeto Albatros, podemos decir, informalmente, que las siguientes expresiones son expresiones VERDADERAS:

Plumas (Albatros)

Pájaro (Albatros)

Consideremos ahora que queremos significar cuando decimos que también es VERDAD la siguiente expresión:

Plumas (Canario)

Evidentemente, Canario es un símbolo que representa a algo que tiene plumas, debido a que satisface el predicado Plumas. De esta forma tenemos una compulsión sobre que puede hacer un Canario. Podemos expresar otras compulsiones y otros predicados como por ejemplo, Volar y Poner Huevos. De hecho, podemos limitar las cosas que Canario puede nominar sobre aquellas cosas que satisfacen ambos predicados conjuntamente, diciendo que las siguientes expresiones son ambas VERDAD:

Volar (Canario)

Poner Huevos (Canario)

Existe un modo más tradicional para expresar esta idea. Simplemente combinamos la primera expresión con la segunda expresión y decimos que la combinación es VERDAD:

Volar (Canario) y Poner Huevos (Canario)

Por supuesto, podemos decir también que debemos interpretar a Canario como el nombre de algo que satisface a uno de ambos predicados. Esto es realizado utilizando la siguiente combinación :

Volar (Canario) o Poner Huevos (Canario)

Los lógicos prefieren una notación diferente. O sea escribimos  $\wedge$  para representar a **y (and)** y escribimos  $\vee$  para representar a **o (or)**.

Podemos en consecuencia escribir las mismas cosas de antes de la forma en que los lógicos lo harían:

Volar (Canario)  $\wedge$  Poner Huevos (Canario)

Volar (Canario)  $\vee$  Poner Huevos (Canario)

Cuando las expresiones son unidas a través de  $\wedge$ , decimos que forman una **conjunción** y cada parte forma **conjuncto**. Del mismo modo, cuando las expresiones están unidas a través de  $\vee$ , forman una **disyunción** y cada parte de forma un **disyuncto**. Debemos notar que estos operadores son los denominados conectivos lógicos de la lógica formal y mapean combinaciones de VERDAD y FALSO a VERDAD y FALSO.



Además de los conectivos de conjunción y disyunción, existen otros dos conectivos importantes, a saber: uno de ellos es la **negación** y que es representado a través del siguiente símbolo  $\neg$ , y el otro es la **implicación** y representado por  $\Rightarrow$ . Consideremos el siguiente ejemplo :

$\neg$  Plumas (Susana)

Para que esto sea VERDAD, Susana debe representar algo para lo cual Plumas (Susana) no es VERDAD. O sea que Susana debe ser algo para lo cual el predicado Plumas **no es satisfacido**. Si utilizamos  $\Rightarrow$ , podemos escribir expresiones que se parecen a una de las reglas antecedente-consecuente, comenzamos con el siguiente ejemplo:

Plumas (Susana)  $\Rightarrow$  Pájaro (Susana)

decimos que el valor de la expresión es VERDAD dependiendo de que puede representar Susana. Una posibilidad permitida es que Susana sea algo para lo cual tanto Plumas (Susana) y Pájaro (Susana) son VERDAD.

**Implicación**

$E_1 \Rightarrow E_2$

		$E_2$	$E_2$
		V	F
$E_1$	V	V	F
$E_1$	F	V	V

**Conjunción**

$E_1 \wedge E_2$

		$E_2$	$E_2$
		V	F
$E_1$	V	V	F
$E_1$	F	F	F

**Disyunción**

$E_1 \vee E_2$

		$E_2$	$E_2$
		V	F
$E_1$	V	V	V
$E_1$	F	V	F

**Negación**

$\neg E$

E	V	F
$\neg E$	F	V

Tabla 3.1: Tablas de Verdad de Conectivos

Naturalmente, la definición de  $\Rightarrow$  también permite que tanto Plumas (Susana) y Pájaro (Susana) son ambos FALSO. Curiosamente, otra posibilidad, permitida por la definición de  $\Rightarrow$ , es que Plumas (Susana) es FALSO y Pájaro (Susana) es VERDAD. Si Plumas (Susana) es





VERDAD y Pájaro (Susana) es FALSO, sin embargo, entonces la expresión compuesta considerada es FALSO.

Quizás es tiempo de ser más preciso acerca de los conectivos considerados (negación, disyunción, conjunción e implicación) antes de que sea demasiado tarde. Pensando en ellos como funciones, es fácil definirlos listando los valores aprobados para cada combinación posible de argumentos. Ello está indicado en la Figura 5.1 utilizando diagramas que se denominan **Tablas de Verdad**.

Debemos hacer notar que los conectivos tienen una **Precedencia Aceptada**. El símbolo  $\neg$  tiene mayor precedencia que el conectivo de disyunción,  $\vee$ , de forma tal que podemos escribir  $\neg E_1 \vee E_2$ , significando con ello la siguiente expresión evitando de esta forma la posible confusión con otra expresión:  $(\neg E_1) \vee E_2$ , sin ningún tipo de confusión con la expresión  $(\neg E_1 \vee E_2)$ .

La precedencia aceptada es primera la negación, seguido por la conjunción y la disyunción y por último la implicación. Es una muy buena costumbre el utilizar paréntesis, para obtener claridad en las expresiones y evitar la ambigüedad.

Observar que los valores de la tabla correspondiente a la implicación, son los mismos que los valores de verdad en la correspondiente tabla de la expresión siguiente:  $\neg E_1 \vee E_2$  y podemos decir que ambas expresiones son equivalentes.

$$(E_1 \Rightarrow E_2) \equiv \neg E_1 \vee E_2$$

Consideremos algunas propiedades de los conectivos dentro de la lógica de predicados (E representa a un predicado dentro de esta lógica).

**Propiedad Conmutativa**

$$(E_1 \vee E_2) \equiv (E_2 \vee E_1)$$

$$(E_1 \wedge E_2) \equiv (E_2 \wedge E_1)$$

**Propiedad Distributiva**

$$E_1 \wedge (E_2 \vee E_3) \equiv (E_1 \wedge E_2) \vee (E_1 \wedge E_3)$$

$$E_1 \vee (E_2 \wedge E_3) \equiv (E_1 \vee E_2) \wedge (E_1 \vee E_3)$$

**Propiedad Asociativa**

$$E_1 \vee (E_2 \vee E_3) \equiv (E_1 \vee E_2) \vee E_3$$

$$E_1 \wedge (E_2 \wedge E_3) \equiv (E_1 \wedge E_2) \wedge E_3$$

**Leyes de De Morgan**

$$\neg (E_1 \vee E_2) \equiv (\neg E_1) \wedge (\neg E_2)$$

$$\neg (E_1 \wedge E_2) \equiv (\neg E_1) \vee (\neg E_2)$$

**Doble Negación**

$$\neg (\neg E_1) \equiv (E_1)$$

### 3.1.3.- CUANTIFICADORES DETERMINAN QUE ELEMENTOS SON CIERTOS

Las reglas antecedente-consecuentes, que se están considerando, son VERDAD para todos los elementos posibles dentro de un universo de discurso determinado. Para señalar que una expresión lógica es Universalmente VERDAD necesitamos utilizar un símbolo que significa la expresión **Para Todo**,  $\forall$ , como así también una variable que representa a todos los elementos posibles dentro de un universo de discurso determinado. En los siguientes ejemplos al considerar la expresión, "cuando es VERDAD", decimos que cualquier elemento que tiene plumas es un pájaro:

$$\forall x[\text{Plumas}(x) \Rightarrow \text{Pájaro}(x)]$$

Igual que cualquier otra expresión, la misma puede ser VERDAD o FALSO. Si la misma es



VERDAD, una expresión  $\forall$  significa que tendremos un valor de VERDAD cuando sustituimos cualquier objeto por la variable  $x$  dentro de los corchetes. Por ejemplo si la expresión  $\forall x[\text{Plumas}(x) \Rightarrow \text{Pájaro}(x)]$  es VERDAD, entonces ciertamente la siguiente interpretación  $\text{Plumas}(\text{Canario}) \Rightarrow \text{Pájaro}(\text{Canario})$  es VERDAD y lo es también en el siguiente caso  $\text{Plumas}(\text{Susana}) \Rightarrow \text{Pájaro}(\text{Susana})$ .

Cuando una expresión está rodeada por los corchetes asociados a un cuantificador, decimos que la expresión se encuentra dentro de la **Extensión (Scope)** del cuantificador. En consecuencia la expresión  $\text{Plumas}(x) \Rightarrow \text{Pájaro}(x)$  es una Extensión del cuantificador  $\forall x[\dots]$ .

Ya que las expresiones VERDADERAS que comienzan con el cuantificador universal nos dicen algo acerca de todas las substituciones posibles de variables por objetos dentro de la correspondiente extensión, decimos que la expresión se encuentra **Cuantificada Universalmente**. Algunas expresiones, sin embargo, no siempre son VERDAD, sino que lo son solo en algunos casos. La lógica también considera estos casos. Ellos son escritos utilizando otro cuantificador representado por el símbolo  $\exists$  y tiene el siguiente significado **Existe al Menos** y es utilizado de la siguiente forma:  $\exists x [\text{Pájaro}(x)]$

Cuando esta expresión es VERDAD, significa que existe al menos un elemento que cuando es substituido por la variable  $x$ , hace que la expresión dentro de los corchetes sea VERDAD. Quizás la expresión  $\text{Pájaro}(\text{Canarios})$  es VERDAD, de cualquier modo, algo parecido a  $\text{Pájaro}(\text{Canario})$  es VERDAD. Expresiones que utilizan el cuantificador ( $\exists$ ), denominado **Cuantificador Existencial**, se dicen que están cuantificadas existencialmente.

### 3.1.4.- VOCABULARIO DE LA LÓGICA DE PREDICADO

Un problema dentro de la lógica es la existencia de una gran cantidad de expresiones de un vocabulario, para mantener a la lógica de un modo integro. Por referencia observemos la Figura 3.2.

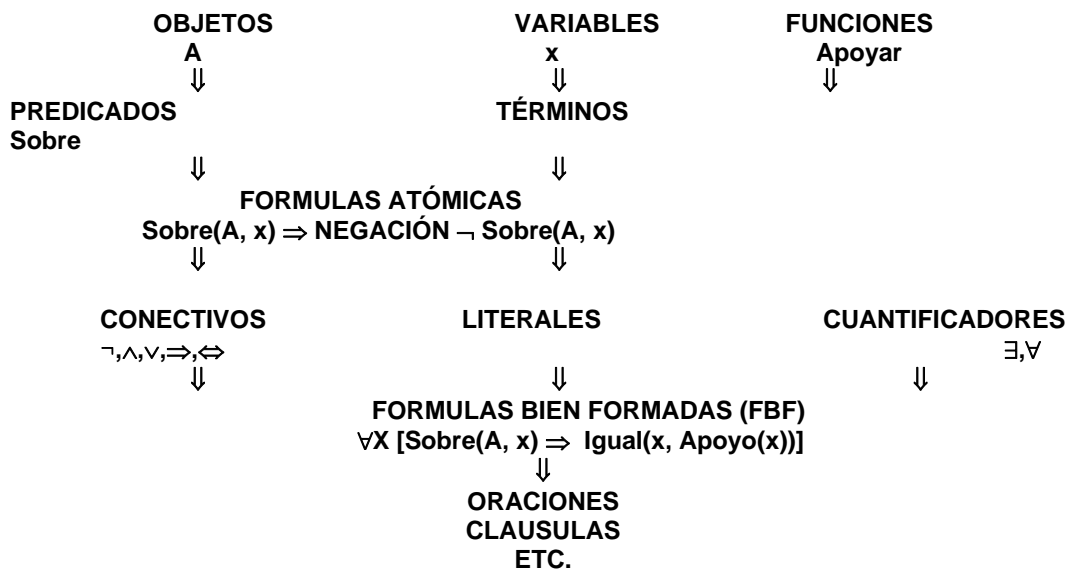


Figura 3.2. : Vocabulario de la Lógica de Predicados

En función de la Figura 3.2, podemos expresar un conjunto de definiciones acerca de los elementos del vocabulario de la lógica de predicados, a saber:

- \* Los **objetos** de un **Dominio** son **Términos**.



- \* Las **Variables** que representan a los objetos de un dominio son **Términos**.
- \* Las **Funciones** son **Términos**. Los argumentos y las imágenes de las funciones son objetos de un determinado dominio.

Los términos son los únicos elementos que aparecerán como argumentos de los diferentes predicados sobre un dominio o conjunto de dominios dados.

- \* **Fórmulas Atómicas** son definidos como predicados individuales con sus correspondientes argumentos.
- \* **Literales** son definidos como fórmulas atómicas y fórmulas atómicas negadas.
- \* **Fórmulas Bien Formadas**, o bien **FBF**, son definidas recursivamente de la siguiente forma:
  - \* Los literales son fórmulas bien formadas (FBF).
  - \* Fórmulas Bien Formadas conectadas a través de conectivos son también FBF.
  - \* Fórmulas Bien Formadas afectadas por cuantificadores son también FBF.

Para las FBF existen algunos casos especiales que deben ser considerados, a saber:

- \* Una Fórmula Bien Formada en la cual todas sus variables, si existen, están dentro de una extensión del correspondiente cuantificador, es definida como una **Oración**. La siguiente expresión es una oración

$$\forall x [\text{Plumas}(x) \Rightarrow \text{Pájaro}(x)]$$
$$\text{Plumas (Albatros)} \Rightarrow \text{Pájaro(Albatros)}$$

Variables como  $x$  que aparecen dentro de la extensión del correspondiente cuantificador se denominan **Variables Ligadas**. Variables que no son ligadas se las identifica como **Variables Libres**.

La siguiente expresión no es una oración, debido a que contiene una variable libre, la variable  $y$ :

$$\forall x [\text{Plumas}(x) \vee \neg \text{Plumas}(y)]$$

Debemos hacer notar que permitimos variables solo para representar objetos. Está prohibido utilizar variables para representar predicados. Estamos tratando en consecuencia con las lógicas denominadas de **Cálculo de Predicados de Primer Orden**. En una segunda instancia tenemos el **Cálculo de Predicados de Segundo Orden** donde se permiten que las variables representen a los predicados. En cambio una lógica o **Cálculo Proposicional** no se permiten variables de ninguna clase.

Una Fórmula Bien Formada que está formada por disyunciones de literales recibe la denominación de **Cláusula**.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

### 3.2.- ESTRUCTURA RELACIONAL DE UNA LÓGICA DE PREDICADO

La lógica proposicional nos permite razonar acerca de o con proposiciones. Sin embargo no existe una forma para razonar acerca de las relaciones existentes entre las **entidades** individuales en algún universo de discurso. Como así tampoco existe un modo para expresar afirmaciones generales aplicadas a conjuntos en casos similares. Consecuentemente los lógicos han desarrollado lógicas más expresivas denominadas **lógicas de predicados**.

Tales lógicas pueden ser utilizadas para describir y razonar acerca de partes del universo visualizado como **Estructuras Relacionales**, donde la denominada estructura relacional consiste de un conjunto de entidades E, un conjunto de relaciones definidas sobre E y un conjunto de funciones sobre E. Las entidades en un subconjunto de E son conocidas como **Entidades Distinguidas**.

Una definición más formal de la estructura relacional de la lógica de predicados, es la siguiente:

$$U = (E, N, R, H)$$

donde definimos a cada uno de los componentes de la siguiente forma :

- (a) **E** es un conjunto de entidades o términos  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , denominado como el **dominio** de la estructura U.
- (b) **N** es el conjunto de las entidades distinguidas  $\{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ , de forma tal que N es un subconjunto de E.
- (c) **R** es un conjunto de relaciones  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  definidas sobre el conjunto de entidades E.
- (d) **H** es un conjunto de funciones  $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$  definidas sobre el conjunto de entidades E.

Consideremos el siguiente ejemplo de una estructura relacional :

E	≡	Conjunto de todas las entidades que constituyen la Universidad.
N	≡	{Susana, Roberto, Guillermo, Veinte, Treinta, Cuarenta, Sesenta}
R	≡	{Novios, Edad}
H	≡	{Doble}

Definiendo las correspondientes relaciones y función de la siguiente forma:

Novios = {(Susana, Roberto), (Roberto, Susana)}

Edad = {(Susana, Veinte), (Roberto, Treinta), (Guillermo, Cuarenta)}

Doble (Veinte) = Cuarenta

Doble (Treinta) = Sesenta

Las relaciones y funciones en una estructura relacional puede ser **Arity** (o sea, que puede tener varios números de argumentos). Por ejemplo Novios tiene un arity de 2 (dos). Doble tiene un arity de 1 (uno) y es denominada como una función de un solo argumento.

#### 3.2.1.- RELACIONES Y PREDICADOS



Las matemáticas en general y la ciencia de computación en particular deben ser capaces de expresar y manipular fórmulas lógicas con valores de conjuntos diferentes de los pertenecientes al conjunto de valores de Boole  $\{V, F\}$ . En particular, son esenciales conjuntos infinitos tales como el conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z}$ .

Recordemos que cualquier relación  $n$ -aria  $R$  es un subconjunto del Producto Cartesiano  $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$ , donde cada  $D_i$  es un conjunto. Por ejemplo:

- \*  $PR(x)$  - el conjunto de todos los números primos:  
 $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$
- \*  $SQ(x, y)$  - el conjunto de pares ordenados  $(x, y)$ , de forma tal que  $y$  es el cuadrado de  $x$ .  
 $\{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16), \dots\}$

Una relación también puede ser formalizada como una función Booleana sobre  $n$ -tuplas:

**DEFINICIÓN 3.1:** Sea  $D$  un conjunto de elementos.  $R$  es una relación  $n$ -aria en el Dominio  $D$  si  $R$  es una relación sobre  $D^n$ .

Sea  $R$  una relación  $n$ -aria sobre un dominio  $D$ . El **predicado**  $R$  asociado con la relación  $R$ , está dado por la siguiente expresión:

$$R(d_1, \dots, d_n) = T \text{ si y solo si } \{d_1, \dots, d_n\} \in R$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} SQ(2, 1) &= F \\ SQ(2, 2) &= F \\ SQ(2, 3) &= F \\ SQ(2, 4) &= V \end{aligned}$$

es el predicado correspondiente a la relación  $SQ$  antes definida, puesto que es cierto que 4 es el cuadrado de 2, mientras que no lo son 1, 2, 3. De la misma forma:

$$\begin{aligned} PR(1) &= F \\ PR(2) &= V \\ PR(3) &= V \\ PR(4) &= F \end{aligned}$$

puesto que 2 y 3 son primos mientras que 1 y 4 no lo son.

Esta correspondencia es trivial pero proporciona el ligamento necesario para la formalización lógica de las matemáticas. Todas las fórmulas lógicas, interpretaciones, pruebas, etc.; que fueron desarrolladas para el cálculo proposicional pueden ser aplicados al cálculo de predicados. La presencia de un dominio sobre el cual los predicados son interpretados, complica considerablemente los detalles técnicos pero no los conceptos básicos. Se deben realizar extensiones tanto a sintaxis como a la semántica de las fórmulas o expresiones lógicas. El plan de ataque es el siguiente:

- \* Para evitar continuas referencias al dominio, se introducen **cuantificadores** en la definición de una fórmula, para permitir expresar que una expresión sintácticamente pura de una declaración, que es un predicado, es verdadera para **algún** o **para todos** los elementos del conjunto.
- \* En el cálculo proposicional, una interpretación consiste solo en la asignación



de valores de verdad a los símbolos proposicionales o proposiciones. En el cálculo de predicados, una interpretación incluye la elección de un dominio y una asignación de relaciones a los **símbolos** de predicado.

- \* La construcción del cuadro semántico será extendido. Ya que los dominios pueden ser infinitos, la construcción del cuadro puede no terminar y en consecuencia no existir un procedimiento de decisión que satisfaga en el cálculo de predicados. Sin embargo, si el cuadro es cerrado, la fórmula puede no ser cumplida y lo inverso también.
- \* Los sistemas axiomáticos del tipo Hilbert y Gentzen pueden ser definidos en el cálculo de predicados. De este modo mientras una fórmula válida es demostrable, y mientras podamos construir una prueba de la fórmula, dando una fórmula *arbitraria*, no podremos decidir si la misma es válida y en consecuencia demostrable.
- \* Antes de definir resolución, introducimos *funciones sobre el dominio*, en adición a los predicados valorizados de acuerdo a los valores de verdad. Estas funciones son necesarias a causa de las operaciones matemáticas tales como la multiplicación:

$$(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow (x * y > 0)$$

Aquí es introducido un importante concepto: "**La Interpretación de Herbrand**". Ello permite el desarrollo de la teoría del cálculo de predicado para un dominio canónico, o sea, un dominio uniforme en lugar de considerar la idiosincrasia de cada dominio individual. Además, las interpretaciones de Herbrand son definidas sintácticamente en términos de los símbolos del cálculo de predicado, simplificando de esta forma la teoría.

- \* En ausencia de un procedimiento de decisión, no estudiaremos la complejidad de los algoritmos para el cálculo de predicados. En lugar de ello, veremos ciertas clases restringidas, las que nos darán procedimientos de decisión.

### 3.3.- **SINTAXIS DE LENGUAJES DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN**

La sintaxis de un lenguaje de predicados de primer orden está definida a través de una gramática cuyos símbolos terminales incluyen los siguientes conjuntos:

- (a) Un conjunto de **Símbolos de Predicados**, expresados de la siguiente forma :

$$P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$$

- (b) Un conjunto de **Variables Individuales**, expresados de la siguiente forma :

$$Var = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$$

- (c) Un conjunto de **Constantes Individuales**, expresadas de la siguiente forma :

$$Cons = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$$

- (d) Un conjunto de **Símbolos de Función**, expresados de la siguiente forma :

$$F = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$$

ISBN 987-43-9433-1



- (e) Un conjunto de conectivos lógicos que incluyen a la negación, conjunción, disyunción, implicación o condicional y a la equivalencia o doble implicación, representados a través del siguiente conjunto de símbolos:

$$S = \{ \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow \}$$

- (f) Un conjunto de cuantificadores: Cuantificador Universal,  $\forall$ , y el Cuantificador Existencial,  $\exists$ .

- (g) Conjunto de Símbolos de puntuación: Paréntesis (, ) y otros.

La sintaxis de la lógica de predicado de primer orden es definida muy a menudo utilizando un subconjunto de conectivos lógicos y un solo cuantificador. El resto de los conectivos y el otro cuantificador, son definidos como abreviaturas. Independientemente del conjunto elegido, el mismo debe estar completo en el sentido de que todos los otros conectivos y cuantificadores deben estar definidos en términos de los conectivos y cuantificadores elegidos. Por ejemplo, si se eligen a  $\forall$  y  $\neg$ , entonces el cuantificador existencial puede definirse de la siguiente forma:

$$\exists x A(x) \equiv \neg (\forall x) \neg A(x)$$

donde  $A(x)$  es una fórmula determinada y  $x$  es una variable lógica. De la misma forma podemos definir la implicación en la lógica de predicados:

$$(A(x) \Rightarrow B(x)) \equiv \neg A(x) \vee B(x)$$

Definimos dentro de esta sintaxis, al conjunto de **Términos** de un predicado de primer orden :

- (a) Todas las constantes individuales son términos.
- (b) Todas las variables individuales son términos.
- (c) Si  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  son términos y  $f$  es una función  $n$ -aria, entonces tenemos que  $f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$  es un término.

El conjunto de fórmulas atómicas está definido de la siguiente forma :

- (d) Si  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  son términos y  $p$  es un símbolo de un predicado  $n$ -ario, entonces tenemos que la siguiente expresión  $p(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$  es una fórmula atómica.

El conjunto de las denominadas **FORMULAS BIEN FORMADAS (FBF)** para un lenguaje de predicados de primer orden está dado por los siguientes enunciados :

- (a) Si  $A$  es una fórmula atómica, entonces  $A$  es una FBF.
- (b) Si  $A$  y  $B$  son FBF, entonces tenemos que las siguientes expresiones son también FBF:

$$\begin{array}{llll} (A) & , & \neg A & , & A \vee B \\ A \wedge B & , & A \Rightarrow B & , & A \Leftrightarrow B \\ \forall x A & \text{donde } x \in \text{Var} & , & \exists x A & \text{donde } x \in \text{Var} \end{array}$$



- (c) Las únicas FBF son aquellas obtenidas por un número finito de aplicaciones de las reglas antes indicadas.

Por facilidad de lectura, las letras  $x, y, z, w$  serán utilizadas para representar variables individuales, cadenas tales como "Sally" son utilizadas para representar constantes individuales, las letras  $P, Q, R$  o cadenas del tipo "Tiene" son utilizadas para representar predicados y las letras  $f, g, h$  o cadenas tales como "Doble" son utilizadas para representar símbolos de función.

**Ejemplo 3.3.1:** Como ejemplo de un lenguaje en la lógica de predicados de primer orden, consideremos la siguiente definición informal de la sintaxis de un lenguaje lógico denominado  $L_1$ :

- (a) Símbolos de Predicado = {Edad, Novios}, donde ambos son binarios.
- (b) Variables =  $\{x, y, z\}$
- (c) Constantes = {Susana, Roberto, Guillermo, 20, 30, 40, 50, 60}
- (d) Conectivos =  $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
- (e) Cuantificador =  $\{\forall, \exists\}$
- (f) Puntuación =  $\{(, ), [, ]\}$
- (g) Símbolos de Función = {Doble}

El conjunto de términos del lenguaje  $L_1$  es el siguiente conjunto:  
 {Susana, Roberto, Guillermo, 20, 30, 40, 50, 60,  $x, y, z$ , doble (0), doble Susana), doble( $x$ ), doble(doble(30)), etc.... }

Las fórmulas atómicas y las FBF de  $L_1$  están definidas de acuerdo a las reglas dadas anteriormente. Ejemplos de FBF de  $L_1$  son:

- (a) Novios (Susana, Roberto)  
y lo leemos de la siguiente forma : "Susana está de novia con Roberto".
- (b) Edad (Susana, 20)  
y se lee como "Susana tiene la edad de 20".
- (c) Edad (Guillermo, doble (20))  
y se lee "Guillermo tiene una edad que es el doble de 20".
- (d)  $\neg$  Novios (Susana, Guillermo)  
y lo leemos como "Susana no está de novia con Guillermo".
- (e)  $\forall x \forall y [Novios(x, y) \Rightarrow Novios(y, x)]$   
y lo leemos de la siguiente forma : "Para todo  $x$  y para todo  $y$ , si  $x$  está de Novio con  $y$ , entonces  $y$  está de novio con  $x$ ". Esto define la simetría del predicado Novios.
- (f)  $\exists x$  Edad( $x$ , 40), y lo leemos "Existe un  $x$  cuya edad es de 40 años".
- (g) Edad ( $x, y$ ) , y lo leemos de la siguiente forma : " $x$  tiene la edad  $y$ ".

Las fórmulas (a) a (f) son denominadas fórmulas **Cerradas**, ya que ellas no contienen variables libres (las variables, si las hay, están ligadas por uno u otro cuantificador). La fórmula (g) es una fórmula **Abierta**. Si  $A$  es una fórmula, entonces la extensión de la ocurrencia de un cuantificador, tal como  $qx$  en  $qx A$ , es  $A$  (donde  $q = \forall$  o  $q = \exists$ ). Una **Ocurrencia** de una variable  $x$  en  $A$  está **Ligada** si y solo si está inmediatamente después de un cuantificador o si se encuentra en la extensión de la ocurrencia de un cuantificador. La ocurrencia de una variable que no está ligada decimos que es **Libre**.

### 3.3.1.- FORMULAS DE PREDICADOS





Ahora trataremos de formalizar y ampliar la notación empleada en el punto anterior con respecto a la sintaxis de un Lenguaje de Lógica de Predicados de Primer Orden. Las nuevas denominaciones no reemplazan a las anteriores sino que pueden utilizarse cualquiera de ellas.

Sea  $\{P, A, X\}$  el conjunto de símbolos denominados **Símbolos de Predicado**, **Constante** y **Variables**, respectivamente. Por convención, las siguientes letras minúsculas, posiblemente con subíndices, denotarán a los anteriores conjuntos:

$$\begin{aligned} P &= \{p, q\} \\ A &= \{a, b\} \\ X &= \{x, y\} \end{aligned}$$

Las fórmulas de predicados son definidas por la siguiente gramática:

<b>argumento</b>	$::= x$	para cualquier $x \in X$
<b>argumento</b>	$::= a$	para cualquier $a \in A$
<b>lista_argumento</b>	$::= \text{argumento}$	
<b>lista_argumento</b>	$::= \text{argumento}, \text{lista\_argumento}$	
<b>fórmula atómica</b>	$::= p(\text{lista\_argumento})$	para cualquier $p \in P$
<b>fórmula</b>	$::= \text{verdad} / \text{falso} / \text{fórmula atómica}$	
<b>fórmula</b>	$::= (\neg \text{fórmula})$	
<b>fórmula</b>	$::= (\text{cuantificador variable fórmula})$	
<b>fórmula</b>	$::= (\text{fórmula operando fórmula})$	
<b>operando</b>	$::= \vee / \wedge / \Rightarrow / \Leftarrow / \Leftrightarrow$	
<b>cuantificador</b>	$::= \exists / \forall$	

**DEFINICIÓN 3.2:**  $\forall$  es el **cuantificador universal** y se lee de la siguiente forma: "para todo".  $\exists$  es el **cuantificador existencial** y se lee de la siguiente forma: "al menos existe un".

Para una fórmula Cuantificada, tal como  $(\forall x A)$ ,  $x$  es denominada la **variable cuantificada** o la **variable vinculada** y  $A$  es denominado como la **extensión (scope)** de la variable cuantificada. Los cuantificadores (incluyendo la variable cuantificada) son operadores que tienen la misma precedencia que la negación. La siguiente fórmula:

$$(\forall x ((\neg (\exists y p(x, y)) \vee (\neg (\exists y p(y, x)))))$$

y que puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\forall x (\neg \exists y p(x, y) \vee \neg \exists y p(y, x))$$

Tomamos del cálculo proposicional la definición de los árboles de formación y el concepto de inducción de la estructura de una fórmula. Algunos ejemplos de fórmulas en el cálculo de predicado, ejemplificamos a continuación:

- 1.-  $\forall x \forall y (p(x, y) \Rightarrow p(y, x))$   
 $p$  debe ser interpretada como una relación *simétrica* semejante a la relación de "igualdad", de la siguiente forma:  
 $(x = y) \Rightarrow (y = x)$
- 2.-  $\forall x \exists y p(x, y)$   
Si  $p$  es interpretada como una función, entonces  $p$  debe ser total.
- 3.-  $\exists x \exists y (p(x) \wedge \neg p(y))$



Esta fórmula solo puede ser cierta en un dominio con al menos dos elementos.

- 4.-  $\forall x p(a, x)$   
Expresa la existencia de un elemento especial. Por ejemplo, si  $p$  es interpretado como la relación " $\leq$ ", entonces la fórmula es cierta para  $a = 1$  en el dominio de los enteros positivos, porque 1 es menor o igual a cada elemento del dominio. Sobre el dominio de todos los enteros (positivos y negativos), la fórmula no es cierta o verdadera.
- 5.-  $\forall x(p(x) \wedge q(x)) \equiv (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x))$   
La fórmula es válida. Seleccionemos un elemento arbitrario  $d$  del dominio, Entonces  $p(d) \wedge q(d)$  es verdadero, lo que implica que  $p(d)$  es verdadero, como así también lo es  $q(d)$ . Como  $d$  es arbitrario, entonces  $\forall x p(x)$ ,  $\forall x q(x)$  son verdaderos.
- 6.-  $\exists x(p(x) \vee q(x)) \equiv (\exists x p(x) \vee \exists x q(x))$   
También es una fórmula válida por un argumento dual para " $\forall$ " y " $\exists$ ".
- 7.-  $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow (\forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x))$   
Es una fórmula válida.
- 8.-  $(\forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x(p(x) \Rightarrow q(x))$   
Corresponde a la fórmula inversa del ejemplo #7 y no es válida.

Antes de definir interpretaciones, debemos definir el concepto de sustitución de constantes por variables. Existen dificultades técnicas similares a las encontradas en los lenguajes de programación, como Pascal, que permite definir variables locales dentro del ámbito de un procedimiento. Formalizamos esta propiedad como una definición de sustitución en los predicados.

**DEFINICIÓN 3.3:** Sean  $A$  una fórmula,  $x$  una variable y  $a$  una constante. La siguiente expresión

$A[x \leftarrow a]$ , representa la sustitución de  $a$  por  $x$  y está definida por la inducción:

- \* Si  $A$  es una fórmula atómica,  $A[x \leftarrow a]$  es obtenida reemplazando cada ocurrencia de  $x$  en  $A$  (si existe) por  $a$ .
- \* Si  $A = \neg A_1$ ,  $A[x \leftarrow a] = \neg A_1[x \leftarrow a]$ .
- \* Si  $A = A_1 \text{ op } A_2$ ,  $A[x \leftarrow a] = A_1[x \leftarrow a] \text{ op } A_2[x \leftarrow a]$ .
- \* Si  $A = \forall x A_1$ ,  $A[x \leftarrow a] = A$ . Similar para  $A = \exists x A_1$ .
- \* Si  $A = \forall y A_1$  para  $y \neq x$ ,  $A[x \leftarrow a] = \forall y A_1[x \leftarrow a]$ . Similar para  $A = \exists y A_1$ .

Debemos hacer notar la distinción existente entre la sustitución para la variable cuantificada y la sustitución para cualquier otra variable. La variable cuantificada es análoga a la declaración de una variable local en un procedimiento en Pascal y es tal que ningún asignamiento global tiene efecto. La sustitución por cualquier otra variable es análoga a la sustitución global a una variable que no ha sido redeclarada como una variable local.

**DEFINICIÓN 3.4:** Si  $A[x \leftarrow a] \neq A$ , entonces  $x$  es denominada **variable libre** de  $A$ .

La siguiente notación:

$$A(x_1, \dots, x_n)$$

indica que las variables libres de la fórmula  $A$  están en  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . (Usualmente todas estas variables son libres en  $A$ .)



Si la fórmula no tiene variables libres, es denominada una **fórmula cerrada**. Si  $\{x_1, \dots, x_n\}$  son todas variables libres de  $A$ , es **cierre universal** de  $A$  está dado por:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n A$$

y el **cierre existencial** está dado por:

$$\exists x_1 \dots \exists x_n A$$

Por ejemplo, si  $A(x, y) = p(x, y)$  tiene dos variables libres  $\{x, y\}$ ,  $\exists y p(x, y)$  tiene una sola variable libre  $\{x\}$  y  $\forall x \exists y p(x, y)$  es cerrado. El cierre universal de  $A(x, y)$  es  $\forall x \forall y p(x, y)$  y el cierre existencial es  $\exists x \exists y p(x, y)$ .

**LEMA 3.1:** Si  $A$  es cerrada, entonces  $A [x \leftarrow a]$  también es cerrada.

**Demostración:** Por inducción sobre la estructura de  $A$ . Si  $A$  es atómica y cerrada, no tiene variables tal que  $A [x \leftarrow a] = A$  es cerrada por suposición. Las etapas de inducción para las conectivas proposicionales son inmediatas, como lo es el caso donde  $A$  es una cuantificación de la variable  $x$  sustituida.

Supongamos que el lema es cierto para  $A_1$  y tenemos que  $A = \forall y A_1$  para  $y \neq x$ . Pero  $A = \forall y A_1$  es cerrada por suposición, por lo tanto  $x$  no está libre en  $A_1$  y en  $A_1 [x \leftarrow a] = A_1$  por definición de variable libre. Por lo tanto:

$$A [x \leftarrow a] = \forall y A_1 [x \leftarrow a] = \forall y A_1 \text{ está cerrada.}$$

**DEFINICIÓN 3.5:** Sea  $A = \forall x A(x)$  una fórmula cuantificada y sea  $a$  una constante, entonces  $A [x \leftarrow a]$ , denotada como  $A(a)$  es una **instancia** de  $\forall x A(x)$ . La operación de sustituir una constante específica por una variable cuantificada es denominada **instanciación**.

**DEFINICIÓN 3.6:** Sea  $A$  una expresión, sea  $x$  una variable y sea  $t$  un término. Entonces  $S^x_t A$  representa la expresión que se obtiene al sustituir todas las apariciones de  $x$  en  $A$  por  $t$ .  $S^x_t A$  es denominada como una **particularización** (un caso, un ejemplo) de  $A$ , y se dice que  $t$  es un **caso (instancia) de  $x$** .

**Ejemplo 3.3.2:** Sean  $a, b$  y  $c$  constantes individuales, sean  $P$  y  $Q$  símbolos de predicado, y sean  $x$  e  $y$  variables. Calcular:

$$\begin{aligned} S^x_a (P(a) \Rightarrow Q(x)) \\ S^y_b (P(y) \vee Q(y)) \\ S^y_a Q(a) \\ S^y_a (P(x) \Rightarrow Q(x)) \end{aligned}$$

**Solución:**  $S^x_a (P(a) \Rightarrow Q(x))$  es  $(P(a) \Rightarrow Q(a))$ , y  $S^y_b (P(y) \vee Q(y))$  es  $(P(b) \vee Q(b))$ . Dado que  $Q(a)$  no contiene ningún  $y$ , al sustituir todos los casos de  $y$  por  $a$  se tiene que  $Q(a)$  queda intacto, lo cual significa que:

$$\begin{aligned} S^y_a Q(a) &= Q(a) \\ S^y_a (P(x) \Rightarrow Q(x)) &= (P(x) \Rightarrow Q(x)) \end{aligned}$$

$S^x_t A$  Es una operación que puede aplicarse a los predicados; por lo tanto, no es un predicado en sí mismo y esto hace que  $S^x_t A$  sea una meta expresión.



### 3.4.- SEMÁNTICA DEL LENGUAJE DE PREDICADOS DE 1er ORDEN

#### 3.4.1.- INTERPRETACIONES

Una interpretación de una frase debe contener información suficiente para determinar si la frase es falsa o verdadera. Para estudiar esto, consideremos una frase concreta, tal como **"han pagado todos los clientes"**. ¿Qué se necesita para determinar si esta frase es verdadera?. Evidentemente, necesitamos saber quienes son los clientes, o sea, necesitamos un universo de discurso. En segundo lugar, es necesario saber quién ha pagado y quién no. Esto quiere decir que necesitamos alguna forma de asignación del predicado **"ha pagado"**. Como segundo ejemplo, consideremos la frase: **"y ha solicitado el objeto X"**. Para averiguar si esta frase es verdadera, es preciso una vez más definir el universo de discurso, tal como por ejemplo, todos los clientes de una empresa de comercialización. Además tenemos que saber quién es **y**, y es preciso tener una asignación del predicado **"ha solicitado X"**. Estos dos ejemplos sugieren un cierto número de elementos de los cuales hay que disponer para tener una interpretación. Formalmente una interpretación de una expresión lógica contiene los siguientes componentes:

1. Tiene que existir un universo de discurso.
2. Para cada individuo, tiene que existir una constante individual que se refiera exclusivamente a ese individuo en particular y a ningún otro.
3. Hay que asignar a cada variable libre una constante individual exclusiva.
4. Tiene que existir una asignación para cada predicado que se utilice en la expresión, incluyendo los predicados de paridad 0, que representan proposiciones.

Para expresar las aseveraciones acerca de las estructuras relacionales de primer orden,  $U$ , es necesario asociarlas con lenguajes de primer orden. Para hacer esto, es necesario definir un lenguaje  $L$  de modo tal que asignemos a cada relación  $n$ -aria en  $U$ , a un predicado  $n$ -ario en  $L$ , cada función  $n$ -aria en  $U$  a cada símbolo de función en  $L$  y cada entidad distinguible en  $U$  a cada constante en  $L$ . La función que define estas asignaciones es denominada una **Interpretación**.

Debe quedar en claro que podemos asociar el lenguaje  $L_1$  con la estructura relacional  $U_1$ , definiendo una interpretación  $\gamma_1$  tal que:

$$\begin{aligned}\gamma_1(\text{Susana}) &= \text{SUSANA} \\ \gamma_1(\text{Roberto}) &= \text{ROBERTO} \\ \gamma_1(\text{Novios}) &= \text{NOVIOS} \\ \gamma_1(20) &= \text{VEINTE}\end{aligned}$$

Para facilitar la definición de interpretación, extenderemos el concepto de fórmula para permitir fórmulas en un dominio.

**DEFINICIÓN 3.7:** Sea  $D$  un dominio. Una fórmula **sobre  $D$**  está definida como antes excepto que los elementos de  $D$  reemplazan constantes de un conjunto  $A$ .

Por ejemplo, correspondiendo a la fórmula  $\forall x p(a, x)$  en el cálculo de predicado, tenemos la fórmula  $\forall x p(0, x)$  en el dominio  $\mathbb{N}$  de los números naturales. La expresión  $\forall x p(0, x)$  es también una fórmula en el dominio  $\mathbb{Z}$  de los números enteros. La expresión  $\forall x p("", x)$  es una fórmula en el dominio  $S$  de las cadenas de caracteres, donde  $"$  es la cadena nula.

**DEFINICIÓN 3.8:** Sea  $A$  una fórmula de forma tal que  $\{p_1, \dots, p_n\}$  son todos predicados y  $\{a_1, \dots, a_n\}$  son todas constantes que aparecen en  $A$ . Decimos en



consecuencia que una **Interpretación**  $I$  es una tripla de la siguiente forma:

$$(D, \{R_1, \dots, R_n\}, \{d_1, \dots, d_n\})$$

que consta de los siguientes elementos:

- \* Un dominio no vacío  $D$ .
- \* Una asignación de la relación  $n$ -aria  $R_i$  sobre  $D$  para cada predicado  $n$ -ario  $p_i$ .
- \* Una asignación de un elemento  $d_j \in D$  para cada constante  $a_j$ .

Las siguientes expresiones son interpretaciones de la fórmula  $\forall x p(a, x)$  :

- \*  $I_1 = (\mathbb{N}, \{\leq\}, \{0\})$
- \*  $I_2 = (\mathbb{N}, \{\leq\}, \{1\})$
- \*  $I_3 = (\mathbb{Z}, \{\leq\}, \{0\})$
- \*  $I_4 = (\mathbb{S}, \{\subseteq\}, \{\text{"}\})$

en las cuales hemos utilizado el operador de menor o igual para las relaciones binarias y el operador de inclusión para la relación de subcadenas.

Examinemos ahora las posibles interpretaciones de  $\forall x P(x)$ , donde  $P$  es el predicado “**ha pagado**”. Para encontrar esta interpretación, se necesita una lista de clientes, que proporciona el universo de discurso requerido. Supongamos que existen sólo tres clientes, Juan, Manuel y Silvia. Abreviaremos estos nombres en la forma  $J$ ,  $M$  y  $S$ , respectivamente. Estas abreviaturas corresponden a las constantes individuales. A continuación, se necesita una asignación para  $P(x)$ . Si tanto Juan como Manuel han pagado pero Silvia no, entonces la asignación se da en la siguiente forma, expresada como una Tabla de Valores de Verdad:

	$J$	$M$	$S$
$P(x)$	$V$	$V$	$F$

A través de esta tabla podemos determinar el valor de verdad de la expresión  $\forall x P(x)$ . Evidentemente es falsa. En nuestra interpretación  $\forall x P(x)$  solo es verdadera si  $P(J)$ ,  $P(M)$  y  $P(S)$  son todas ellas verdaderas, lo cual no es cierto. Silvia no ha pagado, por lo tanto  $P(S)$  es falso.

Ahora formularemos lo que significa, en general, que una expresión como  $\forall x P(x)$  sea verdadera. Para la interpretación, seleccionaremos un dominio finito que consta de los  $n$  individuos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ .  $\forall x P(x)$  sólo es verdadero si  $P(a_1), P(a_2), P(a_3), \dots, P(a_n)$  son todos verdaderos. Por lo tanto,  $\forall x P(x)$  esta dado por:

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge \dots \wedge P(a_n) \quad (3.4.1)$$

La parte izquierda de esta expresión habría sido exactamente la misma si hubiéramos empleado una variante de  $\forall x P(x)$  tal como  $\forall y P(y)$  o  $\forall z P(z)$ . Esto muestra que las variantes son equivalentes lógicamente. Obsérvese que  $P(a_1), P(a_2), P(a_3), \dots, P(a_n)$  sólo tienen dos valores posibles  $V$  y  $F$ , y esto hace que las expresiones  $P(a_1), P(a_2), P(a_3), \dots, P(a_n)$  sean proposiciones. En este sentido, se puede decir que las interpretaciones en universos finitos transforman las expresiones de cálculo de predicado en proposiciones.

Dada la interpretación que se expresa mediante la tabla de verdad anterior, es fácil decidir si  $\exists x P(x)$  es verdadero si existe al menos un  $x$  para el cual es válido  $P(x)$ . En la



interpretación dada  $P(J)$  es verdadero, y esto basta para hacer que  $\exists x P(x)$  sea verdadero. Existe un cliente, Juan, que ha pagado. En el dominio de los  $n$  individuos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  podemos encontrar una expresión para el cuantificador existencial.  $\exists x P(x)$  es verdadero en toda la interpretación que haga verdadero a  $P(a_1)$ , o  $P(a_2)$ , o  $P(a_3)$ , o  $\dots$ , o  $P(a_n)$ . Por lo tanto:

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee \dots \vee P(a_n) \quad (3.4.2)$$

Por ejemplo, utilizando las expresiones (3.4.1) y (3.4.2) podemos demostrar la validez de una expresión para cualquier dominio finito. Consideremos la siguiente expresión  $\neg \forall x P(x)$

$$\neg \forall x P(x) \equiv \neg (P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge \dots \wedge P(a_n))$$

$$\equiv \neg (P(a_1)) \vee \neg (P(a_2)) \vee \neg (P(a_3)) \vee \dots \vee \neg (P(a_n))$$

$$\equiv \exists x \neg P(x)$$

**Ejemplo 3.4.1:** Analicemos la interpretación de la siguiente frase “*Hay alguien que admira a todo el mundo*”. El universo de discurso consta de tres personas Juan, María y Ricardo. El predicado en cuestión es  $Q$ ; esto es,  $Q(x, y)$  significa que “ $x$  admira a  $y$ ”, la tabla siguiente nos da una asignación para el predicado mencionado. A partir de esta tabla, se ve que Juan admira a María y a Ricardo, que María sólo admira a Juan y que Ricardo admira a María y a si mismo. Para averiguar si la frase planteada es cierta o no, lo mejor es traducirla al cálculo de predicados. “Hay alguien” se puede expresar como  $\exists x$ .

	Juan	María	Ricardo	$\forall y Q(x, y)$	$\exists y Q(x, y)$
Juan	F	V	V	F	V
María	V	F	F	F	V
Ricardo	F	V	V	F	V
$\forall x Q(x, y)$	F	F	F		
$\exists x Q(x, y)$	V	V	V		

Como primer paso escribimos la siguiente expresión:

$$\exists x x \text{ admira a todo el mundo}$$

La frase “ $x$  admira a todo el mundo” se puede traducir ahora en la forma  $\forall y Q(x, y)$ . Como resultado, “Hay alguien que admira a todo el mundo” se puede expresar de la siguiente forma:

$$\exists x \forall y Q(x, y)$$

Para averiguar si esta frase es cierta, buscaremos primero el valor de verdad de  $\forall y Q(x, y)$ . Para la interpretación dada esta sub expresión es falsa, independientemente del valor de  $x$ , por lo tanto,  $\forall y Q(x, y)$  es falsa para todo  $x$ : no existe un valor de  $x$  para el cual  $\forall y Q(x, y)$  sea verdadero y consiguientemente  $\exists x \forall y Q(x, y)$  es falso a los efectos de la interpretación considerada.

Obsérvese que las dos expresiones de predicados  $\forall y \exists x Q(x, y)$  y  $\exists x \forall y Q(x, y)$  son diferentes.  $\forall y \exists x Q(x, y)$  dice que para todo el mundo existe una persona que él (o ella) admira, lo cual es cierto a los efectos de la interpretación dada. Para ver esto, consideremos la



siguiente expresión  $\exists x Q(x, y)$ . Esta expresión es verdadera para todo  $x$ ; es verdadera para los valores de  $x = \text{Juan}$ ,  $x = \text{María}$  y  $x = \text{Ricardo}$ . Esto significa que  $\forall x \exists y Q(x, y)$  es verdadero para la interpretación dada. Con esta misma interpretación, sin embargo,  $\exists x \forall y Q(x, y)$  es falsa, tal como se mostró anteriormente. Por lo tanto, el valor de verdad puede cambiar si se intercambian los cuantificadores universal y existencial.

Aún cuando los cuantificadores existencial y universal no se puedan intercambiar, se nos permite intercambiar los cuantificadores universales, y lo mismo sucede con los cuantificadores existenciales. Esto se indica mediante las leyes siguientes:

$$\forall x \forall y Q(x, y) \equiv \forall y \forall x Q(x, y)$$

$$\exists x \exists y Q(x, y) \equiv \exists y \exists x Q(x, y)$$

### 3.4.2.- VALUACIONES (VALORIZACIÓN)

Una valorización, valuación o asignación de un valor, es una función que asigna entidades de una estructura relacional a las variables del lenguaje asociado  $L_1$ . Por ejemplo consideremos la valorización  $\alpha_1$ , definida de la siguiente forma:

$$\alpha_1(x) = \text{GUILLERMO}$$

$$\alpha_1(y) = \text{ROBERTO}$$

$$\alpha_1(z) = \text{VEINTE}$$

**DEFINICIÓN 3.9:** Sea  $A$  una fórmula **cerrada**. Definimos a  $v(A)$ , como el **valor** de  $A$ , bajo una interpretación  $I$ , obtenida reemplazando primero cada constante  $a_i$  de  $A$  por el elemento del dominio  $d_j$  asignado y que pertenece a  $I$  y luego por inducción sobre la estructura de  $A$ :

- \* Si  $A = p_i(c_1, \dots, c_n)$  es una fórmula atómica, entonces  $v(A) = V$  si y solo si se cumple que:

$$\{c_1, \dots, c_n\} \in R_i$$

donde  $R_i$  es la relación asignada por  $I$  a  $p_i$ .

- \*  $v(\neg A_1) = V$  si y solo si  $v(A_1) = F$ .
- \*  $v(A_1 \vee A_2) = V$  si y solo si  $v(A_1) = V$  o  $v(A_2) = V$  y de la misma forma procederemos para cualquier otro conectivo Booleano.
- \*  $v(\forall x A_1) = V$  si y solo si para todo  $c \in D$ ,  $v(A_1[x \leftarrow c]) = V$ .
- \*  $v(\exists x A_1) = V$  si y solo si para algunos  $c \in D$ ,  $v(A_1[x \leftarrow c]) = V$ .

En otras palabras, primero utilizamos las asignaciones de los elementos del dominio a los símbolos constantes (si existe alguno) para transformar la fórmula en una fórmula sobre  $D$ . Luego usar la definición inductiva, la cual reduce la computación del valor de  $A$  a preguntas acerca de las siguientes fórmulas atómicas  $p_i(c_1, \dots, c_n)$ . La fórmula atómica es  $V$  si y solo si esta secuencia de elementos del dominio está en la relación  $R_i$  asignada por la interpretación.

### 3.4.3.- VALORES SEMÁNTICOS/NOTACIONES

Los **valores semánticos o notaciones** de una expresión  $A$  con respecto a una estructura  $U$ , una interpretación  $\gamma$  y una valorización  $\alpha$  es denotada a través de la siguiente notación:



$$[[A]] U, \gamma, \alpha$$

por ejemplo con respecto a  $U_1, \gamma_1, \alpha_1$  tenemos que :

- (a)  $[[\text{Susana}]] \gamma_1, \alpha_1 = \text{SUSANA}$
- (b)  $[[x]] \gamma_1, \alpha_1 = \text{GUILLERMO}$
- (c)  $[[\text{Doble}(20)]] \gamma_1, \alpha_1 = \text{CUARENTA}$

Debemos resaltar que en (c), la notación de una expresión de una función es una entidad en la estructura relacional asociada. En general, el valor semántico de una expresión de una función de la forma siguiente  $f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ , donde  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  son términos, está dado por :

$$[[f]] \gamma, \alpha([t_1] \gamma, \alpha, \dots, [t_n] \gamma, \alpha)$$

o sea que el valor semántico de una expresión función  $f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$  es obtenido aplicando la función que está representada por (o sea es el valor semántico de)  $f$  para los argumentos que son denominados por  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ .

### 3.4.4.- CUMPLIMENTACIÓN DE FORMULAS

La satisfacción o cumplimentación de una fórmula  $A$  del lenguaje  $L$  a través de una estructura relacional  $U$  con respecto a una interpretación  $\gamma$  y a una valorización  $\alpha$ , está representada por:

$$U \models A [\gamma, \alpha]$$

y está definida de la siguiente forma :

- (a) Si  $p(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$  es una fórmula atómica en  $L$  entonces :

$$U \models p(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n) \text{ ssi } ([t_1] \gamma, \alpha, \dots, [t_n] \gamma, \alpha) \in [[p]] \gamma, \alpha$$

O sea que  $U$  satisface una fórmula atómica  $p(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$  con respecto a una interpretación  $\gamma$  y a una valorización  $\alpha$  si y solo si  $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n) \in r$ , donde  $r$  es la relación asignada a  $p$  por  $\gamma$ , y  $e_i$  es la entidad asignada a  $t_i$  por  $\gamma$ , o  $\alpha$ .

- (b) Si  $A$  y  $B$  son FBF y si  $x$  es una variable de  $L$  entonces tenemos que :

$$(1) \quad U \models [A] [\gamma, \alpha] \text{ ssi } U \models A [\gamma, \alpha]$$

$$(2) \quad U \models \neg A [\gamma, \alpha] \text{ ssi no es el caso de } U \models A [\gamma, \alpha]$$

$$(3) \quad U \models A \wedge B [\gamma, \alpha] \text{ ssi } U \models A [\gamma, \alpha] \text{ y } U \models B [\gamma, \alpha]$$

$$(4) \quad U \models A \vee B [\gamma, \alpha] \text{ ssi } U \models A [\gamma, \alpha] \text{ o } U \models B [\gamma, \alpha]$$

$$(5) \quad U \models A \Rightarrow B [\gamma, \alpha] \text{ ssi } U \models \neg A [\gamma, \alpha] \text{ o } U \models B [\gamma, \alpha]$$

$$(6) \quad U \models A \Leftrightarrow B [\gamma, \alpha] \text{ ssi } U \models A \Rightarrow B [\gamma, \alpha] \text{ y } U \models B \Rightarrow A [\gamma, \alpha]$$

$$(7) \quad U \models \exists x A [\gamma, \alpha] \text{ ssi existe una entidad } e \text{ en } U \text{ tal que } U \models A [\gamma, \alpha'], \text{ donde } \alpha' \text{ es idéntica a } \alpha \text{ excepto que } \alpha'(x) = e \text{ mientras que } \alpha(x) \text{ puede serlo.}$$





- (8)  $U \models \forall x A[\gamma, \alpha]$  ssi para toda entidad  $e$  en  $U$  tal que  $U \models A[\gamma, \alpha']$ , donde  $\alpha'$  es idéntica a  $\alpha$  excepto que  $\alpha'(x) = e$  mientras que  $\alpha(x)$  puede serlo.

La satisfacción de una expresión o fórmula a través de una estructura relacional, con respecto a una interpretación, no depende de todos los argumentos de una validación, sino solamente de aquellos argumentos que son variables libres en la fórmula considerada.

### 3.4.5.- VERDAD Y MODELOS

**DEFINICIÓN 3.10:**  $A$  es **verdadera** en  $I$ , o  $I$  es un **modelo** para  $A$ , si el valor  $v(A) = V$  bajo  $I$ . Notación:  $I \models A$  o bien  $U \models A[\gamma, \alpha]$ .

Retornando a la fórmula  $A = \forall x p(a, x)$  y dentro del conjunto de interpretaciones definido a continuación, tenemos:

- \*  $I_1 \models A$  ya que para **todo**  $n \in N$ ,  $(0, n) \in \leq$ , o de la forma que se escribe usualmente  $0 \leq n$ .
- \*  $I_2$  no  $\models A$  ya que no es verdadero que para **todo**  $n \in N$ ,  $1 \leq n$ . Si  $n = 0$  entonces  $1 \not\leq 0$ .
- \*  $I_3$  no  $\models A$ . O sea, que para **no**  $d$  tenemos  $(Z, \leq, d) \models A$ , debido a que no existe un entero más chico.
- \*  $I_4 \models A$  ya que por la definición usual de subcadenas, la cadena nula "" es una subcadena de cada cadena.

**Definición 3.11:** Una expresión o fórmula es **válida** si es verdadera en todas las interpretaciones. Para expresar que una expresión o fórmula  $A$  es válida, escribimos de la siguiente forma  $\models A$ .

**DEFINICIÓN 3.12:** Una expresión o fórmula  $A$  es **suficiente** si para **alguna** interpretación  $I$ , se cumple que  $I \models A$ ,  $A$  es **válido** (notación  $\models A$ ) si se cumple que para todas las interpretaciones  $I$ ,  $I \models A$ .

Las definiciones de falsedad, insuficiencia, equivalencia lógica e implicación lógica son similares a las desarrolladas en el cálculo o lógica proposicional.

$$A \equiv \forall x p(a, x)$$

es suficiente ya que  $I_1 \models A$  y es falsa ya que  $I_3$  no  $\models A$ . Notar que aún cuando las asignaciones de  $p$  y  $a$  son las mismas, el cambio del dominio falsifica a la fórmula. Una fórmula válida es, por ejemplo, la siguiente:

$$\forall x p(x) \Rightarrow p(a)$$

Suponer que la fórmula anterior no es válida, debe existir entonces una interpretación  $(D, \{R\}, \{d\})$  tal que  $v(\forall x p(x)) = V$  y  $v(p(a)) = F$ . Por la definición inductiva de  $v$ , para todo  $c \in D$ ,  $v(p(c)) = V$ , o sea que tenemos que  $c \in R$ . En particular, ya que  $d \in D$ ,  $d \in R$ , entonces  $v(p(d)) = V$  contradiciendo con la expresión  $v(p(d)) = F$ .

Notemos que la siguiente fórmula:

$$\exists x p(x) \Rightarrow p(a)$$



no es válida ya que es posible encontrar una interpretación de forma tal que se cumpla que  $v(p(d')) = V$  y  $v(p(d)) = F$  para **algún** valor que cumpla con  $d' \neq d$ .

Finalmente, consideremos una fórmula no cerrada tal como la siguiente:

$$p(x) \vee q(y)$$

no es posible asignar valores de verdad a fórmulas no cerradas. En lugar de ello, debemos considerarlas como relaciones. Dando valores de dominio  $d_1$  y  $d_2$  para  $x$  e  $y$ , el valor de  $p(d_1) \vee q(d_2)$  podrá ser calculado. Este proceso es similar al de asignar valores del dominio a constantes en la definición de una interpretación.

**DEFINICIÓN 3.13:** Si  $B$  es una expresión o fórmula, entonces diremos que toda interpretación que haga que  $B$  produzca  $V$  **satisface** a  $B$ . Toda interpretación que satisface a  $B$  se denomina un **modelo** de  $B$ . Si  $B$  tiene un modelo, entonces se dice que  $B$  es **viable**.

**DEFINICIÓN 3.14:** Una fórmula o expresión  $B$  que no tenga ningún modelo se denomina una expresión **contradictoria**.

**DEFINICIÓN 3.15:** Una expresión o fórmula con variables libres

$$A(x_1, \dots, x_n)$$

es suficiente si solo si existe una interpretación  $I$  y una asignación de valores del dominio ( $d_1, \dots, d_n$ ) a las variables libres, tal que se cumpla:

$$v(A(d_1, \dots, d_n)) = V$$

No existe la necesidad de complicar el tratamiento teórico incluyendo fórmulas no cerradas, debido al siguiente teorema:

**TEOREMA 3.1:** Una fórmula no cerrada  $A(x_1, \dots, x_n)$  es suficiente si y solo si lo es un cierre existencial:

$$\exists x_1, \dots, \exists x_n A(x_1, \dots, x_n)$$

Es válida si y solo si lo es un cierre universal:

$$\forall x_1, \dots, \forall x_n A(x_1, \dots, x_n)$$

■

### 3.5.- EQUIVALENCIA LÓGICA Y SUBSTITUCIÓN

En el cálculo proposicional dos fórmulas son lógicamente equivalentes  $A \Leftrightarrow A'$  si su valor es el mismo bajo todas las interpretaciones. Si  $A$  es una subfórmula de  $B$  y  $A \Leftrightarrow A'$ , entonces  $B \Leftrightarrow B'[A \Leftrightarrow A']$ . En el cálculo de predicado se mantienen definiciones y teoremas equivalentes, pero existen dificultades técnicas ocasionadas por las variables libres. Más que complicar la presentación, restringimos el uso de la substitución a fórmulas que tengan el mismo conjunto de variables libres. En este caso:

$$A(x_1, \dots, x_n) \equiv A'(x_1, \dots, x_n)$$

si y solo si:



$$\forall x_1 \dots \forall x_n A(x_1, \dots, x_n) \equiv \forall x_1 \dots \forall x_n A'(x_1, \dots, x_n)$$

y el teorema justifica la substitución generalizada fácilmente.

La noción de validez nos permite definir la implicación lógica y la equivalencia lógica en la forma siguiente:

**DEFINICIÓN 3.16:** Sean  $A$  y  $B$  dos expresiones o fórmulas. Decimos que  $A$  es **lógicamente equivalente a  $B$**  si  $A \leftrightarrow B$  es válida. En este caso escribimos  $A \equiv B$ . Además, decimos que  $A$  **implica lógicamente a  $B$** , o que  $A \Rightarrow B$ , si la expresión  $A \Rightarrow B$  es válida.

Tal como en el cálculo proposicional, se pueden utilizar las equivalencias lógicas para manipular fórmulas, y se pueden utilizar las implicaciones lógicas como base para unos argumentos correctos. Tal como en el cálculo proposicional, escribiremos  $A_1, A_2, \dots, A_n \models C$ , si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  en conjunto implican lógicamente a  $C$ .

La ley siguiente la utilizaremos como ejemplo. Sin embargo esta ley es muy importante.

$$\forall x (P \Rightarrow Q(x)) \equiv P \Rightarrow \forall x Q(x) \quad (3.5.1)$$

Aquí  $P$  es una proposición constante y  $Q$  es un predicado. Para demostrar la expresión anterior (3.5.1) utilizaremos la ley de los casos. Dado que  $P$  es o bien verdadera o bien falsa, esto significa que en lugar de utilizar la expresión dada, se puede demostrar la validez de las dos fórmulas siguientes:

$$\forall x (V \Rightarrow Q(x)) \equiv V \Rightarrow \forall x Q(x) \quad (3.5.2)$$

$$\forall x (F \Rightarrow Q(x)) \equiv F \Rightarrow \forall x Q(x) \quad (3.5.3)$$

Estas dos equivalencias son válidas. Dado que  $V \Rightarrow Q(x)$  es  $Q(x)$ , el lado izquierdo de (3.5.2) se reduce a  $\forall x Q(x)$ . Por una razón similar el lado derecho de (3.5.2) se reduce a  $\forall x Q(x)$  y es evidente que  $\forall x Q(x) \equiv \forall x Q(x)$  es verdadera. Además la expresión (3.5.3) es verdadera, porque ambos lados son siempre verdaderos  $F \Rightarrow \forall x Q(x)$  es trivialmente verdadero por definición de implicación lógica. En conclusión la expresión (3.5.1) es válida independientemente de que  $P$  sea verdadero o falso.

Las expresiones válidas del cálculo de predicados también se pueden transformar en esquemas, salvo que hay que prestar especial atención a las variables libres y ligadas. Para demostrar esto, consideremos la expresión (3.5.1). En esta fórmula, podemos sustituir a  $P$  por cualquier expresión, siempre y cuando esta expresión no contenga a  $x$  como variable libre, y esta sustitución no afecta a su validez. Por ejemplo, supongamos que  $P$  representa "**brilla el sol**".  $Q$  representa "**hace buen tiempo**" y  $H(x)$  representa " **$x$  es feliz**". Entonces se tiene, a partir de (3.5.1), que:

$$\forall x ((P \wedge Q) \Rightarrow H(x)) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow \forall x H(x)$$

Por tanto si es cierto que "**para todo el mundo que si brilla el sol y hace buen tiempo, entonces son felices, se puede concluir que si brilla el sol y hace buen tiempo, entonces todo el mundo es feliz**".

La figura 3.5.1 contiene una lista de fórmulas válidas en el cálculo de predicado. Ya que la validez de  $A \equiv B$  es la misma que la equivalencia  $A \Leftrightarrow B$ , la lista está dada en esta forma de modo tal que las fórmulas que no son equivalentes en ambas direcciones, también pueden ser listadas.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

Figura 3.5.1 - Fórmulas Válidas en el Cálculo de Predicados

$$\begin{aligned}
 \forall x A(x) &\equiv \neg \exists x \neg A(x) \\
 \exists x A(x) &\equiv \neg \forall x \neg A(x) \\
 \forall x A(x) &\Rightarrow \exists x A(x) \\
 \exists x \forall y A(x, y) &\Rightarrow \forall y \exists x A(x, y) \\
 \forall x \forall y A(x, y) &\equiv \forall y \forall x A(x, y) \\
 \exists x \exists y A(x, y) &\equiv \exists y \exists x A(x, y) \\
 \exists x (A(x) \vee B(x)) &\equiv (\exists x A(x) \vee \exists x B(x)) \\
 \forall x (A(x) \wedge B(x)) &\equiv (\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)) \\
 (\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) &\Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x)) \\
 \exists x (A(x) \wedge B(x)) &\Rightarrow (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \\
 \forall x (A(x) \Leftrightarrow B(x)) &\Rightarrow (\forall x A(x) \Leftrightarrow \forall x B(x)) \\
 \forall x (A(x) \Leftrightarrow B(x)) &\Rightarrow (\exists x A(x) \Leftrightarrow \exists x B(x)) \\
 (\exists x A(x) \vee B) &\equiv \exists x (A(x) \vee B) \\
 (\forall x A(x) \vee B) &\equiv \forall x (A(x) \vee B) \\
 (\exists x A(x) \wedge B) &\equiv \exists x (A(x) \wedge B) \\
 (\forall x A(x) \wedge B) &\equiv \forall x (A(x) \wedge B) \\
 \forall x (A \Rightarrow B(x)) &\equiv (A \Rightarrow \forall x B(x)) \\
 \forall x (A(x) \Rightarrow B) &\equiv (\exists x A(x) \Rightarrow B) \\
 \exists x (A(x) \Rightarrow B(x)) &\equiv (\forall x A(x) \Rightarrow \exists x B(x)) \\
 (\exists x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)) &\Rightarrow \forall x (A(x) \Rightarrow B(x)) \\
 \forall x (A(x) \Rightarrow B(x)) &\Rightarrow (\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)) \\
 \forall x (A(x) \Rightarrow B(x)) &\Rightarrow (\exists x A(x) \Rightarrow \exists x B(x)) \\
 \forall x (A(x) \Rightarrow B(x)) &\Rightarrow (\forall x A(x) \Rightarrow \exists x B(x))
 \end{aligned}$$

El resto de esta sección motiva y explica alguna de las fórmulas más importantes de esta lista. Consideremos las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
 \forall x A(x) &\equiv \neg \exists x \neg A(x) \\
 \exists x A(x) &\equiv \neg \forall x \neg A(x)
 \end{aligned}$$

muestran que cualquier cuantificador puede ser definido en términos del otro cuantificador. Ello puede ser utilizado en desarrollos teóricos para reducir el número de casos que deben ser tratados. Otras fórmulas importantes que relacionan a los cuantificadores, son las indicadas a continuación:

$$\begin{aligned}
 \forall x A(x) &\Rightarrow \exists x A(x) \\
 \exists x \forall y A(x, y) &\Rightarrow \forall y \exists x A(x, y)
 \end{aligned}$$

La inversa de la última fórmula no es válida, tal como puede comprobarse a través de la interpretación  $(\mathbb{Z}, \leq)$ . Los cuantificadores existenciales son distributivos para la disyunción y los cuantificadores universales son distributivos para la conjunción.

$$\begin{aligned}
 \forall x (A(x) \wedge B(x)) &\equiv (\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)) \\
 \exists x (A(x) \vee B(x)) &\equiv (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))
 \end{aligned}$$

pero solo es válido en una dirección para los cuantificadores existenciales sobre la conjunción y para los cuantificadores universales sobre la disyunción.

$$\begin{aligned}
 (\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) &\Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x)) \\
 \exists x (A(x) \wedge B(x)) &\Rightarrow (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))
 \end{aligned}$$

Para la dirección contraria o inversa a la indicada anteriormente, consideremos la interpretación



sobre cualquier dominio de al menos dos elementos definida de la siguiente forma:

$$v(A(d)) = V$$

para exactamente un elemento  $d \in D$  y además:

$$v(B(d')) = V$$

para exactamente un valor  $d' \in D$ ,  $d \neq d'$ . Por lo tanto:

$$v(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) = V$$

pero tenemos que:

$$v(\exists x(A(x) \wedge B(x))) = F$$

Para el cuantificador universal podemos obtener una construcción similar a la indicada anteriormente.

Si una subfórmula no contiene variables libres, entonces los cuantificadores sobre tal variable pueden ser pasados libremente a través de la subfórmula:

$$(\exists x A(x) \vee B) \equiv \exists x(A(x) \vee B)$$

recordando que cuando una variable no es libre debe cumplirse la siguiente condición  $B[x \leftarrow d] = B$ . De forma tal que:

$$(A(x) \vee B)[x \leftarrow d] \equiv A(x)[x \leftarrow d] \vee B[x \leftarrow d] \equiv A(x)[x \leftarrow d] \vee B$$

a partir de la cual obtenemos la equivalencia.

Fórmulas similares para la implicación pueden obtenerse a partir de las fórmulas para la disyunción reemplazando la implicación por la disyunción equivalente y observando la alteración de los cuantificadores a medida que la negación pasa a través de ellos:

$$\begin{aligned} \forall x(A(x) \Rightarrow B) &\equiv \\ \forall x(\neg A(x) \vee B) &\equiv \\ \forall x \neg A(x) \vee B &\equiv \\ \neg \exists x A(x) \vee B &\equiv \\ \exists x A(x) \Rightarrow B & \end{aligned}$$

Las fórmulas para implicación no son siempre obvias y deben ser estudiadas muy cuidadosamente.

$$\begin{aligned} \exists x(A(x) \Rightarrow B(x)) &\equiv (\forall x A(x) \Rightarrow \exists x B(x)) \\ (\exists x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)) &\Rightarrow \forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \end{aligned}$$

siguiendo las fórmulas para ' $\exists$ ' sobre ' $\vee$ ' y ' $\forall$ ' sobre ' $\wedge$ ', respectivamente. Consideremos la siguiente expresión:

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow (\forall x A(x) \vee \exists x B(x))$$

es una fórmula muy interesante que conecta cuantificadores universales y existenciales. Transformando el consecuente en una implicación:

$$\neg \forall x A(x) \Rightarrow \exists x B(x)$$



podemos además probar su validez. Sea  $I$  una interpretación arbitraria de forma tal que se cumpla lo siguiente:

$$v(\neg \forall x A(x)) = V$$

entonces

$$v(\exists x \neg A(x)) = V$$

tal que  $d$  sea algún elemento de dominio en  $D \in I$  tal que  $v(\neg A(d)) = V$ . A partir del antecedente de la fórmula:

$$\forall x (A(x) \vee B(x))$$

obtenemos lo siguiente

$$v(A(d) \vee B(d)) = V$$

Lo anterior conjuntamente con  $v(\neg A(d)) = V$  implica que  $v(B(d)) = V$  a partir de lo cual concluimos con la siguiente validación:

$$v(\exists x B(x)) = V$$

A partir de la fórmula anterior, podemos derivar varias fórmulas de distribución utilizando la implicación:

$$\forall x (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x))$$

$$\forall x (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x) \Rightarrow \exists x B(x))$$

$$\forall x (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x A(x) \Rightarrow \exists x B(x))$$

ISBN 987-43-9433-1



### 3.6.- CUADROS SEMÁNTICOS

Antes de presentar la construcción formal de los cuadros semánticos para el cálculo de predicados, debemos construir informalmente varios cuadros para estudiar las dificultades con las que debemos tratar. Recordemos que un cuadro es una búsqueda sistemática para un contra-ejemplo. Lo que debemos realizar es extender la búsqueda para un contra-ejemplo e incluir la búsqueda para fórmulas cuantificadas.

El primer ejemplo es la negación de una fórmula válida:

$$\forall x (p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow (\forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x))$$

Aplicando dos reglas- $\alpha$  a fórmulas de la forma  $\neg(A \Rightarrow B)$ , podemos obtener el siguiente conjunto de fórmulas para las cuales no se pueden aplicar más reglas de cuadros proposicionales:

$$\forall x (p(x) \Rightarrow q(x)), \forall x p(x), \neg \forall x q(x)$$

La fórmula  $\neg \forall x q(x)$  es equivalente a  $\exists x \neg q(x)$ , tal que si queremos crear un contra-ejemplo, debemos instanciar la fórmula con algún elemento de dominio concreto siendo substituido por  $x$ . Más allá de inventar algún dominio artificial, usaremos el conjunto de los símbolos constantes como un dominio. Sea  $a \in A$ , establecido para un elemento de dominio y extendido

al cuadro con un nuevo nodo cuya etiqueta reemplaza la fórmula cuantificada con la siguiente instanciación:

$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)), \forall x p(x), \neg q(a)$$

Las dos primeras fórmulas son cuantificadas universalmente, de forma tal que imponen requerimientos sobre **cada** elemento del dominio propuesto. Por lo tanto, instanciamos cada uno de ellos para el elemento de dominio **a**, que hemos introducido. En dos etapas obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)), \forall x p(x), \neg \forall x q(x) \\ &\quad \downarrow \\ &\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)), p(a), \neg q(a) \\ &\quad \downarrow \\ &p(a) \Rightarrow q(a), p(a), \neg q(a) \end{aligned}$$

Aplicando la regla- $\beta$  a la implicación, nos da inmediatamente un cuadro cerrado. En este primer ejemplo, las extensiones del método del cuadro semántico parecen ser directo.

Figura 3.6.1: Cuadro Semántico para una Fórmula Satisfecha

$$\begin{aligned} &\neg(\forall x(p(x) \vee q(x)) \Rightarrow (\forall x p(x) \vee \forall x q(x))) \\ &\quad \downarrow \\ &\forall x(p(x) \vee q(x)), \neg(\forall x p(x) \vee \forall x q(x)) \\ &\quad \downarrow \\ &\forall x(p(x) \vee q(x)), \neg \forall x p(x), \neg \forall x q(x) \\ &\quad \downarrow \\ &\forall x(p(x) \vee q(x)), \neg \forall x p(x), \neg q(a) \\ &\quad \downarrow \\ &\forall x(p(x) \vee q(x)), \neg p(a), \neg q(a) \\ &\quad \downarrow \\ &p(a) \vee q(a), \neg p(a), \neg q(a) \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \\ &p(a), \neg p(a), \neg q(a) \quad q(a), \neg p(a), \neg q(a) \\ &\quad \times \quad \times \end{aligned}$$

Tratemos ahora de construir un cuadro semántico de la negación de la siguiente fórmula:

$$\forall x(p(x) \vee q(x)) \Rightarrow (\forall x p(x) \vee \forall x q(x))$$

la cual es satisfecha pero no es válida (Figura 3.6.1). Tenemos un cuadro cerrado, pero para una fórmula que no es válida. ¿Qué hemos realizado en forma errónea?. La respuesta es que **a** no tendría que haber sido elegido como un elemento de dominio para la instanciación de  $\neg \forall x p(x)$ , si ya fue elegido para  $\neg \forall x q(x)$ . En realidad la fórmula es verdadera en todas las interpretaciones sobre dominios de un único elemento. Cuando creamos elementos de dominio para fórmulas existenciales, debemos elegir un nuevo elemento cada vez. Si elegimos una constante diferente, la quinta línea del cuadro es:

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \neg p(b), \neg q(a)$$

Reemplazando el cuantificador universal con **a**, obtenemos la siguiente línea del cuadro semántico:

$$p(a) \vee q(a), \neg p(b), \neg q(a)$$

Ahora debemos instanciar la fórmula universal con **b**, ya que debe ser cierta para **todos** los elementos del dominio, pero desafortunadamente, la fórmula ha sido ya utilizada en la construcción del cuadro. Para evitar esto, las fórmulas universales nunca deben ser borradas de la etiqueta de un nodo. Ellas permanecen como reservas de posibles interpretaciones para cada nueva constante (elemento de dominio) que es introducida.

De este modo el resultado de la última instanciación con **a**, será:

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), p(a) \vee q(a), \neg p(b), \neg q(a)$$

seguido por:

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), p(a) \vee q(a), p(b) \vee q(b), \neg p(b), \neg q(a)$$

Dejamos como ejercicio la extensión del cuadro utilizando reglas- $\beta$ , y para demostrar que exactamente una rama del cuadro está abierta, definimos el modelo:

$$\begin{aligned} v(p(a)) &= v(q(b)) = V \\ v(p(b)) &= v(q(a)) = F \end{aligned}$$

De esta forma existe un contra-ejemplo a la negación de la fórmula, o sea que, la fórmula es falsa, lo que es equivalente a decir que la fórmula no es válida.

Una posible objeción a este procedimiento, es que podemos crear más elementos de dominio que los necesarios. Sin embargo, aún si se han creado "demasiados" elementos del dominio, las relaciones pueden ser definidas para tratar a todos los elementos de manera idéntica:

$$\begin{aligned} p(a_1) &= p(a_2) = p(a_3) = \dots = V \\ q(a_1) &= q(a_2) = q(a_3) = \dots = F \end{aligned}$$

Luego, busquemos un modelo para la fórmula  $A = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$ , donde:

$$\begin{aligned} A_1 &= \forall x \exists y p(x, y) \\ A_2 &= \forall x \neg p(x, x) \\ A_3 &= \forall x \forall y \forall z (p(x, y) \wedge p(y, z) \Rightarrow p(x, z)) \end{aligned}$$

Obviamente, las primeras dos etapas pueden ser reglas- $\alpha$  para descomponer la conjunción para obtener el conjunto de fórmulas:

$$A_1, A_2, A_3$$

Ahora tenemos un problema menor, ya que debemos instanciar las fórmulas cuantificadas universalmente, pero no se han introducido constantes por intermedio de las fórmulas existenciales. Recalamos que la definición de una interpretación requiere que el dominio no sea un conjunto vacío, de forma tal que podemos elegir arbitrariamente un elemento  $a_1$ , el cual se encuentra en el dominio. La construcción del cuadro continua a través de la instanciación de  $A_1$  para obtener la siguiente subfórmula  $\exists y p(a_1, y)$  y luego realizar la instanciación de la fórmula existencial con una nueva constante (Figura 5.4). Notar que ya que  $A_1$  es universal, la misma es copiada en la etiqueta de un nuevo nodo.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330



Figura 3.6.2: Cuadro Semántico para  $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$

$$\begin{array}{c} \forall x \exists y p(x, y), A_2, A_3 \\ \Downarrow \\ \forall x \exists y p(x, y), \exists y p(a_1, y), A_2, A_3 \\ \Downarrow \\ \forall x \exists y p(x, y), p(a_1, a_2), A_2, A_3 \end{array}$$

Continuando, la nueva constante  $a_2$  debe ser utilizada para instanciar nuevamente a  $A_1$  (Figura 5.6.2). Este proceso no finalizará. En lugar de ello, creamos una secuencia de finalización de elementos de dominio  $a_1, a_2, \dots$  de forma tal que  $p(a_i, a_{i+1})$  debe ser verdadero. También podemos instanciar  $A_2$  o  $A_3$  con cualquier constante que no cierre o finalice al cuadro semántico. En tal caso tenemos un cuadro que no cierra ni termina y al cual lo definimos como un **modelo infinito**, o sea, un modelo con un dominio infinito. De hecho,  $(\mathbb{N}, \{<\})$  es un modelo para la fórmula  $A$ .

Figura 3.6.3: Cuadro Semántico para  $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$ , continuación

$$\begin{array}{c} \forall x \exists y p(x, y), p(a_1, a_2), A_2, A_3 \\ \Downarrow \\ \forall x \exists y p(x, y), p(a_1, a_2), A_2, A_3 \\ \Downarrow \\ \forall x \exists y p(x, y), p(a_2, a_3), p(a_1, a_2), A_2, A_3 \end{array}$$

**TEOREMA 3.2:** La fórmula  $A = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$  no tiene modelos finitos.

**Demostración:** Supongamos que  $A$  tiene un modelo finito. Entonces es posible construir una rama abierta para el cuadro. En algún punto cuando instanciamos  $\exists y p(a_i, y)$  debemos elegir una constante que represente a los mismos elementos de dominio tal como  $a_j$  para  $j \leq i$  para obtener la fórmula .

Si  $j = i$ ,  $p(a_i, a_i)$ , producirá el cierre del cuadro cuando se está instanciando a  $A_2$  con  $a_i$  para dar  $\neg p(a_i, a_i)$ .

Si  $j < i$ , entonces tendremos:

$$p(a_j, a_{j+1}), p(a_{j+1}, a_{j+2}), \dots, p(a_{i-1}, a_i)$$

están alrededor del nodo etiquetado. Desde  $p(a_j, a_{j+1})$  y  $p(a_{i-1}, a_i)$ , por intanciación de  $A_3$  y utilizando las reglas- $\beta$ , obtenemos  $p(a_j, a_i)$ . Repitiendo el proceso,  $p(a_j, a_i)$  eventualmente será obtenida en el nodo etiquetado. Pero conjuntamente con  $p(a_j, a_i)$  obtenido por la intanciación original ocasiona el cierre del cuadro cuando es instanciado  $A_2$ .

Debemos desarrollar la maquinaria teórica para tratar con dominios infinitos. Podemos concluir también que la construcción de un cuadro semántico **no es** un procedimiento de decisión para validar el cálculo de predicado. Podemos no conocer nunca si una rama que no está cerrada define realmente un modelo infinito o si será eventualmente cerrada, por ejemplo, en una secuencia de un millón de aplicaciones de la reglas del cuadro. Por supuesto, esto no prueba que no exista un procedimiento de decisión para el cálculo de predicado, solo que el método del cuadro semántico no es un procedimiento de decisión. Una complicación final en la construcción de la tabla semántica está dada por la fórmula:



$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \forall x(q(x) \wedge \neg q(x))$$

tal que

$$A_1, A_2, A_3, \forall x(q(x) \wedge \neg q(x))$$

En el cálculo proposicional, las fórmulas siempre simplifican, tal que cada fórmula en la etiqueta de un nodo eventualmente tiene una regla aplicada a ella. Sin embargo, una vez que requerimos que fórmulas cuantificadas universalmente no sean borradas, podemos finalmente aplicar reglas a  $A_1$  y nunca rodearla utilizando la cuarta subfórmula, la cual cierra inmediatamente el cuadro. De esta manera, una construcción **semántica** es necesaria para asegurar qué reglas serán eventualmente aplicadas a todas las fórmulas etiquetando un nodo del cuadro.

La presentación formal de la construcción de un cuadro semántico para el cálculo de predicados está dado a través de dos etapas. Las primeras reglas son presentadas para los cuantificadores universales y existenciales y proporcionan además la estabilidad. Luego se describe la construcción sistemática del cuadro y es utilizada para proporcionar integridad al procedimiento. Como en el caso proposicional, generalizamos las reglas en dos tipos diferentes: **reglas- $\gamma$**  para las fórmulas universales y **reglas- $\delta$**  para fórmulas existenciales (Figuras 3.6.4 y 3.6.5). Recaltar la notación para la construcción de los cuadros semánticos. Un nodo  $n$  sobre el árbol está etiquetado con un conjunto de fórmulas  $U(n)$ . Si la hoja  $l$  contiene literales complementarios, la rama está cerrada. De otro modo se selecciona alguna rama abierta en una fórmula  $A$  y se aplica una regla que depende de la estructura de  $A$ . Las reglas  $-\alpha$  y  $-\beta$  se mantienen como antes. Si  $A$  es una fórmula cuantificada, existen dos casos nuevos para agregar, a saber:

#### Construcción del Cuadro Semántico

- \* Si  $A$  es una fórmula  $\gamma$  (tal como  $\forall xA_1(x)$ ), crear un nuevo nodo  $l'$  como un hijo de  $l$  y etiqueta  $l'$  con:

$$U(l') = U(l) \cup \{\gamma(a)\}$$

donde  $a$  es alguna constante que aparece en  $U(l)$ .

- \* Si  $A$  es una fórmula  $\delta$  (tal como  $\exists xA_1(x)$ ), crear un nuevo nodo  $l'$  como un hijo de  $l$  y etiqueta  $l'$  con:

$$U(l') = (U(l) - \{A\}) \cup \{\delta(a)\}$$

donde  $a$  es alguna constante que no aparece en  $U(l)$ .

#### Final de la Construcción

$\gamma$	$\gamma(a)$
$\forall xA(x)$	$A(a)$
$\neg \exists xA(x)$	$\neg A(a)$

Figura 3.6.4: Reglas de Cuadro para Fórmulas Universales



$\delta$	$\delta(a)$
$\exists xA(x)$	$A(a)$
$\neg\forall xA(x)$	$\neg A(a)$

Figura 3.6.5: Reglas de Cuadro para Fórmulas Existenciales

La regla- $\delta$  para cuantificadores existenciales es íntegra y directa. La regla- $\gamma$  para cuantificadores universales, es sin embargo la única regla que no reemplaza una fórmula por una o más fórmulas simples. En lugar de ello agrega una fórmula simple mientras deja la fórmula cuantificada como parte de la etiqueta del nodo. Esto último es utilizado para asegurar que el cuantificador universal será aplicado a una nueva constante que aún no fue introducida.

**TEOREMA 3.3:** *(Estabilidad de la construcción del cuadro) Sea  $A$  una fórmula en el cálculo de predicados y sea  $T$  un cuadro para  $A$ . Si  $T$  es cerrada, entonces  $A$  es no cumplimentada.*

La estabilidad muestra que si  $T$  cierra, entonces  $A$  no es cumplimentada independientemente del orden en el cual fueron aplicadas las diferentes reglas. Sin embargo, la construcción del cuadro no está completa a menos que haya sido construida sistemáticamente. La ayuda de la construcción sistemática es para asegurar que las reglas son aplicadas eventualmente a todas las fórmulas en la etiqueta de un nodo y en el caso de fórmulas cuantificadas universalmente, de forma tal que es creada una instancia para todas las constantes que aparecen. La etiqueta para un nodo  $U(n)$  no será más un **conjunto** de fórmulas:

$$U(n) = \{A_1, \dots, A_k\}$$

si que en su lugar será una **lista** de fórmulas:

$$U(n) = [A_1, \dots, A_{i-1} \mid A_i, \dots, A_k]$$

La diferencia entre conjunto y lista de fórmulas, es que la lista está ordenada. La barra " $\mid$ " es usada para indicar la posición actual del puntero dentro de la lista, la  $i$ -ava fórmula  $A_i$ . Además, un nodo está etiquetado con una lista de todas las constantes utilizadas en todas las instanciaciones de las fórmulas en los nodos sobre la rama o arco a partir de la raíz de este nodo:

$$A = [a_1, \dots, a_{j-1} \mid a_j, \dots, a_m]$$

Finalmente, mantenemos una lista de las hojas sin marcar:

$$\mathcal{L} = [l_1, \dots, l_{r-1} \mid l_r, \dots, l_n]$$

### Construcción Sistemática de un Cuadro Semántico

Seleccionar la próxima hoja  $l_r$  a partir de la lista  $\mathcal{L}$ .  $l_r$  está etiquetado con una lista de fórmulas  $U(l_r)$ :

$$[A_1, \dots, A_{i-1} \mid A_i, \dots, A_k]$$

y una lista de constantes  $A$ :

$$[a_1, \dots, a_{j-1} \mid a_j, \dots, a_m]$$



Si  $U(l_r)$  contiene un par complementario de literales, borrar  $l_r$  a partir de la lista de hojas. De otro modo, extender el cuadro de acuerdo a los casos sobre la estructura de la fórmula  $A_i$ :

\* Si  $A_i$  es un literal, entonces:

$$\begin{aligned} U(I') &= [A_1, \dots, A_{i-1}, A_i \mid A_{i+1}, \dots, A_k] \\ A' &= A \\ \mathcal{L}' &= [l_1, \dots, l_r \mid l_{r+1}, \dots, l_s] \end{aligned}$$

\* Si  $A_i$  es una fórmula- $\alpha$ , de la forma siguiente  $A' \wedge A''$ , entonces:

$$\begin{aligned} U(I') &= [A_1, \dots, A_{i-1} \mid A_{i+1}, \dots, A_k, A', A''] \\ A' &= A \\ \mathcal{L}' &= [l_1, \dots, l_r \mid l_{r+1}, \dots, l_s, I'] \end{aligned}$$

\* Si  $A_i$  es una fórmula- $\beta$ , de la forma siguiente  $A' \vee A''$ , entonces:

$$\begin{aligned} U(I') &= [A_1, \dots, A_{i-1} \mid A_{i+1}, \dots, A_k, A'] \\ A' &= A \\ U(I'') &= [A_1, \dots, A_{i-1} \mid A_{i+1}, \dots, A_k, A''] \\ A'' &= A \\ \mathcal{L}' &= [l_1, \dots, l_r \mid l_{r+1}, \dots, l_s, I', I''] \end{aligned}$$

\* Si  $A_i$  es una fórmula- $\gamma$ , de la forma siguiente  $\forall x A'(x)$ , entonces:

$$\begin{aligned} U(I') &= [A_1, \dots, A_{i-1}, A_i \mid A_{i+1}, \dots, A_k, A'(a_j)] \\ A' &= [a_1, \dots, a_{j-1}, a_j \mid a_{j+1}, \dots, a_m] \\ \mathcal{L}' &= [l_1, \dots, l_r \mid l_{r+1}, \dots, l_s, I'] \end{aligned}$$

Si  $j = m$ , definimos a  $A'$  de la siguiente forma:

$$A' = [a_1, \dots, a_m]$$

\* Si  $A_i$  es una fórmula- $\delta$ , de la forma siguiente  $\exists x A'(x)$ , entonces:

$$\begin{aligned} U(I') &= [A_1, \dots, A_{i-1}, A_i \mid A_{i+1}, \dots, A_k, A'(a_{m+1})] \\ A' &= [a_1, \dots, a_{j-1}, a_j \mid a_{j+1}, \dots, a_m, a_{m+1}] \\ \mathcal{L}' &= [l_1, \dots, l_r \mid l_{r+1}, \dots, l_s, I'] \end{aligned}$$

donde  $a_{m+1}$  es la nueva constante no en  $A$ .

### Final de la Construcción

Inicialmente la etiqueta de la raíz es  $U(n_0) = [A]$ , donde  $A$  es la fórmula cuyo cuadro estamos creando, la lista de las constantes es  $A = [a_1, \dots, a_m]$  donde  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  es el conjunto de las constantes que aparecen en  $A$  y la lista de hojas es  $[n_0]$ . Si no existen constantes en  $A$ , elegir una constante arbitraria  $a$  y seleccionar  $A = [a]$ .

En otras palabras: los literales atraviesan creando un nodo superfluo. Las fórmulas  $-\alpha$  y  $-\beta$  se comportan de la misma forma que en los casos anteriores -la fórmula original es borrada y reemplazada por sub fórmulas. Las fórmulas  $-\gamma$  permanecen en la etiqueta y además se crea una instancia con la próxima constante de la lista. Las fórmulas  $-\delta$  son borradas y reemplazadas por una instancia usando una nueva constante.

La construcción está definida de tal manera que el siguiente Lema es verdadero:



**LEMA 3.2:** Sea  $b$  una rama abierta del cuadro sistemático,  $n$  un nodo de  $b$ , y  $A$  una fórmula de  $U(n)$ . Luego se aplica una regla a  $A$  (eventualmente durante la construcción) para algún nodo  $n'$  sobre  $b$ , tal que  $n' \geq n$ . Además, si  $A$  es una fórmula  $\neg\gamma$  y  $a$  es una constante que aparece en  $b$ , entonces sobre tal  $n'$ , la regla  $\neg\gamma$  crea una instancia de  $A$  con  $a$ .

Ahora proporcionamos la integridad de la construcción sistemática del método del cuadro o tabla para el cálculo de predicado, de la misma forma que se hizo en el cálculo proposicional, o sea que, definimos el **Conjunto de Hintikka**, mostrando que las fórmulas que etiquetan nodos en una rama abierta del cuadro, forma un conjunto de Hintikka y finalmente mostraremos que dicho conjunto de Hintikka puede ser extendido al modelo considerado.

**DEFINICIÓN 3.17:** Sea  $U$  un conjunto de fórmulas en el cálculo de predicados. El conjunto  $U$  es un **Conjunto de Hintikka** si se cumplen las siguientes condiciones para todas las fórmulas  $A \in U$ :

- 1.- Si  $A$  es una fórmula atómica, ya que  $A \in U$  o  $\neg A \in U$ .
- 2.- Si  $A$  es una fórmula  $\neg\alpha$ ,  $A' \in U$  y  $A'' \in U$ .
- 3.- Si  $A$  es una fórmula  $\neg\beta$ ,  $A' \in U$  o  $A'' \in U$ .
- 4.- Si  $A$  es una fórmula  $\neg\gamma$ , tal que  $\forall x A'(x)$ ,  $A'(a) \in U$  para **todas** las constantes  $a$  en  $U$ .
- 5.- Si  $A$  es una fórmula  $\neg\delta$ , tal que  $\exists x A'(x)$ ,  $A'(a) \in U$  para **alguna** de las constantes  $a$  en  $U$ .

**TEOREMA 3.4:** (**Lema de Hintikka para el Cálculo de Predicado**) Sea  $b$  una rama abierta de un cuadro sistemático y  $U = U_{n \in b} U(n)$ .  $U$  es el conjunto de Hintikka.

**Demostración:** Sea  $A$  una fórmula en  $U$ . Ya que  $b$  está abierta, si  $A$  es una fórmula atómica,  $\neg A \notin U$ . Si  $A$  no es atómica, por el Lema 5.5.3 eventualmente se aplica una regla a  $A$ . Si  $A$  no es una fórmula cuantificada universalmente, por construcción se deduce inmediatamente el lema de Hintikka. De otro modo, por la segunda mitad del Lema 5.5.3, para cualquier constante arbitraria  $a$  en  $U$ , eventualmente se aplica la regla  $\neg\gamma$  a la fórmula  $A$  para crear una instancia con  $a$ . Ya que  $a$  fue arbitraria, se cumple la condición 4 y también se cumple el lema de Hintikka.

**LEMA 3.3:** Sea  $U$  un conjunto de Hintikka. Por lo tanto existe un modelo (se valida la interpretación) para  $U$ .

**Demostración:** Sea  $A = \{a_1, \dots\}$  el conjunto de constantes que aparecen en las fórmulas de  $U$ . Definimos una interpretación  $I$  de la siguiente forma.

El dominio es el mismo conjunto de símbolos  $\{a_1, \dots\}$  usados como constantes en  $U$  y el símbolo del dominio  $a_i$  es asignado al símbolo constante  $a_i$ . Para cada lugar- $m$  del predicado  $p_i$  en  $U$ , definimos una relación  $R_i$  de  $m$  lugares de la siguiente forma:

$$(a_1, \dots, a_m) \in R_i \text{ si } p(a_1, \dots, a_m) \in U$$

$$(a_1, \dots, a_m) \in R_i \text{ si } \neg p(a_1, \dots, a_m) \notin U$$



$$(a_1, \dots, a_m) \notin R_i \text{ si } \neg p(a_1, \dots, a_m) \in U$$

La relación está bien definida por la Condición 1 de la definición de los conjuntos de Hintikka.

**TEOREMA 3.18:** (*Integridad de la Construcción del Cuadro Semántico*) Sea  $A$  una fórmula válida en el cálculo de predicado. Por lo tanto la construcción sistemática es cerrada para el cuadro semántico de  $\neg A$ .

**Demostración:** Supongamos que el cuadro para  $\neg A$  no está cerrado. Luego existe una rama abierta  $b$  tal que  $U$ , la unión de las etiquetas de los nodos sobre  $b$ , forman un conjunto de Hintikka a través del Lema de Hintikka. Por el Lema 5.5.6 existe un modelo  $I$  para  $U$ .

Pero  $\neg A \in U$ , tal que  $I \models \neg A$  contradiciendo de esta forma de que  $A$  es válida.

### 3.7.- DERIVACIÓN: Generalización y Particularización

En las secciones siguientes describiremos la forma de hacer derivaciones en el cálculo de predicados. En particular, se dan las reglas necesarias para insertar y eliminar cuantificadores universales y existenciales. La utilización de estas reglas se demostrará mediante ejemplos. También presentaremos un concepto nuevo, la **unificación**. La unificación goza de amplia difusión en los lenguajes de programación lógicos y funcionales.

#### 3.7.1.- PARTICULARIZACIÓN UNIVERSAL

A partir de  $\forall x A(x)$  debería ser posible derivar  $A(t)$  para cualquier término  $t$ . Por ejemplo si,  $A(x)$  significa “ $x$  está dormido”, entonces  $\forall x A(x)$  significa “**todo el mundo está dormido**”, y de aquí debería ser posible derivar, por ejemplo, que **Juan está dormido**. Más formalmente, si  $x$  representa una variable,  $t$  representa un término y  $A$  representa una expresión, entonces la expresión siguiente debería ser válida:

$$\forall x A \Rightarrow S^x_t A$$

La validez de esta expresión deriva de la definición de  $\forall x$ : si  $A$  es verdadera para todo  $x$ , entonces debe ser verdadero para  $x = t$ . Sin embargo, existe una pequeña dificultad que se indico en los capítulos anteriores. La sustitución no debe dar lugar a una colisión de variables. En otras palabras,  $t$  no debe transformarse en una variable ligada de ningún cuantificador que pudiera quedar. La implicación lógica dada por la expresión anterior puede convertirse en una regla de inferencia de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \forall x A \\ S^x_t A \end{array}$$

Esta regla de inferencia se denomina **Particularización Universal** y se abrevia en la forma de **UI**. Por ejemplo, la particularización universal nos permite concluir que:

$$\forall x (\text{gato}(x) \Rightarrow \text{tiene cola}(x))$$

$$\text{gato}(\text{Tom}) \Rightarrow \text{tiene cola}(\text{Tom})$$

De manera similar, de  $A(y)$  obtenemos  $\forall x A(x)$ , porque  $S^x_y A(x) = A(y)$ . También se admite la particularización trivial,  $S^x_x A(x)$ , que deja a  $A$  sin cambios. Consiguientemente, de



$\forall x A(x)$  podemos concluir  $A(x)$ .

**Ejemplo 3.7.1:** Vamos a ver ahora algunas derivaciones. La primera derivación es la siguiente. Las premisas de la misma son:

**Todos los seres humanos son mortales.  
Sócrates es un ser humano.**

A partir de esas premisas, demostraremos que:

**Sócrates es mortal.**

Para realizar la correspondiente derivación, supongamos que  $H(x)$  indica que  $x$  es humano, y  $M(x)$  indica que  $\text{él o ella es mortal}$ . Además,  $S$  representa a Sócrates. Tal como en el capítulo 2, indicamos la línea de la que se deriva cada sentencia, así como la regla que se aplica. En el caso de una Regla UI, nos limitamos a exponer la particularización  $S^x_t$ . La derivación se indica en la Figura 3.7.1.

Demostrar:  $\forall x (H(x) \Rightarrow M(x)), H(S) \vdash M(S)$

Derivación Formal	Regla de Inferencia	Comentario
1.- $\forall x (H(x) \Rightarrow M(x))$	Premisa	Todos los humanos son mortales
2.- $H(S)$	Premisa	Sócrates es mortal
3.- $H(S) \Rightarrow M(S)$	1. $S^x_s$	Si Sócrates es humano, entonces es mortal.
4.- $M(S)$	2, 3 MP	Por lo tanto, Sócrates es mortal. Modus Ponens a las líneas 2 y 3.

**Figura 3.7.1: Demostración de la mortalidad de Sócrates**

**Ejemplo 3.7.2:** Como segundo ejemplo, derivamos que **Pablo es hijo de David** a partir de las siguientes premisas:

**David es el padre de Pablo.**

**Pablo no es la hija de David.**

**Toda persona cuyo padre sea David debe ser o bien su hijo o bien su hija.**

La correspondiente demostración se encuentra en la Figura 3.7.2. Para ahorrar espacio en la demostración, utilizamos las siguientes abreviaturas:

$f(x, y)$ :  $x$  es el padre de  $y$

$s(x, y)$ :  $x$  es el hijo de  $y$

$d(x, y)$ :  $x$  es la hija de  $y$

Además, utilizaremos  $D$  en lugar de **David** y  $P$  en lugar de **Pablo**. La derivación utiliza el **Silogismo Disyuntivo (SD)**, que nos permite escribir  $B$ , una vez que se ha determinado que



$\neg A$  y que  $A \vee B$  están establecidos.

Demostrar:  $\forall x (f(D, x) \Rightarrow s(x, D) \vee d(x, D)), f(D, P), \neg d(P, D) \vdash s(P, D)$

Derivación Formal	Regla de Inferencia	Comentario
1.- $\forall x (f(D, x) \Rightarrow s(x, D) \vee d(x, D))$	Premisa	Toda persona cuyo padre sea David, debe ser o bien su hijo o bien su hija
2.- $f(D, P)$	Premisa	David es el padre de Pablo
3.- $\neg d(P, D)$	Premisa	Pablo no es la hija de David
4.- $f(D, P) \Rightarrow s(P, D) \vee d(P, D)$	1. $S^x_s$	Esto particulariza la línea 1 para Pablo
5.- $s(P, D) \vee d(P, D)$	2, 4 MP	Se aplica Modus Ponens a las líneas 2 y 4
6.- $s(P, D)$	3, 5 SD	Según el Silogismo Disyuntivo, si Pablo no es una hija (línea 3) entonces tiene que ser un hijo

Figura 3.7.2: Demostración de que Pablo es hijo de David

### 3.7.2.- GENERALIZACIÓN UNIVERSAL

Si  $A$  es cualquier expresión o enunciado lógico y si  $x$  es una variable que no es libre en ninguna premisa, entonces tenemos que:

$$\frac{A}{\forall x A}$$

Esta regla de inferencia se denomina **Generalización Universal (GU)**. Dado que  $x$  queda ligada en el proceso, decimos que la generalización universal es con respecto a  $x$ , o bien que se generaliza sobre  $x$ . Debemos hacer notar que la generalización universal está sometida a restricciones. Si se generaliza sobre  $x$ , entonces  $x$  no debe aparecer en ninguna premisa como variable libre. Si  $x$  aparece como variable libre en alguna premisa, entonces  $x$  se refiere al mismo, y está fijada en ese sentido. Por ejemplo, si  $P(x)$  aparece en una premisa, entonces  $P(x)$  sólo es verdadero para  $x$ , y no es necesariamente verdadero para ningún otro individuo. Si  $x$  está fijado, entonces no se puede generalizar sobre  $x$ . Las generalizaciones que parten de un solo individuo para llegar a toda una población son incorrectas. Por otra parte, si  $x$  no aparece en ninguna premisa o si  $x$  está ligada en todas las premisas, entonces se supone que  $x$  representa a cualquier individuo, y se puede aplicar sin restricción la generalización universal. Para demostrar la generalización universal desarrollaremos algunos ejemplos.

**Ejemplo 3.7.3:** Consideremos el dominio de un grupo de alumnos de ciencias de la computación. Por supuesto, a todos los alumnos de ciencias de la computación les gusta La programación. La derivación tiene que demostrar que a todos los del dominio les gusta la programación. Si  $P(x)$  y  $Q(x)$  denotan las siguientes expresiones " $x$  es un alumno de ciencias de la





*computación*” y “*a x le gusta la programación*”, respectivamente, entonces las premisas pasan a ser:

$$\forall x P(x), \forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

La conclusión deseada sería:

$$\forall x Q(x)$$

La demostración se da en la Figura 3.7.3. En la demostración,  $Q(x)$  se deriva en la línea 5, que significa que a  $x$  le gusta la programación. Esta frase se generaliza entonces a  $\forall x Q(x)$ . Esta generalización sólo es posible porque todos los casos de  $x$  que aparecen en las premisas están ligados. Si la premisa  $\forall x P(x)$  se sustituye por  $P(x)$ , entonces la particularización universal sobre  $x$  ya no es correcta. Esto sucede porque  $x$  queda fijada y la generalización universal sobre variables fijas no es correcta.

Demostrar:  $\forall x P(x), \forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall x Q(x)$

Derivación Formal	Regla de Inferencia	Comentario
1.- $\forall x P(x)$	<b>Premisa</b>	Todos los alumnos de Ciencias de la Computación
2.- $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$	<b>Premisa</b>	A los alumnos de CC les gusta la programación
3.- $P(x)$	1. $S^x_x$	$x$ es un alumno de CC
4.- $(P(x) \Rightarrow Q(x))$	2. $S^x_x$	Si $x$ es un alumno de CC, entonces le gusta la programación.
5.- $Q(x)$	3, 4 MP	Se aplica Modus Ponens a las líneas 2 y 4. A $x$ le gusta la programación
6.- $\forall x Q(x)$	5 GU	Según la Generalización Universal. A todos le gusta la programación.

Figura 3.7.3: Ejemplo de Generalización Universal

**Ejemplo 3.7.4:** Derivaremos  $\forall y \forall x P(x, y)$  a partir de  $\forall x \forall y P(x, y)$ . Esta derivación se desarrolla en la Figura 6.1.4. Esto confirma el hecho de que los cuantificadores universales se pueden intercambiar. En la Figura 6.1.5 se da un tercer ejemplo de la Generalización Universal, ejemplo que muestra que la variable  $x$  de un cuantificador universal se puede cambiar por la variable  $y$ .

Demostrar:  $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \forall x P(x, y)$

Derivación Formal	Regla de Inferencia	Comentario
1.- $\forall x \forall y P(x, y)$	Premisa	
2.- $\forall y P(x, y)$	1. $S^x_x$	Se particulariza la línea 1, eliminando el primer cuantificador universal
3.- $P(x, y)$	2. $S^y_y$	Se elimina el segundo cuantificador para obtener una expresión sin cuantificar. Se emplea GU para añadir los cuantificadores en orden inverso.
4.- $\forall x P(x, y)$	3 GU	Es correcto generalizar, porque la premisa no contiene a $x$ como variable libre. Todas las apariciones de $x$ dentro de la premisa están ligadas..
6.- $\forall x Q(x)$	4 GU	Se generaliza de nuevo para obtener la conclusión deseada.

Figura 3.7.4: Demostración de validez del intercambio de cuantificadores

**Ejemplo 3.7.5:** Sustitución de variables.  
 Demostrar:  $\forall x P(x) \vdash \forall y P(y)$

Derivación Formal	Regla de Inferencia	Comentario
1.- $\forall x P(x)$	Premisa	
2.- $P(x)$	1. $S^x_y$	Se ejemplariza la premisa para $y$
3.- $\forall y P(y)$	2, GU	Se generaliza la línea para obtener la conclusión deseada.

Figura 3.7.5: Demostración de la Sustitución de Variables

### 3.7.3.- TEOREMA DE LA DEDUCCIÓN Y LA GENERALIZACIÓN UNIVERSAL

En el teorema de la deducción, se supone  $B$ , se demuestra  $C$  empleando a  $B$  como premisa, y se concluye que  $B \Rightarrow C$ . Una vez que se ha realizado lo anterior, prescindimos de  $B$ . Ahora la cuestión es lo que hay que hacer con las variables libres que aparezcan en  $B$ . En primer lugar,  $B$  se utiliza como suposición, esto es, mientras no prescindamos de  $B$ , hay que tratar a  $B$  como a cualquier otra premisa. En particular, si  $B$  contiene a  $x$  como variable libre, entonces no hay que generalizar sobre  $x$ . Sin embargo, en cuanto prescindamos de  $B$ , esto no será así. Una vez que hemos prescindido de  $B$ , no tiene efecto alguno sobre el estado de



ninguna variable. Por tanto, si  $x$  no es libre en ninguna otra premisa, es posible generalizar sobre  $x$  aun cuando  $x$  aparezca como variable libre sobre  $B$ .

El teorema de la deducción se demuestra a continuación mediante el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.6:** Supongamos que  $S(x)$  denota a la expresión “ $x$  ha estudiado” y que  $P(x)$  denota la expresión “ $x$  ha aprobado”. La premisa es que todo el que haya estudiado ha aprobado. Demostrar que los que no hayan aprobado no han estudiado.

La premisa “**todo el que ha estudiado, ha aprobado**” se puede traducir como la siguiente fórmula o expresión lógica  $\forall x (S(x) \Rightarrow P(x))$  y la frase “**los que hayan aprobado, no han estudiado**” pasara a ser  $\forall x (\neg P(x) \Rightarrow \neg S(x))$ . La Figura 6.1.6 ofrece una derivación. Para obtener el resultado, se introduce la suposición  $\neg P(x)$  en la línea 3. Mientras no se haga uso de esta suposición, no se permitirá hacer una generalización con respecto a  $x$ . Para indicar que estamos bajo los efectos de una suposición, se han sangrado las líneas 3 y 4. Sin embargo, después de aplicar el teorema de la deducción se elimina el sangrado y se prescinde de la suposición  $\neg P(x)$ , y ya se puede generalizar sobre  $x$ . Esto se hace en la línea 6. En todos los demás aspectos, la demostración se documenta a si misma.  $\forall x (S(x) \Rightarrow P(x))$  es una premisa y de ella se sigue que  $\neg P(x) \Rightarrow \neg S(x)$ . Para llegar a la conclusión deseada, se utiliza la generalización universal. Esto se puede realizar puesto que la variable  $x$  no es libre en ninguna premisa.

Demostrar:  $\forall x (S(x) \Rightarrow P(x)) \vdash \forall x (\neg P(x) \Rightarrow \neg S(x))$

Derivación Formal	Regla de Inferencia	Comentario
1.- $\forall x (S(x) \Rightarrow P(x))$	Premisa	Todo el que estudia aprueba
2.- $S(x) \Rightarrow P(x)$	1. $S_x^x$	Si $x$ ha estudiado, ha aprobado
3.- $\neg P(x)$	Suposición	Supongamos que $x$ no aprobó
4.- $\neg S(x)$	2, 3, MT	$x$ no puede haber estudiado: esto se sigue de las líneas 2 y 3 por Modus Tollens
5.- $\neg P(x) \Rightarrow \neg S(x)$	TD	Se aplica el Teorema de la Deducción y se prescinde de $\neg P(x)$
6.- $\forall x (\neg P(x) \Rightarrow \neg S(x))$	5, GU	Todo el que no haya aprobado, no puede haber estudiado. Obsérvese que esta generalización es posible porque $x$ no es libre en ninguna premisa..

Figura 3.7.6: Demostración empleando el Teorema de la Deducción (TD)



### 3.7.4.- ELIMINACIÓN DE LOS CUANTIFICADORES UNIVERSALES

En matemáticas, es frecuente omitir los cuantificadores universales. Por ejemplo, en la afirmación o proposición  $x + y = y + x$ , tanto  $x$  como  $y$  tienen implícitamente una cuantificación universal. Esto da lugar a problemas cuando se utilizan estas declaraciones como premisas, porque de acuerdo con nuestras reglas toda variable que aparezca libre en una premisa es fija, en el sentido de que a lo largo de toda la demostración estará asociada a un único individuo. Para soslayar esta dificultad, aislamos ciertas variables en las premisas e indicamos explícitamente que estas variables no son fijas. Todas las variables que no sean fijas se denominarán **variables verdaderas**. Una variable se puede generalizar universalmente si y sólo si es una variable verdadera. Si una variable aparece en una premisa, entonces se supone que es fija, a no ser que se indique explícitamente que se trata de una variable verdadera.

Al usar variables verdaderas, se pueden omitir los cuantificadores universales, y esto, a su vez, simplifica las demostraciones. Además, de ahora en adelante, permitiremos que cualquier variable verdadera se pueda particularizar como cualquier término. Se puede conseguir el mismo efecto, desde luego, empleando primero una generalización universal, seguida por una particularización universal. Sin embargo, la particularización directa es más breve, y suele ser más clara.

Hasta el momento, hemos representado a las particularizaciones mediante el símbolo  $S$ , tal como  $S^x_y$ . Desde ahora en adelante, utilizaremos frecuentemente la notación  $x := y$  para indicar que  $x$  se sustituye por  $y$ . Esta notación resultará natural para quienes programan en Pascal, donde el símbolo empleado significa “asignar”, que es lo mismo que “particularizar”. Por lo tanto, en lugar de poner “se particulariza  $x$  como  $a$ ”, pondremos “línea  $n$  con  $x := a$ ”, o simplemente de la siguiente forma “ $n$  con  $x := a$ ”.

**Ejemplo 3.7.7:** Sea  $P(x, y, z): x + y = z$ . Dadas las premisas  $P(x, 0, x)$  y  $P(x, y, z) \Rightarrow P(y, x, z)$  donde  $x, y, z$  son variables verdaderas, demostrar que  $0 + x = x$ , o sea,  $P(0, x, x)$ .

**Solución:** Se utiliza la derivación siguiente para demostrar que  $P(0, x, x)$ . Obsérvese que la dos primeras líneas son premisas, y que  $x, y, z$  se han declarado explícitamente como variables verdaderas.

- |    |                                     |  |
|----|-------------------------------------|--|
| 1. | $P(x, y, z) \Rightarrow P(y, x, z)$ | Premisa: $x + y = z \Rightarrow y + x = z$<br>$x, y, z$ variables verdaderas |
| 2. | $P(x, 0, x)$                        | Premisa: $x + 0 = x$ ; $x$ : variable verdadera                              |
| 3. | $P(x, 0, x) \Rightarrow P(0, x, x)$ | Línea 1 con $x := x$ ; $y := 0$ ; $z := x$                                   |
| 4. | $P(0, x, x)$                        | Líneas 2, 3, Modus Ponens: $0 + x = x$                                       |

Todas las variables verdaderas son estrictamente locales, pertenecientes a la línea en que aparecen. Por lo tanto, si la variable verdadera  $x$  aparece en dos líneas diferentes, entonces estos dos casos de  $x$  son realmente dos variables diferentes. Por ejemplo, en la demostración del ejemplo 3.7.7, la  $x$  de la línea 1 y la  $x$  de la línea 2 son dos variables diferentes. Cuando se está haciendo la demostración, uno tiene que establecer, evidentemente, algún tipo de conexión entre ambas variables, y esta conexión se efectúa a través de la particularización. Desde luego, las particularizaciones no deben hacerse a ciegas. Más bien, hay que hacer la particularización de tal manera que progrese hacia la conclusión deseada. La forma en que se hace esto depende de la estrategia. Sin embargo, existen algunos principios generales que sirven de ayuda y uno de ellos es la **Unificación**.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

**DEFINICIÓN 3.19:** Se dice que dos expresiones o fórmulas se **unifican** si existen particularizaciones legales que hagan idénticas las expresiones en cuestión. El acto de unificarlas se denomina **unificación**. La particularización que unifica a las expresiones en cuestión se denomina un **unificador**.

**Ejemplo 3.7.8:**  $Q(a, y, z)$  y  $Q(y, b, c)$  son expresiones que aparecen en líneas diferentes. Mostrar que estas dos expresiones se unifican, y dar un unificador. Aquí  $a$ ,  $b$ , y  $c$  son fijas e  $y$  y  $z$  son variables verdaderas.

**Solución:** Dado que la  $y$  de  $Q(a, y, z)$  es una variable distinta de la  $y$  presente en  $Q(y, b, c)$ , cambiamos de nombre a la  $y$  de la segunda expresión para que pase a ser  $y_1$ . Esto significa que hay que unificar  $Q(a, y, z)$  con  $Q(y_1, b, c)$ ,  $Q(a, b, c)$  es un caso particular de  $Q(a, y, z)$  y  $Q(a, b, c)$  es un caso particular de  $Q(y_1, b, c)$ . Dado que son idénticos  $Q(a, y, z)$  y  $Q(y, b, c)$  se unifican. El Unificador es  $a = y_1, b = y, c = z$ .

Pueden existir varios unificadores. Por ejemplo, si  $a$  y  $b$  son constantes, entonces  $R(a, x)$  y  $R(y, z)$  tienen el unificador  $y = a, z = x$ , que da lugar al caso común  $R(a, x)$ . Sin embargo, también existe el unificador  $y = z, x = b, z = b$  que da lugar al caso común  $R(a, b)$ . Sin embargo,  $R(a, b)$  es un caso de  $R(a, x)$ , y el unificador  $y = a, x = b, z = b$  es menos general en este sentido que el unificador  $y = a, z = x$ . Por supuesto, siempre se desea encontrar el unificador más general, si es que existe uno.

La solución del Ejemplo 3.7.7 implicaba una unificación. Concretamente, se unificaba la línea 2 con el antecedente de la línea 1 para hacer uso del Modus Ponens. En general, se aplica la unificación de tal manera que sea posible aplicar alguna regla de inferencia después de la unificación.

**Ejemplo 3.7.9:** Claramente, si  $x$  es la madre de  $y$ , y si  $z$  es la hermana de  $x$ , entonces  $z$  es la tía de  $y$ . Supongamos ahora que la madre de Braulio es Juana, y que Lola es la hermana de Juana. Demostrar que Lola es tía de Braulio.

**Solución:** Si “*madre*( $x, y$ )” es un predicado tal que toma el valor verdadero cuando  $x$  es la madre de  $y$ , y si “*hermana*( $x, y$ )” y “*tía*( $x, y$ )” se definen de forma similar, podemos enunciar las premisas de la siguiente forma:

1.-  $madre(x, y) \wedge hermana(z, x) \Rightarrow tía(z, y)$

2.-  $madre(Juana, Braulio)$

3.-  $hermana(Lola, Juana)$

Ahora el problema es crear una expresión que unifique con el antecedente de la línea 1. Para hacer esto, se combinan las líneas 2 y 3, obteniendo:

4.-  $madre(Juana, Braulio) \wedge hermana(Lola, Juana)$

Esta expresión se puede unificar con  $madre(x, y) \wedge hermana(z, x)$  haciendo los siguientes reemplazos  $x := Juana, y := Braulio$  y  $z := Lola$ . Esto produce:

5.-  $madre(Juana, Braulio) \wedge hermana(Lola, Juana) \Rightarrow tía(Lola, Braulio)$

La conclusión de que Lola es una tía de Braulio se deduce de 4 y 5 por Modus Ponens.

Las demostraciones que se acaban de dar son sencillas, en el sentido de que sólo



hay unas pocas expresiones disponibles para la unificación, lo cual hace que sea relativamente sencillo decidir el paso siguiente. En casos más complicados, la selección de posibles expresiones que están disponibles para la unificación es más extensa, y la decisión deja de ser trivial. Para hacer una buena elección en lo referente a las expresiones que hay que unificar a continuación, es preciso pensar en la meta que se persigue. En algunos casos, es necesario considerar todas las expresiones que se puedan derivar, y seleccionar aquella que, en algún sentido, sea la más próxima a la conclusión. Este suele ser un buen sistema, aun cuando falle en algunos casos. En otras ocasiones, esta política no resulta aplicable porque no está claro lo que se encuentra más próximo o más alejado de la conclusión.

En este caso, suele servir de ayuda el establecimiento de objetivos intermedios. Además, las derivaciones asociadas a casos similares suelen proporcionar ideas valiosas acerca de la forma de seguir adelante.

### 3.7.5.- GENERALIZACIÓN EXISTENCIAL

Si la tía Claudia tiene más de cien años, entonces es evidente que hay alguien, a saber, la tía Claudia, que tiene más de cien años. Si existe algún término  $t$  para el cual sea válida  $P(t)$ , entonces se puede concluir que algún  $x$  satisface  $P(x)$ . Consiguientemente,  $P(t)$  implica lógicamente lo siguiente:  $\exists x P(x)$ . Más generalmente  $\exists x A$  se puede derivar que partiendo de  $S^x_t A$ , en donde  $t$  es cualquier término. Esto da lugar a la siguiente regla de inferencia:

$$\begin{array}{c} S^x_t A, \\ \hline \exists x A \end{array}$$

Esta regla de inferencia se denomina **Generalización Existencial**, y se abrevia **GE** en las demostraciones formales.

**Ejemplo 3.7.10:** Sea  $C$  la tía Claudia, y supongamos que  $P(x)$  indica “ $x$  tiene más de 100 años”  
Entonces se tiene:

$$\begin{array}{c} P(C) \\ \hline \exists x P(x) \end{array}$$

La razón es que si se sustituye  $x$  por  $C$  en  $P(x)$ , se tiene  $P(C)$ .

**Ejemplo 3.7.11:** El siguiente ejemplo muestra la forma en que se utiliza la generalización existencial dentro de una demostración formal. Las premisas de nuestra derivación son:

- 1.- **Toda persona que ha ganado cien millones es rica.**
- 2.- **María ha ganado cien millones.**

Queremos demostrar que estas frases implican lógicamente que:

- 3.- **Hay alguien que es rico.**

Si le pidiéramos a alguien que demostrase que la conclusión se obtiene de las premisas, es posible que su argumento sería el siguiente. Si todo el que gana cien millones es rico, entonces María será rica si gana cien millones. Como sabemos que María ha ganado cien millones, aplicamos el Modus Ponens y concluimos que María es rica. Por lo tanto, hay alguien, María, que es rica. Ahora formalicemos este argumento,  $G(x)$  significa que  $x$  ha ganado cien millones,  $R(x)$  significa que  $x$  es rico y  $M$  representa a María. Los pasos individuales del argumento se indican en la Figura 6.1.7,



Se dijo anteriormente que  $\neg \exists x P(x)$  es lógicamente equivalente a  $\forall x \neg P(x)$ . Ahora demostraremos la primera mitad de esta afirmación, enseñando que  $\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$ . Esto se indica en la Figura 3.7.8. Demostraremos posteriormente que  $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$ . Las dos demostraciones en conjunto demuestran la validez de la afirmación realizada. La demostración de la Figura 3.7.8 utiliza las siguientes reglas de inferencia: Modus Tollens (MT), generalización universal (GU), generalización existencial (GE) y el teorema de la deducción (TD).

Demostrar:  $\forall x (G(x) \Rightarrow R(x)), G(M) \vdash \exists x R(x)$

Derivación Formal	Regla de Inferencia	Comentario
1.- $\forall x (G(x) \Rightarrow R(x))$	Premisa	Todo el que ha ganado cien millones es rico
2.- $G(x) \Rightarrow R(x)$	1. $S^x_M$	Por tanto, si María ha ganado cien millones entonces es rica.
3.- $G(M)$	Premisa	María ha ganado cien millones
4.- $R(M)$	2, 3, MP	Por lo tanto María es rica. Por Modus Ponens
5.- $\exists x R(x)$	4, GE	Alguien (María) es rico...

Figura 3.7.7: Demostración de la existencia general a partir de la existencia específica

Demostrar:  $\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$ .

Derivación Formal	Regla de Inferencia	Comentario
1.- $\neg \exists x P(x)$	Premisa	No existe un $x$ para el cual $P(x)$ sea verdadero.
2.- $P(x)$	Suposición	Supongamos $P(x)$
3.- $\exists x P(x)$	2, GE	Entonces tiene que existir una $x$ que satisfaga $P(x)$
4.- $P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$	TD	Prescindimos de $P(x)$ y escribimos $P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$
5.- $\neg P(x)$	1,4, MT	Como no existe un $x$ tal que $P(x)$ sea verdadero, y como $P(x)$ implica que existe ese $x$ , $P(x)$ debe ser falso
6.- $\forall x \neg P(x)$	3, GU	Como $x$ no aparece como variable libre en ninguna premisa, podemos generalizar a todos los $x$ .

Figura 3.7.8: Demostración de inexistencia expresada empleando la notación “para todo”

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

### 3.7.6.- PARTICULARIZACIÓN EXISTENCIAL

Si es cierto que  $\exists x P(x)$ , entonces tiene que existir algún término  $t$  que satisfaga  $P(x)$ ; esto es, tiene que ser cierto  $S^x_t P(x)$  para algún  $t$ . Por ejemplo, si  $P(x)$  significa “ $x$  da saltos mortales”, entonces  $\exists x P(x)$  significa que  $S^x_t P(x) = P(t)$  tiene que ser cierto para algún  $t$ . El problema es que no sabemos para que término. Si sabemos que alguien da saltos mortales, seguimos sin saber si es la tía Eulalia, el tío Petronio o, incluso, alguna otra persona que da saltos mortales. En una demostración, por lo tanto, hay que mantener abierta la cuestión de quién es el individuo que da saltos mortales.

Para hacer esto, seleccionamos una nueva variable, digamos  $b$ , para denotar a este individuo desconocido. Ello da lugar a la siguiente regla de inferencia:

$$\frac{\exists x A}{S^{xA}_b}$$

Esta regla se denomina **Particularización Existencial**, y se abrevia de la forma **PE** en las derivaciones.

La variable que introduce la particularización existencial no debe haber aparecido anteriormente como variable libre. Por ejemplo, al aplicar la **PE** a las frases siguientes: “**Existe alguien que tiene más de 100 años**” y “**Existe alguien que da saltos mortales**”, no hay que utilizar la misma variable  $b$  para la particularización existencial en ambos casos. De no ser así, uno podría concluir que  $b$  tiene más de 100 años y da saltos mortales, lo cual ciertamente no se sigue desde el punto de vista lógico. De forma similar, tampoco se puede utilizar ninguna variable que aparezca libre en algunas de las premisas. Por lo tanto, la **PE** no debe introducir ninguna variable que ya haya aparecido como variable libre en la derivación. Además, la variable que se introduce está fijada, en el sentido de que no se puede aplicar una generalización universal a esa variable. Por ejemplo, si  $b$  da saltos mortales, entonces no se puede utilizar **GU** para concluir que todo el mundo da saltos mortales. Además, no debe aparecer en la conclusión una variable que tenga un valor desconocido, y, dado que toda variable introducida por la **PE** es desconocida, tampoco deberá de aparecer en la conclusión. A efectos de demostración consideremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.7.12:** Supongamos que hay alguien que haya ganado 100 millones y deseamos demostrar que alguien es rico. Entonces las premisas son:

- 1.- “Alguien ha ganado cien millones”
- 2.- “Cualesquiera que haya ganado cien millones es rico”

Deseamos demostrar que estas dos frases implican lógicamente la siguiente frase:

- 3.- “Existe alguien que es rico”

La demostración detallada se indica en la Figura 3.7.9. En esta demostración, se utiliza la particularización existencial sobre la línea 2, en la cual el ganador se le denomina  $b$ . Una vez que se ha obtenido esto, se da la segunda premisa en la línea 3 y se particulariza esta premisa  $x := b$  en la línea 4. Obsérvese que no hay que derivar las líneas 3 y 4 antes de las líneas 1 y 2; esto es, uno no debe aplicar la particularización universal antes de la particularización existencial. La razón para esto es que, una vez que se ha obtenido  $X(b) \Rightarrow R(b)$ ,  $b$  ya no es una nueva variable, y por lo tanto no debe utilizarse para la particularización existencial. Por esta razón, suele ser buena idea aplicar primero la particularización existencial.

**Ejemplo 3.7.13:** Demostraremos en la Figura 3.7.10 que  $\forall x \neg P(x)$  implica lógicamente que  $\neg \exists x P(x)$ . Según se vio en apartados anteriores, demostrar una negación es algo que suele hacerse normalmente mediante una demostración indirecta:





para demostrar  $\neg A$ , uno supone que  $A$  es cierto y deriva una contradicción. Dado que deseamos demostrar que  $\neg \exists x P(x)$ , la suposición que hay que rechazar es  $\exists x P(x)$ . Aún cuando esta suposición es cierta, la derivación se ha sangrado. La particularización existencial nos permite derivar  $P(b)$  en la línea 2, lo cual contradice a  $\neg P(b)$  que se ha derivado en la línea 4 empleando una particularización universal. La contradicción resultante se encuentra en la línea 5. Esta línea nos permite rechazar la suposición  $\exists x P(x)$ ; esto es, tiene que ser cierto que  $\neg \exists x P(x)$ . Por lo tanto,  $\forall x \neg P(x)$  implica  $\neg \exists x P(x)$ .

Demostrar:  $\forall x (X(x) \Rightarrow R(x)), \exists x X(x) \vdash \exists x R(x)$  .

Derivación Formal	Regla de Inferencia	Comentario
1.- $\exists x X(x)$	Premisa	Alguien ha ganado 100 millones.
2.- $X(b)$	1, PE	Llamemos $b$ al ganador
3.- $\forall x (X(x) \Rightarrow R(x))$	Premisa	Cualquiera que haya ganado 100 millones es rico
4.- $X(b) \Rightarrow R(b)$	3, $S^x_b$	Si $X(b) \Rightarrow R(b)$ es válido para todos, debe ser válido para desconocido $b$
5.- $R(b)$	2,4, MP	Si ganar implica ser rico y si $b$ ha ganado, entonces $b$ debe ser rico
6.- $\exists x R(x)$ )	4, EQ	Alguien es rico

Figura 3.7.9: Demostración empleando PE

Demostrar:  $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$

Derivación Formal	Regla de Inferencia	Comentario
1.- $\exists x P(x)$	Suposición	Suposición que rechazaremos posteriormente
2.- $P(b)$	1, PE	Digamos que $P(x)$ es cierto para $b$
3.- $\forall x \neg P(x)$	Premisa	$P(x)$ es falso para todo $x$
4.- $\neg P(b)$	3, $S^x_b$	Por lo tanto $P(b)$ es falso
5.- $P(b) \wedge \neg P(b)$	3, 4, C	Ahora tenemos la contradicción deseada, que implica que la suposición es falsa
6.- $\neg \exists x P(x)$	5, IP	Dado que 5 es una contradicción, la suposición es falso y puede descartarse

Figura 3.7.10: Demostración de que la existencia contradice a la inexistencia

**3.8.- PROBLEMAS CAPITULO III**

- 1.- Para cada uno de los predicados siguientes, halle un universo de discurso adecuado dentro de la lista siguiente: números reales, enteros, seres humanos y animales.
 

a) pájaro(x)	b) está casado(x)	c) par(x)
d) negativo(x)	e) madre(x, y)	f) tiene alas(x)
  
- 2.- Confeccione las tablas de verdad de los siguientes predicados siendo el universo de discurso el conjunto  $U = \{1, 2, 4, 8\}$ 
  - a)  $P(x): x$  es primo
  - b)  $Q(x): x$  es potencia de 2
  - c)  $R(x, y): x$  es mayor o igual que y
  - d)  $S(x, y): x$  es divisor de y
  - e)  $T(x, y): x$  es el doble de y
  
- 3.- Expresar las siguientes frases en cálculo de predicados suponiendo que el Universo de Discurso es: I ) El conjunto de los N° Naturales; II ) El conjunto de los N° Enteros.
  - a) Todos los números naturales son pares
  - b) No existen números naturales negativos.
  - c) Por lo menos un número natural es múltiplo de 3.
  - d) Ningún número natural es raíz de la ecuación  $x^2 + 1 = 0$
  - e) Los números naturales son primos.
  
- 4.- En el dominio de los números naturales, ¿cómo traduciría las frases siguientes?
  - a) Algunos números primos son pares
  - b) Todos los números pares son mayores que 1
  - c) Los números pares son primos solamente si son menores que 3
  - d) No hay primos menores que 3.
  
- 5.- En el dominio de los animales ¿Cómo traduciría las expresiones siguientes?
  - a) Todos los leones son predadores.
  - b) Algunos leones viven en África.
  - c) Sólo rugen los leones.
  - d) Algunos leones comen cebras.
  - e) Algunos leones solo comen cebras.
  
- 6.- Traduzca las siguientes frases al lenguaje de cálculo de predicados. Suponga que el universo está formado por todas las personas.
  - a) Alguien que es amable con todo el mundo.
  - b) Todos queremos a alguien.
  - c) Nadie es cariñoso con todos los demás.
  
- 7.- Particularizar:
 

a) $S^x_3 P(x)$	b) $S^x_a (P(x) \Rightarrow Q(b))$
c) $S^y_b (P(a) \wedge Q(y))$	d) $S^x_a (P(x) \wedge Q(y) \wedge R(x, y))$
  
- 8.- Hallar las variables libres y ligadas en
  - a)  $\forall x P(x, y) \wedge Q(y)$
  - b)  $\forall x \exists y (P(x, y, z) \wedge Q(y, z)) \vee R(x)$
  
- 9.- Examine las posibles interpretaciones de  $\forall x P(x)$ ,  $\exists x P(x)$ ,  $\forall x \neg P(x)$  en el Universo siguiente {a, b, c}, sabiendo que:

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

a)

	a	b	c
P(x)	V	V	V

b)

	a	b	c
P(x)	V	F	F

c)

	a	b	c
P(x)	F	F	F

- 10.- Un universo contiene los tres individuos a , b y c. Para estos individuos, se define un predicado  $Q(x, y)$  y sus valores de verdad están dados por la tabla siguiente:

Q(x, y)	a	b	c
a	V	F	V
b	F	V	V
c	F	V	V

Encuentre el valor de verdad de:

- a)  $\forall x Q(x, c)$       b)  $\forall y Q(a, y)$       c)  $\exists x \exists y Q(x, y)$   
d)  $\forall x \exists y Q(x, y)$       e)  $\forall x \forall y Q(x, y)$       f)  $\exists x \forall y Q(x, y)$

- 11.- Los predicados  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  están definidos en el universo  $U = \{A, B, C\}$  y sus valores de verdad están dados por las siguientes tablas:

P(x, y)	A	B	C
A	V	V	F
B	F	V	V
C	V	V	V

Q(x, y)	A	B	C
A	F	F	V
B	V	F	V
C	F	V	V

Encuentra el valor de verdad de:

- a)  $\forall x \forall y P(x, y) \vee \exists x \exists y Q(x, y)$       b)  $\exists y \forall x P(x, y) \wedge \exists y \forall x Q(x, y)$   
c)  $\neg (\exists x \forall y P(x, y) \vee \exists x \forall y Q(x, y))$       d)  $\exists y P(A, y) \wedge \neg \forall y Q(B, y)$

- 12.- Sea un universo de discurso que consta de tres personas solamente, a saber, Juan, Juana y María. Los tres son alumnos, y ninguno de ellos es rico. Denote con  $A(x)$ ,  $M(x)$ ,  $V(x)$  y  $R(x)$  a las propiedades de ser alumno, mujer, varón y rico respectivamente. Confeccione una tabla con los valores de verdad de los predicados A, M, V y R, y encuentre el valor de verdad de:



**13.-** Dada la siguiente frase en lenguaje coloquial:

**“Solamente los vecinos de Juan tienen trabajo”**

- a) Formalícela en el lenguaje de cálculo de predicado:
- b) Evalúela en el dominio:  $D = \{ \text{Pedro, Juan, Luís, Carlos} \}$ , sabiendo que:
  - 1.- Pedro tiene trabajo pero Juan y Luís no
  - 2.- Pedro y Luís son vecinos de Juan
  - 3.- Carlos no tiene trabajo y no es vecino de Juan

**14.-** Construya una derivación formal para demostrar que los siguientes argumentos son válidos:

- a) Todos los profesores de Matemáticas han estudiado Cálculo.  
Ana es profesora de matemáticas.  
Por lo tanto Ana ha estudiado Cálculo.
- b) En el triángulo XYZ no hay dos ángulos de igual medida.  
Si un triángulo tiene dos lados de igual longitud, entonces es un isósceles.  
Si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos ángulos de igual medida.  
Por lo tanto, el triángulo XYZ no tiene dos lados iguales.
- c) Ninguna estudiante de penúltimo o último año está en inscripta en una clase de Educación Física.  
María está inscripta en una clase de Educación física  
Por lo tanto, María no es una estudiante de último año.
- d)  $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$   
 $\forall x (Q(x) \Rightarrow R(x))$   
 $\therefore \forall x (P(x) \Rightarrow R(x))$
- e)  $\forall x [P(x) \Rightarrow (Q(x) \wedge R(x))]$   
 $\forall x [P(x) \wedge S(x)]$   
 $\therefore \forall x [R(x) \wedge S(x)]$

**15.-** Considere la siguiente expresión:  $\forall x P(x) \vee \forall x (Q(x) \Rightarrow P(x))$ . Traslade todos los cuantificadores universales al comienzo de esta expresión.

**16.-** Considere la siguiente expresión:  $\exists x P(x) \wedge \exists x (Q(x) \Rightarrow P(x))$ . Traslade todos los cuantificadores existenciales al comienzo de la expresión.

**17.-** Niegue las siguientes expresiones:

- |   |   |
|---|---|
| a) $\forall n \in \mathbb{N}, n < 3$                  | b) $\exists n \in \mathbb{N} / n^3 - n = 0$           |
| c) $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ | d) $\exists n \in \mathbb{N} / n^2 + 1 = 0$           |
| e) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$                | f) $\forall x \in \mathbb{R} /  x  = x$               |
| g) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x - 6 = 0$       | h) $\exists x \in \mathbb{R} / 1/x \notin \mathbb{R}$ |
| i) $\exists x / x > 1 \wedge x^2 = 9$                 | j) $\forall x, [x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0]$        |

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

18.- Interprete las equivalencias dadas en la siguiente tabla, pues la usará posteriormente

<b>TABLA 1 EQUIVALENCIAS QUE IMPLICAN CUANTIFICADORES</b>	
$\forall x A \equiv A$	Si x no es libre en A
$\exists x A \equiv A$	Si x no es libre en A
$\forall x A \equiv \forall y S_y^x A \wedge \forall x A$	Si y no es libre en A
$\exists x A \equiv \exists y S_y^x A \vee \exists x A$	Si y no es libre en A
$\forall x A \equiv S_t^x A$	Para cualquier término t
$\exists x A \equiv S_t^x A$	Para cualquier término t
$\forall x(A \vee B) \equiv A \vee \forall x B$	Si x no es libre en A
$\exists x(A \wedge B) \equiv A \wedge \exists x B$	Si x no es libre en A
$\forall x(A \wedge B) \equiv \forall x A \wedge \forall x B$	
$\exists x(A \vee B) \equiv \exists x A \vee \exists x B$	
$\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$	
$\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$	
$\neg \exists x A \equiv \forall x \neg A$	
$\neg \forall x A \equiv \exists x \neg A$	

19.- Encuentre la negación de las siguientes proposiciones:

- $\exists x(P(x) \vee Q(x))$
- $\forall x(A(x) \wedge \neg B(x))$
- $\forall x \exists y [(A(x, y) \wedge B(x, y)) \Rightarrow C(x, y)]$
- $\forall x \exists y [P(x, y) \Rightarrow (R(x, y) \vee S(x, y))]$

20.- Las siguientes reglas nos permiten hacer derivaciones en cálculo de predicados:

<b>TABLA 2 REGLAS DE INFERENCIA PARA CÁLCULO DE PREDICADOS</b>	
$\forall x A \Rightarrow S_t^x A$	Particularización Universal
$A \Rightarrow \forall x A$	Generalización Universal
$S_t^x A \Rightarrow \exists x A$	Generalización Existencial
$\exists x A \Rightarrow S_b^x A$	Particularización Existencial

Junto a estas reglas es importante tener en cuenta al Teorema de la Deducción en donde, para demostrar una implicación lógica  $A \Rightarrow B$  se utiliza el siguiente argumento:

- Se supone A, y se añade A a las premisas



- b) Se demuestra B, empleando A, si es necesario  
 c) Se prescinde de A, lo que significa que A no es necesariamente verdadero, y se concluye que  $A \Rightarrow B$

**21.-** Demuestre la validez de los siguientes argumentos:

- a) Juan ha obtenido una beca para continuar sus estudios.  
 Toda persona que obtiene una beca para estudiar es afortunada.  
 $\therefore$  Existe una persona afortunada
- 
- b) Las personas conscientes de los riesgos del colesterol evitan comer embutidos  
 Alguien es consciente de los riesgos del colesterol  
 $\therefore$  Hay una persona que evita comer embutidos
- 
- c) Si un número es real y no nulo, entonces su cuadrado es positivo  
 $-3$  es real y no nulo  
 $\therefore$  El cuadrado de un número por lo menos es positivo
- 
- d) Todos los enteros son números racionales  
 Hay números que no son racionales  
 $\therefore$  Existen números que no son enteros

**22.-** Probar que las siguientes fórmulas son válidas para todas las interpretaciones, utilizando cuadro semántico:

- (a)  $\forall x A(x) \equiv \neg \exists x \neg A(x)$   
 (b)  $\exists x A(x) \equiv \neg \forall x \neg A(x)$   
 (c)  $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$   
 (d)  $\exists x \forall y A(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$   
 (e)  $\forall x \forall y A(x, y) \equiv \forall y \forall x A(x, y)$   
 (f)  $\exists x \exists y A(x, y) \equiv \exists y \exists x A(x, y)$   
 (g)  $\exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$   
 (h)  $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \equiv (\forall x A(x) \wedge \forall x B(x))$   
 (i)  $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$   
 (j)  $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$   
 (k)  $\forall x(A(x) \equiv B(x)) \Rightarrow (\forall x A(x) \equiv \forall x B(x))$   
 (l)  $(\exists x A(x) \vee B) \equiv \exists x(A(x) \vee B)$   
 (m)  $(\forall x A(x) \vee B) \equiv \forall x(A(x) \vee B)$   
 (n)  $(\exists x A(x) \wedge B) \equiv \exists x(A(x) \wedge B)$   
 (o)  $(\forall x A(x) \wedge B) \equiv \forall x(A(x) \wedge B)$   
 (p)  $\forall x(A \Rightarrow B(x)) \equiv (A \Rightarrow \forall x B(x))$   
 (q)  $\forall x(A(x) \Rightarrow B) \equiv (\exists x A(x) \Rightarrow B)$   
 (r)  $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x))$   
 (s)  $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x A(x) \Rightarrow \exists x B(x))$

**23.-** Para las siguientes fórmulas probar ya sea que es válida o dar una interpretación que la falsifique dentro de cierto dominio:

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

- (a)  $\forall x \forall y \forall z (p(x, x) \wedge (p(x, z) \wedge \Rightarrow (p(x, y) \vee p(y, z)))) \Rightarrow \exists x \forall z p(y, z)$
- (b)  $\neg ((\forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \Rightarrow q(x)))$

**24.-** Probar que las siguientes fórmulas (Axiomas dentro del Sistema Axiomático de Hilbert) son siempre válidas:

- (a)  $\forall x A(x) \Rightarrow A(a)$
- (b)  $\forall x (A \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x B(x))$
- (c)  $A(a) \Rightarrow \exists x A(x)$

**25.-** Probar si es factible deducir las siguientes fórmulas a partir de algunos de los axiomas de l problema 4 o de alguna suposición válida o inválida:

- (a)  $\forall x (p(x) \Rightarrow q) \equiv \forall x (\neg q \Rightarrow \neg p(x))$
- (b)  $\forall x p(x) \Rightarrow \exists x p(x)$
- (c)  $(p \Rightarrow \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x (p \Rightarrow q(x))$
- (d)  $\forall x (p(x) \Rightarrow q) \equiv (\exists x p(x) \Rightarrow q)$
- (e)  $\forall x (p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow (\exists x p(x) \Rightarrow \exists x q(x))$

=====

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

# MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA

## CAPITULO IV

### RETICULO Y ALGEBRA DE BOOLE

#### 4.1.- INTRODUCCIÓN

En este capítulo trataremos el concepto de la relación. Como ya señalamos antes, tanto las relaciones de equivalencia como las relaciones de orden son muy importantes en el desarrollo de las matemáticas. La definición de número racional, la ordenación usual que se establece en el conjunto de los números naturales (donde cada conjunto tiene mínimo) y en el conjunto de los números reales (donde cada conjunto acotado tiene supremo e infinito), la aritmética modular... son conceptos fundamentales en los que está involucrada la noción de relación. También las funciones son un caso especial de relaciones y su estudio se revela como fundamental en el Análisis Matemático, en las conexiones de las matemáticas como la física... Por otro lado, las relaciones también tienen su aplicación en la informática, por ejemplo en las bases de datos relacionales y en problemas relativos a clasificación.

Se pretende que al finalizar el capítulo el alumno:

- Conozca las propiedades de una relación de equivalencia y de una relación de orden y sepa discernir si una relación dada es o no de uno de estos tipos.
- Sepa representar una relación mediante un grafo dirigido y analizar propiedades de la relación mediante la matriz de adyacencias del dígrafo asociado.
- Pueda calcular la clausura (reflexiva, simétrica) transitiva de una relación.
- Sea capaz de extender un orden parcial para convertirlo en un orden total que contenga las relaciones del orden parcial.

#### 4.1.1.- COMPENDIO DE DEFINICIONES

Aunque son definiciones ya conocidas vamos a recordar, en este primer párrafo, los conceptos que necesitamos.

**DEFINICIÓN 4.1.-** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos, una relación entre  $A$  y  $B$  es un subconjunto  $R$  del producto cartesiano  $A \times B$ . En el caso particular que  $A$  es igual a  $B$  hablaremos de una relación en  $A$ .  
Se dice que  $a \in A$  se relaciona con  $b \in B$  (y se denota  $a R b$ ) si el par  $(a, b) \in R$ .

**DEFINICIÓN 4.2.-** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos y  $R \subset A \times B$  una relación entre  $A$  y  $B$ , se define dominio de  $R$  al conjunto de elementos  $a \in A$  tales que existe un elemento  $b \in B$  y  $(a, b) \in R$ . Se define el rango de  $R$  al conjunto de elementos  $b \in B$  para los que existe un elemento  $a \in A$  de modo que  $(a, b) \in R$ .

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330



**DEFINICIÓN 4.3.-** Sea  $A$  un conjunto y  $R \subset A \times A$  una relación en  $A$ .

- Se dice que  $R$  es **reflexiva** si  $(a, a) \in R$  para cada  $a \in A$ .
- Se dice que  $R$  es **simétrica** si para cada  $(a, b) \in R$  se tiene que se cumple  $(b, a) \in R$ .
- Se dice que  $R$  es **antisimétrica** si  $(a, b) \in R$  y  $(b, a) \in R$  implica que  $a = b$ .
- Se dice que  $R$  es **transitiva** si para cada  $(a, b) \in R$  y  $(b, c) \in R$  se tiene que  $(a, c) \in R$ .

**DEFINICIÓN 4.4.-** Sea  $A$  un conjunto y  $R \subset A \times A$  una relación en  $A$ .  
La relación  $R$  es una **relación de equivalencia** si verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

La relación  $R$  es una **relación de orden** si verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Dos elementos  $a, b \in A$  se dicen **comparables** si o bien  $(a, b)$  o bien  $(b, a)$  pertenece a  $R$ . En el caso particular en que todo par de elementos  $a, b \in A$  son **comparables**, entonces diremos que es una relación de **orden parcial**.

A un par  $(A, R)$  formado por un conjunto y una relación de orden parcial le llamaremos **conjunto parcialmente ordenado**. Si la relación es de orden total diremos **conjunto totalmente ordenado**.

**OBSERVACIÓN 4.1.-** En general usaremos la notación  $\leq$  ( $\geq$ ) para las relaciones de orden y la notación  $\sim$  para las relaciones de equivalencia.

**Ejemplo 4.1.1.-**

- Como ya señalamos en el capítulo tercero, los números naturales admiten una relación de orden total que viene definida por: dados  $a, b \in \mathbb{N}$  se dice que  $b \geq a$  si o bien  $b = a$  o bien existe un número natural  $c$  tal que  $b = a + c$ .
- También vimos que los números enteros admiten una relación de orden total que es una extensión natural de la relación definida en los números naturales:  $a \leq b$  si y solamente si  $b - a \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ .
- Los números reales admiten una relación de orden total definida por la existencia de la semirrecta real positiva  $\mathbb{R}^+$ , (un subconjunto de  $\mathbb{R}$  con las propiedades de que para cada  $a \in \mathbb{R}$  no nulo o bien  $a$  o bien  $-a$  pertenecen a  $\mathbb{R}^+$ ; si  $a, b \in \mathbb{R}^+$  entonces  $a + b \in \mathbb{R}^+$ ,  $ab \in \mathbb{R}^+$  y  $0 \notin \mathbb{R}^+$ ) de modo que  $a \leq b$  si y solamente si  $b - a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .
- Sea el conjunto  $F = \{r/s : r, s \in \mathbb{Z} \text{ } s \neq 0\}$ . La relación que se define como  $r/s \sim u/v$  si y solamente si  $ru = sv$  es una relación de equivalencia en  $F$ .
- En el conjunto de los números enteros hemos definido la relación de equivalencia módulo  $p$ :  $a \equiv b \pmod{p}$  si y solamente si  $a - b$  es un múltiplo de  $p$ .
- Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $A$  en  $B$  es una relación  $R \subset A \times B$  con las propiedades: el dominio de  $R$  es  $A$ ; para cada elemento  $a \in A$  existe un único elemento  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in R$ .

**DEFINICIÓN 4.5.-** Sea  $A$  un conjunto y  $\sim$  una relación de equivalencia en  $A$ . Para cada elemento  $a \in A$  se define la **clase de equivalencia de  $a$** , y se denota por  $C(a)$  o por  $\bar{a}$ , como el conjunto de todos aquellos elementos  $A$  que se relacionan con  $a$ :

$$\bar{a} = \{b \in A : b \sim a\}$$

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

**Ejemplo 4.1.2.-** Con la notación de la definición anterior demostrar que:

- i) para cada  $a \in A$  se tiene que  $\bar{a} \neq \emptyset$ ;
- ii) para cada  $a, b \in A$  de modo que  $a \sim b$  se tiene que  $\bar{a} = \bar{b}$
- iii) si  $\bar{a} \neq \bar{b}$  entonces  $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ ;
- iv)  $A = \bigcup_{a \in A} \bar{a}$ .

**Solución:**

- i) Como  $R$  es una relación de equivalencia entonces es reflexiva, de modo que para cada  $a \in A$  se tiene que  $a R a$  y de este modo  $a \in \bar{a}$ .
- ii) Sea  $c \in \bar{a}$  entonces  $c R a$  y  $a R b$ . Por la propiedad transitiva  $c R b$  y así  $c \in \bar{b}$ . De igual manera se prueba el otro contenido.
- iii) Supongamos que  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  entonces existe  $c \in A$  de modo que  $a R c$  y  $b R c$  lo que garantiza por la propiedad simétrica y por la propiedad transitiva que  $a R b$  y por ii) que  $\bar{a} = \bar{b}$  lo que da una contradicción.
- iv) Sea  $c \in A$  entonces  $c \in \bar{c}$  por lo que se tiene la igualdad requerida.

Esto permite definir el siguiente concepto.

**DEFINICIÓN 4.6.-** Sean  $A$  un conjunto y  $\sim$  una relación de equivalencia en  $A$ . se define el **conjunto cociente de  $A$**  por dicha relación de equivalencia como el conjunto de las clases de equivalencia:

$$A/\sim = \{\bar{a} : a \in A\}$$

**Ejemplo 4.1.3.-**

- i) Como ya vimos, la relación de congruencia módulo  $p$  es una relación de equivalencia en  $\mathbb{Z}$  y el conjunto cociente es:

$$\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$$

- ii) El conjunto cociente del conjunto  $F$  del ejemplo iv) del párrafo anterior por la relación de equivalencia allí definida es el conjunto  $\mathbb{Q}$  de los números racionales.

**Ejemplo 4.1.4.-** Comprobar si son relaciones de orden o de equivalencia las siguientes relaciones y si son de equivalencia establecer el conjunto cociente:

- a) Sea  $A_5$  el conjunto de palabras de 5 letras hechas con el alfabeto español (29 letras). Sea la relación definida por comenzar por la misma letra, esto es, dados dos elementos  $a, b \in A_5$ ,  $a R b$  si y solamente si ambas palabras comienzan por la misma letra.
- b) Sea  $A = \{a, b, c, d\}$  y  $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (b, c)\}$
- b) Sea  $\mathbb{Z} - \{0\}$  y la relación  $a R b$  si y solamente si el signo de  $a$  es igual al signo de  $b$ .
- b) Sea el conjunto  $\mathbb{R}$  y la relación  $a R b$  si y solamente si  $a - b \in \mathbb{Z}$ .



**Solución:**

- i) Es una relación de equivalencia. En efecto, es reflexiva porque toda palabra  $p$  empieza por la misma letra que la propia palabra  $p$ . Es simétrica porque si  $p R q$  entonces la primera letra de la palabra  $p$  es igual que la primera letra de la palabra  $q$ , por tanto  $q R p$ , pues sus primeras letras son iguales. De igual modo si la primera letra de la palabra  $p$  es igual que la primera letra de la palabra  $q$  y la primera letra de la palabra  $q$  es igual que la primera letra de la palabra  $r$ , entonces la primera letra de la palabra  $p$  es igual que la primera letra de la palabra  $r$ , por lo que se tiene la propiedad transitiva. No es una relación de orden porque hay palabras distintas como *alto* y *alba* que verifican  $\text{alto} R \text{alba}$  y  $\text{alba} R \text{alto}$ , luego no es antisimétrica.

El conjunto cociente es el conjunto de letras pues se puede identificar cada clase de equivalencia con la inicial de cualquiera de las palabras que la forman.

- ii) Es reflexiva pues  $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\} \subset R$ . No es simétrica pues  $(a, b) \in R$  pero  $(b, a) \notin R$ . Es antisimétrica pues nunca se tienen  $m \neq l$  tal que  $(m, l) \in R$  y  $(l, m) \in R$ . Es transitiva pues el único caso relevante es  $(a, b), (b, c) \in R$  y efectivamente  $(a, c) \in R$ . Por lo tanto es una relación de orden (parcial) pero no de equivalencia. Su diagrama de Hasse está en la Figura 4.1.1.

- iii) Como todo número entero no nulo  $n$  tiene el mismo signo que  $n$  se tiene la propiedad reflexiva. Si  $a, b$  enteros no nulos verifican que  $\text{signo}(a) = \text{signo}(b)$  entonces  $\text{signo}(b) = \text{signo}(a)$  con lo que la relación es simétrica. También es transitiva pues se tiene que si  $\text{signo}(a) = \text{signo}(b)$  y  $\text{signo}(b) = \text{signo}(c)$  entonces  $\text{signo}(a) = \text{signo}(c)$ . Por tanto es una relación de equivalencia y no es de orden porque no es antisimétrica (hay números distintos con el mismo signo). El conjunto cociente tiene dos elementos, digamos  $\text{signo}^+$  y  $\text{signo}^-$ , que son, respectivamente, la clase de equivalencia de los positivos y la de los negativos.

- iv) Es reflexiva pues para cada número real  $a$  se tiene que  $a - a = 0 \in \mathbb{Z}$ . Es simétrica ya que si  $a - b \in \mathbb{Z}$  entonces la suma es un número entero:  $a - b + b - c = a - c \in \mathbb{Z}$ . Por tanto es una relación de equivalencia que no es de orden. Se tiene que  $\tilde{a} = \{a + k : k \in \mathbb{Z}\}$ .

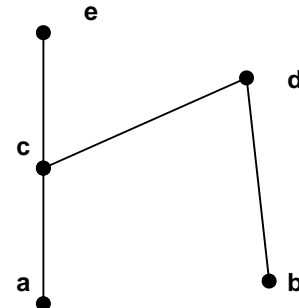


Figura 4.1.1

Se puede tomar en cada clase de equivalencia un representante entre 0 y uno (podíamos decir, su parte decimal) por lo que el conjunto cociente se puede identificar con el intervalo  $[0, 1)$ .

Vamos a centrarnos, de ahora en adelante, en relaciones definidas en conjuntos finitos, Veremos distintas formas de representarlas mediante tablas o grafos.



## 4.2.- REPRESENTACIÓN DE RELACIONES

### 4.2.1.- MEDIANTE TABLAS

Una relación  $R$  en un conjunto  $A$  es un subconjunto del producto cartesiano  $A \times A$ . Tomamos entonces dos ejes de coordenados donde en cada uno de ellos se están representando los elementos de  $A$ , la relación  $R$  es entonces una nube de puntos del plano coordenado. Esta nube de puntos permite verificar de forma sencilla algunas de las propiedades de la relación.

La relación es reflexiva si y solamente si toda la diagonal

$$\Delta = \{(a, a) : a \in A\}$$

está contenida en la gráfica.

La relación es simétrica si la gráfica es simétrica con respecto a dicha diagonal. La relación es antisimétrica si no existen pares de puntos de la gráfica simétrica con respecto a la diagonal y fuera de ella.

#### Ejemplo 4.2.1.-

- i) Sea la relación de orden usual sobre el conjunto  $N_4$ , es decir,  
 $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ .  
 Se ve claramente que es reflexiva y antisimétrica.
- ii) Sea en el conjunto  $N_4$  la relación siguiente:  
 $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$   
 Se ve claramente que es simétrica y que no es reflexiva.

### 4.2.2.- MEDIANTE GRAFOS DIRIGIDOS

Vamos a ver como la relación también puede ser representada por un grafo dirigido que llamaremos grafo dirigido asociado a la relación. Esté multidigrafo puede tener lazos (elementos de la forma  $(a, a)$ ) y puede tener, como máximo, dos aristas conectando dos vértices  $a$  y  $b$  (las aristas  $(a, b)$  y  $(b, a)$ ).

**DEFINICIÓN 4.7.-** Sea  $A$  un conjunto finito y  $R \subset A \times A$  una relación en  $A$ , llamaremos grafo dirigido asociado a la relación al multidigrafo  $G = (A, R)$ .

#### Ejemplo 4.2.2.-

- i) En el ejemplo i) anterior el grafo dirigido asociado es:  
 $(N_4, \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\})$
- ii) En el ejemplo ii) el grafo dirigido asociado es:  
 $(N_4, \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\})$

Sobre el grafo la propiedad reflexiva consiste en la existencia de un lazo sobre cada vértice.

La propiedad simétrica consiste en que cada par de vértices adyacentes presentan dos aristas (una en cada sentido) que los conectan.



La propiedad antisimétrica consiste en que cada par de vértices adyacentes distintos sólo presentan una arista que los conecta.

La propiedad transitiva consiste en que cada dos vértices unidos por un camino dirigido de longitud dos son necesariamente adyacentes.

En el ejemplo i) se ve que es reflexiva (un lazo sobre cada vértice) y antisimétrica (no hay dos vértices conectados por dos artistas).

En el ejemplo ii) se ve que es simétrica (dos aristas entre cada par de vértices conectados y no es reflexiva (por ejemplo el vértice 2 no es adyacente con el mismo).

**Ejemplo 4.2.3.-** Sean los siguientes conjuntos y relaciones definidos sobre ellos. Representarlas mediante tablas y grafos dirigidos y verificar que propiedades satisfacen.

- i) sea el conjunto  $N_5$  y la relación  $R$  definida como  $a R b$  si y solamente si  $a + b$  es un múltiplo de 7.
- ii) Sea el conjunto  $N_{10}$  y la relación de divisibilidad, es decir,  $a R b$  si y solamente si  $a$  divide a  $b$ .
- iii) Sea el conjunto  $A = \{\emptyset, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5\}$  y la relación en  $A$  dada por  $a R b$  si y solamente si  $a \subset b$ .
- iv) Sea el conjunto  $B = \{a, b, c, d\}$  y  $R = \{(b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, d), (a, d)\}$

**Solución:**

- i)  $N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . La relación es el siguiente conjunto:  
 $R = \{(2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$ .  
 La tabla asociada consiste en representar los puntos de  $R$  en un plano coordenado. El dígrafo asociado es:  
 $(N_5, \{(2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\})$ .
- ii) En este conjunto la relación es:  
 $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8), (5, 5), (5, 10), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9), (10, 10)\}$   
 La tabla asociada consiste en representar los puntos de  $R$  en un plano coordenado. El dígrafo asociado es:  $(N_{10}, R)$ .
- iii) La relación es:  
 $R = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, N_1), (\emptyset, N_2), (\emptyset, N_3), (\emptyset, N_4), (\emptyset, N_5), (N_1, N_1), (N_1, N_2), (N_1, N_3), (N_1, N_4), (N_1, N_5), (N_2, N_2), (N_2, N_3), (N_2, N_4), (N_2, N_5), (N_3, N_3), (N_3, N_4), (N_3, N_5), (N_4, N_4), (N_4, N_5), (N_5, N_5)\}$   
 La tabla asociada consiste en representar los puntos de  $R$  en un plano coordenado, tomando como coordenadas los subíndices (el  $\emptyset$  para el conjunto vacío). El dígrafo asociado es:  $(A, R)$ .
- iv) La tabla asociada consiste en representar los puntos de  $R$  en un plano coordenado, tomando por ejemplo  $a = 1, b = 2, d = 3$  y  $c = 4$ . El dígrafo asociado es:  $(B, R)$ .

#### 4.2.3.- MEDIANTE MATRICES

Podemos representar las relaciones usando las matrices de adyacencias asociadas a los grafos dirigidos que las representan.



**DEFINICIÓN 4.8.-** Dada una relación  $R$  en un conjunto  $A$  se define una matriz asociada a la relación  $M$  como una matriz de adyacencias del grafo dirigido asociado a la relación.

**Ejemplo 4.2.4.-** Sea en el conjunto  $N_5$  la relación de orden  $\leq$  habitual. La matriz de adyacencias del grafo dirigido, eligiendo el orden en los vértices dad por 1, 2, 3, 4, 5 es una matriz triangular con la parte superior formada por unos y la parte inferior por ceros:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejemplo 4.2.5.-** Computar las matrices de adyacencias de los grafos del Ejemplo 4.2.3.

i) Tomamos  $N_5$  ordenado de la forma usual.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Tomamos  $N_{10}$  ordenado de la forma usual.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) Tomamos A ordenado de la forma en que está escrito.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iv) Tomamos B ordenado de forma alfabética.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

Debemos recordar que la matriz de adyacencias  $M$  de un grafo dirigido tiene un uno en la entrada  $(i, j)$  ( $m_{ij} = 1$ ) si y solamente si  $(v_i, v_j) \in R$ , en caso contrario tiene un 0.

De este modo, una relación  $R$  sobre un conjunto  $A$  es reflexiva si y solamente si la diagonal de la matriz asociada  $M$  está formada por unos, esto es  $m_{ii} = 1$  para cada  $i = 1, \dots, |A|$ .

La relación es simétrica si y solamente si la matriz es simétrica, porque entonces la equivalencia  $(v_i, v_j) \in R$  si y solamente si  $(v_j, v_i) \in R$  se puede reescribir como  $m_{ij} = 1$  si y solamente si  $m_{ji} = 1$ .

La relación es antisimétrica si para cada  $i \neq j$  tales  $m_{ij} = 1$  se tiene que  $m_{ji} = 0$ . Si la relación es transitiva se verifica el siguiente teorema:

**TEOREMA 4.1.-** Sea  $A$  un conjunto finito,  $R$  una relación en  $A$  y  $M$  una matriz de adyacencia del grafo dirigido asociado a la relación. Llamemos  $m_{ij}$  a las entradas de  $M$  y  $m_{ij}^{(2)}$  (el dos es un superíndice, no un cuadrado) a las entradas de  $M^2$ . Entonces  $R$  es transitiva si y solamente si  $m_{ij}^{(2)} \neq 0$  implica  $m_{ij} \neq 0$ .

**Demostración:** Comprobemos primero que si  $m_{ij}^{(2)} \neq 0$  implica  $m_{ij} \neq 0$  entonces  $R$  es transitiva. Para que  $R$  sea transitiva debe verificar que cada vez que  $(v_i, v_j), (v_j, v_k) \in R$  necesariamente  $(v_i, v_k) \in R$ .

Si  $i = j$  o  $j = k$  no hay nada que comprobar. En caso contrario, existe un camino de longitud dos entre  $v_i$  y  $v_k$  por lo que  $m_{ik}^{(2)} \neq 0$ . Por hipótesis se tiene  $m_{ij} \neq 0$ , con lo que  $(v_i, v_j) \in R$ , como queríamos demostrar.

Por otro lado (la implicación en el otro sentido) si  $R$  es transitiva y  $m_{ij}^{(2)} \neq 0$  entonces existe un camino de longitud 2 entre  $v_i$  y  $v_j$  por tanto existirá un vértice  $v_k$  de modo que  $(v_i, v_k) \in R$  y  $(v_k, v_j) \in R$ . Por la transitividad de  $R$  se tiene que  $(v_i, v_j) \in R$ , es decir  $m_{ij} \neq 0$ , como queríamos demostrar.

Esto quiere decir que para comprobar la transitividad de una relación basta ver que  $M^2$  no tiene entradas no nulas nuevas con respecto a  $M$ .

**Ejemplo 4.2.6.-** Sea el conjunto  $A = \{a, b, c, d\}$  y la relación  $R = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$ . La relación es transitiva porque  $M^2 = 2M$ .

**Ejemplo 4.2.7.-** Comprobar si las relaciones del ejercicio 144 son transitivas mediante esta caracterización de la transitividad.

Podemos hacerlo automáticamente mediante un procedimiento de Maple que dada una matriz  $M$  calcula  $M^2$ . Con  $M^2$  construye una matriz  $M^{2*}$  que tiene un 1 en la entrada de subíndice  $ij$  si la correspondiente entrada en  $M^2$  es no nula y un 0 en caso contrario. Y toma la diferencia  $M^{2*} - M$  para comprobar si tiene entradas positivas (es decir si hay alguna entrada no nula nueva).

En cualquier caso i) no es transitiva porque  $2R5$  y  $5R2$  pero  $2 + 2 = 4$  no es un múltiplo de 7. La relación

### 4.3.- CLAUSURA REFLEXIVA, SIMÉTRICA Y TRANSITIVA DE UNA RELACIÓN

En esta sección presentaremos algoritmos para resolver el problema siguiente:

Problema: dada una relación  $R$  en un conjunto  $A$ , encontrar la mínima relación que contiene a  $R$  (en el sentido del subconjunto más pequeño de  $A \times A$ ) y que verifica una cierta propiedad, como, por ejemplo, la propiedad reflexiva (o la simétrica o la transitiva).



Es un problema que presenta distintas aplicaciones, sobre todo la clausura transitiva, por ejemplo en el campo de las comunicaciones.

**Ejemplo 4.3.1.-** Tenemos una red de ordenadores numerados del 1 al 5 y tenemos cables de comunicación del 1 al 2, del 2 al 3, del 1 al 4 y del 2 al 5. Aunque el 1 y el 3 no están directamente comunicados entre sí, se pueden comunicar a partir del 2. Nos interesaría conocer los ordenadores que están conectados entre sí.

De la teoría de grafos podemos extraer una solución sin más que preguntarnos por las componentes conexas del grafo cuyos vértices son los ordenadores y sus aristas las comunicaciones directas.

En el contexto de las relaciones podemos definir una relación  $N_5$  de modo que  $(a, b) \in R$  si y solamente si el ordenador con número  $a$  está conectado directamente con el que tiene número  $b$  (o  $a = b$  o hay un cable directo entre  $a$  y  $b$ ). Ésta relación es claramente reflexiva y simétrica por definición. El problema de encontrar todas las parejas de ordenadores conectados (directa o indirectamente), es equivalente al cómputo de la clausura transitiva, es decir, el mínimo conjunto de parejas  $C$  que contiene a  $R$  y hace que  $C$  sea transitiva.

**DEFINICIÓN 4.9.-** Sea  $A$  un conjunto finito y  $R \subset A \times A$  una relación en  $A$ . Se define la clausura transitiva (resp. simétrica, resp. reflexiva) al mínimo conjunto  $C_t \subset A \times A$  (resp.  $C_s$ , resp.  $C_r$ ) tal que  $R \subset C_t$  (resp.  $R \subset C_s$ , resp.  $R \subset C_r$ ) y la relación que define  $C_t$  es transitiva (resp. simétrica, resp. reflexiva).

El cómputo de la clausura reflexiva es simple. Se trata de unir a  $R$  el conjunto  $\Delta = \{(a, a) : a \in A\}$ . Es decir,

$$C_r = R \cup \Delta.$$

La matriz del grafo asociado a  $C_r$  es simplemente cambiar los ceros de la diagonal de la matriz  $M$  de  $R$  por unos.

**Ejemplo 4.3.2.-** Sea el conjunto  $\mathbb{N}_{10}$  y sobre él la relación de menor escrito  $<$ . Ésta relación no es reflexiva porque no se verifica  $a < a$ . se verifica que la clausura reflexiva de la relación  $z$  es la relación  $\leq$ .

**Ejemplo 4.3.3.-** Dadas las relaciones del Ejemplo 4.2.3 que no son reflexivas computar su clausura reflexiva.

**Solución:**

- i) La relación no es reflexiva, para convertirla en reflexiva hay que unir a  $R$  el siguiente conjunto  $\{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
- ii) La relación es reflexiva.
- iii) La relación es reflexiva
- iv) La relación no es reflexiva, hay que unirle el siguiente elemento  $(a, a)$

La clausura simétrica de una relación se computa uniendo a  $R$  el conjunto  $S = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$ , es decir:

$$C_s = R \cup S$$





La matriz del grafo asociado a  $C_s$  se obtiene tomando la matriz del grafo asociado a  $R$ , digamos  $M$ , sumando esta matriz con su transpuesta  $M^t$ , esto es  $N = M + M^t$  y construyendo una matriz que tengo un uno donde  $N$  tiene un elemento no nulo y cero donde  $N$  tiene un cero.

**Ejemplo 4.3.4.-** Sea el conjunto  $N_{10}$  y sobre él la relación de orden  $\leq$ . La clausura simétrica de dicha relación es  $C_s = N_{10} \times N_{10}$ . En efecto, por definición  $C_s \subset N_{10} \times N_{10}$ . Para demostrar el otro contenido, sea cualquier elemento  $(a, b) \in N_{10} \times N_{10}$ . Si  $a \leq b$  entonces  $(a, b) \in R \subset C_s$ , en caso contrario  $b < a$  y por tanto  $(b, a) \in R$  lo que significa  $(a, b) \in S \subset C_s$ , lo que concluye la demostración.

**Ejemplo 4.3.5.-** Dadas las relaciones del Ejemplo 4.2.3 que no son simétricas computar su clausura simétrica.

**Solución:**

- i) La relación es simétrica.
- ii) La relación no es simétrica, hay que unirle el siguiente conjunto:  
 $\{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (7, 1), (8, 1), (9, 1), (10, 1), (4, 2), (6, 2), (8, 2), (10, 2), (6, 3), (9, 3), (8, 4), (10, 5)\}$
- iii) La relación no es simétrica, su clausura simétrica es  $A \times A$
- iv) La relación no es simétrica, hay que unirle los siguientes elementos  $(c, a), (d, c)$  y  $(a, d)$

Abordamos finalmente el cómputo de la clausura transitiva.

**LEMA 4.1.-** Sea  $A$  un conjunto,  $R$  una relación sobre  $A$  y  $G$  el grafo dirigido asociado a la relación. Sean  $a$  y  $b$  dos elementos de  $A$  tales que existe un camino  $(a, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_m, b)$  en  $G$  que une a con  $b$ . Entonces  $(a, b)$  pertenece a la clausura transitiva,  $C_t$ , de  $R$ .

**Demostración.** Lo demostramos por inducción sobre la longitud del camino.

- Si la longitud del camino que une a y b es uno entonces  $(a, b) \in R \subset C_t$ . Si la longitud es dos, como  $(a, v_1), (v_1, b) \in R$  entonces  $(a, b) \in C_t$ .
- Si la longitud es m entonces, por hipótesis de inducción,  $(a, v_{m-1}) \in C_t$  y por tanto, como  $(v_{m-1}, b) \in R$ , se tiene que  $(a, b) \in C_t$ .

Según este lema, la clausura transitiva debe contener todos los pares  $(a, b)$  de vértices tales que existe un camino que une a con b.

**LEMA 4.2.-** Sea  $A$  un conjunto y  $R$  una relación en  $A$  de modo que el grafo dirigido  $G$  asociado a la relación verifica que si dos vértices  $a$  y  $b$  están unidos por un camino entonces  $(a, b) \in R$ . En estas condiciones la relación  $R$  es transitiva.

**Demostración.** Si tenemos que  $(a, b), (b, c) \in R$  entonces a y c están unidos por un camino de longitud 2 y por tanto  $(a, c) \in R$ .

Los dos lemas previos muestran que la clausura transitiva de una relación  $R$  en un conjunto  $A$  es entonces:

$$C_t = T,$$

donde  $T$  es el conjunto de pares  $(a, b)$  de modo que existe un camino en el grafo asociado  $G$  que une a con b.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

**OBSERVACIÓN 4.2.-** Sea  $G = (V, A)$  un grafo dirigido y  $a, b$  dos vértices de  $G$ . Si existe un camino que une a con b entonces existe un camino de longitud menor o igual que  $|V| - 1$ .

Esta observación permite construir un algoritmo para calcular la clausura transitiva.

#### Algoritmo para calcular la clausura transitiva

Sea  $A$  un conjunto,  $R$  una relación en  $A$ ,  $G = (A, R)$  el grafo dirigido asociado a  $R$  y  $M$  una de sus matrices de adyacencias.

---

**Entrada:**  $M$  (una matriz  $n \times n$ )

For  $i = 2$  to  $n$

$M := M + M^i$

**Salida:**  $C_t$  que es una matriz  $n \times n$  con un uno donde  $M$  tiene una entrada no nula y con un 0 donde  $M$  tiene un cero.

---

Observemos que la complejidad de este algoritmo es cuártica. El Producto de dos matrices  $n \times n$  necesita  $2n^3$  operaciones. En efecto al multiplicar una fila por una columna se realizan  $n$  productos y  $n$  sumas ( $2n$  operaciones) y esto se hace  $n^2$  veces. En nuestro algoritmo se efectúan  $n - 1$  potencias de  $M$ . Suponemos que nuestro sistema de cálculo con matrices hace las potencias como producto de dos matrices (la potencia anterior multiplicada por  $M$ ), nuestro algoritmo llama a un algoritmo que recorre listas de longitud  $n$ , cambiando cada valor por uno si es no nulo y por cero si es nulo. Este algoritmo tiene complejidad cuadrática. Podemos entonces concluir que el algoritmo es de orden  $O(n^4)$ .

**Ejemplo 4.3.6.-** Dadas las relaciones del Ejemplo 4.2.3 que no son transitivas computar su clausura transitiva.

Para calcular la clausura transitiva de la única relación que no es transitiva, Ejemplo 4.2.3 (i), hay que unir los elementos **(2, 2), (5, 5), (3, 3), (4, 4)**

**Ejemplo 4.3.7.-** Entendiendo una matriz como una lista de números con dos subíndices (el primero la fila y el segundo la columna):

- i) escribir un algoritmo que multiplica matrices de tamaño  $n \times n$ ;
- ii) escribir un algoritmo que tome una matriz  $M$  de tamaño  $n \times n$  y construya una matriz  $N$  que tenga las entradas verificando  $n_{ij} = 1$  si  $m_{ij} \neq 0$  y  $n_{ij} = 0$  en caso contrario.

#### Solución:

- i) Consideramos una matriz como una lista con dos subíndices:  
Si la entrada es:  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, b_{n1}, \dots, b_{nn}$ .  
La correspondiente salida se define como una matriz de entradas  $c_{ij}$  donde:

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

De este modo el algoritmo debe ser:

**Entrada:**  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, b_{n1}, \dots, b_{nn}$ .

For  $i = 1$  to  $n$

For  $j = 1$  to  $n$

$C_{ij} := 0$

For  $C_{ij} := C_{ij} + a_{ik}b_{kj}$

**Salida:**  $c_{11}, \dots, c_{nn}$

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

ii) **Entrada:**  $m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1n}, \dots, m_{n1}, \dots, m_{nn}$ .  
 For  $i = 1$  to  $n$   
     For  $j = 1$  to  $n$   
         If  $m_{ij} \neq 0$  then  $n_{ij} := 1$  else  $n_{ij} := 0$   
**Salida:**  $n_{11}, \dots, n_{nn}$

Terminamos esta sección presentando otro algoritmo para computar la clausura transitiva de una relación conocida como Algoritmo de Warshall que tiene complejidad cúbica.

#### Algoritmo de Warshall para el cómputo de la clausura transitiva

Sea como siempre  $A$  un conjunto finito ( $|A| = n$ ),  $R$  una relación en  $A$ ,  $G = (A, R)$  el grafo dirigido asociado a  $R$  y  $M$  una de sus matrices de adyacencias. Nuestro objetivo es calcular la matriz asociada a  $C_t$ , que sabemos cómo es por el algoritmo anterior. Recordamos que  $M$  se obtiene mediante una ordenación de los vértices de  $G$ , es decir  $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

**DEFINICIÓN 4.10.-** Sea un camino  $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$  en un grafo dirigido  $G$ . A los vértices  $x_1, \dots, x_{n-1}$  se les llama vértices interiores del camino.

Con esta definición podemos comenzar el algoritmo de Warshall.

Se trata de construir  $n + 1$  matrices  $n \times n$  que llamaremos  $W_k$  ( $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ) de modo que  $W_0 = M$  y  $W_n$  sea la matriz adyacencias de  $C_t$  asociada a la ordenación de  $A$ .

Llamamos  $w_{ij}^{(k)}$  a las correspondientes entradas de  $W_k$ . La definición de  $W_k$  es como sigue:  $w_{ij}^{(k)} = 1$  si existe un camino que une  $v_i$  con  $v_j$  de modo que el conjunto de sus vértices interiores esté contenido en el conjunto  $\{v_1, \dots, v_k\}$ .

En el caso  $k = 0$  se interpreta como  $w_{ij}^{(0)} = 1$  si existe un camino sin vértices interiores que une  $v_i$  con  $v_j$ , por tanto  $W_0 = M$ .

En el caso  $k = n$  tenemos que  $w_{ij}^{(n)} = 1$  si existe un camino que une  $v_i$  con  $v_j$  (porque el conjunto de posibles vértices interiores es  $A$ ). Por tanto se tiene que  $W_n$  es la matriz de adyacencias buscada.

**Ejemplo 4.3.8.-** Sea la relación siguiente:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$R = \{(a, a), (a, b), (c, c), (c, d), (c, f), (f, f), (f, c), (f, a)\}$$

Elegimos el orden para los vértices  $a, b, c, d, e, f$  y por tanto la matriz  $W_1$  tiene entradas no nulas (que valen 1) si hay un camino que une los respectivos vértices cuyo único posible vértice interior es  $a$ . Entonces:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Para analizar la complejidad de algoritmo debemos aportar algún método para construir las matrices  $W_k$ . La siguiente observación obvia es la que permite construir  $W_k$  a partir de la matriz anterior  $W_{k-1}$ .

**OBSERVACIÓN 4.3.-** Los caminos sin vértices interiores repetidos que unen los vértices  $v_i$  y  $v_j$  cuyos vértices interiores pertenecen al conjunto  $\{v_i, \dots, v_k\}$  son de dos tipos:

O bien caminos cuyos vértices interiores son del conjunto  $\{v_i, \dots, v_{k-1}\}$ ;  
O bien caminos que tienen a  $v_k$  como vértice interior, es decir, que se pueden ver como la concatenación de un camino  $C_1$  y  $C_2$  pertenecen al conjunto  $\{v_i, \dots, v_{k-1}\}$ .

Por tanto se tiene que

$$w_{ij}^k = 1 \Leftrightarrow (w_{ij}^{k-1} = 1) \vee (w_{ik}^{k-1} = 1 \wedge w_{kj}^{k-1} = 1)$$

Esto nos permite calcular la complejidad del algoritmo. Para construir  $W_k$  a partir de  $W_{k-1}$  hay que construir sus  $n^2$  entradas. Para cada entrada, usando la observación anterior, hay que hacer (como máximo) 3 comparaciones y una asignación. Por tanto cada construcción de  $W_k$  es un algoritmo de complejidad cuadrática ( $4n^2$ ). Como hay que hacer  $n$  construcciones de este tipo, el algoritmo de Warshall tiene complejidad cúbica, es decir, del orden  $O(n^3)$ .

**Ejemplo 4.3.9.-** Dadas las relaciones del Ejemplo 4.2.3 que no son transitivas computar su clausura transitiva mediante el Algoritmo de Warshall.

**Solución:** La única relación no transitiva es la del Ejemplo 4.2.3 (i). La matriz  $W_0$  es exactamente la matriz del grafo dirigido, esto es:

$$W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz  $W_1$  tiene un uno donde  $W_0$  tenga un uno y además se verifica que  $w_{ij}^1 = 1$  si  $w_{i1}^0 = 1 = w_{1j}^0$ . Como en nuestro caso la primera fila de  $W_0$  es toda nula, entonces:

$$W_0 = W_1$$

La matriz  $W_2$  tiene un uno donde  $W_1$  tenga un uno y además se verifica que  $w_{ij}^2 = 1$  si  $w_{i2}^1 = 1 = w_{2j}^1$ . Esta condición se verifica sólo en  $w_{52}^1 = 1 = w_{25}^1$ , por lo tanto se tiene  $w_{55}^2 = 1$ .

$$W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz  $W_3$  tiene un uno donde  $W_2$  tenga un uno y además se verifica que  $w_{ij}^3 = 1$  si  $w_{i3}^2 = 1 = w_{3j}^2$ . Esta condición se verifica sólo en  $w_{43}^2 = 1 = w_{34}^2$ , por lo tanto se tiene  $w_{44}^3 = 1$ .

$$W_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



La matriz  $W_4$  tiene un uno donde  $W_3$  tenga un uno y además se verifica que  $w_{ij}^4 = 1$  si  $w_{id}^3 = 1 = w_{4j}^3$ . Esta condición se verifica sólo en  $w_{34}^3 = 1 = w_{43}^3$ , por lo tanto se tiene  $w_{33}^4 = 1$ .

$$W_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz  $W_5$  tiene un uno donde  $W_4$  tenga un uno y además se verifica que  $w_{ij}^5 = 1$  si  $w_{id}^4 = 1 = w_{5j}^4$ . Esta condición se verifica sólo en  $w_{25}^4 = 1 = w_{52}^4$ , por lo tanto se tiene  $w_{22}^5 = 1$ .

$$W_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observa como se han introducido 4 unos en la diagonal correspondiente a los siguientes elementos  $(2, 2)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(5, 5)$  que son los elementos que hay que unir a R para tener la transitividad.

#### 4.4.- CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENANDOS

Como señalamos en párrafos anteriores, un conjunto parcialmente ordenado es un par  $(A, \leq)$  formado por un conjunto  $A$  y una relación de orden parcial  $\leq$ . Sea  $G$  el grafo dirigido asociado a la relación  $\leq$ . Como dicha relación  $\leq$  es, por definición, reflexiva, antisimétrica y transitiva, se puede simplificar un poco la representación de  $G$ . Es lo que se llama diagrama de Hasse de un conjunto parcialmente ordenado (de un poset usando las siglas inglesas de partially ordered set). Si la relación de orden es total la construcción del diagrama de Hasse tiene también sentido (aunque saldrá siempre una recta vertical).

##### 4.4.1.- DIAGRAMAS DE HASSE

En las condiciones del párrafo anterior partimos de  $G$ . Como sabemos que la relación  $\leq$  es reflexiva podemos borrar todos los lazos, ya que necesariamente  $a \leq a$  para cada  $a \in A$ .

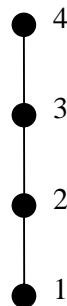


Figura 4.4.1: Diagrama de Hasse del Ejemplo 4.4.1



Como sabemos que la relación  $\leq$  es transitiva podemos borrar las aristas que son consecuencia de esta propiedad. Por ejemplo, si  $a \leq b$  y  $b \leq c$  necesariamente  $a \leq c$ , entonces los pares  $(a, b)$ ,  $(b, c)$  y  $(a, c)$  son aristas del grafo y podemos borrar la arista  $(a, c)$ .

Finalmente, en lugar de dirigir las aristas del grafo, elegimos una disposición vertical de manera que si un elemento  $a$  está debajo de otro  $b$  y ambos están unidos por un camino ascendente en el grafo simple final entonces  $a \leq b$ .

#### Ejemplo 4.4.1:

- i) Sea  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y el orden  $\leq$  habitual. Partimos del grafo de la relación. Borraremos los lazos y las aristas que son consecuencia de la propiedad transitiva, que son  $(1, 3)$ ,  $(1, 4)$  y  $(2, 4)$ . Por tanto el diagrama de Hasse es una recta vertical y está dibujado en la Figura 4.4.1.
- ii) Sea el conjunto  $B = \{a, b\}$  y definimos la relación  $\subseteq$  en el conjunto de las partes de  $B$ , denotado  $P(B)$ . Se puede comprobar que es una relación de orden parcial. El diagrama de Hasse asociado a la relación queda dibujado en la Figura 4.4.2

**Ejemplo 4.4.2:** Dado el conjunto  $A = \{a, b, c, d, e\}$  y la relación  $R = \{(a, a), (a, c), (c, e), (c, d), (b, d)\}$

*Dibujar el diagrama de Hasse de la relación de orden que viene definida por la clausura reflexiva y transitiva de  $R$ .*

#### Solución:

Para construir la clausura reflexiva debemos añadir los siguientes elementos:

$(b, b), (c, c), (d, d), (e, e)$

De este modo:

$C_r = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, c), (c, e), (c, d), (b, d)\}$

Para completar la clausura transitiva observamos que  $(a, c), (c, e) \in C_r$ , por lo tanto debemos unir  $(a, e)$ . De igual modo  $(a, c), (c, d) \in C_r$ , por lo tanto debemos unir  $(a, d)$ .

Es una comprobación demostrar la siguiente igualdad, siendo  $C_t$  la clausura transitiva de  $C_r$ .

$C_t = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, c), (c, e), (a, e), (c, d), (a, d), (b, d)\}$

#### 4.4.2.- ELEMENTOS CARACTERÍSTICOS DE UN CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO

Veamos algunos elementos interesantes en conjuntos parcialmente ordenados. Sea entonces  $(A, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado.

**DEFINICIÓN 4.11.-** Un elemento  $M \in A$  se dice **elemento maximal** si no existe  $b \in A$   $b \neq M$  de modo que  $M \leq b$ .  
Un elemento  $m \in A$  se dice **elemento minimal** si no existe  $b \in A$   $b \neq m$  de modo que  $b \leq m$ .



En los diagramas de Hasse los elementos maximales son aquellos que son extremo superior de un camino ascendente que no se puede prolongar; recíprocamente los elementos minimales son extremos inferiores de caminos descendentes que no se pueden prolongar.

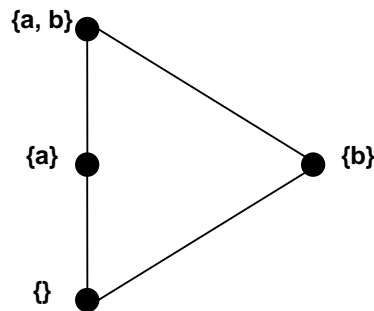


Figura 4.4.2: Diagrama de Hasse del Ejemplo 4.4.1 (ii)

**Ejemplo 4.4.3:** En el Ejemplo 4.4.1 i) el 1 es minimal y el 4 es maximal.  
En el Ejemplo 4.4.1 ii) el conjunto vacío es un elemento minimal y el conjunto B es un elemento maximal.

**OBSERVACIÓN 4.4.-** El conjunto de los elementos maximales (resp. minimales) no es necesariamente unitario, como se puede ver en el Ejemplo 4.4.4.

**Ejemplo 4.4.4:** Un conjunto parcialmente ordenado  $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \leq)$  cuyo diagrama de Hasse es el de la Figura 4.4.3 tiene dos elementos maximales, 3 y 5, y dos minimales, 1 y 4.

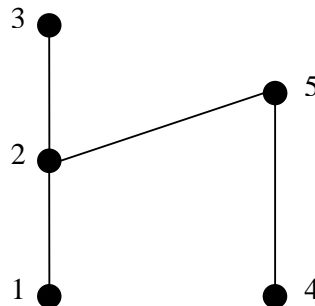


Figura 4.4.3: Diagrama de Hasse del Ejemplo 4.4.4

**DEFINICIÓN 4.12.-** Un elemento  $M \in A$  es un **elemento máximo** si  $a \leq M$  para todo  $a \in A$ .  
Un elemento  $m \in A$  es un **elemento mínimo** si  $m \leq a$  para todo  $a \in A$ .

**Ejemplo 4.4.5:** En el Ejemplo 4.4.1 i) 1 es un mínimo y 4 es un máximo.  
En el Ejemplo 4.4.1 ii) el conjunto vacío es un mínimo (ya que el vacío es un subconjunto de cada conjunto) y el total de B es un máximo (ya que cada subconjunto de B está, por definición, contenido en B).

En el diagrama de Hasse el máximo está caracterizado por ser el extremo superior de cada camino ascendente y recíprocamente el mínimo es el extremo inferior de cada camino descendente.



**OBSERVACIÓN 4.5.-** El elemento máximo y el elemento mínimo no necesariamente existen. Si un conjunto parcialmente ordenado tiene máximo (resp. mínimo) entonces es el único elemento maximal (resp. minimal). El elemento máximo, si existe, se escribe  $1$  y se denomina **elemento unidad**. El elemento mínimo, si existe, se escribe como  $0$  y se denomina **elemento cero**.

**Ejemplo 4.4.6:** El Ejemplo 4.4.4 del párrafo anterior representado en la Figura 4.4.3 con dos elementos maximales y dos minimales, no tiene máximo ni mínimo. Por ejemplo,  $1$  no es un mínimo porque se verifica que  $1 \leq 4$ , hecho  $1$  y  $4$  no son comparables.

**DEFINICIÓN 4.13.-** Sea  $(A, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado y  $B \subset A$ . Se dice que  $a \in A$  es una **cota superior** de  $B$  si  $b \leq a$  para cada  $b \in B$ . Se dice que  $a \in A$  es una **cota inferior** de  $B$  si  $a \leq b$  para cada  $b \in B$ . Si existe una cota superior de  $B$  menor o igual que el resto de cotas superiores de  $B$  se le llama **supremo de  $B$**  o **mínima cota superior de  $B$**  y denominada **MCS**. Si existe una cota inferior de  $B$  mayor o igual que el resto de cotas inferiores de  $B$  se le llama **ínfimo de  $B$**  o **máxima cota inferior de  $B$**  y denominada **MCI**.

**Ejemplo 4.4.7:** Sea el conjunto  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  y la relación de orden dada por la clausura reflexiva y transitiva de:

$$R = \{(f, a), (a, c), (c, e), (c, d), (f, b), (b, d)\}.$$

Calcular los elementos minimales, los maximales, el máximo y el mínimo si existe. Tomando  $B = \{a, b, c, d\} \subset A$  calcular el conjunto de cotas superiores de  $B$ , el de cotas inferiores, y el supremo MCS y el ínfimo MCI, si existen.

**Solución:**

Para calcular la clausura reflexiva hay que unir todos los miembros de la diagonal. Como  $(f, a), (a, c) \in R$ , entonces  $(f, c) \in C_r$ . Ahora  $(f, c), (c, e) \in C_r$  implica  $(f, e) \in C_r$ . Como  $(a, c), (c, c) \in R$ , entonces  $(a, e) \in C_r$ . Como el par ordenado  $(a, c), (c, d) \in R$ , entonces  $(a, d) \in C_r$ . Como  $(f, c), (c, d) \in R$ , entonces  $(f, d) \in C_r$ . de este modo:

$$C_r = \{(a, a), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (c, e), (d, d), (e, e), (f, a), (f, b), (f, c), (f, d), (f, e), (f, f)\}$$

En efecto, la matriz que lo representa es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y se tiene que  $A^2$  no tiene entradas no nulas nuevas, luego es en efecto una relación transitiva.





$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Viendo el diagrama de Hasse (Figura 4.4.4) se tiene que existen dos elementos maximales, que son  $d$  y  $e$  y por lo tanto no hay máximo. Hay un elemento minimal  $f$  que es además el mínimo. El elemento  $d$  es cota superior de  $B$  y es además la única, por lo tanto es el supremo. La única cota inferior es  $f$  que por lo tanto es el ínfimo.

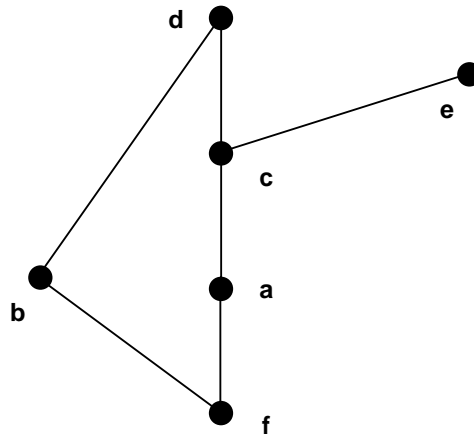


Figura 4.4.4 Diagrama de Hasse del Ejemplo 4.4.7

#### 4.4.3.- INMERSIÓN DE UN ORDEN PARCIAL EN UN ORDEN TOTAL

Supongamos que tenemos un conjunto de tareas que realizar de modo que hay una serie de prioridades, estableciéndose una relación de orden parcial sobre el conjunto de tareas. Por ejemplo un conjunto de asignaturas (que no pueden cursarse simultáneamente) que aprobar para conseguir una licenciatura con una serie de asignaturas que han de cursarse después de aprobarse unas asignaturas previas. Nos interesará establecer un orden total para realizarse las tareas, por ejemplo, una manera de cursar las asignaturas sabiendo en que orden han de realizarse. Veamos un ejemplo simple:

**Ejemplo 4.4.8:** Sea un conjunto de tres asignaturas Matemáticas I, Matemáticas II y Física para realizar en 3 años. Se tiene que cursar primero Matemáticas I y luego Matemáticas II. Nada se dice sobre cuando cursar Física. Formalmente tenemos un conjunto (usando las siglas)

$$C = \{MI, MII, F\}$$

Con una relación de orden parcial

$$MI \leq MI, MI \leq MII, MII \leq MII, F \leq F$$

Las distintas maneras de cursar estas asignaturas corresponden a los distintos órdenes totales de que se puede dotar a  $C$  respetando el orden parcial.



Estos órdenes totales son:

$$MI \leq MII \leq F$$

$$MI \leq F \leq MII$$

$$F \leq MI \leq MII$$

Esto es, de las posibles 6 permutaciones del conjunto de las tres asignaturas, elegimos una de las tres en que **MI** precede a **III**.

Por tanto abordamos este problema general, que se puede aplicar a la planificación de tareas:

**Problema:** Dado un conjunto parcialmente ordenado  $(A, R)$  encontrar una relación de orden total  $T$  de modo que  $R \subset T$ .

Como se ha visto en el ejemplo la relación  $T$  no es única. La aplicación a la planificación de tareas consiste en diseñar una forma de realizar todas las tareas teniendo en cuenta las prioridades que se conozcan, esto es, tareas que deben preceder necesariamente a otras.

**LEMA 4.3.-** Cada conjunto finito parcialmente ordenado  $(A, R)$  tiene un elemento minimal.

**Demostración:** Sea un elemento  $x_1 \in A$ . Si  $x_1$  es minimal el lema queda demostrado, en caso contrario existe  $x_2 \leq x_1$  con  $x_2 \neq x_1$ . Si  $x_2$  es minimal queda demostrado el lema, si no existe  $x_3 \leq x_2$  y  $x_3 \neq x_2$ . Como el conjunto es finito necesariamente este proceso debe terminar aportando un elemento minimal.

Este lema permite construir un algoritmo para la construcción del orden total  $T \supseteq R$ .

Partimos de  $A$  y elegimos un elemento minimal  $a_1$ , que existe por el lema, aunque no es necesariamente único (elección de una tarea para realizarla la primera de entre las tareas prioritarias). Ahora el conjunto  $A - \{a_1\}$  es un conjunto parcialmente ordenado con el orden que índice  $T$  sobre él. Repetimos el proceso para elegir un elemento minimal  $a_2$  (que por el lema anterior necesariamente existe) y así sucesivamente hasta agotar los elementos de  $A$ .

El orden total  $T$  es

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$$

**Ejemplo 4.4.9:** Sea el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y la relación de orden parcial en  $A$ ,

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 4), (1, 5), (4, 5)\}.$$

Elegimos un elemento minimal, que en el primer caso es necesariamente  $x_1=1$ . Después en el conjunto  $A - \{1\}$  tenemos la relación de orden inducida:

$$R_1 = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 3), (4, 5)\}.$$

Elegimos un elemento minimal entre los dos posibles candidatos que son el 2 o el 4. Tomemos  $x_2 = 2$ . En el conjunto  $A - \{1, 2\}$  tenemos un orden inducido:

$$R_1 = \{(3, 3), (4, 4), (5, 5), (4, 5)\}.$$

Tomamos  $x_3 = 3$  (también podíamos elegir el 4). Continuando el proceso  $x_4 = 4$  y  $x_5 = 5$ . Por tanto el orden total es:

$$1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5.$$

Obsérvese que podríamos haber elegido de otra manera la  $x_i$ , para obtener un orden total distinto, también compatible con el orden parcial con el que comenzamos.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

**Ejemplo 4.4.10:** Se tiene que montar una cadena de montaje de una pieza según el siguiente esquema de tareas.

Tareas: ensamblar, atornillar, pintar, empaquetar, limpiar, registrar.

Prioridades: Ensamblar antes de atornillar, atornillar antes de pintar, pintar antes de empaquetar, limpiar antes de pintar.

Diseñar una posible planificación de tareas.

## 4.5. RETÍCULO

**DEFINICIÓN 4.14.-** Un retículo es un conjunto parcialmente ordenado  $(L, \leq)$  en el que cada subconjunto  $\{a, b\}$ , que consta de dos elementos, tiene una mínima cota superior (MCS) o supremo y tiene una máxima cota inferior (MCI) o ínfimo.

Se escribirá **MCS**  $(\{a, b\})$  para  $a \vee b$  y se llamará **junta de a y b**. De igual manera, se escribirá **MCI**  $(\{a, b\})$  para  $a \wedge b$  y se denominará **reunión de a y b**.

**Ejemplo 4.5.1:** Sea  $S$  un conjunto y sea  $L = P(S)$ . Hemos visto que  $\subseteq$ , la contención, es una relación de orden parcial en  $L$ . Si  $A$  y  $B$  son dos elementos de  $L$  (subconjuntos de  $S$ ), entonces la **junta de A y B** es su unión  $A \cup B$ , y la **reunión de A y B** es su intersección,  $A \cap B$ . De aquí que  $L$  sea un retículo.

**Ejemplo 4.5.2:** Examinemos el conjunto parcialmente ordenado  $(Z^+, \leq)$ , donde  $a$  y  $b$  en  $Z^+$ , y que  $a \leq b$  si y sólo si  $a \mid b$ . Entonces  $L$  es un retículo en cuya junta está su mínimo común múltiplo (MCM) y en cuya reunión está su máximo común divisor (MCD). O sea que:

$$a \vee b = \text{MCM}(a, b) \quad \text{y} \quad a \wedge b = \text{MCD}(a, b)$$

**Ejemplo 4.5.3:** Sea  $n$  un entero positivo y  $D_n$  el conjunto de todos los divisores de  $n$ . Entonces  $D_n$  es un retículo bajo la relación de divisibilidad como en el Ejemplo 4.5.2. Por consiguiente, si  $n = 20$ , se tiene que  $D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ . El diagrama de Hasse se muestra en la Figura 4.5.1 (a). Si  $n = 30$ , se tiene  $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ . El diagrama de Hasse de  $D_{30}$  se muestra en la Figura 4.5.1 (b).

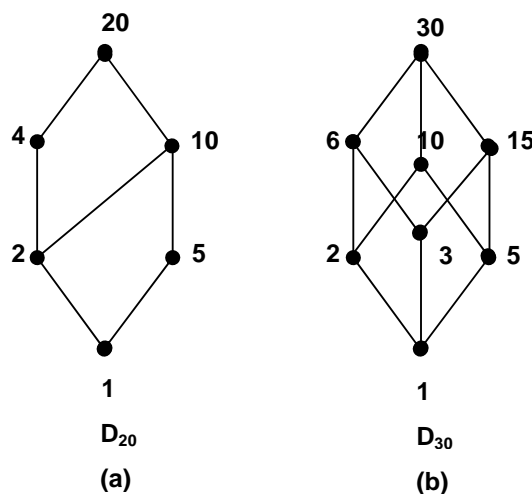


Figura 4.5.1



Sean  $(L, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado y  $(L, \geq)$  el conjunto parcialmente ordenado dual. Si  $(L, \leq)$  es un retículo, se puede demostrar que  $(L, \geq)$  es también un retículo. De hecho, para cualquier  $a$  y  $b$  en  $L$ , la mínima cota superior de  $a$  y  $b$  en  $(L, \leq)$  es igual a la máxima cota inferior de  $a$  y  $b$  en  $(L, \geq)$ . De igual manera, la máxima cota inferior de  $a$  y  $b$  en  $(L, \leq)$  es igual a la mínima cota superior de  $a$  y  $b$  en  $(L, \geq)$ . Si  $L$  es un conjunto finito, esta propiedad es fácil de ver examinando los diagramas de Hasse del conjunto parcialmente ordenado y del conjunto parcialmente ordenado dual.

**TEOREMA 4.2.-** Si  $(L_1, \leq)$  y  $(L_2, \leq)$  son retículos, entonces  $(L, \leq)$  es un retículo donde se cumple  $L = L_1 \times L_2$  y el orden parcial  $\leq$  de  $L$  es una relación de orden parcial producto.

**Ejemplo 4.5.4:** Sean  $L_1$  y  $L_2$  los retículos mostrados en la Figura 4.5.2 (a) y (b) respectivamente. Entonces  $L = L_1 \times L_2$  es el retículo que se muestra en la Figura 4.5.2 (c).

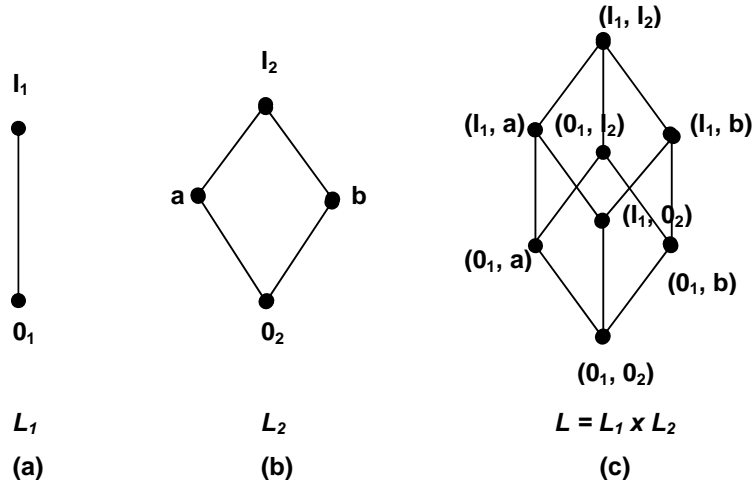


Figura 4.5.2

**DEFINICIÓN 4.15.-** Sea  $(L, \leq)$  un retículo. A un subconjunto no vacío  $S$  de  $L$  se lo denomina un **subretículo** de  $L$  si se cumplen las siguientes condiciones:  $a \wedge b \in S$  y  $a \vee b \in S$  siempre que  $a \in S$  y  $b \in S$ .

**Ejemplo 4.5.5:** El retículo  $D_n$  de todos los divisores positivos de  $n$  (véase Ejemplo 4.5.3) es un subretículo  $Z^+$  bajo la relación de divisibilidad (véase el Ejemplo 4.5.2).

Sea  $(L, \leq)$  un subretículo con junta  $\vee$  y reunión  $\wedge$  y sea  $(L', \leq')$  un retículo con junta  $\vee'$  y reunión  $\wedge'$ . A una función  $f: L \rightarrow L'$  que sea inyectiva y sobreyectiva se denomina isomorfismo de  $(L, \leq)$  en  $(L', \leq')$  si para cualquier  $a$  y  $b$  en  $L$  se tiene:

$$f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b) \quad \text{y} \quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b)$$

Si  $f: L \rightarrow L'$  es un isomorfismo se dice que  $L$  y  $L'$  son isomorfas

Si  $(L, \leq)$  y  $(L', \leq')$  son retículos isomorfos bajo el isomorfismo  $f: L \rightarrow L'$  no es difícil demostrar que se cumple la siguiente condición:

$$a \leq b \text{ si y sólo si } f(a) \leq f(b)$$

Esto significa que dos retículos son isomorfos si y sólo si los diagramas de Hasse de los dos retículos son idénticos o los vértices del diagrama de Hasse de  $L$  pueden reetiquetarse de tal manera que den por resultado un diagrama idéntico al diagrama de Hasse de  $L'$ .

### Propiedades de los Retículos

Antes de probar cierto número de propiedades de los retículos, se recordara el significado de la junta  $a \vee b$  y de la reunión  $a \wedge b$ .

1.  $a \leq a \vee b$  y  $b \leq a \vee b$  ( $a \vee b$  es una cota superior de  $a$  y  $b$ ).
2. Si  $a \leq c$  y  $b \leq c$ , entonces  $a \vee b \leq c$  ( $a \vee b$  es la mínima cota superior o supremo de  $a$  y de  $b$ ).
3.  $a \wedge b \leq a$  y  $a \wedge b \leq b$  ( $a \wedge b$  es la cota inferior de  $a$  y  $b$ ).
4. Si  $a \leq c$  y  $b \leq c$ , entonces  $c \leq a \wedge b$  ( $a \wedge b$  es la máxima cota inferior o ínfimo de  $a$  y de  $b$ ).

**TEOREMA 4.3.-** Sea  $L$  un retículo. Entonces, para cualquier  $a$  y  $b$  en  $L$ :

- (a).  $a \vee b = b$  si y solo si  $a \leq b$ .
- (b).  $a \wedge b = a$  si y sólo si  $a \leq b$ .
- (c).  $a \wedge b = a$  si y sólo si  $a \vee b = b$

**Ejemplo 4.5.6:** Sea  $L$  un conjunto parcialmente ordenado. Si  $a$  y  $b \in L$ , entonces o  $a \leq b$  o también  $b \leq a$ . Se sigue del Teorema 4.3 que  $L$  es un retículo, ya que cada par de elementos tiene una mínima cota superior o supremo y una máxima cota inferior o ínfimo.

**TEOREMA 4.4.-** Sea  $L$  un retículo. Entonces:

1. (a)  $a \vee a = a$   
(b)  $a \wedge a = a$  **Propiedad de Idempotencia**
2. (a)  $a \vee b = b \vee a$   
(b)  $a \wedge b = b \wedge a$  **Propiedad Conmutativa**
3. (a)  $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$   
(b)  $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$  **Propiedad Asociativa**
4. (a)  $a \vee (a \wedge b) = a$   
(b)  $a \wedge (a \vee b) = a$  **Propiedad de Absorción**

**TEOREMA 4.5.-** Sea  $L$  un retículo. Entonces para cada  $a$ ,  $b$  y  $c$  en  $L$ :

1. Si  $a \leq b$ , entonces (a)  $a \vee c \leq b \vee c$  (b)  $a \wedge b \leq b \wedge c$
2.  $a \leq c$  y  $b \leq c$  si y sólo si  $a \vee b \leq c$
3.  $c \leq a$  y  $c \leq b$  si y sólo si  $c \leq a \wedge b$
4. Si  $a \leq b$  y  $c \leq d$  entonces:  
(a).  $a \vee c \leq b \vee d$   
(b).  $a \wedge c \leq b \wedge d$

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

### Tipos Especiales de Retículos

Un Retículo  $L$  se lo denomina **acotado** si tiene un elemento máximo  $1$  y un elemento mínimo  $0$ .

**Ejemplo 4.5.7:** Un Retículo  $\mathbf{Z}^+$  bajo la relación de orden parcial de divisibilidad, como se define en el Ejemplo 4.5.2, no es un retículo acotado ya que tiene un elemento mínimo, el número 1, pero no tiene un elemento máximo.

**Ejemplo 4.5.8:** Un Retículo  $\mathbf{Z}$  bajo la relación de orden parcial de  $\leq$  no es un retículo acotado ya que no tiene ni un elemento máximo ni un elemento mínimo.

**Ejemplo 4.5.9:** Un Retículo  $\mathbf{P(S)}$  de todos los subconjuntos de un conjunto  $\mathbf{S}$ , como se define en el Ejemplo 4.5.1, es un retículo acotado. Su elemento máximo es  $\mathbf{S}$  y su elemento mínimo es el conjunto vacío  $\emptyset$ .

Si  $L$  es un retículo acotado, entonces para todo  $a \in A$ , se cumple lo siguiente:

$$0 \leq a \leq 1$$

$$a \vee 0 = a \quad a \wedge 0 = 0$$

$$a \vee 1 = 1 \quad a \wedge 1 = a$$

**TEOREMA 4.6.-** Sea  $L = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un retículo finito. Entonces  $L$  es un retículo acotado.

A un retículo se lo denomina **distributivo** si para cualesquier elemento  $a, b$  y  $c$  en  $L$  se cumplen las siguientes **leyes distributivas**:

$$(a). \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$(b). \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Si  $L$  no es distributiva, se dice que el retículo  $L$  es **no distributivo**.

**Ejemplo 4.5.10:** Un Retículo  $\mathbf{P(S)}$  de todos los subconjuntos de un conjunto  $\mathbf{S}$ , como se define en el Ejemplo 4.5.1, es un retículo distributivo, ya que la unión y la intersección (junta y reunión, respectivamente) satisfacen la ley distributiva.

**TEOREMA 4.7.-** Sea un retículo  $L$  acotado con un elemento máximo  $1$  y un elemento mínimo  $0$  y sea  $a \in L$ . A un elemento  $a' \in L$ , se lo denominará **complemento de  $a$**  si se cumplen las siguientes condiciones:

$$a \vee a' = 1 \quad y \quad a \wedge a' = 0$$

Obsérvese que también se cumplen las siguientes igualdades:

$$0' = 1 \quad y \quad 1' = 0$$

**Ejemplo 4.5.11:** Un Retículo  $\mathbf{P(S)}$  de todos los subconjuntos de un conjunto  $\mathbf{S}$ , como se define en el Ejemplo 4.5.1, es tal que cada elemento tiene un complemento, ya que si  $A \in L$ , entonces su conjunto complementario  $A'$  tiene las propiedades  $A \vee A' = S$  y  $A \wedge A' = \emptyset$ .

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

**TEOREMA 4.8.-** Sea  $L$  un retículo acotado y distributivo. Si existe un complemento este deberá ser único.

**Ejemplo 4.5.12:** Un Retículo  $P(S)$  de todos los subconjuntos de un conjunto  $S$ , es complementado. Obsérvese que, en este caso, cada elemento de  $L$  tiene un complemento único, lo que puede verse directamente.

#### 4.6.- ÁLGEBRA DE BOOLE COMO UN SISTEMA AXIOMÁTICO

##### 4.6.1.- CONCEPTO

Un Sistema Axiomático que conduce al **Álgebra de Boole**, consiste de los siguientes elementos definidos acorde a la definición previamente considerada.

##### A.- **Términos Primitivos**

Compuesto de un conjunto no vacío de elementos,  $B \neq \emptyset$ , y dos funciones o aplicaciones, denominadas comúnmente como **Junta o Suma Lógica**  $(+, \vee)$  y **Reunión o Producto Lógico**  $(\cdot, \wedge)$ .

##### B.- **Axiomas**

**B<sub>1</sub>:** La junta  $(\vee)$  y la reunión  $(\wedge)$  son ambas leyes de composición interna dentro del conjunto  $B$ .

$$\forall a, b \in B \rightarrow a \vee b \in B$$

$$\forall a, b \in B \rightarrow a \wedge b \in B$$

**B<sub>2</sub>:** La junta  $(\vee)$  y la reunión  $(\wedge)$  son ambas leyes conmutativas dentro del conjunto  $B$ .

$$\forall a, b \in B : a \vee b = b \vee a$$

$$\forall a, b \in B : a \wedge b = b \wedge a$$

**B<sub>3</sub>:** La junta  $(\vee)$  y la reunión  $(\wedge)$  son ambas leyes asociativas dentro del conjunto  $B$ .

$$\forall a, b, c \in B : a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c;$$

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

**B<sub>4</sub>:** La junta  $(\vee)$  y la reunión  $(\wedge)$  son ambas leyes distributivas, cada una de ellas con respecto de la otra, dentro del conjunto  $B$ .

$$\forall a, b, c \in B : a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

**B<sub>5</sub>:** Existen elementos Neutros dentro de  $B$  con respecto a la junta  $(\vee)$  y a la reunión  $(\wedge)$ , los que se denotan por **0** y **1** tal que:

$$\forall a, b \in B : a \vee 0 = a ;$$

$$a \wedge 1 = a$$

**B<sub>6</sub>:** Todo elemento de  $B$  admite un elemento inverso (complementario), con respecto a la junta  $(\vee)$  y a la reunión  $(\wedge)$ , al que se denota por **a'**, tal que:

$$\forall a, b \in B : a \vee a' = 1 ;$$

$$a \wedge a' = 0$$

**Ejemplo 4.6.1:** El siguiente ejemplo es un modelo del Álgebra de Boole muy particular. Consideremos el siguiente conjunto:



$$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} = \{x \in \mathbb{N} : x \mid 30\}$$

$\vee \equiv$  Denota el Mínimo Común Múltiplo (MCM).

$\wedge \equiv$  Denota el Máximo Común Divisor (MCD).

Con elementos neutros 1 y 30 respectivamente.

#### 4.6.2.- PRINCIPIO DE DUALIDAD EN EL ÁLGEBRA DE BOOLE

Denominamos proposición dual, de una proposición del Álgebra de Boole, a la que se deduce de esta última intercambiando los símbolos de junta ( $\vee$ ) y reunión ( $\wedge$ ) y también sus elementos neutros 0 y 1.

Este principio establece que el dual de un Axioma o Teorema del Álgebra de Boole, es también un Axioma o Teorema del mismo sistema axiomático

#### 4.6.3.- TEOREMAS EN EL ÁLGEBRA DE BOOLE

Sea  $(B, \vee, \wedge)$  un Álgebra de Boole, en función de ello demostraremos algunos de los teoremas básicos.

##### (1) Idempotencia

$$\forall a \in B : a \wedge a = a$$

por dualidad  $a \vee a = a$

$$\begin{aligned} a \wedge 1 &= a \text{ (p/ } B_5) \Rightarrow a \wedge (a \vee a') = a \text{ (p/ } B_6) \Rightarrow \\ (a \wedge a) \vee (a \wedge a') &= a \text{ (p/ } B_4) \Rightarrow (a \wedge a) \vee 0 = a \text{ (p/ } B_6) \Rightarrow \\ a \wedge a &= a \text{ (p/ } B_5) \end{aligned}$$

Por el principio de dualidad tenemos que:

$$(1)' \quad \forall a \in B \Rightarrow a \vee a = a$$

##### (2) Elemento Neutro

$$a \vee 1 = 1$$

En efecto, por  $B_6$ ,  $B_3$ ,  $(1)'$  y  $B_6$  tenemos:

$$a \vee 1 = a \vee (a \vee a') = (a \vee a) \vee a' = a \vee a' = 1$$

Por dualidad resulta que:

$$(2)' \quad a \wedge 0 = 0$$

##### (3) Ley Involutiva

$$\forall a \in B \Rightarrow (a')' = a$$

Aplicando sucesivamente  $B_5$ ,  $B_6$ ,  $B_2$ ,  $B_4$ ,  $B_2$ ,  $B_6$ ,  $B_6$ ,  $B_4$ ,  $B_6$  y  $B_5$  resulta:

$$(a')' = (a')' \vee 0 = (a')' \vee (a \wedge a') = (a')' \vee (a' \wedge a) =$$





$$= [(a')' \vee a'] \wedge [(a')' \vee a] = [a' \vee (a'')] \wedge [a \vee (a'')] = \\ = 1 \wedge [a \vee (a'')] = (a \vee a') \wedge [a \vee (a'')] = a \vee [a' \wedge (a'')] = a \vee 0 = a$$

**(4) Ley de De Morgan**

$$(a \vee b)' = a' \wedge b' \text{ y la forma dual correspondiente } (a \wedge b)' = a' \vee b'$$

Consideremos:

$$(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = (a' \wedge b') \wedge (a \vee b) = \\ = [(a' \wedge b') \wedge a] \vee [(a' \wedge b') \wedge b] = [(b' \wedge a') \wedge a] \vee [(a' \wedge b') \wedge b] = \\ = [b' \wedge (a' \wedge a)] \vee [a' \wedge (b' \wedge b)] = (b' \wedge 0) \vee (a' \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$$

O sea:

$$(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = 0 \quad (1)$$

Análogamente, se llega a:

$$(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = 1 \quad (2)$$

De (1) y (2) resulta que:

$$(a \vee b)' = a' \wedge b'$$

La forma dual de la Ley de De Morgan es:

$$(a \wedge b)' = a' \vee b'$$

**Ejemplo 4.6.2:**

Sea  $(B, \vee, \wedge)$  un álgebra booleana, tal que  $B = \{0, 1\}$ . Podemos representar las dos operaciones definidas a través del Álgebra de Boole por medio de tablas denominadas **tablas de verdad**, de una manera análoga a la lógica proposicional.

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Además tenemos que:  $0' = 1$  y  $1' = 0$

El álgebra representada en el presente ejemplo es la más simple y al mismo tiempo la más útil y es la base de toda la tecnología digital binaria, una de cuyas aplicaciones más importantes es la computación tanto en lo referente al hardware como al software.

**Ejemplo 4.6.3:**

Sea  $B$  el álgebra de Boole del Ejemplo 4.6.2, en consecuencia el conjunto parcialmente ordenado  $B^n$ :

$$B^n = \{(b_1, b_2, \dots, b_n) / b_i \in B \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}$$



es también un Álgebra de Boole. Si consideramos que:

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in B^n \quad y \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in B^n$$

entonces:

$$a \vee b = (a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2, \dots, a_n \vee b_n)$$

$$a \wedge b = (a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2, \dots, a_n \wedge b_n)$$

$$a' = (a_1', a_2', \dots, a_n')$$

$$0_{B^n} = (0, 0, 0, \dots, 0) \quad y \quad 1_{B^n} = (1, 1, 1, \dots, 1)$$

#### 4.6.4.- TABLAS DE VERDAD EN EL ALGEBRA DE BOOLE

Podemos representar las dos operaciones definidas a través del Álgebra de Boole por medio de tablas denominadas **tablas de verdad**, de una manera análoga a la lógica proposicional.

La tabla del **AND** es:

a	b	AND (a ∧ b)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La tabla del **OR** es:

a	b	OR (a ∨ b)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La tabla del **NOR** es:

a	b	NOR (a ∨ b)'
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

La tabla del **NOT** es:

a	NOT (a)'
0	1
1	0

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

#### 4.7.- LAS FUNCIONES EN EL ÁLGEBRA DE BOOLE $B^n$

Sea  $B = \{0, 1\}$  y sea  $B^n$  álgebras de Boole tal cual se las definió anteriormente. Podemos entonces discutir las **funciones  $f$  de  $B^n$**  en  $B$ . Para estas funciones  $f$  y para cualquier  $n$ -tupla  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$ ,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es 0 o 1. Estas funciones pueden verse como funciones de "n variables", donde cada una de ellas sólo toma los valores 0 y 1. Es frecuente expresarlas a través de tablas dando cada  $n$ -tupla posible  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y el valor correspondiente de la función  $f$ . La figura 4.6.1(a) nos muestra una función  $f$  particular de tres variables; o sea,  $f: B^3 \rightarrow B$ . Cualquier distribución posible de  $2^m$  ceros y unos puede ser el conjunto de los valores de alguna función de la siguiente forma  $f: B^m \rightarrow B$ .

La importancia de tales funciones es que, tal como lo muestra la Figura 4.6.1 (b) esquemáticamente, pueden usarse para representar los requerimientos de salida de un circuito para todos los posibles valores de las entradas. Y así cada  $x_i$  representa una entrada al circuito capaz de transportar dos voltajes indicadores (un voltaje para cero y otro diferente para el uno). La función  $f$  representa la respuesta de salida deseada en todos los casos. Tales requerimientos se presentan al diseñar los pasos de todas las combinaciones y secuencias de los circuitos para computadora. Como antes, las tablas de la figura 4.6.1(a) son denominadas a menudo como **tablas de verdad** de  $f$ , debido a la analogía con la lógica proposicional.

Obsérvese que la especificación de una función  $f: B^n \rightarrow B$  es sólo una lista de los requerimientos del circuito. Esto no da indicación alguna de cómo esos requerimientos se satisfacen. Una manera importante de generar funciones es utilizando las denominadas expresiones booleanas, las que pasaremos a detallar a continuación.

##### 4.7.1.- EXPRESIONES EN EL ÁLGEBRA DE BOOLE $B^n$

Sea  $x_1, x_2, \dots, x_n$  un conjunto de  $n$  símbolos o variables. Una **expresión booleana** es  $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$  o un **polinomio booleano** en  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se define recursivamente de la siguiente forma:

- 1.-  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son expresiones booleanas.
- 2.- Los símbolos 0 y 1 son expresiones booleanas.
- 3.- Si  $E_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $E_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  son expresiones booleanas en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , entonces también lo son las siguientes expresiones:

$$E_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge E_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$E_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee E_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(E_1(x_1, x_2, \dots, x_n))'$$

- 4.- No existirán otras expresiones booleanas; sólo las que se obtengan al utilizar las reglas mencionadas en los puntos 1, 2 y 3.

**Ejemplo 4.7.1:** Las siguientes expresiones son booleanas en  $x, y, z$ .

$$E_1(x, y, z) = (x \vee y) \wedge z$$

$$E_2(x, y, z) = (x \vee y') \vee (y \wedge 1)$$



$$E_3(x, y, z) = (x \vee (y' \wedge z)) \vee (x \wedge y \wedge l)$$

$$E_4(x, y, z) = (x \vee y \vee z') \wedge (x' \wedge z) \wedge (y' \vee 0)$$

Los polinomios comunes en varias variables, tales como  $x^2y + z^4$ ,  $xy + yz + x^2y^2$ ,  $x^3y^3 + xz^4$ , etc., suelen interpretarse como expresiones que representan cálculos algebraicos con números no especificados. Por tanto, están sujetos a las reglas comunes de la aritmética.

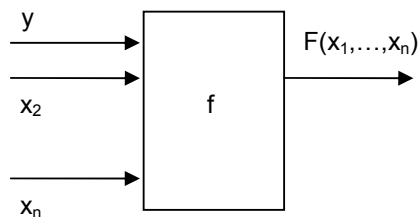
Por consiguiente, los polinomios  $x^2 + 2x + 1$  y  $(x + 1)(x + 1)$  se consideran equivalentes y también lo son  $x(xy + yz)(x + z)$  y  $x^3y + 2x^2y + xyz^2$ , ya que en cada caso podemos convertir una o la otra expresión a través de ciertos procesos matemáticos.

De igual manera, los polinomios o las expresiones booleanas pueden interpretarse como representaciones de alguna función booleana dentro de alguna álgebra de Boole determinada. Por ello, esas expresiones están sujetas a las reglas determinadas para la denominada matemática booleana y dos expresiones se consideran equivalentes si una puede convertirse en la otra a través de ciertas manipulaciones booleanas, aplicando todos los axiomas, teoremas, definiciones y reglas propias del álgebra de Boole.

Por consiguiente,  $x \wedge (y \vee z)$  y  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$  son equivalentes (a causa de la propiedad distributiva). Dos expresiones booleanas  $E_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $E_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se dice que son **equivalentes** si es posible convertir una expresión en otra utilizando un número finito de propiedades del álgebra booleana.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

(a)



(b)

Figura 4.7.1. - Ejemplo de Función Booleana

**Ejemplo 4.7.2:** Demostrar que las siguientes expresiones booleanas son equivalentes:

$$E_1(x, y, z) = (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z')$$

$$E_2(x, y, z) = x \wedge z'$$

Para encontrar la solución procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E_1(x, y, z) &= (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z') = (x \wedge z' \wedge y) \vee (x \wedge z' \wedge y') = \\ &= (x \wedge z') \wedge (y \vee y') = (x \wedge z') \wedge I = x \wedge z' = E_2(x, y, z) \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.7.3:** Describir la función booleana  $f: B^3 \rightarrow B$  determinada por la expresión booleana siguiente:  $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \vee (x_2' \wedge x_3))$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \vee (x_2' \wedge x_3))$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

**Figura 4.7.1: Ejemplo de Expresión y Función Booleana**

La función booleana  $f: B^3 \rightarrow B$  se describe al sustituir todas las  $2^3$  triplas ordenadas de valores de  $B$  para  $x_1, x_2, x_3$ . La tabla de verdad para esa función es la indicada en la Figura 4.6.2.

Hemos discutido las funciones booleanas generales  $f: B^n \rightarrow B$ , y se mostró cómo algunas de estas funciones surgen de expresiones booleanas. Estas últimas son muy importantes ya que pueden expresarse por completo en términos de las funciones  $\vee, \wedge, y'$ . Así, estas funciones podrán expresarse esquemáticamente en un diagrama lógico, utilizando los símbolos de las compuertas digitales. Estos símbolos constituyen los módulos de construcción básicos para los circuitos digitales, por lo cual una función dada por una expresión booleana contiene una descripción de los circuitos que la pueden implementar.

#### 4.8.- IMPLEMENTACIÓN DE FUNCIONES BOOLEANAS

En la sección anterior examinamos las funciones de  $B^n$  en  $B$ , donde  $B$  es el álgebra de Boole  $\{0, 1\}$ . Se observó que tales funciones pueden representar requerimientos de entrada y salida para modelos de muchos y prácticos circuitos de computadoras. También se indicó que,

si la función está dada por alguna expresión booleana, es posible construir un diagrama lógico con ella y así modelar la implementación de la función. En esta sección se mostrará que todas las funciones de  $B^n$  en  $B$  están dadas por expresiones booleanas y, por lo tanto, los diagramas lógicos pueden construirse para cualquiera de esas funciones. Este análisis ilustra el método de encontrar una expresión booleana que produce una función dada.

**TEOREMA 4.9.-** Si  $f: B^n \rightarrow B$  y  $S(f) = \{b \in B^n / f(b) = 1\}$ , tendremos las siguientes hipótesis:

Sean  $f, f_1$  y  $f_2$  tres funciones de  $B^n$  en  $B$ .

(a) Si  $S(f) = S(f_1) \cup S(f_2)$ , entonces  $f(b) = f_1(b) \vee f_2(b) \quad \forall b \in B$ .

(b) Si  $S(f) = S(f_1) \cap S(f_2)$ , entonces  $f(b) = f_1(b) \wedge f_2(b) \quad \forall b \in B$ .

**Demostración:**

(a) Sea  $b \in B^n$ . Si  $b \in S(f)$ , entonces por la definición de  $S(f)$ ,  $f(b) = 1$ . Ya que  $S(f) = S(f_1) \cup S(f_2)$ , o  $b \in S(f_1)$  o  $b \in S(f_2)$  o ambas. En cualquier caso,  $f_1(b) \vee f_2(b) = 1$ . Ahora si  $b \notin S(f)$ , entonces  $f(b) = 0$ . Además, se deberá tener que  $b \notin S(f_1)$ , y que  $b \notin S(f_2)$ , por lo cual  $f_1(b) = 0$  y  $f_2(b) = 0$ . Esto significa que  $f_1(b) \vee f_2(b) = 0$ . Por consiguiente, para todas las  $b \in B^n$ ,  $f(b) = f_1(b) \vee f_2(b)$ .

(b) Esta parte se prueba de manera análoga a la de (a).

**Ejemplo 4.8.1:** Sea  $f_1: B^2 \rightarrow B$  producida por la expresión  $E(x, y) = x'$ , y sea  $f_2: B^2 \rightarrow B$  producida por la expresión  $E(x, y) = y'$ . Entonces las tablas de verdad de  $f_1$  y  $f_2$  se indican en la Figura 4.8.1 (a) y (b), respectivamente.

x	y	$f_1(x, y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

(a)

x	y	$f_2(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

(b)

x	y	$f(x, y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(c)

**Figura 4.8.1. - Ejemplos de Funciones de Boole**

Sea  $f: B^2 \rightarrow B$  la función cuya tabla de verdad se indica en la Figura 4.8.1(c). Esta claro que  $S(f) = S(f_1) \cup S(f_2)$ , ya que  $f_1$  es 1 en los elementos  $(0,0)$  y  $(0,1)$  de  $B^2$ ,  $f_2$  es 1 en los elementos  $(0,0)$  y  $(1,0)$  de  $B^2$ , y  $f$  es 1 en los elementos  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  y  $(1,0)$  de  $B^2$ . Por el Teorema 4.6.1,  $f = f_1 \vee f_2$ , por lo cual la expresión de Boole que produce  $f$  es  $x' \vee y'$ .



**Ejemplo 4.8.2:** Sea  $f: B^2 \rightarrow B$  la función cuya tabla de verdad se indica en la Figura 4.8.2(a). Esta función es igual a 1 sólo en el elemento  $(0,1)$  de  $B^2$ , o sea,  $S(f) = \{(0,1)\}$  producida por la expresión. Por lo tanto,  $f(x, y) = 1$  sólo cuando  $x = 0$  y  $y = 1$ . Esto también es verdadero para la expresión  $E(x, y) = x' \wedge y$ , por la cual produce esta expresión. La siguiente tabla de verdad muestra la correspondencia entre las funciones que son 1 sólo en un elemento y las expresiones booleanas que producen estas funciones.

S(f)	Expresión
$\{(0,0)\}$	$x' \wedge y'$
$\{(0,1)\}$	$x' \wedge y$
$\{(1,0)\}$	$x \wedge y'$
$\{(1,1)\}$	$x \wedge y$

x	y	f(x, y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

x	y	z	f(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

(a)

(b)

Figura 4.8.2 - Tablas de Verdad del Ejemplo 4.8.2

La función  $f: B^3 \rightarrow B$  cuya tabla de verdad en la Figura 4.8.2 (b) tiene  $S(f) = \{(0,1,1)\}$ , esto es,  $f$  es igual a 1 sólo cuando  $x = 0$ ,  $y = 1$  y  $z = 1$ . Esto también se cumple en la expresión booleana  $x' \wedge y \wedge z$ , que por tanto deberá producir  $f$ . Si  $b \in B^n$ , entonces  $b$  es una sucesión  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  de longitud  $n$ , donde cada  $c_i$  es cero o uno. Sea  $E_b$  la expresión booleana  $\tilde{a}_1 \wedge \tilde{a}_2 \wedge \dots \wedge \tilde{a}_n$ , donde  $\tilde{a}_k = a_k$  cuando  $c_k = 1$  y  $\tilde{a}_k = a_k'$  cuando  $c_k = 0$ . A esta expresión se la denomina **minitérmino**.

Estas expresiones booleanas obtenidas a través de la disyunción de minitérminos son denominadas formas canónicas o formas normales. Existen dos formas normales: la **forma normal disyuntiva** o **disyunción de minitérminos** y la **forma normal conjuntiva** o **conjunción de maxitérminos**.

**TEOREMA 4.10.-** Cualquier función  $f: B^n \rightarrow B$  está producida por una expresión booleana.

**Demostración:**

Sea  $S(f) = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ , y para cada  $i$ , sea  $f_i: B^n \rightarrow B$  la función definida por:

$$f_i(b_j) = 1 \quad ; \quad f_i(b) = 0 \text{ si } b \neq b_i$$

Entonces  $S(f_i) = \{b_i\}$ , por lo cual  $S(f) = S(f_1) \cup S(f_2) \cup \dots \cup S(f_n)$  y según el Teorema 4.3,

$$f = f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_n$$



Por la explicación anterior, cada  $f$  está producida por un minitérmino  $E_{bi}$ . En consecuencia  $f$  está producida por la expresión booleana:

$$E_{b1} \vee E_{b2} \vee \dots \vee E_{bn}$$

y con esto último se comprueba la prueba.

El teorema anterior tiene su dual. En este caso la función  $f$  se expresa de la siguiente forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = M_1 \wedge M_2 \wedge \dots \wedge M_k$$

Cada elemento  $M_j$ , denominado maxitérmino es de la forma:

$$M_j = y_1 \vee y_2 \vee \dots \vee y_n$$

donde  $y_j$  es  $x_j$  o  $x'_j$ . Cada maxitérmino es obtenido de la función en aquellas interpretaciones donde la misma toma el valor 0.

**Ejemplo 4.8.3:** Examinar la función  $f: B^3 \rightarrow B$  cuya tabla de verdad se indica en la Figura 4.8.3. Ya que  $S(f) = \{(0,1,1), (1,1,1)\}$ , el teorema 4.3 demuestra que  $f$  está producida por la siguiente expresión

$$E(x, y, z) = E_{(0,1,1)} \vee E_{(1,1,1)} = (x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z).$$

Esta expresión, sin embargo, no es la expresión booleana más simple que produce a  $f$ . Al utilizar las propiedades del álgebra de Boole, obtenemos:

$$(x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) = (x' \vee x) \wedge (y \wedge z) = 1 \wedge (y \wedge z) = y \wedge z$$

Por lo tanto,  $f$  es producida por la expresión simple obtenida, o sea  $y \wedge z$ .

$x$	$y$	$z$	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Figura 4.8.3 - Tabla de Verdad correspondiente al Ejemplo 4.8.3





#### 4.9.- PROBLEMAS CAPITULO IV.

##### A. RELACIONES Y RETÍCULO

- 1.- Sea  $R$  la relación sobre el conjunto  $Z$  definida por  $x R y \Leftrightarrow y = \lfloor x \rfloor$ . Determinar su dominio y su imagen. Construir la representación cartesiana de  $R$ . Describir y representar gráficamente la relación  $R$ .

- 2.- Se considera la siguiente relación en el conjunto de los números naturales  $N$ :

$$R = \{(x, y) \mid 2x + y = 16\}$$

Se pide: (a) Definir por extensión  $R$ ; (b) Dominio y rango de  $R$ , (c) Relación  $R^{-1}$ , por extensión.

- 3.- Sea  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $a R b$  la relación que significa " $a$  es divisor de  $b$ ". Definir por extensión el dominio y la imagen de la relación dada, de la relación inversa y de la complementaria. Construir los dígrafos y las matrices de incidencia de las tres relaciones indicadas.

- 4.- Dados los conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$  y  $C = \{x, y, z\}$  y las siguientes relaciones:

$$R = \{(1, b), (2, a), (2, c)\} \quad y \quad F = \{(a, y), (b, x), (c, y), (c, z)\}$$

Se pide encontrar (a) la composición de las dos relaciones  $R \circ F$  y la matriz de incidencia de la composición y (b) la matriz de incidencia de la unión  $R \cup F$ , de la intersección  $R \cap F$  y de las relaciones inversas de la unión e intersección.

- 5.- Sobre el conjunto de los números enteros se da la siguiente relación  $x R y$ , cuyo significado es:

$$\lfloor x - y \rfloor = \text{mod } 2$$

Probar que  $R$  es una relación de equivalencia y encontrar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

- 6.- Estudiar si las siguientes relaciones son relaciones de orden o de equivalencia:

- i) Sea el conjunto  $N_7$  y la relación  $a R b$  si  $a + b < 9$ .
- ii) Sea el conjunto  $R$  de las rectas del plano y la relación de paralelismo, esto es,  $r R r'$  si  $r$  y  $r'$  son paralelas.
- iii) Sea el conjunto  $A = \{a, b, c, d, 1, 2, 3\}$ . En él definimos una relación por la cual dados  $m, n \in A$   $m R n$  si o bien  $m$  y  $n$  son ambos números o bien  $m$  y  $n$  son ambas letras.
- iv) Sea el conjunto  $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 90\}$ . En él definimos la siguiente relación  $S$ ,  $a S b$  si  $3a > b$ .

- 7.- Sobre el conjunto de los números reales se da la siguiente relación  $(x, y) R (r, s)$ , cuyo significado es:

$$x + s = y + r$$

Probar que  $R$  es una relación de equivalencia y encontrar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

- 8.- Representar mediante dígrafos y sus matrices las relaciones del ejercicio Nro. 6 definidas sobre conjuntos finitos.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

- 9.- En las relaciones del ejercicio 6 definidas sobre conjuntos finitos que no sean reflexivas (respectivamente simétricas, respectivamente transitivas) calcular su clausura reflexiva (respectivamente simétrica, respectivamente transitiva).
- 10.- Tomar la clausura reflexiva y transitiva de la relación definida en el siguiente conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  como:  $R = \{(1, 2), (1, 4), (3, 6), (5, 4)\}$   
Verificar que es una relación de orden. Representar su diagrama de Hasse. Calcular elementos maximales, minimales y máximos y mínimos si los hubiera.
- 11.- Describir el conjunto cociente del Problema 6 ii).
- 12.- Sea el conjunto  $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \omega\}$ . Tomamos la siguiente relación en él:  
 $R = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\gamma, \omega)\}$ .  
Construir la clausura reflexiva y transitiva de  $R$  y verificar que es una relación de orden. Representar su diagrama de Hasse y construir una relación de orden total que contenga a  $R$ .
- 13.- Sobre el conjunto de los números enteros se da la siguiente relación  $x R y$ , cuyo significado es:  
$$x R y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$
  
Comprobar que  $R$  es una relación de equivalencia y en caso afirmativo, encontrar los conjuntos que forman las clases de equivalencia de  $[a]$  y de  $[1999]$ , respecto de  $Z$ .
- 14.- Determinar si las siguientes relaciones son relaciones de orden:  
(a)  $R = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, c), (c, d), (d, d)\}$  sobre  $A = \{a, b, c, d\}$   
(b)  $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c), (d, d)\}$  sobre  $A = \{a, b, c, d\}$   
(c)  $R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (b, a), (c, c), (c, b), (d, d), (d, c)\}$  sobre  $A = \{a, b, c, d\}$   
Construir los digrafos correspondientes y sus matrices de incidencia.
- 15.- Hallar dos elementos incomparables en los siguientes conjuntos ordenados:  
(a)  $(P(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$ . (b)  $(Z, /)$  (c)  $(\{1, 3, 5, 7, 9\}, /)$
- 16.- Demostrar que el máximo de un conjunto parcialmente ordenado, si existe, es único.
- 17.- Demostrar que si  $(A, R)$  es un conjunto parcialmente ordenado, donde  $A$  es un conjunto finito no vacío, entonces  $A$  posee un elemento maximal.
- 18.- ¿Cuales de los siguientes pares de elementos son comparables en el conjunto de los números enteros con la relación de orden de divisibilidad?  
(a) 7, 21 (b) 24, -8 (c) -2, -5  
(d) 75, 5 (e) 8, 33 (f) 91, 9
- 19.- Describir todos los pares ordenados en cada uno de los órdenes parciales representados por los diagramas de Hasse de la Figura 4.9.1.
- 20.- Dibujar el diagrama de Hasse de  $(P(\{a, b, c, d\}), \subseteq)$ .
- 21.- Hallar las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo del conjunto  $B$  (si existen) en cada uno de los casos de la Figura 4.9.2 y de cada uno de los diagramas de Hasse de la Figura 4.9.3.

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

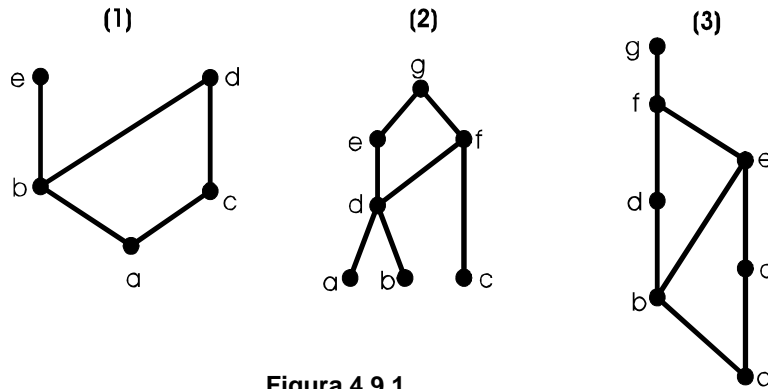


Figura 4.9.1

22.- Representar el diagrama de Hasse de los siguientes conjuntos ordenados y hallar los elementos notables de los subconjuntos señalados:

- (a)  $(D_{60}, /)$ ,  $A = \{2, 5, 6, 10, 12, 30\}$  y  $B = \{2, 3, 6, 10, 15, 30\}$   
 (b)  $(D_{48}, /)$ ,  $A = \{2, 4, 6, 12\}$  y  $B = \{3, 6, 8, 16\}$

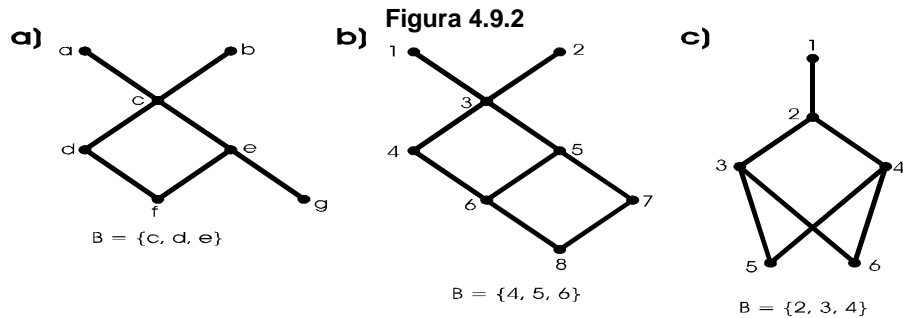
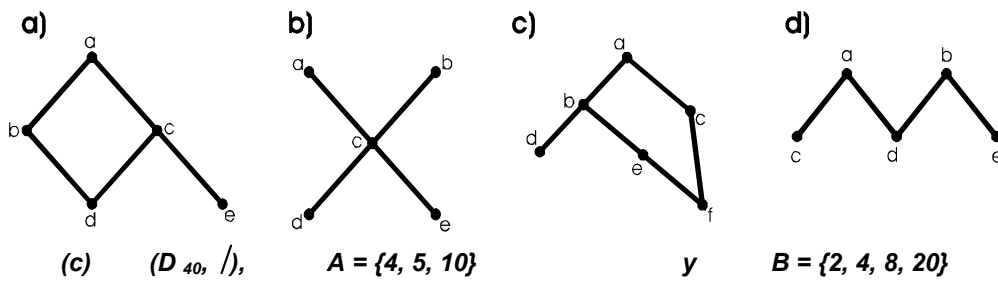


Figura 4.9.3

23.- Se considera en el conjunto  $A = \{2, 3, 4, 6, 12, 15, 24, 90, 180, 360\}$  la relación de orden de divisibilidad. Se pide lo siguiente:

- (a) Obtener, si existen, las cotas inferiores, cotas superiores, ínfimo, supremo, mínimo, máximo, elementos minimales y maximales del conjunto  $B = \{2, 3, 4, 6, 12, 180\}$ ;  
 (b) Representar el diagrama de Hasse del conjunto ordenado  $(A, /)$ . ¿Es  $(A, /)$  un Retículo?

- 24.- Demostrar que  $(D_n, /)$  es un retículo para todo número natural  $n$ .
- 25.- Sea  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ . En  $S \times S$  se considera el orden lexicográfico basado en el orden usual  $\leq$ . Se pide:
- Encontrar todos los pares en  $S \times S$  anteriores a  $(2, 3)$ ;
  - Encontrar todos los pares en  $S \times S$  anteriores a  $(3, 1)$ ;
  - Dibujar el diagrama de Hasse de  $(S \times S, \leq_{lex})$
- 26.- Obtener los diagramas de Hasse de todos los retículos, salvo isomorfismos, de uno, dos, tres, cuatro y cinco elementos.

## B.- ÁLGEBRA DE BOOLE

- 1.- Verifique los axiomas que definen al Álgebra de Boole en el conjunto de los enteros divisores de 6 adonde están definidas las operaciones “máximo común divisor” (M) y “mínimo común múltiplo” (m).
- 2.- Los axiomas del Álgebra de Boole también se cumplen cuando los elementos en cuestión son conjuntos y las operaciones son las conocidas “unión” e “intersección” entre conjuntos. Suponiendo que A, B y C son subconjuntos de un universo U y siendo  $\emptyset$  el conjunto vacío, diga Verdadero o Falso, justificando su respuesta:
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - Si  $U = \{a, b, c, d\}$  y  $A = \{a, b, c\}$ , entonces  $\bar{A} = \{a, d\}$
  - $(A \cup \emptyset) \cap \bar{A} = \emptyset$
  - $B \cup (B' \cap U) = (A \cup A')$
- 3.- Un contacto, tal como una llave común de luz eléctrica, presenta dos estados “cerrado” o “abierto”. Los mismos suelen identificarse con los símbolos 1 y 0, respectivamente, pero con un significado cualitativo “si-no” o “V-F”, éste último por su relación con la lógica clásica. En el conjunto de contactos, se definen las operaciones “combinar contactos en paralelos” o “combinar contactos en serie”. Verifique que dicho conjunto es un Álgebra de Boole.
- 4.- Demostrar directamente que no existen álgebras booleanas que tengan tres elementos.
- 5.- Demostrar que en un álgebra booleana, para cualquier  $a$  y  $b$ , se cumple que:  $a = b$  si y solo si  $(a \wedge b') \vee (a' \wedge b) = 0$ .
- 6.- Demostrar que en un álgebra booleana, para cualquier  $a$ ,  $b$  y  $c$  se cumplen las siguientes expresiones lógicas de Boole:
- $(a \wedge b) \vee (a \wedge b') = a$
  - $b \wedge (a \vee (a' \wedge (b \vee b'))) = b$
  - $((a \vee c) \wedge (b' \vee c))' = (a' \vee b) \wedge c'$
  - $(a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) = b \wedge c$
  - $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge c) = c$
  - $a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

- 7.- Sea el conjunto  $B = \{0, 1\}$  con  $\vee, \wedge$  definidas mediante las siguientes tablas:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Demostrar que B es un Álgebra de Booleana

- 8.- Demostrar los teoremas más importantes que se deducen de los axiomas que definen al Álgebra de Boole.

- |     |   |   |
|-----|---|---|
| (a) | $a \vee 1 = 1$                          | $a \wedge 0 = 0$                                |
| (b) | $a \vee a = a$                          | $a \wedge a = a$                                |
| (c) | $a \vee (a \wedge b) = a$               | $a \wedge (a \vee b) = a$                       |
| (d) | $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ | $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ |
| (e) | $(a \vee b)' = a' \wedge b'$            | $(a \wedge b)' = a' \vee b'$                    |

- 9.- Escriba los duales de los siguientes enunciados y demuestre alguno de ellos usando los axiomas y/o propiedades que se cumplen en toda Álgebra Booleana.

- (a)  $(x \vee y) \wedge (x \vee 1) = (x \vee x) \wedge (y \vee y)$   
 (b)  $(x \vee 0) \vee (1 \wedge x') = 1$   
 (c)  $x \vee (x' \wedge y) = x \vee y$   
 (d) Si  $x \vee y = x \vee z$  y  $x' \vee y = x' \vee z$ ., entonces  $y = z$   
 (e)  $x \wedge y' = 0$  si y solo si  $x \wedge y = x$

- 10.- Demuestre las siguientes igualdades usando los axiomas y/o propiedades de un Álgebra Booleana:

- (a)  $(x \wedge y) \vee (x' \vee z)' = x \wedge (y \vee z')$   
 (b)  $(x' \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (x \wedge y') = (x' \vee y')$   
 (c)  $x \wedge ((y' \wedge z) \vee x)' = y \vee z'$   
 (d)  $[(a \vee b \vee c) \wedge (b \vee c)]' = b' \wedge c'$   
 (e)  $[(a \vee c) \wedge (b' \vee c)]' = (a' \vee b) \wedge c'$   
 (f)  $[(a \vee b) \wedge a']' \vee b = 1$   
 (g)  $[(a \wedge b) \vee a']' \wedge b = 0$   
 (h) Si  $(a \vee b) = b$ , entonces  $a' \vee b = 1$   
 (j) Si  $(a \wedge b) = a$ , entonces  $a \wedge b' = 0$

- 11.- Represente las siguientes funciones booleanas por medio de un circuito combinatorio y por medio de su tabla de verdad (o tabla lógica). ¿Cuántos circuitos y cuantas tablas poseen una función booleana?

- (a)  $z = f(a, b, c) = a \vee (b' \wedge c)$   
 (b)  $z = f(a, b, c) = (a \wedge b') \vee (a \wedge c')$

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

- c)  $Z = F(A, B, C) = \overline{A + B + \overline{A.C}}$   
d)  $Z = F(A, B, C) = A . (\overline{B} + C) . (\overline{A} + B)$

12.- Suponga 3 variables  $A, B$  y  $C$

b) Diga cuáles de las siguientes expresiones son minitérminos

$$\frac{A.\overline{B}.C}{\overline{A}.\overline{B}.C} \quad \frac{A.C.\overline{C}}{\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}} \quad \frac{A.B + \overline{B}}{A.\overline{B}.C}$$

b) Diga cuáles de las siguientes expresiones son maxitérminos

$$\frac{A + C + \overline{B}}{A + \overline{A} + C} \quad \frac{\overline{A + C} + B}{A + B + \overline{C}} \quad \frac{A.\overline{C} + \overline{B}}{\overline{A} + B + \overline{C}}$$

13.- Encuentre las formas normales de las siguientes funciones dadas por su tabla:

a)

$x$	$y$	$f(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

b)

$x$	$y$	$f(x, y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

c)

$x$	$y$	$f(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

d)

$x$	$y$	$f(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

e)

$x$	$y$	$z$	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

f)

$x$	$y$	$z$	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

14.- (a) Encuentre la Forma Normal Disyuntiva o Disyunción de Minitérminos de las siguientes funciones booleanas usando técnicas algebraicas:

- I.  $F(A, B, C) = A.\overline{B} + C$   
II.  $F(A, B, C) = (A + \overline{B}).(\overline{C} + A)$   
III.  $F(A, B, C) = (ABC + \overline{B} + \overline{C}).B$   
IV.  $F(A, B, C, D) = (A + C).\overline{B} + \overline{D}$   
V.  $F(A, B, C) = A + (\overline{B} + (\overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{C}))$

(b) Encuentre la Forma Normal Conjuntiva o Producto de Maxitérminos de las siguientes funciones booleanas usando técnicas algebraicas:

- I.  $F(A, B) = \overline{B} + B.A$

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

- II.  $F(A, B, C) = B \cdot (\bar{B} + C) \cdot (A + \bar{C})$   
 III.  $F(A, B, C, D) = (A + B + \bar{C}) \cdot (D + A + \bar{B})$   
 IV.  $F(A, B, C) = \overline{A \cdot \bar{B}} \cdot (\bar{A} + C) \cdot \bar{B} \cdot C$   
 V.  $F(A, B, C) = \bar{B} \cdot C \cdot A + \bar{A} + \bar{C}$

- 15.- Examinar la siguiente expresión booleana:

$$E(x, y, z) = x \wedge (y \vee z')$$

Si  $B = \{0, 1\}$ , calcular la tabla de verdad de la función siguiente:  $f: B^3 \rightarrow B$  definida por  $E$ . Construir un diagrama lógico que implemente la función  $f$  previamente obtenida.

- 16.- Examinar la siguiente expresión booleana:

$$E(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (z \vee x')$$

Si  $B = \{0, 1\}$ , calcular la tabla de verdad de la función siguiente:  $f: B^3 \rightarrow B$  definida por  $E$ . Construir un diagrama lógico que implemente la función  $f$  previamente obtenida.

- 17.- Examinar la siguiente expresión booleana:

$$E(x, y, z) = (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y))$$

Si  $B = \{0, 1\}$ , calcular la tabla de verdad de la función siguiente:  $f: B^3 \rightarrow B$  definida por  $E$ . Construir un diagrama lógico que implemente la función  $f$  previamente obtenida.

=====

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

# MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA

## CAPITULO V

### TEORIA DE GRAFOS

#### 5.1.- INTRODUCCIÓN (¿QUE ES UN GRAFO?)

Los grafos, los objetos que estudiaremos en este y en el siguiente capítulo, resultan ser un modelo matemático extremadamente útil para analizar problemas muy diversos como, por ejemplo, los siguientes:

1. **Problemas de asignación de tareas:** tenemos un conjunto de trabajadores y otro de tareas y la información de para qué tareas está preparado cada trabajador y buscamos una asignación de tareas (a cada trabajador, una tarea distinta para la que esté preparado) de forma que consigamos ocupar al mayor número de trabajadores posible.
2. **Construcción de redes:** tenemos una serie de ciudades que queremos conectar mediante un oleoducto; un estudio de ingeniería previo nos permite conocer el precio de cada conexión. Se trata de conectar todas las ciudades con el menor coste posible.
3. **Problema de horarios:** en una cierta licenciatura de una Universidad se deben impartir 10 asignaturas, y no se pueden programar a la misma hora dos asignaturas si hay algún alumno matriculado en ambas. Lo que se busca es minimizar el número de horas necesario para programar todas las asignaturas salvando esa dificultad; o bien determinar cuáles son los posibles horarios si el número de horas disponible es fijo.

Los grafos son, como veremos, un lenguaje, una notación, que permite representar **relaciones binarias discretas** — es decir, entre pares de objetos— en un conjunto. De una manera informal, podríamos decir que un grafo es una colección de **vértices** y de **aristas** que unen estos vértices.

Los vértices los dibujaremos como puntos del plano o pequeños círculos, y las aristas serán líneas que unen estos puntos. Veamos ahora las definiciones formales:

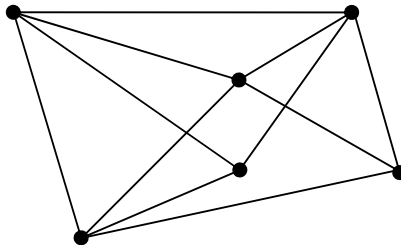


Figura 5.1.1.- Grafo G

#### DEFINICIÓN 5.1.-

Un **grafo**  $G = (V, A)$  es un conjunto no vacío  $V$  (de vértices) y un conjunto  $A$  (de aristas) extraído de la colección de subconjuntos de dos elementos de  $V$ . Una arista de  $G$  es pues, un subconjunto  $\{a, b\}$ , con  $a, b \in V, a \neq b$ .



Para ser precisos, deberíamos decir que esta definición se refiere a lo que se conoce como un **grafo simple y sin lazos**. En la subsección 5.1.1 presentaremos varias generalizaciones de este concepto, que resultarán muy útiles para otras cuestiones. Mientras no se diga lo contrario, cuando hablemos de un grafo siempre estaremos refiriéndonos a este caso sencillo.

Por supuesto, diremos que dos grafos son **iguales** si tienen el mismo conjunto de vértices y la misma colección de aristas. Nombraremos un grafo  $G$  mediante  $G = (V, A)$ . A veces, cuando manejemos varios grafos a la vez, utilizaremos símbolos como  $V(G)$  y  $A(G)$  para recordar a qué grafo corresponden los conjuntos de vértices y aristas a las que nos estamos refiriendo.

#### Ejemplo 5.1.1 Traducimos al lenguaje de grafos los problemas enunciados anteriormente:

1. El problema de la asignación de tareas tiene una traducción inmediata: los vértices estarían etiquetados con los nombres de los trabajadores y de las tareas (en este tipo de problemas, generalmente se dibujan los vértices correspondientes a las tareas a un lado y los correspondientes a los trabajadores, a otro). Y dibujaremos una arista entre un vértice que represente a un trabajador y otro que represente a una tarea si efectivamente el trabajador está preparado para realizar dicha tarea.
2. Para el problema de la construcción de la red, las ciudades serían los vértices y las conexiones, las aristas. Y, por supuesto, lo que buscaremos sería unir todos los vértices con el menor número posible de aristas y de manera que la red resultante sea lo mas barata posible.
3. En el problema de horarios, representaremos las asignaturas con los vértices y las incompatibilidades entre asignaturas, con aristas. Para abordar el problema, aún nos falta ver un ingrediente: cómo se colorea un grafo. En este caso, los colores serían las horas de que dispongamos. Pero esto lo veremos más adelante.

#### Ejemplo 5.1.2 Consideremos un conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3\}$ . Construyamos algunos grafos distintos con ese conjunto de vértices.

Los subconjuntos de dos elementos de  $V$  son  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$  y  $\{2, 3\}$ . Dos elecciones distintas de conjunto de aristas son  $A_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$  y  $A_2 = \{\{1, 2\}\}$ , que dan lugar a los grafos  $G_1$  y  $G_2$  que dibujamos a continuación:

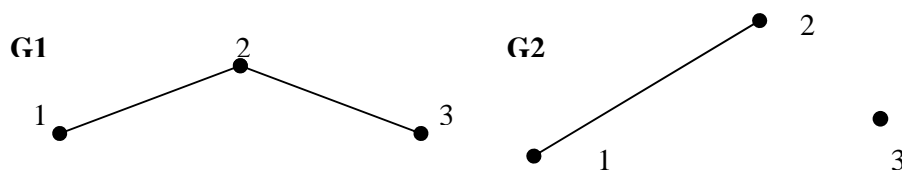


Figura 5.1.2: Grafos del problema 5.1.2

En muchas ocasiones, conviene considerar grafos que están incluidos “dentro” de otros. Dado un grafo  $G = (V, A)$ , formamos un **subgrafo**  $H = (V', A')$  de  $G$  seleccionando algunos de los vértices de  $G$  (esto es,  $V' \subseteq V$ ). Y, de las aristas que unieran vértices del conjunto  $V'$  en el grafo original  $G$ , nos quedamos con algunas de ellas (o todas)

Hay que ser cuidadosos con esto: si nos limitáramos a pedir que  $H$  contuviera a algunos de los vértices y algunas de las aristas de  $G$ , podríamos llegar a situaciones sin sentido como incluir una arista pero no alguno de sus vértices (no sería un grafo verdadero)

**DEFINICIÓN 5.2.-** Una **multigrafo**  $G = (V, A)$  consta de un conjunto no vacío  $V$  (de vértices) y de un conjunto  $A$  (de aristas) y de una función  $f$  de  $A$  en  $\{\{a, b\}, \text{ con } a, b \in V, a \neq b\}$ . Se dice que las aristas  $e_1$  y  $e_2$  son aristas múltiples si se cumple que  $f(e_1) = f(e_2)$ .

Una red informática puede contener una línea telefónica que conecte a una computadora consigo misma (a efectos de diagnóstico) como se ilustra en la Figura 5.1.3. El grafo  $G_1$  es un multigrafo (aristas múltiples entre  $\{d, c\}$ ). No podemos utilizar multigrados para representar estas redes, ya que no admiten **bucles** o **lazos** (aristas que conectan un vértice consigo mismo) en un multigrafo. En lugar de multigrafo, utilizaremos **pseudografos**, que son más generales que los multigrados, ya que un pseudografo admite bucles (En  $G_2$  bucles o Lazos en los vértices  $a$  y  $d$ , aristas múltiples entre  $\{d, c\}$ ).

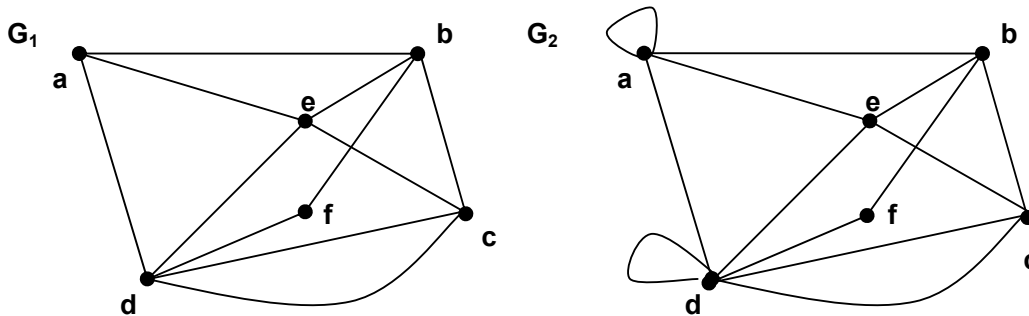


Figura 5.1.3: Multigrafo  $G_1$ . Pseudografo  $G_2$

**DEFINICIÓN 5.3.-** Un **pseudografo**  $G = (V, A)$  consta de un conjunto no vacío  $V$  (de vértices) y de un conjunto  $A$  (de aristas) y de una función  $f$  definida de  $A$  en  $\{\{a, b\}, \text{ con } a, b \in V, a \neq b\}$ . Se dice que la arista  $e$  es un bucle o lazo si se cumple que  $f(e) = \{a, a\} = \{a\}$  para algún  $a \in V$ .

En el problema de la red informática telefónica puede ser que entre dos puntos la misma no opere en las dos direcciones. Por ejemplo, la computadora en Bs. As. Puede enviar datos a la computadora en la ciudad de Córdoba, pero no recibir datos de Córdoba. Otros tipos de redes telefónicas si funcionan en ambas direcciones. Se utiliza grafos dirigidos para modelar redes de este tipo. Las aristas de un grafo dirigido son pares ordenados, se admiten bucles, pares ordenados con los dos elementos iguales, pero no se admiten aristas múltiples en la misma dirección entre dos vértices.

**DEFINICIÓN 5.4.-** Un **grafo dirigido**  $G = (V, A)$  consta de un conjunto no vacío  $V$  (de vértices) y de un conjunto no vacío  $A$  (de aristas) que son pares ordenados de elementos de  $V$  y de una función  $f$  definida de  $A$  en  $\{(a, b), \text{ con } a, b \in V\}$ . Se dice que la arista  $e$  es un bucle o lazo si se cumple que  $f(e) = (a, a) = (a)$  para algún  $a \in V$ . Ver Figura 5.1.4.

**DEFINICIÓN 5.5.-** Un **multigrafo dirigido**  $G = (V, A)$  consta de un conjunto no vacío  $V$  (de vértices) y de un conjunto no vacío  $A$  (de aristas) que son pares ordenados de elementos de  $V$  y de una función  $f$  definida de  $A$  en  $\{(a, b), \text{ con } a, b \in V\}$ . Se dice que la arista  $e$  es un bucle o lazo si se cumple que  $f(e) = (a, a) = (a)$  para algún  $a \in V$ . Se dice que las aristas  $e_1$  y  $e_2$  son aristas múltiples si se cumple que  $f(e_1) = f(e_2)$ .

Debemos observar que las aristas dirigidas múltiples están asociadas a un mismo par de vértices. No obstante, diremos que  $(a, b)$  es una arista de  $G = (V, A)$  siempre que haya al



menos una arista  $e$  con  $f(e) = (a, b)$ . No haremos distinción entre la arista  $e$  y el par ordenado  $(a, b)$  a no ser que la identidad de alguna de las aristas múltiples en particular sea importante.

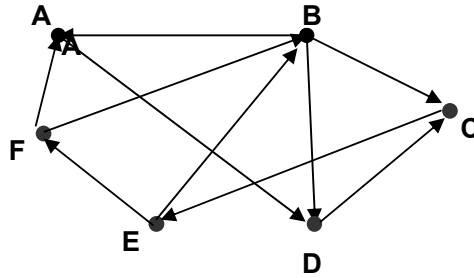


Figura 5.1.4: Grafo Dirigido G

La Tabla 1 resume la terminología que se emplea para los diferentes tipos de grafos. Utilizaremos la palabra **grafo** para describir grafos con aristas no dirigidas o dirigidas, con o sin bucles y aristas múltiples. Emplearemos los términos **grafo no dirigido** o **pseudografo** para indicar grafos no dirigidos que pueden tener aristas múltiples y bucles. Usaremos siempre el adjetivo **dirigido** para referirnos a grafos cuyas aristas estén asociadas a pares ordenados, como por ejemplo **grafos dirigidos** o **dígrafos**.

Tabla1: Terminología en la Teoría de Grafos

Tipos	Aristas	Arista Múltiples	Bucles
Grafo Simple	No dirigido	No	No
Multigrafo	No dirigido	Si	No
Pseudografo	No dirigido	Si	Si
Grafo Dirigido	Dirigido	No	Si
Multigrafo Dirigido	Dirigido	Si	Si

## 5.2.- SUBGRAFOS

Hay ocasiones en que solo necesitamos una parte del grafo para resolver un problema. Por ejemplo, solo estamos interesados en la parte de la red interconectada de energía eléctrica que involucre las provincias de Buenos Aires, Córdoba, Santiago del Estero y Tucumán. En este caso, podemos ignorar todas las redes que conectan al resto de las provincias. En el grafo que represente la red total podemos eliminar los vértices que corresponden a las ciudades del resto de las provincias no contempladas y suprimir todas las aristas que vienen y van a esos vértices eliminados. Una vez eliminados estos vértices y aristas del grafo, sin eliminar ningún extremo de las aristas que quedan, se obtiene un grafo más pequeño. Se dice que este grafo es un **subgrafo** del grafo original.

**DEFINICIÓN 5.6.-** Un subgrafo de un grafo  $G = (V, A)$  es un grafo  $H = (W, F)$  con  $W \subseteq V$  y  $F \subseteq A$ .

**DEFINICIÓN 5.7.-** La unión de dos grafos simples  $G_1 = (V_1, A_1)$  y  $G_2 = (V_2, A_2)$  es un grafo simple cuyo conjunto de vértices es  $V_1 \cup V_2$  y cuyo conjunto de aristas es  $A_1 \cup A_2$ . La unión de  $G_1$  y de  $G_2$  se representa por  $G_1 \cup G_2$ .

Un par de subgrafos que serían especialmente relevantes son los siguientes:

- Dados un par de grafos  $H$  y  $G$ , diremos que  $H$  es un **subgrafo recubridor** (el ejemplo más relevante de un subgrafo recubridor lo encontraremos en el Capítulo 6, cuando desarrollemos árbol recubridor) de  $G$  si  $H$  es un subgrafo de  $G$  y, además,  $V(H) = V(G)$ . Es decir, si  $H$  contiene a todos los vértices de  $G$ .
- Diremos que  $H$  es un **subgrafo inducido** de  $G$  para un conjunto de vértices  $V' \subseteq V(G)$  si se cumple, por un lado, que  $V(H) = V'$ . Y, por otro, que si  $v, w \in V'$  y  $\{v, w\} \in A(G)$ , entonces  $\{v, w\} \in A(H)$ .

Es decir,  $H$  tiene como conjunto de vértices a un cierto subconjunto  $V'$  de los vértices de  $G$ ; y como conjunto de aristas, a todas aquellas de  $G$  cuyos extremos sean vértices de  $V'$ .

**Ejemplo 5.2.1** Consideremos el siguiente grafo  $G$ :

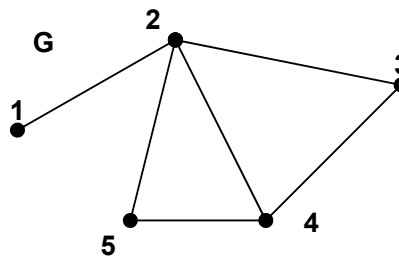


Figura 5.2.1: Grafo  $G$  del Problema 5.2.1

El conjunto de vértices de  $G$  es  $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , mientras que el de las aristas es el siguiente conjunto  $A(G) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$ . Los siguientes cuatro grafos son subgrafos de  $G$ :

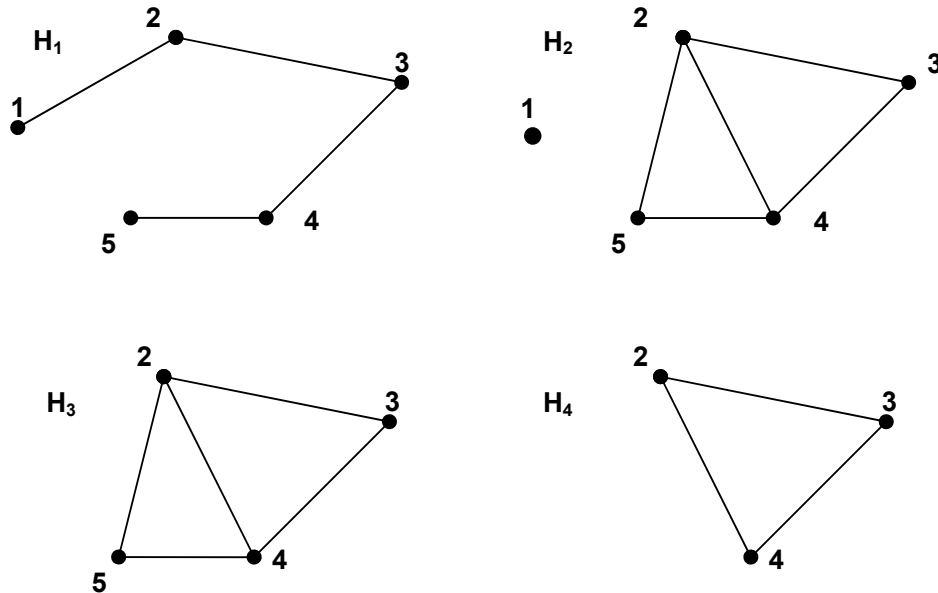


Figura 5.2.2: Subgrafos de  $G$  (Recubridores e Inducidos)

Los grafos  $H_1$  y  $H_2$  son, además, subgrafos abarcadores de  $G$  (porque incluyen a todos los vértices de  $G$ ). El grafo  $H_3$  es el subgrafo inducido de  $G$  para los vértices  $\{2, 3, 4, 5\}$ . Y el grafo  $H_4$ , para los vértices  $\{2, 3, 4\}$ . Por el contrario, los dos siguientes grafos no son subgrafos de  $G$ :

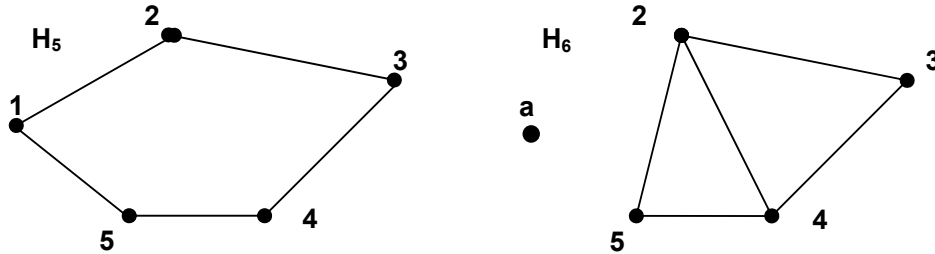


Figura 5.2.3: Grafos que no son Subgrafos de  $G$

El grafo  $H_5$ , porque incluye una arista, la  $\{1, 5\}$  que no estaba en  $G$ . Y el  $H_6$ , porque su conjunto de vértices no es un subconjunto del de  $G$ .

Contemos ahora cuántas elecciones distintas de conjunto de aristas podemos tener si el conjunto de vértices tiene tamaño  $n$ . Digamos que  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ : ¿cuántos grafos distintos podremos construir que tengan a  $V$  como conjunto de vértices? Primero, evaluamos cuántos “candidatos” tenemos para ser aristas:

$$\#_{\text{subconjuntos de tamaño 2 extraídos de } \{1, \dots, n\}} = \binom{n}{2}$$

Todo lo que queda es escoger unas cuantas aristas de entre estos candidatos; así que el número de grafos distintos con vértices  $\{1, 2, \dots, n\}$  es:

$$\#_{\text{subconjuntos extraídos de } \{1, \dots, \binom{n}{2}\}} = 2^{\exp\left(\binom{n}{2}\right)}$$

Por cierto, un número gigantesco, en cuanto  $n$  sea grande. Ya en el caso en que haya siete vértices, tendremos

$$2^{\exp\left(\binom{7}{2}\right)} = 2^{21} = 2097152 \text{ grafos distintos.}$$

Hemos contado aquí el número de grafos **distintos** con  $n$  vértices. La elección de los símbolos  $\{1, \dots, n\}$  para representar los vértices es cómoda, y la haremos habitualmente, pero el cálculo sería válido para cualquier otra elección de  $n$  símbolos para los vértices. En lo que sigue, los símbolos,  $u, v, w, \dots$  representarían, generalmente, a vértices. Las aristas serían  $a$  o quizás  $e$  (del inglés *edge*).

En la representación gráfica habitual, para saber de qué grafo se trata, tendremos que etiquetar los vértices. Pero, para muchas cuestiones, las etiquetas que se utilicen son irrelevantes.



### 5.3.- MATRICES ASOCIADAS A UN GRAFO. GRADO DE UN VÉRTICE

Una forma muy útil de representar un grafo  $G = (V, A)$  es mediante su **matriz de adyacencia** (o matriz de vecindades). La idea es formar una matriz de ceros y unos. Si el conjunto de vértices es  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , el grafo se puede describir mediante una matriz  $n \times n$ :

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	....	$v_n$
$v_1$	0	1	0	...	1
$v_2$	1	0	1	...	1
$v_3$	0	1	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$v_n$	1	1	0	...	0

En la posición  $(v_i, v_j)$  pondremos un 1 si  $\{v_i, v_j\} \in A$ , y un 0 en caso contrario. La matriz tendría ceros en la diagonal (porque no permitimos lazos) y sería simétrica: si en la posición  $(v_i, v_j)$  aparece un 1 es porque  $\{v_i, v_j\} \in A$  y por tanto en la posición  $(v_j, v_i)$  ( $v_j, v_i$ ) debería aparecer también un 1. Así que un grafo  $G$  **simple y sin lazos** con  $n$  vértices es exactamente lo mismo que una matriz  $n \times n$  simétrica de ceros y unos con ceros en la diagonal.

Esta identificación es muy importante. Para muchos de las cuestiones que trataremos en lo sucesivo, bastaría considerar el dibujo asociado al grafo. Pero, como veremos, el de los grafos es un lenguaje especialmente diseñado para un uso algorítmico, algoritmos que requeriría la intervención de la computadora. Y para una computadora, por supuesto, un grafo es una matriz de ceros y unos. Conviene tener esto en mente en los argumentos que desarrollemos.

Algunas de las generalizaciones del concepto de grafo que prometíamos anteriormente se pueden describir también en el lenguaje de las matrices:

- Por ejemplo, si permitiéramos lazos, esto es, aristas cuyos dos vértices sean el mismo, estaríamos considerando, simplemente, matrices (cuadradas) simétricas de ceros y unos (con, posiblemente, unos en la diagonal).
- Pero también podríamos permitir que hubiera aristas múltiples (por ejemplo, dos vértices conectados por dos o más aristas); en este caso hablaremos de **multigrafos**. En términos matriciales, un multigrafo sería una matriz simétrica cuyas entradas son ceros o números naturales: en la diagonal irían ceros si no permitiéramos lazos.
- Otra posibilidad, que estudiamos con detalle en la subsección 5.2, es la de dar *orientación* a las aristas. En los **grafos dirigidos** o **digrafos**, las entradas de la matriz siguen siendo ceros y unos, pero esta ya no necesariamente simétrica.
- Por último, a veces conviene considerar la posibilidad de asociar a cada arista  $e$  de un grafo un número real, su **peso**,  $p(e)$ . Pensemos, por ejemplo, en una red de carreteras, en la que cada tramo tiene asociado su longitud en kilómetros. En este caso, hablaremos de un **grafo con pesos** (o grafo ponderado). La matriz de un tal grafo con pesos sería simétrica, y sus entradas serían los pesos de cada arista. Luego consideraremos **grafos**

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

**dirigidos con pesos;** las matrices de adyacencia asociadas ya no serían necesariamente simétricas, y sus entradas serían los pesos correspondientes.

Pero insistimos en que en lo sucesivo, mientras no se diga lo contrario, todos los grafos a los que nos referiremos serían simples y sin lazos. Un concepto fundamental en un grafo es el de grado de un vértice:

**DEFINICIÓN 5.8.-** Dado un grafo  $G = (V, A)$ , diremos que dos vértices  $v, w \in V$  son **adyacentes o vecinos** si  $\{v, w\} \in A$ . Si  $e = \{v, w\}$ , se dice que la arista  $e$  es **incidente** con los vértices  $v$  y  $w$ . También se dice que la arista  $e$  **conecta**  $v$  con  $w$ . Se dice que los vértices  $v$  y  $w$  son **extremos** de la arista  $e$ .

**DEFINICIÓN 5.9.-** El **grado de un vértice** de un grafo es el número de aristas incidentes en el, exceptuando los bucles, cada uno de los cuales contribuye con dos unidades al grado de un vértice. El grado de un vértice  $v$  se denota por  $\delta(v)$ .

$$\delta(v) = \text{grado de } v \equiv gr(v) = \#\{w \in V : \{v, w\} \in A(G)\}.$$

Si el grado de un vértice es 0, diremos que es un vértice **aislado**. En la matriz de adyacencia, para determinar el grado de un vértice  $v$ , basta sumar los unos que aparezcan en su fila. A la lista de los grados de los vértices de un grafo  $G$  la llamaremos la **sucesión de grados**:

$$(gr(v_1), gr(v_2), \dots, gr(v_n)).$$

$$(\delta(v_1), \delta(v_2), \dots, \delta(v_n)).$$

Por convenio, se suele escribir esta lista con los valores ordenados de menor a mayor.

**Ejemplo 5.3.1:** ¿Cuáles son los grados de los vértices de los grafos de la Figura 5.2.1?

**Solución:** en  $G$  tenemos  $\delta(1) = 1, \delta(1) = 1, \delta(2) = 4, \delta(3) = 2, \delta(4) = 3, \delta(5) = 2$

Pero no toda lista de  $n$  números  $\geq 0$  se corresponde con la sucesión de grados de un grafo con  $n$  vértices. Por ejemplo, se tiene la siguiente restricción:

**TEOREMA 5.1:** En un grafo  $G = (V, A)$

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 |A|$$

**DEMOSTRACIÓN.** El resultado es casi obvio, pues cada arista involucra a dos vértices. Una prueba rigurosa requiere invocar a otra matriz asociada a un grafo, la **MATRIZ DE INCIDENCIA**:

ISBN 987-43-9433-1



9 789874 394330

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	....	$v_n$
$a_1$	1	1	0	...	0
$a_2$	1	0	1	...	0
$a_3$	0	1	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_m$	0	1	0	...	1

Las columnas están etiquetadas con los vértices  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , y las filas, con las aristas  $\{a_1, \dots, a_m\}$ . En la posición  $(a_i, v_j)$  colocaremos un 1 si el vértice  $v_j$  es extremo de la arista  $a_i$ ; y un 0 en caso contrario. Apliquemos ahora un argumento de doble conteo. En la fila etiquetada por la arista  $a_1$  aparecerían sólo dos unos (sus dos extremos); lo mismo ocurre con el resto de las filas. Así que, sumando por filas, obtenemos  $2m = 2|A|$ . Al hacerlo por columnas, observamos que la columna correspondiente al vértice  $v_j$  contendría tantos unos como vecinos tenga este vértice: su suma valdría justamente  $gr(v_j) = \delta(v_j)$ . Sumando los resultados de todas las columnas, obtenemos lo que buscábamos.

Un par de características importantes en un grafo son las siguientes:

**DEFINICIÓN 5.10.-** Llamaremos *mínimo grado* y *máximo grado* de un grafo a los números

$$\Omega(G) = \min. \{\delta(v)\} \text{ para todo } v \in V(G)$$

$$\Delta(G) = \max. \{\delta(v)\} \text{ para todo } v \in V(G)$$

Si los dos números coinciden, por ejemplo en el valor  $k$ , entonces todos los vértices del grafo tendrían grado  $k$ , y hablaremos de un grafo **k-regular**.

**TEOREMA 5.2:** Todo grafo no dirigido  $G = (V, A)$  tiene un número par de vértices de grado impar.

La terminología para grafos dirigidos refleja el hecho de que a las aristas se les asigna un sentido.

**DEFINICIÓN 5.11.-** Si  $(v, w)$  es una arista de un grafo dirigido  $G$ , se dice que  $v$  es adyacente a  $w$  y que  $w$  es adyacente desde  $v$ . Al vértice  $v$  se lo denomina **vértice inicial** de la arista  $(v, w)$  y a  $w$  se lo denomina **vértice final o terminal** de la arista  $(v, w)$ . Los vértices final e inicial de un bucle coinciden.

Como las aristas de un grafo dirigido son pares ordenados, podemos refinar la definición de grado de un vértice a fin de reflejar el número de aristas que tienen a ese vértice como vértice inicial o como vértice final.





**DEFINICIÓN 5.12.-** En un grafo dirigido, el **grado de entrada** o **grado negativo** de un vértice  $v$ , es denotado por  $\delta^-(v)$ , es el número de aristas que tienen a  $v$  como vértice final. El grado de salida o grado positivo de un vértice  $v$ , denotado por  $\delta^+(v)$ , es el número de aristas que tienen a  $v$  como vértice inicial. (nótese que un bucle contribuye con una unidad tanto al grado de entrada como al grado de salida del vértice correspondiente).

**Ejemplo 5.3.2:** ¿Cuáles son los grados de entrada y de salida los vértices de los grafos de la Figura 5.1.4?

$$\begin{array}{llllll} \delta^-(A) = 2; & \delta^-(B) = 2; & \delta^-(C) = 2; & \delta^-(D) = 2; & \delta^-(E) = 1; & \delta^-(F) = 1 \\ \delta^+(A) = 1; & \delta^+(B) = 2; & \delta^+(C) = 1; & \delta^+(D) = 1; & \delta^+(E) = 2; & \delta^+(F) = 2 \end{array}$$

**DEFINICIÓN 5.13.-** Un grafo (o multigrafo) no dirigido donde los vértices tienen el mismo grado se denomina **grafo regular**. Si  $\delta(v) = k$  para todos los vértices  $v \in V(G)$ , entonces el grafo es **k - regular**.

#### 5.4.- ISOMORFISMO DE GRAFOS

Observemos los dos grafos que aparecen dibujados a la derecha. En ambos casos, el conjunto de vértices es  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Pero son grafos distintos: en un caso, el conjunto de aristas es  $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$ , mientras que en el otro es  $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ . Aún siendo distintos, estos dos grafos contienen, en cierto sentido, la misma información (un simple cambio de nombres transforma uno en el otro). En ambos casos, hablaríamos del “grafo del cuadrado”. Esta idea es la que pretendemos desarrollar en esta subsección.

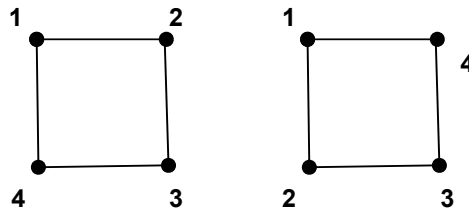


Figura 5.4.1: Grafos Isomorfos

**DEFINICIÓN 5.14.-** Sean  $G$  y  $G'$  dos grafos, con conjuntos de vértices y aristas  $(V, A)$  y  $(V', A')$ , respectivamente. Decimos que una aplicación biyectiva  $\phi: V \rightarrow V'$  es un **isomorfismo de grafos** si:

$$\{v, w\} \in A \Leftrightarrow \{\phi(v), \phi(w)\} \in A'.$$

Es decir, si  $\phi$  conserva las relaciones de vecindad entre vértices. Dos grafos se dicen **isomorfos** si existe una aplicación biyectiva entre sus conjuntos de vértices (un cambio de nombres, de etiquetas) que conserve las relaciones de vecindad: si dos vértices son adyacentes con el primer conjunto de etiquetas, tendrían que seguir siéndolo con el segundo.

En el caso de los dos grafos con los que abríamos esta subsección, el lector podría comprobar que la aplicación  $\phi: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  dada por  $\phi(1) = 1$ ,  $\phi(2) = 4$ ,  $\phi(3) = 2$  y  $\phi(4) = 3$  es un isomorfismo entre los dos grafos.

No es fácil, en general, decidir si dos grafos son isomorfos o no. En los casos sencillos, si los dos grafos son isomorfos, se puede encontrar la biyección “a ojo”. ¡Sobre todo si el dibujo nos ayuda! Los dos grafos que aparecen a la derecha también son isomorfos, pese a que la manera de dibujarlos no parezca indicarlo. Una manera de comprobar si dos grafos son isomorfos (que, por supuesto, habrían de tener el mismo número de vértices, digamos  $n$ ), sería comprobar si alguna de las  $n!$  aplicaciones biyectivas entre los conjuntos de vértices respectivos cumple las propiedades necesarias para ser un isomorfismo entre los dos grafos. Pero esto, desde luego, no es un procedimiento razonable si  $n$  es grande.

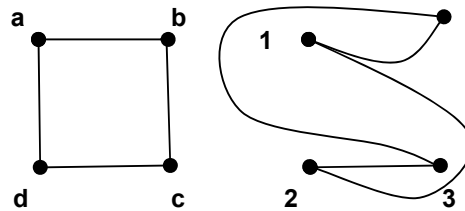


Figura 5.4.2: Grafos Isomorfos

Sin embargo, para decidir que dos grafos no son isomorfos contamos con ciertas propiedades de un grafo que se han de conservar por isomorfismos:

1. Ambos grafos han de tener el mismo número de vértices (si no lo tienen, no podremos construir una aplicación biyectiva entre los conjuntos de vértices).
2. Cada vértice ha de mantener sus relaciones de vecindad. En particular, si  $G = (V, A)$  y  $G' = (V', A')$  son dos grafos isomorfos mediante  $\varphi$ , entonces, para cada  $v \in V$ :

$$\delta(v) = \delta(\varphi(v)).$$

Si, por ejemplo, en un grafo tenemos un vértice de grado 7 y en el otro no, no podrían ser isomorfos.

3. Con más generalidad, si dos grafos son isomorfos, entonces han de tener la misma sucesión de grados. Sin embargo, el que dos grafos tengan la misma sucesión de grados no garantiza que sean isomorfos, como muestra el ejemplo 5.4.1.
4. La sucesión de grados ha de conservarse, y como sabemos que en todo grafo la suma de los grados coincide con (dos veces) el número de arista, deducimos que dos grafos isomorfos han de tener el mismo número de aristas.

**Ejemplo 5.4.1** Consideremos los dos grafos siguientes (nos olvidamos de las etiquetas de los vértices):

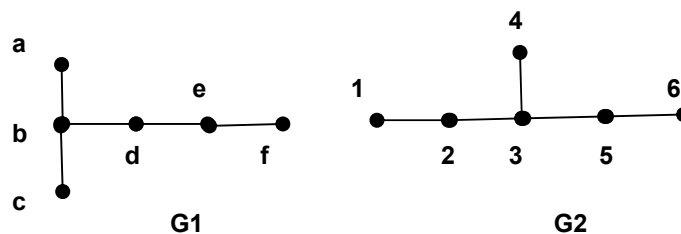


Figura 5.4.3: Grafos del Problema 5.4.1



Ambos grafos tienen seis vértices, cinco aristas y su sucesión de grados es **(1, 1, 1, 2, 2, 3)**. Sin embargo, no son isomorfos pues, por ejemplo, el vértice de grado 3 es, en un caso, vecino de dos de grado 1 y de uno de grado 2; y en el otro, de uno de grado 1 y de dos de grado 2.

Hay otras propiedades que son conservadas bajo isomorfismos (todas las relacionadas con vecindades); por ejemplo, el llamado cuello de un grafo, del que hablaremos más adelante. Sin embargo, **no existe una caracterización** para el isomorfismo de dos grafos (una serie de propiedades que determinen si dos grafos son o no isomorfos).

El isomorfismo de dos grafos se puede interpretar también en términos de sus matrices correspondientes. Dados dos grafos  $G$  y  $G'$ , con matrices de adyacencia  $M$  y  $M'$ , respectivamente:

**$G$  y  $G'$  son isomorfos**  $\Leftrightarrow$  **Existe una permutación tal que si la aplicamos sobre las filas y columnas de  $M$ , obtenemos  $M'$ .**

Intentemos, al menos para los valores pequeños de  $n$ , la clasificación de los grafos no isomorfos con  $n$  vértices.

**Ejemplo 5.4.2** *Clasifiquemos por clases todos los grafos distintos que podemos formar con el conjunto de tres vértices  $V = \{1, 2, 3\}$ , en la Figura 5.4.4.*

Como hay tres posibles aristas, habría  $2^3 = 8$  grafos distintos. Vistos salvo isomorfismos, ¿cuántos hay? Sin aristas, hay sólo uno. Nótese que, para esta configuración sin aristas, también hay un único grafo (al etiquetar los vértices). Con una arista, hay una única configuración, a la que corresponden tres grafos distintos, pues basta decidir qué vértice va solo (o qué dos comparten arista).

Con dos aristas hay, de nuevo, una única configuración (un único grafo salvo isomorfismo), aquél en el que los tres vértices forman una “cadena”:

Como se señala en la figura, hay tres grafos distintos que pertenecen a esta clase, pues basta determinar el símbolo que situamos en el vértice de grado 2; y esto lo podemos hacer de tres formas distintas. El lector podría comprobar que los otros tres posibles etiquetados no producen grafos nuevos. Por último, con tres aristas hay uno, al que corresponde un único grafo:

En total, los 8 grafos distintos se engloban en cuatro clases, un grafo sin aristas, tres grafos distintos con una arista, otros tres con dos aristas, y uno con las tres aristas.

Pero, en general, esta clasificación sería más complicada (habría, por ejemplo, varios grafos no isomorfos con el mismo número de aristas). Animamos al lector a que intente la clasificación en los casos  $n = 4$  y  $n = 5$  (hay 11 y 35 grafos no isomorfos con ese número de vértices, respectivamente). El estudio general requiere herramientas más complicadas que veremos en el capítulo 14.

## 5.5.- CLASES DE GRAFOS

A continuación enumeraremos algunas clases de grafos que aparecerán continuamente en lo que sigue; conviene recordar sus nombres y características.

**GRAFO LINEAL:** Diremos que un grafo es un  $L_n$ , un **grafo lineal** con  $n$  vértices ( $n \geq 2$ ) si tiene  $n$  vértices (dos de grado 1 y el resto, si los hay, de grado 2) y es isomorfo a:

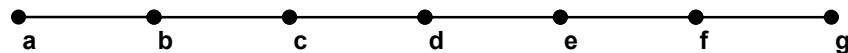


Figura 5.5.1: Grafo Lineal

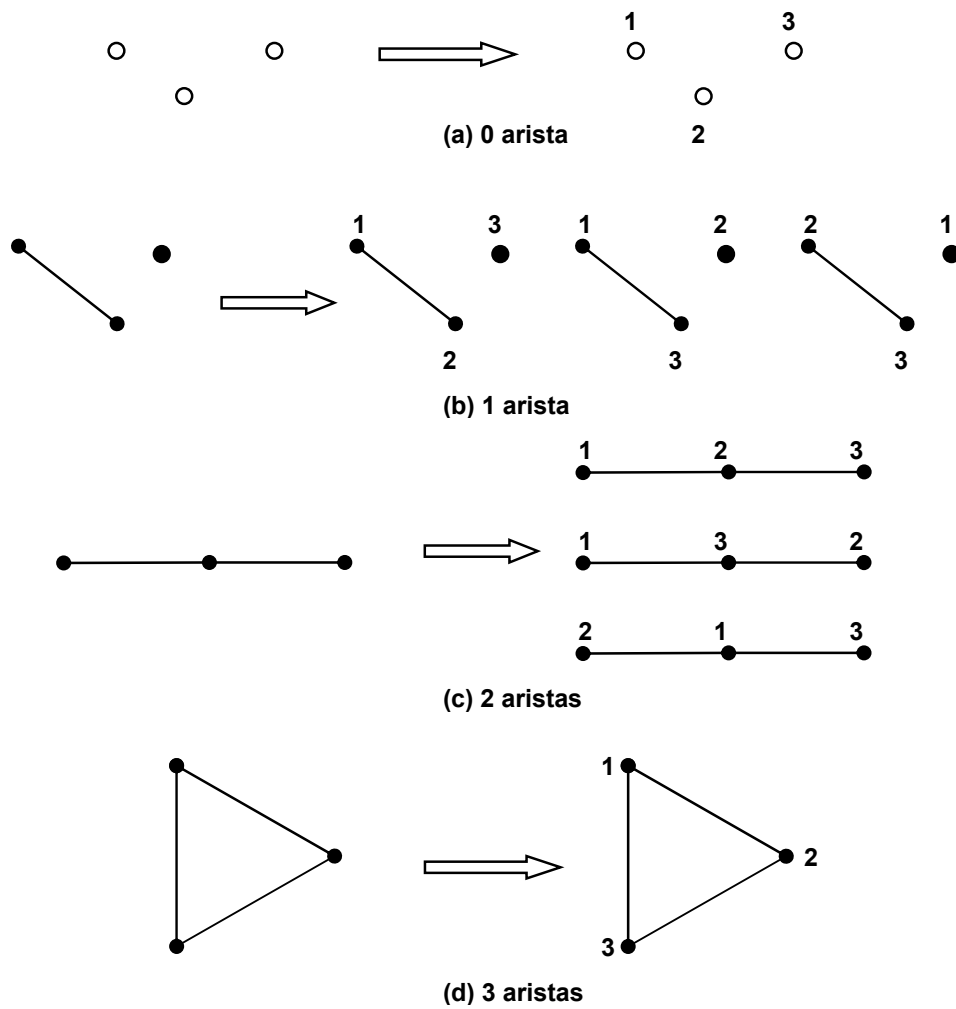


Figura 5.4.4: Grafos del Problema 5.4.2

**GRAFO CIRCULAR:** Otra clase de grafos muy relevante son los llamados **grafos circulares** con  $n$  vértices (todos de grado 2), para  $n \geq 3$ , que denotaremos por  $C_n$ :

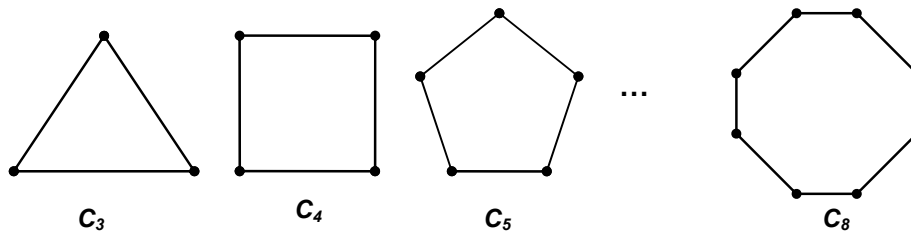


Figura 5.5.2: Grafo Circular

**GRAFO COMPLETO:** Si un grafo con  $n$  vértices tiene todas las ( $n \geq 2$ ) combinaciones de posibles aristas, diremos que estamos ante el **grafo completo** con  $n$  vértices,  $K_n$ :

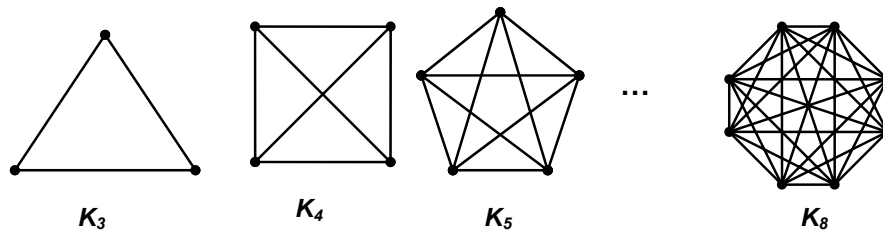


Figura 5.5.3: Grafo Completo

**GRAFO VACIO:** En los otros extremos encontramos los **grafos vacíos**  $N_n$ , con  $n$  vértices y ninguna arista.

**GRAFO BIPARTITO:** Una clase de grafos que tienen relevancia en diversos problemas (por ejemplo, en los problemas de asignación de tareas), son los llamados **grafos bipartitos**. Se trata de aquéllos en los que podemos partir el conjunto de vértices en dos clases, de manera que no haya aristas entre vértices de la misma clase. Un caso particular son los **grafos bipartitos completos**, que nombraremos como  $K_{r,s}$ . En el dibujo de la derecha aparece un  $K_{4,6}$ . Un grafo  $K_{r,s}$  consta de  $r + s$  vértices, divididos en dos clases; e incluye las  $r \times s$  aristas que van de los vértices de un tipo a los del otro. Obsérvese que un grafo bipartito con  $r$  vértices de un tipo y  $s$  de otro se puede obtener del  $K_{r,s}$  escogiendo un subconjunto de las aristas.

**DEFINICIÓN 5.15.-**

Un Grafo  $G = (V, A)$  es **bipartito** si  $V = V_1 \cup V_2$  y  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  y cada arista de  $G$  es de la forma  $[a, b]$  con  $a \in V_1$  y con  $b \in V_2$ . Si cada vértice de  $V_1$  está unido con los vértices de  $V_2$  se tiene un grafo bipartito completo.

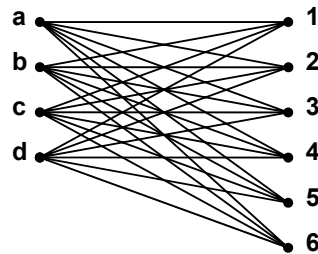


Figura 5.5.4: Grafo Bipartito

El grafo del **cubo**,  $Q_n$ , tiene como vértices los puntos del retículo  $n$ -dimensional de coordenadas 0 o 1. Esto es, el conjunto de los vértices de  $Q_n$  son todas las listas de longitud  $n$  que podemos formar con ceros y unos. En total, pues, tiene  $2^n$  vértices. Dos vértices de  $Q_n$  serían vecinos si las listas de ceros y unos que los identifican difieren en una *única* posición. Por tanto, todos los vértices tienen el mismo grado,  $n$  (hay  $n$  distintas maneras de variar una posición en una  $n$ -lista):  $Q_n$  es un grafo  **$n$ -regular**. Una simple cuenta nos permite calcular el número de aristas:

$$2|A(Q_n)| = \sum_{v \in V(Q_n)} \delta(v) = \sum_{j=1}^{2^n} n = n 2^n \Rightarrow |A(Q_n)| = n 2^{n-1}$$

En una, dos y tres dimensiones son fáciles de dibujar:



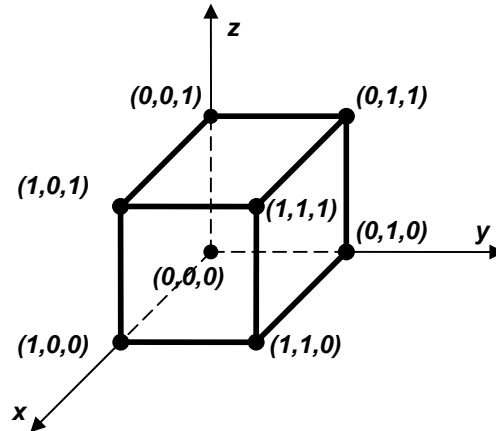


Figura 5.5.5: Grafo Cubo

Obsérvese que  $Q_1$  es isomorfo a  $L_2$ , y  $Q_2$ , a  $C_4$ . Los grafos  $Q_n$ , pese a que los dibujos esbozados no hagan sospecharlo, son bipartitos: observemos que la mitad de los vértices están etiquetados con listas de  $n$  posiciones que contienen un número par de ceros, y la otra mitad, un número impar. Y dos listas que tienen un número par de ceros no pueden ser vecinas en este grafo (e igual para las impares).

### 5.6.- CONEXIÓN EN GRAFOS

Consideremos los dos siguientes grafos:

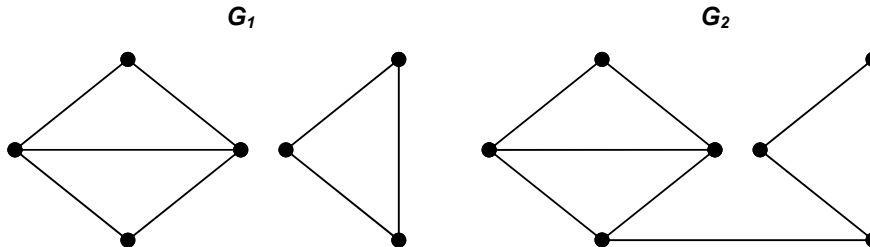


Figura 5.6.1: Conectividad en Grafo

¿En qué se diferencian? Parece claro que en el de la derecha las aristas del grafo nos permiten “llegar” de un vértice a cualquier otro; algo que no podemos hacer en el de la izquierda. El objetivo de esta subsección es el de entender el concepto de “conexión” en grafos.

**DEFINICIÓN 5.16.-** Sean  $x, y$  vértices (no necesariamente distintos) de un grafo  $G = (V, A)$ . Un **camino**  $x - y$  en  $G$  es una sucesión alternada finita (sin lazos):

$$x = x_0, a_1, x_1, a_2, x_2, a_3, \dots, a_{n-1}, x_{n-1}, a_n, x_n = y$$

de vértices y aristas de  $G$ , que comienza en el vértice  $x$  y termina en el vértice  $y$  y que contiene las  $n$  aristas  $a_i = \{x_{i-1}, x_i\}$  donde  $1 \leq i \leq n$ .

La **longitud de un camino** es  $n$ , el número de aristas que hay en el camino. (Si  $n = 0$ , no existen aristas,  $x = y$ , y el camino se denomina **trivial**).

Cualquier camino  $x - y$ , donde  $x = y$  ( $y \neq 1$ ) es un **camino cerrado**. En caso contrario es un **camino abierto**.

**Ejemplo 5.6.1.-**

Para el grafo de la Figura 5.6.2, tenemos por ejemplo, los siguientes tres caminos abiertos. Podemos enumerar solamente las aristas o solamente los vértices (si el otro queda determinado claramente).

1.-  $\{a, b\}, \{b, d\}, \{d, c\}, \{c, e\}, \{e, d\}, \{d, b\}$ : este es un camino  $a - b$  de longitud 6, en el que se repiten los vértices  $d$  y  $b$ , como así también la arista  $\{b, d\} = \{d, b\}$ .

2.-  $b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow c \rightarrow f$ : aquí tenemos un camino  $b - f$  de longitud 5, donde se repite el vértice  $c$ , sin que aparezcan las aristas más de una vez.

3.-  $\{f, c\}, \{c, e\}, \{e, d\}, \{d, a\}$ : en este caso el camino  $f - a$  tiene longitud 4, sin repetición de vértices o aristas.

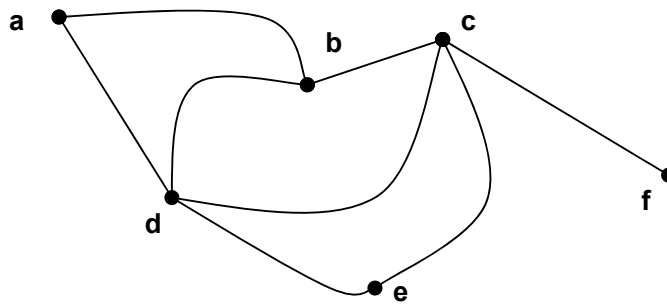


Figura 5.6.2: Grafo del Ejemplo 5.6.1

**DEFINICIÓN 5.17.-** Consideremos un camino  $x - y$  en un grafo no dirigido  $G = (V, A)$ :

- Si no se repite ninguna arista en el camino  $x - y$ , entonces el camino es un **recorrido**  $x - y$ . Un recorrido cerrado es un **circuito**.
- Cuando ningún vértice del camino  $x - y$  se presenta más de una vez, el camino es un **camino simple**  $x - y$ . El término **ciclo** se usa para describir un **camino simple cerrado**  $x - y$ .

**Ejemplo 5.6.2.-**

Para el grafo de la Figura 5.6.2, tenemos por ejemplo, las siguientes tres situaciones. Podemos enumerar solamente las aristas o solamente los vértices (si el otro queda determinado claramente).

- El camino  $b - f$  de la parte (2) del Ejemplo 5.6.1 es un recorrido  $b - f$ , pero no es un **camino simple**  $b - f$  ya que se repite el vértice  $c$ . Sin embargo, el camino  $f - a$  de la parte 3 del mismo ejemplo es un **recorrido**  $f - a$  y un **camino simple**  $f - a$ .
- En la Figura 5.6.2, las aristas  $\{a, b\}, \{b, d\}, \{d, c\}, \{c, e\}, \{e, d\}$  y  $\{d, a\}$  dan lugar al **circuito**  $a - a$ . El vértice  $d$  se repite, por lo que las aristas no nos dan un **ciclo**  $a - a$ .
- Las aristas  $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}$  y  $\{d, a\}$  proporcionan un **ciclo**  $a - a$  (de longitud 4). Cuando estas mismas aristas se ordenan apropiadamente, también pueden definir un **ciclo**  $b - b$ ,  $c - c$  o  $d - d$ . Cada uno de estos ciclos es también un **circuito**.



Los términos que utilizamos aquí, paseo, camino, etc., podrían no coincidir con los usados en otros textos. Para un **grafo dirigido** utilizaremos el adjetivo **dirigido**, como se usa, por ejemplo, en **caminos dirigidos**, **caminos simples dirigidos** y **ciclos dirigidos**.

Estos nuevos conceptos nos permiten añadir criterios nuevos para decidir si dos grafos son o no isomorfos: dados dos grafos  $G$  y  $G'$  isomorfos mediante  $\phi$ , entonces si  $C = \{v_0, \dots, v_r\}$  es un ciclo en  $G$ , entonces  $C' = \{\phi(v_0), \dots, \phi(v_r)\}$  es un ciclo en  $G'$ . En particular se conservaría la longitud del menor ciclo que haya en el grafo:

**DEFINICIÓN 5.18.-** Si  $G$  es un grafo, se llama **cuello** del grafo  $G$  al mínimo de las longitudes de los ciclos de  $G$ .

Tabla 2: Terminología de caminos en la Teoría de Grafos

Vértices Repetidos	Aristas Repetidas	Abierto	Cerrado	Nombres
Si	Si	Si		Camino
Si	Si		Si	Camino Cerrado
Si	No	Si		Recorrido
Si	No		Si	Circuito
No	No	Si		Camino Simple
No	No		Si	Ciclo

**TEOREMA 5.3:** Sea  $G = (V, A)$  un grafo no dirigido, con  $a, b \in V$ , con  $a \neq b$ . Si existe un recorrido (en  $G$ ) de  $a$  a  $b$ , entonces existe un camino simple (en  $G$ ) de  $a$  a  $b$ .

**DEFINICIÓN 5.19.-** Sea  $G = (V, A)$  un grafo no dirigido. Diremos que  $G$  es **conexo** si existe un camino simple entre cualesquiera dos vértices distintos de  $G$ .

**Ejemplo 5.6.3.-** En la Figura 5.6.3 tenemos un grafo no dirigido sobre  $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ . Este grafo no es conexo ya que, por ejemplo, no existe un camino simple desde  $a$  a  $e$ . Sin embargo, el grafo está compuesto por piezas, donde los conjuntos de vértices son  $V_1 = \{a, b, c, d\}$  y  $V_2 = \{e, f, g\}$  y los conjuntos de aristas son  $A_1 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}\}$  y el conjunto  $A_2 = \{\{e, f\}, \{f, g\}\}$  que son conexos, estas piezas son las **componentes conexas** del grafo.

Por lo tanto un grafo no dirigido  $G = (V, A)$  es **disconexo** si y solo si  $V$  puede separarse en al menos dos subconjuntos  $V_1$  y  $V_2$  tales que no haya una arista de  $A$  de la forma  $\{x, y\}$  donde  $x \in V_1$ , e  $y \in V_2$ . Un grafo es conexo si y solo si tiene solamente una componente.

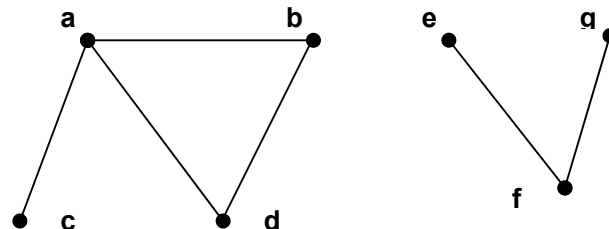


Figura 5.6.3: Grafo del Ejemplo 5.6.3



**DEFINICIÓN 5.20.-** Dado un grafo  $G = (V, A)$ , una **componente conexa** de  $G$  sería el grafo que se obtiene al tomar todos los vértices que están en la componente conexa de un cierto vértice de  $V$  y todas las aristas del grafo que conectan estos vértices.

Señalemos que las componentes conexas de un grafo son grafos conexos y es fácil ver que todo grafo se puede representar como unión de grafos conexos (sus componentes conexas).

**DEFINICIÓN 5.21.-** Para cualquier grafo  $G = (V, A)$ , el número de **componentes conexas** de  $G$  se denota por  $K(G)$ .

**DEFINICIÓN 5.22.-** Diremos que una arista  $a$  de un grafo  $G$  es un **punto** si el grafo  $G \setminus \{a\}$  que se obtiene de  $G$  al quitar la arista  $a$  (y dejar los mismos vértices) tiene más componentes conexas que  $G$ .

Por ejemplo, en el siguiente grafo conexo  $a$  es la única arista del grafo que es punto. En particular, si el grafo  $G$  de partida es conexo, entonces se tiene el siguiente resultado:

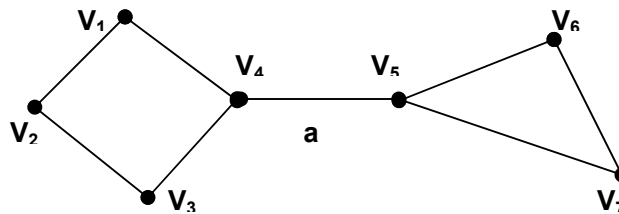


Figura 5.6.4: Puente  $a$  en el Grafo  $G$

**LEMA 5.1.-** Si  $G$  es un grafo conexo y  $a$  es una arista puente de  $G$ , entonces  $G \setminus \{a\}$  tiene exactamente dos componentes conexas.

**Demostración.** Llamemos  $v$  y  $w$  a los vértices que son extremos de la arista  $a$ . Y dividamos los vértices de  $G$  en dos clases:

1. el conjunto de vértices  $V_1$ , formado por aquéllos para los que existe un camino que los conecta con  $v$  sin usar la arista  $a$  (esto es, sin pasar por el vértice  $u$ ). Entre éstos está, por supuesto, el propio vértice  $v$ .
2. El conjunto  $V_2$  de los vértices que *necesariamente* han de usar la arista  $a$  para conectarse a  $v$ . Entre ellos está  $w$  (¿por qué?).

Que esto es una partición de los vértices de  $G$  es obvia. Pero, además, la intersección de  $V_1$  y  $V_2$  es vacía: si un vértice  $x \in V(G)$  estuviera en  $V_1$  y en  $V_2$  a la vez,  $a$  no sería arista puente, porque podríamos quitarla sin que se desconectara el grafo. Si ahora formamos el grafo  $G \setminus \{a\}$ , sus dos componentes conexas son, precisamente, los vértices de  $V_1$  (y sus aristas) y los vértices de  $V_2$  (y sus aristas). \_

Con estas herramientas, podemos establecer un resultado *a priori* sobre grafos conexos, que responde a la idea intuitiva de que han de tener suficientes aristas como para poder conectar todos sus vértices.

**PROPOSICIÓN 5.1.-** Si  $G$  es un grafo conexo, entonces  $|A(G)| \geq |V(G)| - 1$ .

**Demostración.** La razón es que la conexión óptima (con menor número de aristas) se produce cuando tenemos exactamente una arista menos que vértices (veremos este hecho cuando hablemos de árboles). Pero en general tendremos más aristas. La prueba la haremos utilizando



el principio de inducción fuerte en  $|A|$ , el número de aristas.

Si no tenemos aristas, para que el grafo sea conexo, sólo puede haber un vértice. Si lo que tenemos es un grafo conexo con  $|A| = 1$ , la única posibilidad es que sea el grafo  $L_2$ , que tiene dos vértices. Supongamos cierto que si tenemos un grafo conexo con  $k$  aristas, para cualquier  $k \leq m$ , entonces  $|V| \leq k + 1$ . Consideremos entonces un grafo conexo  $G$  con:

$$|A(G)| = m + 1.$$

Sea  $a$  una arista cualquiera de  $G$  y construyamos un nuevo grafo  $H$  quitando esta arista  $a$ . El grafo  $H$  tiene los mismos vértices que  $G$  pero una arista menos (la  $a$ ) que  $G$ . Caben dos posibilidades para este nuevo grafo:

1. Si  $H$  sigue siendo conexo (es decir, si  $a$  no era arista puente en  $G$ ), por hipótesis de inducción (tiene  $m$  aristas), y teniendo en cuenta que  $|A(H)| = |A(G)| - 1$  y que  $|V(G)| = |V(H)|$ , tendremos que

$$|A(H)| \geq |V(H)| - 1 \Rightarrow |A(G)| \geq |V(G)|.$$

2. Pero si  $a$  era puente en  $G$ ,  $H$  ya no es conexo, sino que tiene dos componentes conexas; llámémoslas  $H_1$  y  $H_2$ . Ambas son grafos conexos y tienen menos aristas que  $G$  (fijémonos en que estos subgrafos pueden constar de un único vértice). Teniendo en cuenta que

$$|A(H_1)| + |A(H_2)| = |A(H)| = |A(G)| - 1 \text{ y } |V(H_1)| + |V(H_2)| = |V(H)|,$$

y con la hipótesis de inducción, terminamos la demostración:

$$|A(H_1)| \geq |V(H_1)| - 1$$

$$|A(H_2)| \geq |V(H_2)| - 1 \Rightarrow |A(G)| - 1 \geq |V(G)| - 2 \Rightarrow |A(G)| \geq |V(G)| - 1.$$

Podemos generalizar este resultado al caso de que el grafo conste de más de una componente conexa. La demostración del siguiente enunciado sólo exige aplicar el anterior a cada componente conexa de  $G$  y sumar:

**PROPOSICIÓN 5.2.-** Si  $G$  es un grafo con  $k$  componentes conexas, entonces  $|A| \geq |V| - k$ .

## 5.7.- NÚMERO DE CAMININOS, MATRIZ DE ADYACENCIA Y CONEXIÓN

Llamemos  $a_{ij}$  a las entradas de la matriz  $M$  de adyacencia de un grafo  $G$  con vértices  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Los números  $a_{ij}$  son 0 para cada  $i = 1, \dots, n$ . Si  $i \neq j$ ,  $a_{ij}$  sería 1 si  $v_i$  es adyacente de  $v_j$  y 0 en caso contrario.

Aunque por ahora suene poco informativo, podemos interpretar el número  $a_{ij}$  como el número de caminos de longitud 1 que hay entre el vértice  $v_i$  y el vértice  $v_j$ . Lo interesante es que esta interpretación se puede generalizar.

**TEOREMA 5.4.-** Si  $M$  es la matriz de vecindades de un grafo  $G$ , la entrada  $(i, j)$  de la matriz  $M_k$  cuenta el número de caminos de longitud  $k$  entre los vértices  $v_i$  y  $v_j$ .

**DEMOSTRACIÓN.** La hacemos por inducción en  $k$ . El caso  $k = 1$  ya ha sido comprobado antes. Llamemos  $a_{ij}^{(k)}$  a la entrada que ocupa la posición  $(i, j)$  en la matriz  $M_k$ . Como  $M_k = M^{k-1} M$ , las reglas de multiplicación de matrices nos dicen que:

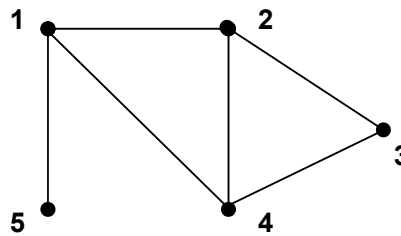
$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^n a_{il}^{(k-1)} a_{lj}$$

Observemos ahora que  $a_{il}^{(k-1)} a_{lj}$  es igual a  $a_{ij}^{(k-1)}$  si es que  $vl$  es adyacente de  $vj$ , mientras que vale 0 en caso contrario.

Por hipótesis,  $a_{il}^{(k-1)}$  cuenta el número de paseos de longitud  $k-1$  entre  $vi$  y  $vl$ . Así que, en la suma de arriba, estamos contando todos los posibles paseos de  $vi$  a  $vj$  de longitud  $k$  clasificándolos en función del vértice que, en cada paseo, sea justo el anterior a  $vj$ .

Lo vemos en un ejemplo sencillo:

**Ejemplo 5.7.1.-** Consideremos el grafo siguiente:



**Figura 5.7.1: Grafo G del Ejemplo 5.7.1**

La matriz de adyacencia, y sus primeras potencias, son las siguientes matrices:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M^3 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 2 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que en la diagonal de  $M^2$  aparecen los grados de cada vértice. Esto es general: la entrada  $a_{ii}^{(2)}$  coincide con el grado de  $vi$ , pues el número  $a_{ii}^{(2)}$  cuenta los caminos de longitud 2 de  $vi$  a  $vi$ .

De la matriz  $M^3$  deducimos, por ejemplo, que hay seis paseos distintos de longitud tres entre los vértices 1 y 2. El lector podrá encontrar los seis caminos 1-5-1-2, 1-4-1-2, 1-2-1-1, 1-2-3-2, 1-2-4-2, 1-4-3-2 sobre el grafo.

Apliquemos estas ideas a la tarea de comprobar si un grafo  $G$  es conexo o no. Y, en el caso en que no lo sea, a la determinación de sus componentes conexas.

Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices y matriz de vecindades  $M$ . Observemos que, si dos vértices se pueden conectar en un grafo, es seguro que lo podrían hacer utilizando un camino simple de longitud a lo sumo  $n-1$ . La entrada  $(i, j)$  de la matriz

$$\sim M = I + M + M^2 + \dots + M^{n-1}$$

(donde  $I$  significa la matriz identidad  $n \times n$ ) contiene la información sobre el número de caminos, de longitud a lo sumo  $n-1$ , que existen entre los vértices  $vi$  y  $vj$ . Por lo tanto, si alguna entrada de la matriz  $\sim M$  es nula, entonces el grafo no puede ser conexo. Y viceversa, si todas las entradas de  $\sim M$  son positivas, entonces el grafo sería conexo.



Si el grafo no es conexo, la matriz  $\sim M$  también contiene la información sobre las componentes conexas. Tomemos, por ejemplo, la primera fila de la matriz, etiquetada con el vértice  $v_1$ : las posiciones en las que aparezcan unos determinan los vértices de la componente conexa a la que pertenece  $v_1$ . El procedimiento se repetiría para la fila correspondiente al primer vértice no incluido en la componente anterior. Y así sucesivamente, hasta determinar todas las componentes conexas del grafo.

### 5.8.- CAMINOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS

¿Podemos movernos por las aristas de un grafo comenzando en un vértice y volviendo a él después de haber pasado por cada arista del grafo exactamente una vez? Análogamente, ¿podemos desplazarnos por las aristas de un grafo comenzando en un vértice y volviendo a él después de haber visitado cada vértice del grafo exactamente una vez? Aunque estas preguntas parecen similares, la primera de ellas, que pregunta si el grafo contiene lo que se llama **círculo euleriano**, puede resolverse fácilmente para cualquier grafo, mientras que la segunda cuestión, la de si el grafo contiene o no lo que se llama un **círculo hamiltoniano**, es bastante difícil de resolver.

La ciudad prusiana de Königsberg estaba dividida en cuatro partes por los dos brazos en los que se bifurca el río Pregel. Estas cuatro partes eran las dos regiones a orillas de río Pregel, la isla de Kneiphof y la región que quedaba entre ambos brazos del río Pregel. Siete puentes conectaban entre sí estas regiones en el siglo XVIII. La Figura 5.8.1 ilustra las regiones y los puentes.

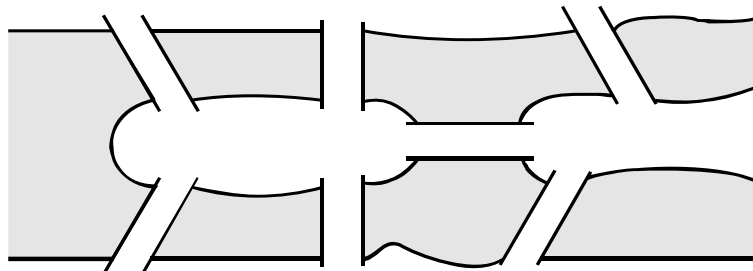


Figura 5.8.1; Los Puentes de Königsberg

Los habitantes de Königsberg solían dar largos paseos por la ciudad los domingos. Hubo quien se preguntó si era posible comenzar el paseo en algún sitio de la ciudad, atravesar todos los puentes sin cruzar ninguno dos veces y regresar al punto de partida.

El matemático Leonhard Euler resolvió el problema. Su solución, publicada en 1736, es posiblemente la primera ocasión que se utilizó la teoría de grafos. Euler estudió el problema utilizando el multigrafo que se obtiene si se representan las cuatro regiones mediante vértices y los siete puentes mediante aristas. Este multigrafo se muestra en la Figura 5.8.2.

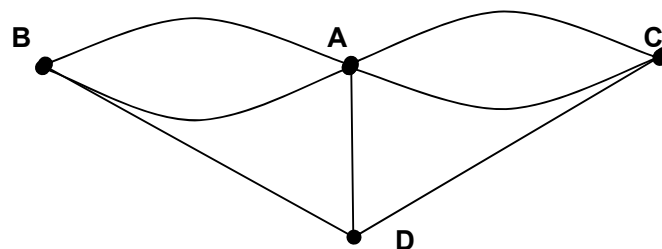


Figura 5.8.2: Modelo en forma de Multigrafo de los puentes de Königsberg

El problema de recorrer todos los puentes sin cruzar ninguno de ellos más de una vez puede replantearse en términos de este modelo. La pregunta se convierte entonces en la de si hay o no algún circuito simple en el multigrafo que contenga todas las aristas del grafo.

**DEFINICIÓN 5.23.-** Sea  $G = (V, A)$ , un grafo o multigrafo no dirigido sin vértices aislados. Entonces  $G$  tiene un **circuito euleriano** si existe un circuito de  $G$  que recorra cada arista del grafo exactamente una vez. Si existe un recorrido abierto de  $x$  a  $y$  en  $G$  que recorra cada arista de  $G$  exactamente una vez, este recorrido se denominara **recorrido euleriano**. Un **camino euleriano** es un camino simple que contiene todas las aristas de  $G$ .

**Ejemplo 5.8.1.-** ¿Cuales de los grafos de la Figura 5.8.3 contienen un circuito euleriano? Entre aquellos que no lo contienen, ¿Cuáles contienen un camino euleriano?:

Solución: El grafo  $G_1$  contiene un circuito euleriano, por ejemplo,  $a, e, c, d, e, b, a$ . Ni  $G_2$  ni  $G_3$  contienen un circuito euleriano. No obstante,  $G_3$  contiene un camino euleriano, a saber,  $a, c, d, e, b, d, a, b$ . El grafo  $G_2$  no contiene ningún camino euleriano.

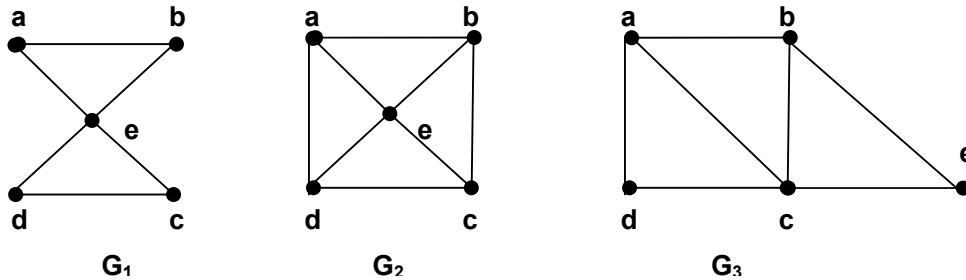


Figura 5.8.3: Grafos no dirigidos  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$

**TEOREMA 5.5.-** Sea  $G = (V, A)$  un grafo o multigrafo no dirigido, sin vértices aislados. Entonces  $G$  tiene un **circuito euleriano** en  $G$  si y sólo si  $G$  es conexo y todo vértice de  $G$  tiene grado par.

**COROLARIO 5.1.-** Sea  $G = (V, A)$  un grafo o multigrafo no dirigido, sin vértices aislados, entonces podemos construir un **recorrido euleriano** si y sólo si  $G$  es conexo y tiene exactamente dos vértice de  $G$  grado impar.

Hemos obtenido condiciones necesarias y suficientes para la existencia de caminos y circuitos que contienen a cada una de las aristas de un grafo (multigrafo) exactamente una vez. ¿Podemos hacer lo mismo con caminos y circuitos simples que pasen exactamente una vez por cada vértice del grafo?

**DEFINICIÓN 5.24.-** Se dice que un camino  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  del grafo  $G = (V, A)$ , es un **camino hamiltoniano** si  $V = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  y  $x_i \neq x_j$  para el siguiente rango  $0 \leq i < j \leq n$ . Se dice que un circuito  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_0$  (con  $n > 1$ ) del grafo  $G = (V, A)$  es un **circuito hamiltoniano** si la secuencia  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  es un camino hamiltoniano.

**Ejemplo 5.8.2.-** ¿Cuales de los grafos de la Figura 5.8.4 contienen un circuito hamiltoniano o sino un camino hamiltoniano?

**Solución:** El grafo  $G_1$  contiene un circuito hamiltoniano, por ejemplo,  $a, b, c, d, e, a$ . No hay circuito hamiltoniano en  $G_2$  (esto puede verse porque cualquier circuito que pase por todos los vértices tiene que contener dos veces la arista  $\{a, b\}$ ), pero  $G_2$  contiene un camino hamiltoniano, que es  $a, b, c, d$ . El grafo  $G_3$ , no contiene ni un circuito hamiltoniano, ya que cualquier camino que pase por todos los vértices tiene que contener más de una vez a una de las siguientes aristas:  $\{a, b\}$ ,  $\{e, f\}$  y  $\{c, d\}$ .

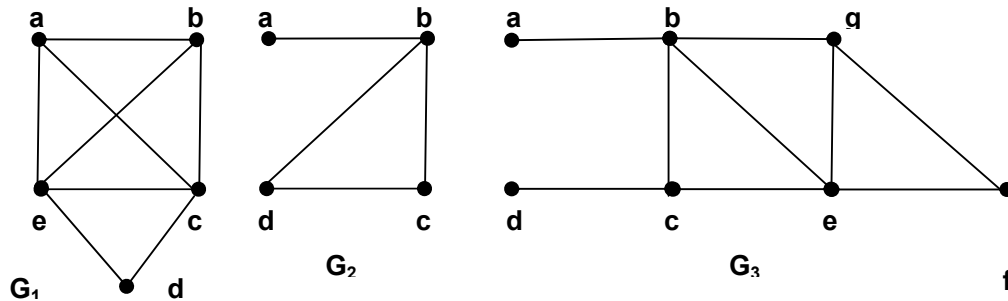


Figura 5.8.4: Grafos no dirigidos  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$  con o sin caminos hamiltonianos

**TEOREMA 5.6.- TEOREMA DE DIRAC:** Sea  $G = (V, A)$  un grafo simple con  $n$  vértices para  $n \geq 3$ , tal que todos los vértices de  $G$  tienen grado mayor o igual a  $n/2$ . Entonces  $G$  contiene un circuito hamiltoniano.

**TEOREMA 5.7.- TEOREMA DE ORE:** Sea  $G = (V, A)$  un grafo simple con  $n$  vértices para  $n \geq 3$ , tal que  $\delta(u) + \delta(v) \geq n$ , para cada par de vértices no adyacentes  $u$  y  $v$  de  $G$ . Entonces  $G$  tiene un circuito hamiltoniano..

ISBN 987-43-9433-1



## 5.9.- GRAFOS PLANOS

En un mapa de carreteras, las líneas que indican las carreteras y autopistas se intersecan por lo general solamente en los puntos de confluencia o en poblaciones. Pero hay ocasiones en que las carreteras parecen intersectarse cuando una se localiza sobre otra, como en el caso de un paso elevado. En este caso las dos carreteras están en diferentes niveles o planos. Este tipo de situación nos lleva a definir los grafos planos.

**DEFINICIÓN 5.25.-** Un grafo  $G = (V, A)$ , es **plano** si podemos dibujar a  $G$  en el plano de modo que sus aristas se intersequen sólo en los vértices de  $G$ . Este dibujo de  $G$  se conoce como una **inmersión (embebido o encaje)** de  $G$  en el plano

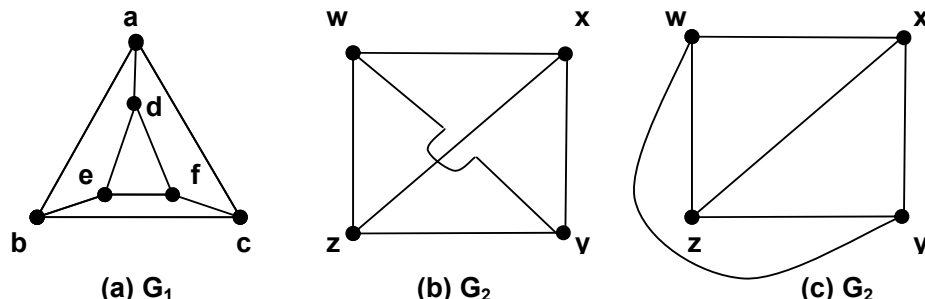


Figura 5.9.1: Grafos Planos  $G_1$  y  $G_2$

**Ejemplo 5.9.1.-** Los grafos de la Figura 5.9.1 son planos. El primero  $G_1$  es un grafo **3-regular**, ya que cada vértice tiene grado 3; es plano pues ningún par de aristas se intersecan, excepto en los vértices. El grafo (b)  $G_2$  parece un grafo no plano; las aristas  $\{x, z\}$  y  $\{w, y\}$  se cruzan en un punto distinto a un vértice. Sin embargo podemos trazar nuevamente este grafo, como se muestra en la parte (c) de la figura. En consecuencia  $K_4$  es plano.

**Ejemplo 5.9.2.-** Al igual que  $K_4$ , los grafos  $K_1$ ,  $K_2$ , y  $K_3$  son planos.

**DEFINICIÓN 5.26.-** Sea  $G = (V, A)$ , un grafo no dirigido sin lazos, tal que  $A \neq \emptyset$ . Una subdivisión elemental de  $G$  resulta cuando eliminamos una arista tal como  $a = \{v, w\}$  de  $G$  y entonces las aristas  $\{u, v\}$  y  $\{v, w\}$  se añaden a  $G - a$ , donde  $v \notin V$ .

**DEFINICIÓN 5.27.-** Los grafos no dirigidos sin lazos  $G_1 = (V_1, A_1)$  y  $G_2 = (V_2, A_2)$  son **homeomorfos** si son isomorfos o si ambos pueden obtenerse del mismo grafo no dirigido sin lazos  $H$  por una sucesión de subdivisiones elementales.

**Ejemplo 5.9.3.-** Al igual que los ejemplos anteriores tenemos los siguientes grafos:

1. Sea  $G = (V, A)$  un grafo no dirigido sin lazos con  $|A| \geq 1$ . Si  $G'$  se obtiene de  $G$  por una subdivisión elemental, entonces el grafo  $G' = (V', A')$  satisface  $|V'| = |V| + 1$  y  $|A'| = |A| + 1$ .
2. Consideremos los grafos  $G, G_1, G_2$  y  $G_3$  de la Figura 5.9.2. En este caso  $G_1$  se obtiene de  $G$  por intermedio de una subdivisión elemental: se elimina la arista  $\{a, b\}$  de  $G$  y se añaden las aristas  $\{a, w\}$  y  $\{w, b\}$ . El grafo  $G_2$  se obtiene de  $G$  mediante dos subdivisiones elementales. Por lo tanto  $G_1$  y  $G_2$  son homeomorfos. Así mismo,  $G_3$  puede obtenerse de  $G$  con cuatro subdivisiones elementales, por lo tanto  $G_3$  es homeomorfo a  $G_1$  y  $G_2$ .
3. Sin embargo  $G_1$  no puede obtenerse de  $G_2$  (o  $G_2$  de  $G_1$ ) por una sucesión de subdivisiones elementales. Además, el grafo  $G_3$  puede obtenerse de  $G_1$  o  $G_2$  por una sucesión de subdivisiones elementales: seis (de tales sucesiones de tres subdivisiones elementales) para  $G_1$  y dos para  $G_2$ . Pero ni  $G_1$  ni  $G_2$  pueden obtenerse de  $G_3$  por una sucesión de subdivisiones elementales.

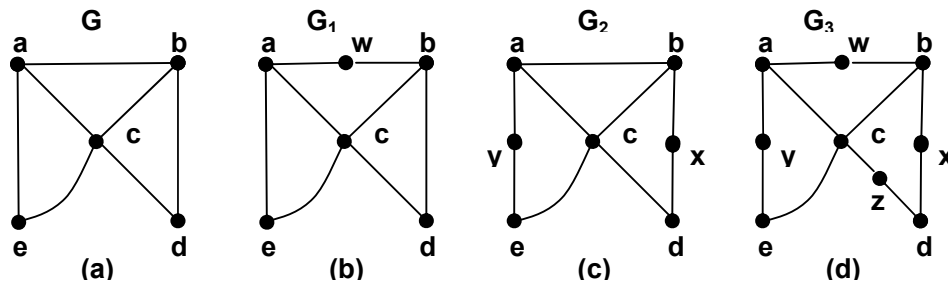


Figura 5.9.2: Grafos Homeomorfos  $G_1, G_2$  y  $G_3$



Podría pensarse que los grafos homeomorfos son isomorfos excepto, posiblemente, por los vértices de grado 2. En particular, si dos grafos son homeomorfos, son simultáneamente planos (o no planos). Estos antecedentes llevan al siguiente resultado.

**TEOREMA 5.8.- TEOREMA DE KURATOWSKI:** *Un grafo  $G = (V, A)$  no es plano si y solo si contiene un subgrafo que es homeomorfo a  $K_5$  o a  $K_{3,3}$ .*

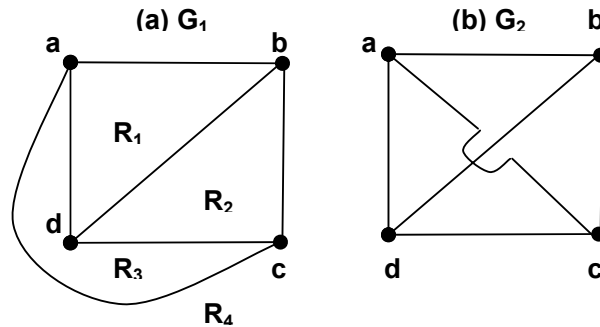


Figura 5.9.3: Regiones en un Grafo

Cuando un grafo o multigrafo es plano y conexo obtenemos la siguiente relación descubierta por Euler, para el cual necesitamos contar el número de regiones determinadas por un grafo o multigrafo conexo plano, el número (de estas regiones) se define sólo cuando se tiene una inmersión plana del grafo. Por ejemplo, la inmersión plana de  $K_4$  en la parte (a) de la Figura 5.9.3 demuestra cómo esta representación de  $K_4$  determina cuatro regiones en el plano; tres de área finita  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  y la región infinita  $R_4$ . Cuando observamos la Figura 5.9.3 (b) podría pensarse que  $K_4$  determina cinco regiones, pero esta representación no es una inmersión plana de  $K_4$ . Así, el resultado de la Figura 5.9.3(a) es el único que nos interesa.

**TEOREMA 5.9.-** *Sea  $G = (V, A)$  un grafo o multigrafo plano conexo con  $|V| = v$  y  $|A| = a$ . Sea  $r$  el número de regiones en el plano determinadas por una inmersión (o representación) plana de  $G$ , una de estas regiones tiene un área infinita y se conoce como región infinita. Entonces:  $v - a + r = 2$*

**COROLARIO 5.2.-** *Sea  $G = (V, A)$  un grafo o multigrafo plano conexo sin lazos con los valores  $|V| = v$  y  $|A| = a > 2$ . y  $r$  regiones. Entonces se deben cumplir las siguientes condiciones  $3r \leq 2a$  y  $a \leq 3v - 6$ .*

**Ejemplo 5.9.4.-** El grafo  $K_5$  no tiene lazos y es conexo con 10 aristas y cinco vértices. En consecuencia:  $3v - 6 = 15 - 6 = 9 < 10 = a$ . Por lo tanto por el Corolario 5.2, vemos que  $K_5$  no es plano.

**Ejemplo 5.9.5.-** El grafo  $K_{3,3}$  no tiene lazos y es conexo con 9 aristas y seis vértices. En consecuencia:  $3v - 6 = 18 - 6 = 12 \geq 9 = a$ . Sería un error concluir a partir de esto que  $K_{3,3}$  es plano; cometeríamos el error de estar argumentando al revés. Sin embargo,  $K_{3,3}$  no es plano. Si  $K_{3,3}$  fuera plano, entonces como cada región del grafo está limitada por al menos cuatro aristas, tendríamos  $4r \leq 2a$ . Del teorema de Euler, tenemos  $v - a + r = 2$  o de  $r = a - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ , y  $20 = 4r \leq 2a = 18$ . De esta demostración surge que  $K_{3,3}$  no es plano.





### 5.10.- PROBLEMAS DEL CAPITULO V

1 – Para el grafo de la Figura 5.10.1, determine:

1. un camino  $b - d$  que no sea un recorrido;
2. un recorrido  $b - d$  que no sea un camino simple;
3. un camino simple  $b - d$ ;
4. un camino cerrado  $b - b$  que no sea un circuito;
5. un circuito  $b - b$  que no sea un ciclo; y,
6. un ciclo  $b - b$ .

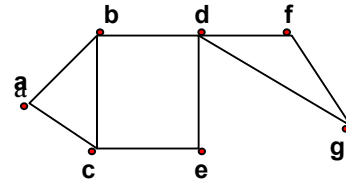


Figura 5.10.1

2 - ¿Cuántos caminos simples diferentes de longitud 3 existen entre los vértices a y f en el grafo de la Figura 5.10.2?

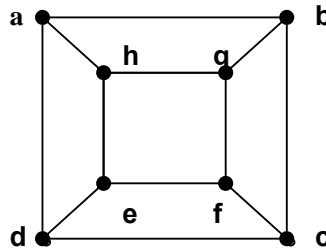


Figura 5.10.2

3 – ¿Cuál de los grafos de la Figura 5.10.3 es conexo? En el caso que no sea conexo, ¿cuántas componentes conexas tiene?

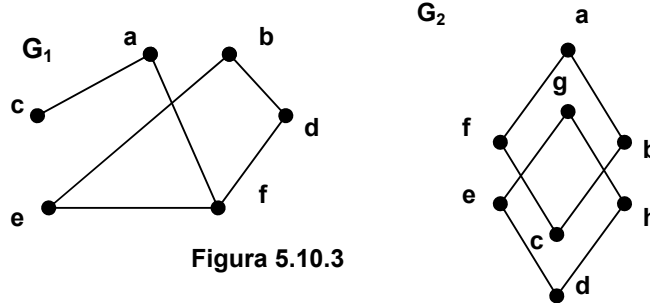


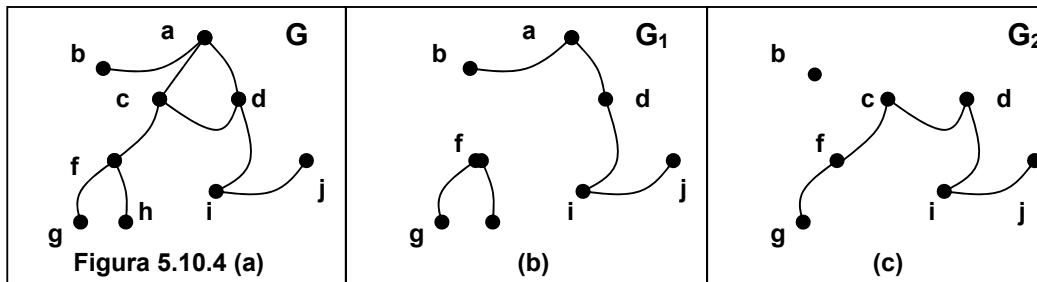
Figura 5.10.3

4 – a) Dé un ejemplo de un grafo conexo  $G$  tal que al eliminarle cualquier arista se obtenga un grafo desconexo.  
b) Sea  $G$  un grafo que satisface la condición del apartado a) ¿Debe  $G$  carecer de lazos? ¿Puede  $G$  ser un multígrafo? Si  $G$  tiene  $n$  vértices, ¿podemos determinar cuántas aristas tiene?

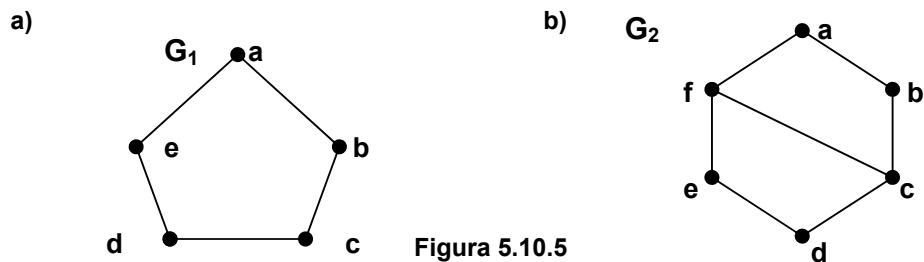
5 – Sea  $G$  el grafo no dirigido de la Figura 5.10.4 a)

- 1) ¿Cuántos subgrafos conexos de  $G$  tienen cuatro vértices e incluyen un ciclo?
- 2) Describa el subgrafo  $G_1$  (de  $G$ ) de la parte b) de la figura como un subgrafo inducido y en términos de la eliminación de los vértices de  $G$ .
- 3) Describa el subgrafo  $G_2$  (de  $G$ ) de la parte c) de la figura como un subgrafo inducido y en términos de la eliminación de los vértices de  $G$ .
- 4) Trace el subgrafo de  $G$  inducido por el conjunto de vértices  $U = \{b, c, d, f, i, j\}$
- 5) Para el grafo  $G$ , sea  $e$  la arista  $\{c, f\}$ . Trace el subgrafo  $G - e$
- 6) Encuentre un subgrafo recubridor de  $G$  de tal modo que:
  - i) No posea aristas.
  - ii) Posea 3 aristas
  - iii) Posea un ciclo.
  - iv) Sea conexo y sin ciclos.

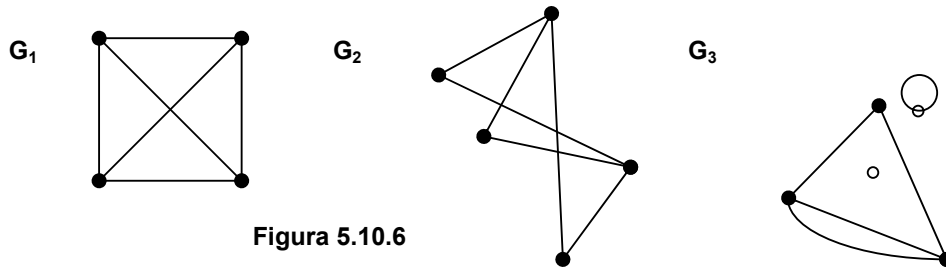




- 6 – Demostrar que si  $G$  es un grafo con  $n$  vértices y al menos  $(k-1)n - (k-2) + 1$  aristas, donde  $0 < k < n$ , entonces hay un subgrafo de  $G$  con  $\delta(H) \geq k$ .
- 7 – Sea  $G$  un grafo con  $V(G) \subseteq \{1, \dots, n\}$  con  $|V(G)| = v$  y  $|A(G)| = a$ . ¿Cuántos grafos distintos con vértices en  $\{1, \dots, n\}$  contienen a  $G$  como subgrafo?
- 8 – Probar que si  $G$  es un grafo con al menos dos vértices, entonces  $G$  tiene al menos dos vértices con el mismo grado.
- 9 – a) Trace los grafos completos:  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$   
b) Halle una fórmula para el número de lados de  $K_n$
- 10 – Encuentre el grafo complementario de cada uno de los siguientes grafos:



- 11 – a) Encuentre la matriz de adyacencia y la matriz de incidencia para los siguientes grafos:



- b) Trace un grafo, sin lados paralelos, representado por las siguientes matrices de adyacencia:

i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- c) Trace un multígrafo representado por las siguientes matrices de incidencia

i) 
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) 
$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 12 – Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices y 2 componentes conexas.  
 (a) ¿Cuál es el número mínimo de aristas que  $G$  puede tener en esas condiciones?  
 (b) Supongamos además que cada componente de  $G$  es un grafo completo, ¿cuál es el número mínimo de aristas que  $G$  puede tener?.
- 13 – En una reunión de 20 personas hay en total 48 pares de personas que se conocen.  
 (a) Justificar por qué hay al menos una persona que a lo sumo conoce a cuatro personas.  
 (b) Supongamos que hay exactamente una persona  $X$  que conoce a lo sumo a cuatro; y supongamos que esta  $X$  conoce al menos a una. Verificar que las otras 19 conocen exactamente a cinco cada una. ¿A cuántos conoce  $X$ ?
- 14 – Sea  $G$  un grafo conexo con cuello  $c(G)$ . Probar que si  $d(u, v) \leq 2c(G)$ , entonces hay una única geodésica de  $u$  a  $v$ .

- 15 – Dado el siguiente grafo, calcule la cantidad de:  
 a) caminos de longitud 3 existentes entre  $c$  y  $e$   
 b) caminos de longitud 4 existentes entre  $a$  y  $b$

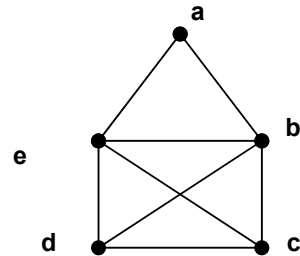
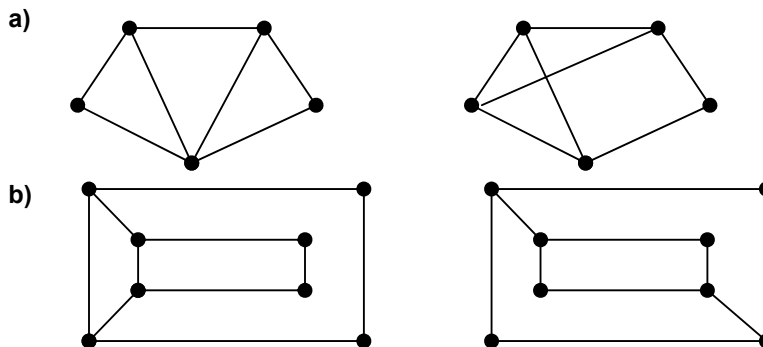


Figura 5.10.7

- 16 – Si  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $n \geq 3$ , el grafo Rueda con  $n$  radios se define como el grafo formado por un ciclo de longitud  $n$  y un vértice adicional que es adyacente a los  $n$  vértices del ciclo. Este grafo se denota con  $R_n$   
 a) Trace  $R_3, R_4, R_5$  y  $R_6$   
 b) ¿Es algún grafo  $R_n$  isomorfo a un grafo completo  $K_n$ ?
- 17 – En cada apartado determine si los grafos dados son isomorfos.



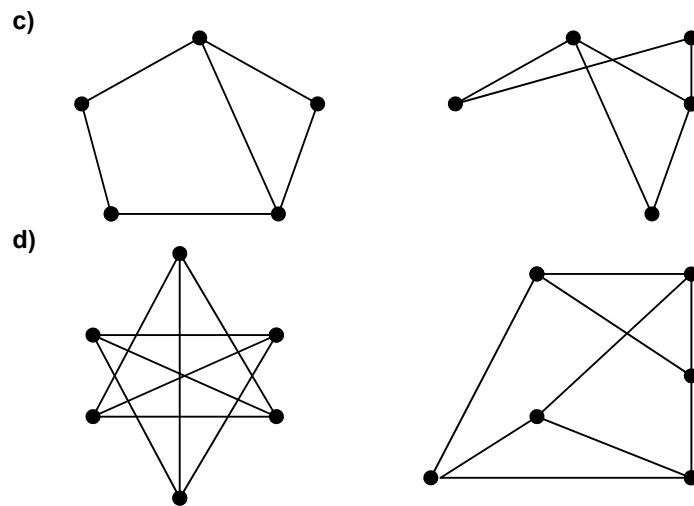
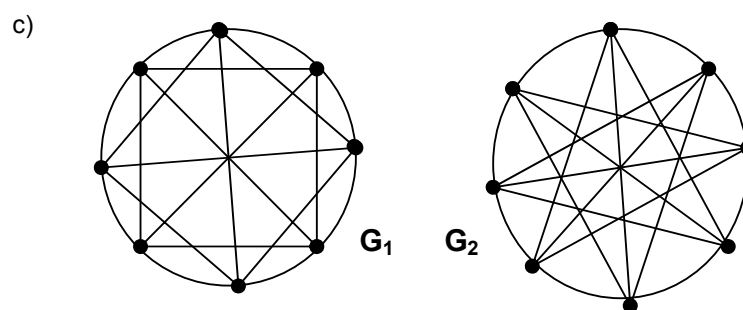
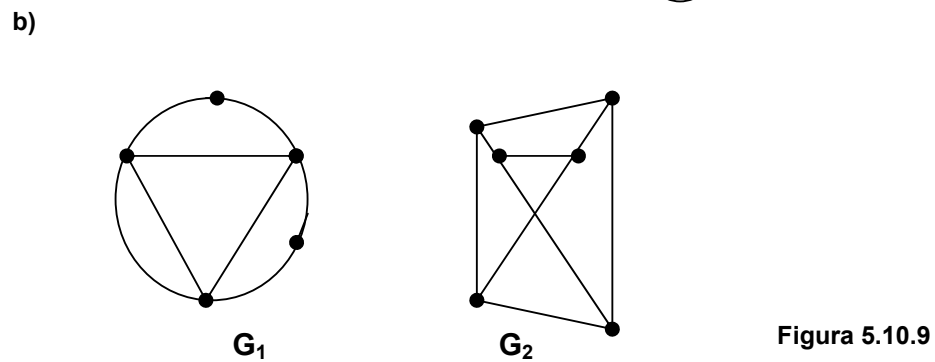
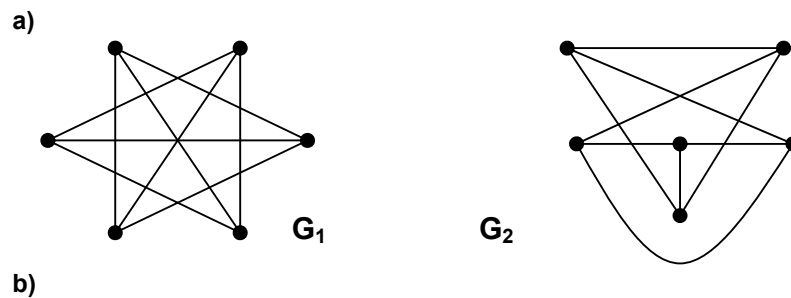


Figura 5.10.8

- 18 – Construir cinco grafos con 8 vértices, todos de grado 3, de forma que cada dos de esos grafos no sean isomorfos.
- 19 – En cada uno de los siguientes apartados, use el concepto de grafos complementarios para determinar si cada par de grafos que se da son isomorfos o no:



- 20 – Probar que  $C_n$  es el único grafo conexo (salvo isomorfismos) con  $n$  vértices de forma que el grado de todos sus vértices es 2.
- 21 – ¿Cuántos grafos de tres vértices pueden construirse de manera que cada dos no sean isomorfos? ¿Y cuántos con cuatro?  
**Sugerencia.** Hacer una partición de los grafos según haya o no vértices de grado tres; luego según haya o no de grado dos, etc.
- 22 – Fijemos los vértices  $\{1, \dots, n\}$  y sea  $G$  el grafo completo con esos vértices.  
 (a) ¿Cuántos grafos isomorfos a un  $C_3$  distintos se pueden formar que sean subgrafos del grafo  $G$ ?  
 (b) ¿Cuántos grafos isomorfos a un  $C_k$  distintos se pueden formar que sean subgrafos del grafo  $G$ ?  
 (c) ¿Cuántos grafos isomorfos a un  $K_r$  se pueden formar con los vértices  $\{1, \dots, n\}$ ? (Obsérvese que el apartado (a) es un caso particular de (b) y (c)).  
 (d) La misma pregunta, pero para un  $K_{r,s}$ .
- 23 – Trace grafos o multígrafos que tengan las propiedades dadas en cada uno de los siguientes apartados o explique por que no existen tales grafos:  
 a) Que tenga tres aristas y dos vértices.  
 b) Que tenga tres aristas y la suma de los grados de sus vértices sea 10.  
 c) Que sea 3-regular y que tenga cinco vértices.  
 d) Que sea 3-regular y que tenga seis vértices.  
 e) Que posea seis vértices y cuatro aristas  
 f) Que posea cuatro vértices con grados 1, 2, 3 y 4  
 g) Que sea un grafo simple que tenga seis vértices con grados 1,2,3,4,5,5
- 24 - Determine  $|V|$  (cantidad de vértices) para los siguientes grafos o multígrafos  $G$ .  
 a)  $G$  tiene nueve aristas y todos los vértices tienen grado 3.  
 b)  $G$  es regular con 15 aristas.  
 c)  $G$  tiene 10 aristas con dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.
- 25 – Determine los valores de  $n$  para los que el grafo completo  $K_n$  tiene un circuito euleriano. ¿Cuáles  $K_n$  tienen recorrido euleriano pero no circuito euleriano?
- 26 – a) Encuentre un circuito euleriano para el grafo de la Figura 5.10.10.  
 b) Si se elimina la arista  $\{d, e\}$  de este grafo, encuentre un recorrido euleriano para el subgrafo resultante

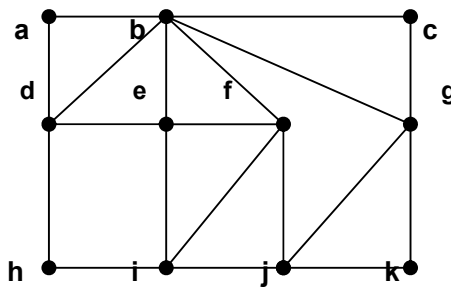


Figura 5.10.10

- 27 - Un sistema de carreteras comunica siete pueblos A, B, C, D, E, F, y G como sigue:

La carretera 22 comunica A y C pasando por B.  
 La carretera 33 comunica C y D, y después pasa por B hasta llegar a F.  
 La carretera 44 comunica D y A pasando por E.  
 La carretera 55 comunica F y B pasando por G.  
 La carretera 66 comunica G y D.



- a) Utilizando vértices para representar los pueblos y aristas para los tramos de carretera que los unen; dibuje un grafo que ilustre esta situación.
- b) ¿Es posible comenzar en algún pueblo y viajar por todas las carreteras mencionadas exactamente una vez,
  - i) volviendo al mismo pueblo?;
  - ii) si no es necesario regresar al pueblo en el que inició el recorrido?

28 – Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices,  $m$  aristas y  $p$  componentes conexas. Probar que se cumple la siguiente desigualdad:

$$n - p \leq m \leq \frac{1}{2}(n - p)(n - p + 1).$$

29 – Sea un grafo  $G$  y sean  $\delta = \delta(G)$  y  $c = c(G)$  el grado mínimo y el cuello de  $G$ , respectivamente ( $c(G) < +\infty$ ).

- (a) Supongamos que  $c$  es un número impar, digamos  $c = 2m+1$ . Probar que el número de vértices de  $G$  es, al menos,

$$1 + \delta + \delta(\delta - 1) + \delta(\delta - 1)^2 + \dots + \delta(\delta - 1)^{m-1}.$$

Así que, en particular,  $|V(G)| \geq (\delta - 1)^{c-1/2}$

- (b) Supongamos que  $c$  es un número par,  $c = 2m$ . Entonces, el número de vértices de  $G$  es, al menos,  $2 + 2(\delta - 1) + 2(\delta - 1)^2 + \dots + 2(\delta - 1)^{m-1}$ .

- (c) Comprobar que se tiene siempre que  $|V(G)| \geq (\delta - 1)^{\lceil (c-1)/2 \rceil}$ .

**Comentario:** si un grafo tiene  $\delta$  grande (todos los vértices tienen muchos vecinos) y  $c$  grande (todos los ciclos son largos), estos resultados nos dicen que tendría muchos vértices. Por ejemplo, si de un grafo sabemos que no tiene triángulos ( $C_3$ ) ni cuadrados ( $C_4$ ) y tiene menos de 100 vértices, entonces al menos uno tiene grado  $\leq 10$ . O si  $\delta = 10$  y  $c = 10$ , entonces el grafo tiene al menos 6561 vértices.

Sin embargo, esto ocurre cuando exigimos que ambos números sean altos simultáneamente: un grafo como el  $K_{11}$  tiene  $\delta = 10$ , y sólo tiene 11 vértices. Mientras que un  $C_{10}$  tiene  $c = 10$  (y 10 vértices).

30 – La siguiente figura muestra un grafo que representa una sección de una tienda. Los vértices indican donde se localizan las cajas, mientras que las aristas indican los pasillos entre ellas. La tienda contrata a una empresa de vigilancia y desea saber:

- a) ¿Puede un solo vigilante recorrer todos los pasillos pasando una sola vez por cada pasillo y volver al punto de partida?
- b) ¿Puede un solo vigilante recorrer todos los pasillos pasando una sola vez por cada pasillo sin necesidad de volver al punto de partida?

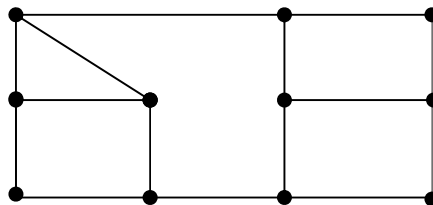


Figura 5.10.11

31 – Al visitar el museo de ciencias, Pablo y David se preguntan si podrían pasar por las siete habitaciones y el pasillo que las rodea sin cruzar ninguna puerta más de una vez. Si comienzan desde la posición del pasillo marcada con una estrella en la Figura 5.10.12, ¿pueden lograr su objetivo?



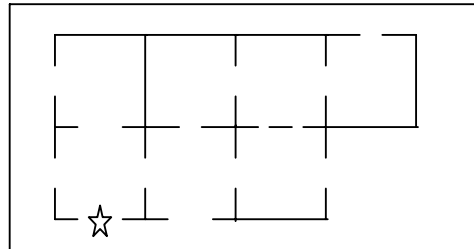


Figura 5.10.12

- 32 – a) ¿Cuántos vértices y cuántas aristas tienen los grafos bipartitos completos  $K_{4,7}$ ,  $K_{7,11}$  y  $K_{m,n}$  donde  $m, n \in \mathbb{Z}^+$   
 b) Si el grafo  $K_{m,12}$  tiene 72 aristas, ¿cuánto vale  $m$ ?
- 33 – Para cada grafo de la Figura 5.10.13, determine si el grafo es bipartito o no.

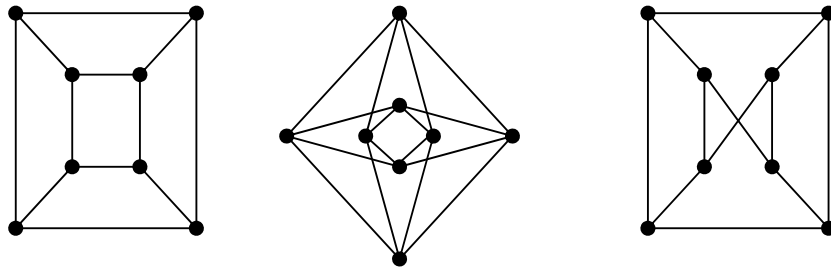


Figura 5.10.13

- 34 – ¿Cuál es la longitud del camino simple más largo en cada uno de los siguientes grafos?  
 a)  $K_{1,4}$                       b)  $K_{3,7}$                       c)  $K_{7,12}$                       d)  $K_{m,n}$
- 35 – ¿Puede un grafo bipartito contener un ciclo de longitud impar? Explique por qué.
- 36 – Muestre que  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planos.
- 37 – Dado el grafo  $G$ , encuentre  
 a) un grafo  $G_1$  por medio de una subdivisión elemental sobre  $G$ .  
 b) un grafo  $G_2$  por medio de dos subdivisiones elementales sobre  $G$ .  
 c) ¿Cómo son  $G_1$  y  $G_2$ ?

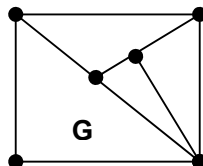
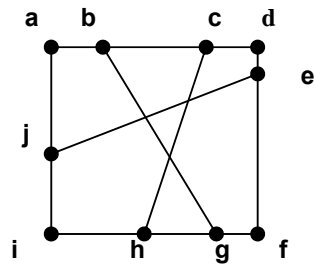


Figura 5.10.14

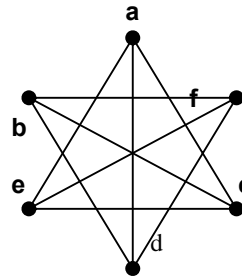
- 38 – Determine cuáles de los siguientes grafos son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a  $K_5$  o a  $K_{3,3}$ .



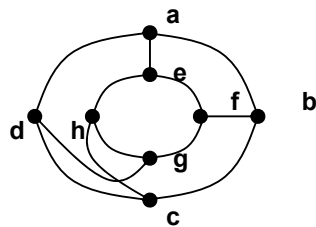
a)



b)



c)



d)

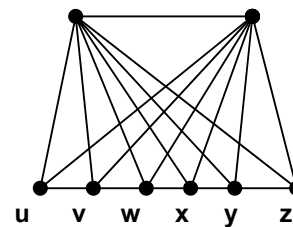
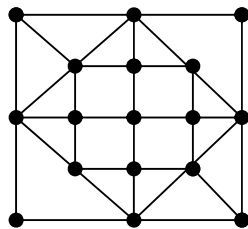


Figura 5.10.15

39 – Determine el número de vértices, aristas y regiones para cada uno de los siguientes grafos planos. Verifique que se cumple el Teorema de Euler.

a)



b)

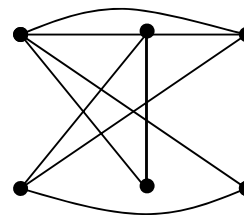


Figura 5.10.16

40 – a) Un grafo plano conexo tiene nueve vértices con valencias 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, y 5. ¿Cuántos lados hay? ¿Cuántas regiones hay?.

b) Sea  $G$  un grafo plano 4-regular. Si  $|E| = 16$  ¿cuántas regiones hay en una representación plana de  $G$ ?

=====



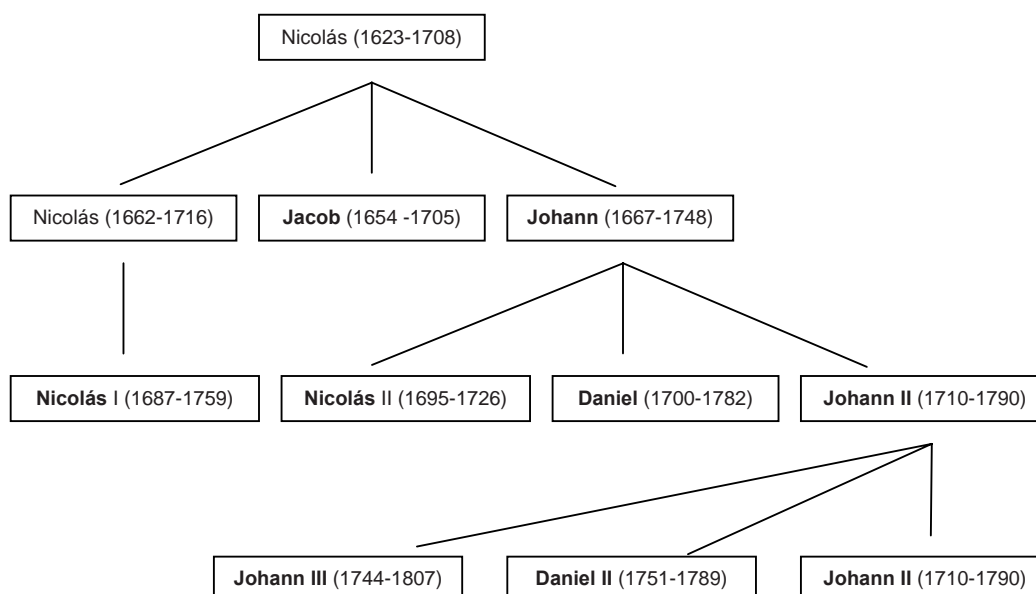


# MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA

## CAPITULO VI

### ÁRBOLES

La de los Bernoulli de Basilea es, quizás, la familia más famosa de las Matemáticas.



Famosa por la cantidad de excelentes matemáticos que “produjo” (hasta ocho, los que aparecen en **negrita** en el esquema anterior, en tres generaciones distintas) y, también, por la especial personalidad de algunos de ellos. Lo que aquí nos interesa es, precisamente, la manera en que hemos exhibido la información sobre la familia, su *árbol genealógico*. Es un grafo, donde los vértices van etiquetados con los nombres de los componentes de la familia, que tiene una estructura especial.



En muchas otras cuestiones utilizamos estas estructuras arbóreas para representar información. La imagen que mostramos a la izquierda resultaría, sin duda, familiar: se trata de la descripción que del contenido de un computador muestra el Explorador de Windows. Aquí, las etiquetas de los vértices son los nombres de los distintos dispositivos. Pero de nuevo la estructura es especial: se trata de un **árbol**. El capítulo que aquí comienza está dedicado al estudio de estos objetos y a su aplicación a diversas cuestiones: problemas de optimización, diseño de algoritmos, análisis de juegos, etc.

## 6.1.- DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS

La primera definición de la noción de árbol (de las varias que daremos) es la sugerida por los ejemplos vistos anteriormente:

**DEFINICIÓN 6.1.-** *Un árbol es un grafo conexo y sin ciclos.*

En el mismo tono botánico, se define un **bosque** como un grafo sin ciclos (si es conexo, sería un árbol; si no lo es, sus componentes conexas serían árboles). Por ejemplo, los grafos lineales  $L_n$  son árboles, mientras que los circulares  $C_n$  o los completos  $K_n$  no lo son en cuanto  $n \geq 3$ . Los grafos bipartitos completos  $K_{r,s}$ , que son siempre conexos, sólo son árboles si  $s = 1$  ó  $r = 1$  (si  $r \geq 2$  y  $s \geq 2$  hay al menos un ciclo de orden cuatro).

Esta primera definición no recoge una de las características fundamentales de los árboles, que los hace especialmente útiles en ciertas cuestiones: son los conexos "más baratos" (en cuanto al número de aristas) que podemos tener. Los siguientes enunciados nos proporcionan caracterizaciones alternativas que recogen esta idea:

**PROPOSICIÓN 6.1.-** *Un grafo  $G$  es un árbol (un conexo sin ciclos)  $\Leftrightarrow$  Es conexo y tiene la propiedad de que al eliminar una arista cualquiera del grafo, éste deja de ser conexo.*

**Demostración.** En un sentido, supongamos que tenemos un grafo  $G$  conexo y sin ciclos. Queremos probar que se desconecta al quitar una arista cualquiera.

Sea  $a$  una arista de  $G$  y formemos el grafo  $G \setminus \{a\}$  eliminándola. Si  $G \setminus \{a\}$  fuera conexo, podríamos conectar en  $G \setminus \{a\}$  los vértices de  $a$ . Pero añadiendo la arista  $a$ , lo que tendríamos sería un ciclo en  $G$  (contradicción). Así que  $G \setminus \{a\}$  es no conexo (sea cual sea la arista  $a$  de  $G$  que elijamos).

En el otro sentido, supongamos que  $G$  es un grafo conexo que se desconecta si quitamos cualquier arista. Si el grafo contuviera un ciclo, siempre podríamos quitar una arista de ese hipotético ciclo sin que el grafo dejara de ser conexo, lo que una contradicción. Luego ese tal ciclo no puede existir (Como sabemos, véase el lema 5.2, si quitamos una arista de un grafo conexo y éste se desconecta, lo hace en exactamente dos componentes conexas. En el caso de un árbol, al quitar una arista cualquiera se formaría un bosque con dos componentes conexas. Obsérvese que lo que nos dice esta proposición es que toda arista de un árbol es un puente).

**PROPOSICIÓN 6.2.-** *Un grafo  $G$  es un árbol (un conexo sin ciclos)  $\Leftrightarrow$  No tiene ciclos y, si añadimos una arista cualquiera, se forma un ciclo.*

**Demostración:** En un sentido, sea  $G$  un grafo conexo y sin ciclos. Consideremos dos vértices cualesquiera que no estén unidos por arista alguna en  $G$ . Por estar en un grafo conexo, existirá un paseo que los conecte en  $G$ . Al añadir una arista entre los vértices, se formará un ciclo.

En el otro sentido, sea  $G$  un grafo sin ciclos para el que añadir una arista cualquiera supone la formación de un ciclo. Supongamos que no fuera conexo. En este caso, al menos existirían dos vértices que no podríamos conectar en  $G$ . Pero entonces todavía podríamos añadir la arista que los une sin que se nos formara un ciclo, contradicción.

Sabemos que en un grafo conexo el número de aristas  $|A(G)|$  no puede ser menor que  $|V(G)| - 1$ . La igualdad se alcanza para los árboles, como nos dice el siguiente resultado:



**PROPOSICIÓN 6.3.-** *Un grafo  $G$  es un árbol (un conexo sin ciclos)  $\Leftrightarrow$  Es conexo y se cumple que:  $|A(G)| = |V(G)| - 1$ .*

**Demostración:** En un sentido, vamos a proceder por inducción (en su versión fuerte) sobre el número de aristas,  $|A|$ :

- Si  $G$  es un árbol con una arista,  $|A(G)| = 1$ , sólo cabe la posibilidad de que sea un  $L_2$ , para el que  $|V(G)| = 2$ .
- Supongamos cierto que para todo árbol con  $|A(G)| \leq d$  se tiene que  $|A(G)| = |V(G)| - 1$ .
- Consideremos un árbol cualquiera  $G$  con  $|A(G)| = d + 1$ . Si nos fijamos en una arista  $e$  de  $G$ , sabemos que:

$$G \setminus \{e\} = G_1 \cup G_2,$$

donde  $G_1$  y  $G_2$  son árboles con número de aristas  $|A(G_1)| \leq d$  y  $|A(G_2)| \leq d - 1$  (de hecho,  $|A(G_1)| + |A(G_2)| = d$ ). A estos dos árboles podemos aplicarles la hipótesis de inducción para deducir que

$$\begin{aligned} |A(G_1)| &= |V(G_1)| - 1 \\ + |A(G_2)| &= |V(G_2)| - 1 \\ \hline |A(G)| - 1 &= |V(G)| - 2, \end{aligned}$$

de donde obtenemos lo que queríamos.

En el otro sentido, tomemos un grafo conexo  $G$  tal que  $|A(G)| = |V(G)| - 1$ . Si contuviera un ciclo, podríamos quitar una arista  $e$  de ese ciclo sin que el grafo se desconectara. Pero habríamos llegado a un grafo,  $G \setminus \{e\}$ , conexo con:

$$|A(G \setminus \{e\})| = |A(G)| - 1 \text{ y } |V(G \setminus \{e\})| = |V(G)|.$$

Utilizando que  $|A(G)| = |V(G)| - 1$ ,

$$|A(G \setminus \{e\})| = |V(G)| - 2 = |V(G \setminus \{e\})| - 2;$$

y esto contradice (¡nos faltan aristas!) el que  $G \setminus \{e\}$  fuera conexo.

Los ejercicios 6.1.1 y 6.1.2 recogen algunas otras caracterizaciones. Resumamos todas las características que hacen de un grafo  $G$  un árbol: es conexo, sin ciclos, tiene que  $|A(G)| = |V(G)| - 1$  aristas y, si quitamos una arista cualquiera, se desconecta; y si añadimos una arista cualquiera, se forma un ciclo. Es decir, como ya adelantábamos, es el grafo conexo más barato (en el sentido de que no sobra ni falta arista alguna) que podemos construir.

Como parece claro, la sucesión de grados de los vértices de un árbol ha de ser muy especial. Ya sabemos que en cualquier grafo  $G = (V, A)$  se tiene que

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|A|$$

Pero si además  $G$  es un árbol, como  $|A| = |V| - 1$ , se tendría que

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|V| - 2$$

Obsérvese que ahora sólo tenemos un “grado de libertad”, el número de vértices  $|V|$ , pues el de aristas ya queda fijado. De esta igualdad podemos deducir el siguiente resultado.

**TEOREMA 6.1.-** *Todo árbol con  $|V| \geq 2$  tiene, al menos, dos vértices de grado 1.*

**Demostración:** Supongamos que no hay vértices de grado 1, es decir, que  $\delta(v) \geq 2$ , para todo  $v \in V$ . Entonces,

$$2|V| - 2 = \sum_{v \in V} \delta(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V|$$

lo que resulta imposible. Pero tampoco puede ocurrir que haya un sólo vértice  $w$  de grado 1, porque tendríamos

$$2|V| - 2 = \sum_{v \in V} \delta(v) = \delta(w) + \sum_{v \neq w} \delta(v) \geq 1 + 2(|V| - 1) = 2|V| - 1$$

Así que al menos ha de haber dos de grado 1.

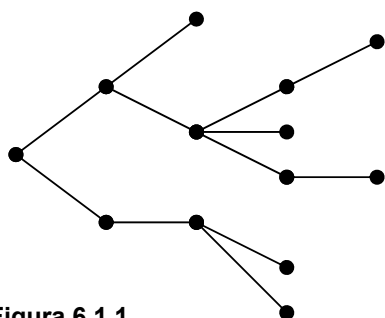


Figura 6.1.1

En muchas ocasiones conviene señalar un vértice especial en un árbol. Lo que queda es lo que llamaremos un **árbol con raíz**, donde la raíz, por supuesto, es ese vértice especial, que sirve de origen de coordenadas. Muchos de los algoritmos que veremos en estas páginas producen, de manera natural, un árbol con raíz, y en la sección 9.3 estudiaremos con detalle algunas aplicaciones de estos objetos. Por supuesto, cualquier árbol se convierte en uno con raíz en cuanto decidamos qué vértice actúa como raíz (la elección de este vértice especial puede hacer cambiar las propiedades del árbol con raíz, como veremos más adelante). En un árbol con raíz, los vértices se agrupan por generaciones: la primera contendría sólo a la raíz, la

segunda estaría formada por todos los vértices vecinos de la raíz; la tercera, por los vecinos de estos últimos (salvo la raíz); la cuarta, por los vecinos de los de la tercera generación (excepto los que ya estaban en la segunda). . . y así sucesivamente. Obsérvese que los vértices de la generación  $k$  sólo pueden estar unidos a vértices de las generaciones anterior y posterior, porque si no, tendríamos ciclos. Lo que la proposición anterior afirma es que al menos hay dos vértices terminales (que luego llamaremos hojas) en un árbol como éste. El caso límite es el de un  $L_n$ .

**Ejemplo 6.1.1.-** *¿Cómo son los árboles con  $n$  vértices que tienen el menor y el mayor número posible de vértices de grado 1?*

Sabemos que el mínimo número de vértices de grado 1 es 2. Así que, si un árbol con  $n$  vértices tiene exactamente dos vértices, digamos  $w$  y  $u$ , de grado 1, se cumplirá que

$$2n - 2 = \sum_{v \in V} \delta(v) = 1 + 1 + \sum_{v \neq u, w} \delta(v)$$

En la suma final tenemos  $n-2$  términos, todos ellos mayores o iguales que 2; la única forma de conseguir la igualdad será que  $\delta(v) = 2$  para todo  $v \in V$ ,  $v \neq u, w$ . Y esta configuración de grados es la del grafo lineal con  $n$  vértices,  $L_n$ .

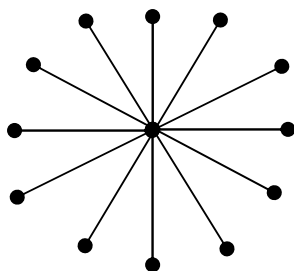


Figura 6.1.2

En el otro extremo, es imposible que todos los vértices tengan grado 1 (pues no se cumpliría la fórmula de los grados). Pero sí podría ocurrir que hubiera  $n - 1$  de grado 1. El vértice restante,  $w$ , tendría grado

$$2n - 2 = \sum_{v \in V} \delta(v) = (n - 1) + \delta(w) \Rightarrow \delta(w) = n - 1$$

que, por cierto, es el máximo grado que puede tener un vértice en un grafo con  $n$  vértices. En este caso, tenemos el grafo estrellado de la izquierda.

**TEOREMA 6.2.-** Sea  $G = (V, A)$  un grafo no dirigido, entonces  $G$  es conexo si y sólo si  $G$  tiene un árbol recubridor.

**TEOREMA 6.3.-** Si  $a$  y  $b$  son vértices distintos en un árbol  $T = (V, A)$ , entonces hay un único camino que conecta a esos vértices.

### 6.1.1.- CONTANDO EL NÚMERO DE ÁRBOLES DISTINTOS

Arthur Cayley estaba muy interesado en la cuestión de enumerar ciertos compuestos orgánicos, quizás uno de los primeros intentos serios de aplicar las Matemáticas a la Química. Hoy en día, cuando gran parte de la Química moderna se escribe en términos de modelos matemáticos, entenece recordar el comentario que el filósofo positivista Auguste Comte hacía allá por 1830:

[. . .] cualquier intento de emplear métodos matemáticos en el estudio de la Química debe ser considerado como profundamente irracional y contrario al propio espíritu de la Química.

Pero volvamos a los esfuerzos de Cayley, que estaba interesado, por ejemplo, en la cuestión de enumerar los isómeros de hidrocarburos saturados, cuya fórmula es  $C_k H_{2k+2}$ : los átomos de carbono tienen valencia 4, mientras que los de hidrógeno, valencia 1. Se trata de un grafo con  $3k + 2$  vértices, cuya suma de grados es  $4k + (2k + 2) = 6k + 2$ , así que el grafo, debe tener  $3k + 1$  aristas. ¡Ah!, el número de aristas es el de vértices menos 1: se trata de un árbol (si suponemos, como parece razonable, que el grafo es conexo).

Enumerar los grafos no isomorfos con  $n$  vértices y una cierta estructura (por ejemplo, ser árboles, tener una determinada sucesión de grados) es, en general, una cuestión muy complicada. Cayley sólo consiguió resolver algunos casos particulares y, años después, Pólya desarrollaría su teoría enumerativa para dar respuesta a los problemas de este tipo. Sin embargo, si etiquetamos los vértices, las cosas se simplifican a veces. Por ejemplo, sabemos que, dado el conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , hay  $2^{(n-2)}$  grafos distintos con ese conjunto de vértices. Cayley obtuvo, en 1889, una fórmula, sorprendentemente simple, para el caso de los árboles con  $n$  vértices. Veamos qué nos sugieren algunos ejemplos sencillos.

**Ejemplo 6.1.2.-** Contemos el número de árboles distintos con 2, 3 y 4 vértices.

Si tenemos dos vértices, sólo cabe una posibilidad, que el árbol sea isomorfo a un  $L_2$ . Y si el conjunto de vértices es  $\{1, 2\}$ , hay también un único árbol (los dos posibles etiquetados de los vértices dan el mismo resultado).

Los árboles con tres vértices también han de ser isomorfos al grafo lineal correspondiente,  $L_3$ . Si el conjunto de vértices es  $\{1, 2, 3\}$ , basta con decidir qué símbolo va,



por ejemplo, en la posición central (cuál es el vértice de grado 2). Esto se puede hacer de tres formas distintas, así que hay 3 árboles distintos con vértices  $\{1, 2, 3\}$ .

Vamos con el caso de cuatro vértices. Para asegurarnos de no olvidarnos ningún caso, ayudémonos de la relación:

$$\delta(v_1) + \delta(v_2) + \delta(v_3) + \delta(v_4) = 6.$$

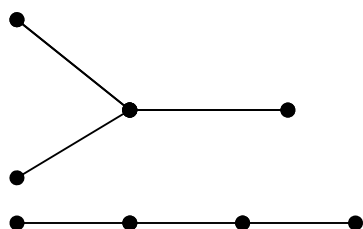


Figura 6.1.3

Ninguno de los cuatro números puede ser  $\geq 4$  (no puede haber vértices de grado 4) y un simple análisis nos lleva a concluir que sólo puede haber dos sucesiones de grados aceptables,  $(1, 1, 1, 3)$  y  $(1, 1, 2, 2)$ . La primera de ellas se corresponde con el grafo que dibujamos a la izquierda y arriba, mientras que la segunda se traduce en el debajo. Para etiquetar el primer grafo con conjunto de vértices  $\{1, 2, 3, 4\}$ , observamos que basta con decidir el símbolo que va en la posición central; así que hay cuatro maneras distintas de hacerlo. El etiquetado del grafo de la derecha es un poco más

delicado: elegimos primero los dos vértices de grado 2 (se puede hacer de  $(4, 2)$  formas); y para cada elección de éstas, hay luego dos posibilidades para elegir los vecinos. En total, 12 maneras distintas. En resumen, con 4 vértices hay dos árboles no isomorfos y 16 árboles distintos con vértices  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

**Ejemplo 6.1.3.-** Un poco más difícil: árboles con 5 vértices.

Se debe cumplir que

$$\sum_{i=1}^5 \delta(v_i) = 8$$

así que no puede haber vértices de grado 5 o mayor. Si hay de grado 4, la sucesión de grados ha de ser  $(1, 1, 1, 1, 4)$ , a la que le corresponde un único árbol, el que aparece en la Figura 6.1.4 (a). Etiquetarlo con  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  es muy sencillo, pues basta decidir qué situamos en el vértice central: en total, 5 posibilidades.

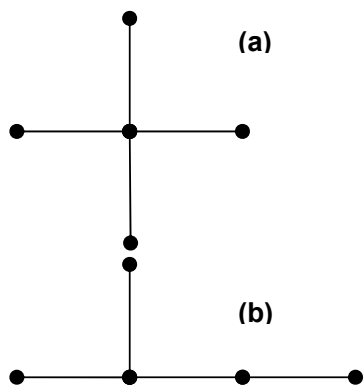


Figura 6.1.4

Si no hay de grado 4, pero sí de grado 3, la única sucesión de grados posible es  $(1, 1, 1, 2, 3)$ , y tenemos el grafo de la Figura 6.1.4 (b). Para etiquetarlo con  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , fijamos el símbolo del vértice de grado 3 (5 posibilidades), el del vértice de grado 2 (4 posibilidades) y, finalmente, elegimos el vecino de grado 1 del vértice de grado 2 (3 posibilidades, las mismas que obtendríamos eligiendo los dos vecinos de grado 1 del vértice de grado 3). En total,  $5 \times 4 \times 3 = 60$  posibilidades. Por último, si no hay vértices de grado 3, entonces sólo podremos tener la sucesión de grados  $(1, 1, 2, 2, 2)$ , que corresponde a un  $L_5$ . Para etiquetarlo, elegimos el símbolo del vértice central (5 posibilidades), luego los otros dos de grado 2 ( $(4, 2) = 6$  posibilidades) y ya sólo quedan dos posibilidades para etiquetar los vértices finales. En total,  $5 \times 6 \times 2 = 60$  formas distintas.

Resumiendo, con 5 vértices hay tres árboles no isomorfos, y 125 árboles distintos con vértices  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

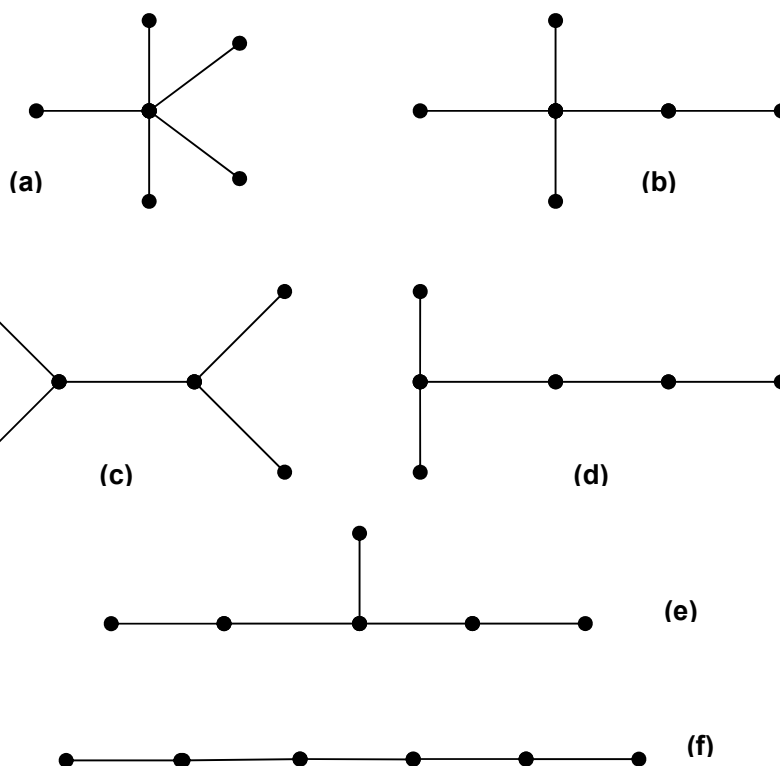
**Ejemplo 6.1.4.-** Más difícil todavía: árboles con seis vértices.

De nuevo nos dejamos guiar por la relación  $\delta(v_1) + \dots + \delta(v_6) = 10$ , que nos dice que no puede haber vértices de grado 6 o mayor.

Si hay vértices de grado 5, sólo podría haber uno, y la sucesión de grados sería  $(1, 1, 1, 1, 1, 5)$ . El único grafo con estas características es el que aparece en la Figura 6.1.5 (a). Y el etiquetado de los vértices con  $\{1, \dots, 6\}$  sólo requiere decidir el símbolo del vértice central: seis posibilidades.

Si no hay de grado 5, pero hay de grado 4, sólo cabe que la sucesión sea  $(1, 1, 1, 1, 2, 4)$ . El árbol correspondiente aparece en la Figura 6.1.5 (b). Dejamos como ejercicio para el lector la comprobación de que hay 120 árboles con vértices  $\{1, \dots, 6\}$  asociados a esta estructura. Si no hay vértices de grado 4, pero sí de grado 3, las cosas se ponen interesantes. Tenemos, por un lado, la sucesión de grados  $(1, 1, 1, 1, 3, 3)$ , cuyo árbol asociado es el de la Figura 6.1.5 (c). El lector debería comprobar que hay 90 formas distintas de etiquetar los vértices de este árbol. Pero, por otro lado, tenemos la sucesión de grados  $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$ , que tiene un único vértice de grado 3. Como ya vimos, hay **dos** árboles no isomorfos a esta sucesión, los que se muestran en la Figura 6.1.5 (d) y (e). Es, de nuevo, un sencillo ejercicio comprobar que hay 180 etiquetados distintos para el de arriba y 360 para el de abajo.

Por último, si no hay de grado 3, entonces sólo cabe tener cuatro vértices de grado 2,  $(1, 1, 2, 2, 2, 2)$ , y el grafo es isomorfo a un  $L_6$ . Y hay 360 distintos árboles que podemos construir con esta estructura y vértices  $\{1, \dots, 6\}$ , indicado en la Figura 6.1.5 (f).



**Figura 6.1.5**

En resumen, hay seis árboles no isomorfos con 6 vértices, y 1296 árboles distintos con vértices  $\{1, \dots, 6\}$ .

Los resultados que hemos ido obteniendo hasta ahora son especialmente “sospechosos”; y más, si como aparece en la tabla, calculamos los dos siguientes casos:

**Tabla 6.1; Árboles No Isomorfos Y Distintos**

$n$	Árboles no isomorfos	Árboles distintos
2	1	$1 = 2^0$
3	1	$3 = 3^1$
4	2	$16 = 4^2$
5	3	$125 = 5^3$
6	6	$1296 = 6^4$
7	11	$16807 = 7^5$
8	23	$32768 = 8^6$

Parece razonable suponer que la respuesta general es  $n^{n-2}$ .

**TEOREMA 6.4.- (Cayley)**

*El número de árboles distintos que se pueden formar con el conjunto de vértices  $\{1, \dots, n\}$  es  $n^{n-2}$ .*

Existen diversas pruebas de este resultado. La que aquí veremos es especialmente sencilla y sugerente y se debe a Zeilberger. En los ejercicios 9.1.7 y 9.1.8 se proponen un par de ellas más; la última de ellas, además, proporciona un mecanismo para codificar la información que determina un árbol, mediante el llamado código de Prüfer

**Demostración:** La escribiremos con el lenguaje (siempre simpático) que utiliza Zeilberger, aunque luego lo reinterpretaremos en términos de grafos.

En una cierta empresa hay  $m$  jefes y  $k$  empleados. Los queremos organizar de manera que cada empleado tenga un *único* supervisor (que pudiera ser otro empleado o quizás un jefe). Al número de maneras distintas en que esto se puede hacer lo llamaremos  $P(m, k)$ .

Digamos que  $m \geq 1$  y que  $k \geq 0$ . Es claro que  $P(m, 0) = 1$  para cada  $m = 1, 2, \dots$ . Para obtener otros valores valor de  $P(m, k)$  seguimos el siguiente proceso:

1. Distinguimos a los empleados cuyos supervisores son jefes. A estos empleados, de los que habría un cierto número  $s$ , con  $1 \leq s \leq k$ , se les asigna, desde este momento, y como no podría ser de otro modo, el papel de *jefecillos*.
2. Decidimos, pues, qué  $s$  empleados son jefecillos; esto se puede hacer de  $(k \ s)$  maneras.
3. Y ahora asignamos el jefe ante el que responde cada jefecillo:  $m^s$  maneras.
4. Queda organizar a los restantes  $k - s$  empleados. Pero, para éstos, los  $s$  jefecillos actúan como jefes. Así que los podremos organizar de tantas maneras como nos diga  $P(s, k - s)$ .

En total,

$$P(m, k) = \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} m^s P(s, k - s)$$

Esta regla de recurrencia, junto con los valores iniciales de antes, determina de manera única el valor de los  $P(m, k)$ , como el lector podría comprobar construyéndose la correspondiente tabla de valores.

Cambiando al lenguaje de los grafos, lo que cuenta  $P(m, k)$  es el número de bosques (con  $m + k$  vértices) formados por  $m$  árboles con raíz, donde las raíces llevan, como etiquetas, los nombres de los jefes. El argumento que llevaba a la regla de recurrencia, en estos nuevos





términos, consiste en decidir qué vértices van en la segunda generación (por debajo de las raíces), y cómo se distribuyen en esa segunda generación::

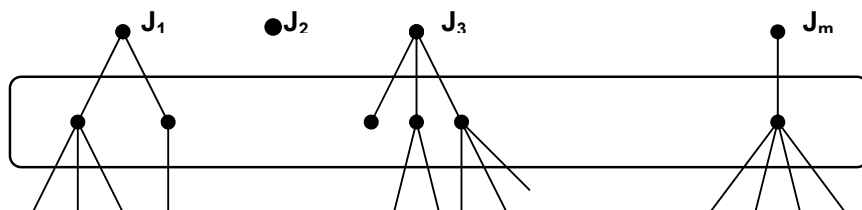


Figura 6.1.6

El caso que nos interesa realmente es cuando  $m = 1$  y  $k = n - 1$ . Tenemos entonces un árbol con raíz con  $n$  vértices, en el que la raíz ya va etiquetada. Si partimos de los siguientes símbolos  $\{1, \dots, n\}$ , hay  $n$  maneras de etiquetar la raíz. Así que  $nP(1, n - 1)$  cuenta cuántos árboles con raíz podemos formar con  $n$  vértices. Pero por cada árbol con  $n$  vértices hay  $n$  árboles con raíz distintos. Así que concluimos que la cantidad que nos interesa, el número de árboles con  $n$  vértices, coincide con  $P(1, n - 1)$ .

Sólo queda resolver la recurrencia de antes para obtener el valor particular de los  $P(m, k)$  que perseguimos. Aquí llega el ingrediente ingenioso de la prueba. La ecuación de antes nos recuerda vagamente a las sumas que se obtienen en el teorema del binomio. El lector podría comprobar, utilizando este teorema, que la función  $f(m, k) = m(m + k)k - 1$  cumple la misma regla de recurrencia y los mismos valores iniciales. Así que  $P(m, k) = f(m, k)$  para todo  $m$  y  $k$ . En particular,

$$P(1, n - 1) = f(1, n - 1) = 1 \times (1 + (n - 1))^{(n-1)-1} = n^{n-2},$$

y el resultado de Cayley queda demostrado.

## 6.2.- ÁRBOLES CON RAÍZ

En la sección 6.1 y hablamos de árboles con raíz. Se trata de un árbol en el que designamos un vértice especial, la **raíz**, que sirve de origen de coordenadas. Algunos de los algoritmos de optimización que hemos visto anteriormente producen estructuras de este tipo, donde la raíz es el vértice en el que comienza el algoritmo. En un árbol con raíz, los vértices se agrupan en niveles:

**Nivel 0 = {raíz}**

**Nivel 1 = {vecinos de la raíz}**

**Nivel 2 = {vecinos de los vértices del nivel 1} \ {raíz}**

**Nivel 3 = {vecinos de los vértices del nivel 2} \ {Nivel 1}.**

...

**Nivel j = {vecinos de los vértices del nivel j - 1} \ {Nivel j - 2}**

...

Llamaremos  $a$ , la **altura** del árbol, al máximo nivel no vacío. Es importante recordar que el valor de  $a$  depende de la raíz elegida. Por ejemplo, si partimos del árbol que aparece dibujado en la Figura 6.2.1, cualquiera de sus vértices puede servir como raíz. Elegir, por ejemplo, el vértice 1 o el 3 lleva a que la altura del árbol sea 2 ó 4, como sugieren los siguientes esquemas, indicados en la Figura 6.2.1:

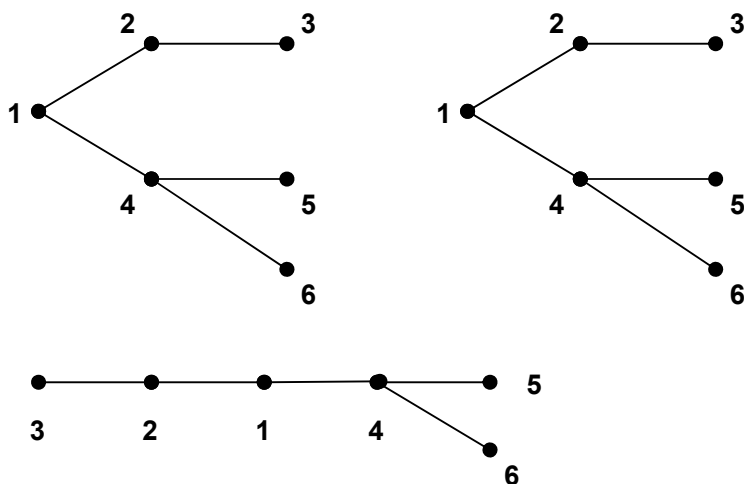


Figura 6.2.1

**DEFINICIÓN 6.2.-** Si  $G$  es un grafo no dirigido, entonces  $G$  es un **árbol dirigido** si el grafo no dirigido asociado con  $G$  es un árbol. Si  $G$  es un árbol dirigido,  $G$  es un **árbol con raíz** si existe un único vértice  $r$  en  $G$ , llamado **raíz**, tal que el grado de entrada de  $r$  es igual a  $\delta_E(r) = 0$  y para todos los demás vértices  $v$ , el grado de entrada es  $\delta_E(v) = 1$ .

Definamos algunos conceptos:

- Los **descendientes** de un vértice  $v$  son los vértices del nivel siguiente al de  $v$  que sean vecinos suyos (al vértice  $v$  se le dice **progenitor** de sus descendientes).
- Un vértice es **hoja** de un árbol con raíz si no tiene descendientes.
- Un árbol con raíz sería  **$q$ -ario** si cada progenitor tiene exactamente  $q$  descendientes (es decir, el número de descendientes es 0 si el vértice es hoja y  $q$  si es progenitor). Sería **casi  $q$ -ario** si el número de descendientes de cada vértice está comprendido entre 0 y  $q$ .

Los parámetros que manejaremos en un árbol con raíz serán

- el número de vértices,  $n$ ;
- la altura del árbol,  $a$ ;
- el número de hojas,  $h$ ;
- y el tipo de árbol, definido por el entero positivo  $q$  (podría ser  $q$ -ario o casi  $q$ -ario).

La importancia de estos árboles con raíz radica en que se utilizan para representar algoritmos en los que intervienen operaciones binarias (o  $q$ -arias) sucesivas. Veamos algunos ejemplos.

#### Ejemplo 6.2.1: Un árbol de decisión.

Tenemos 4 monedas,  $\{1, 2, 3, 4\}$ , y, a lo sumo, una de ellas no tiene el peso correcto (no es legal). Disponemos además de una moneda patrón, la 0, con el peso correcto. El problema es el siguiente: con una balanza, que tiene tres resultados posibles, queremos averiguar de la manera más económica posible (con menos usos de la balanza) cuál es la no legal. Podemos, por supuesto, comparar sucesivamente la moneda patrón con las otras cuatro. Este procedimiento emplea, en el peor de los casos, cuatro pesadas para obtener la respuesta



(aunque a veces la podamos obtener con menos). Diseñemos un procedimiento alternativo, el que se recoge en el siguiente esquema:

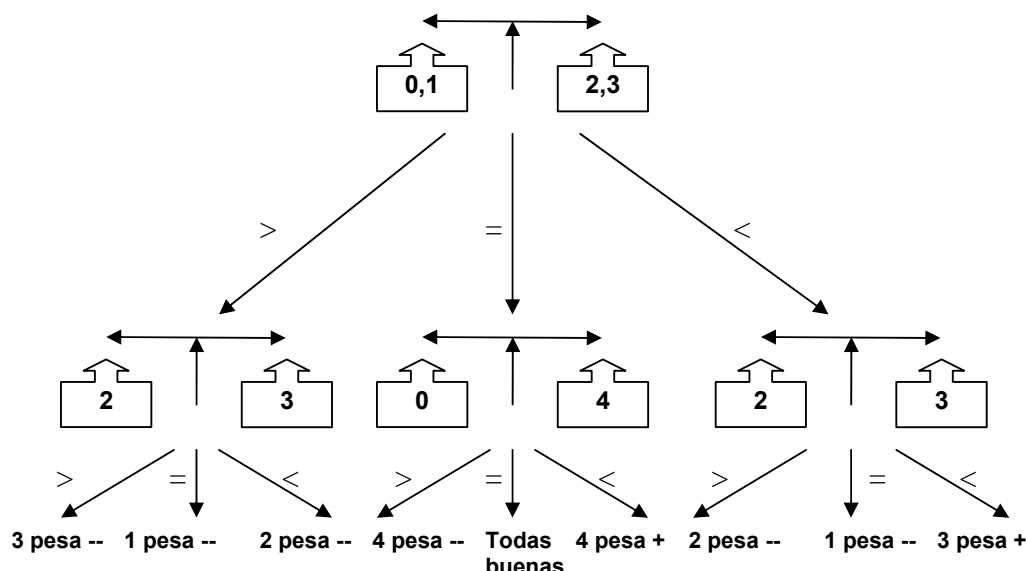


Figura 6.2.2

Los símbolos casi se explican por sí mismos:  $<$  significa que la balanza se vence hacia la derecha,  $>$  hacia la izquierda,  $=$ , se queda equilibrada. El árbol que hemos diseñado es ternario ( $q = 3$ ), tiene altura  $a = 2$  (el número de pesadas) y número de hojas  $h = 9$ . Lo fundamental en este caso es que el algoritmo funciona porque el árbol tiene 9 hojas, justo el número de respuestas posibles (1 pesa más, 2 pesa menos, etc.).

### Ejemplo 6.2.2: Un algoritmo de ordenación.

Dada una lista de tres números cualesquiera,  $(a, b, c)$ , queremos ordenarlos con comparaciones binarias. Diseñamos el siguiente algoritmo: en el primer paso, comprobamos si el primer elemento es menor o igual que el tercero. Si la respuesta es sí, los dejamos tal como están; si es no, los permutamos. En el segundo, miramos si el primero es menor o igual que el segundo, y de nuevo procedemos como antes, dependiendo de la respuesta. Por último, en el tercer paso investigamos si el segundo es menor o igual que el tercero (observamos que aquí hay respuestas que son incompatibles con las obtenidas anteriormente). Si representamos este proceso en un árbol, obtenemos el árbol de la Figura 6.2.2.

El árbol así construido es casi binario, con  $a = 3$  y  $h = 6$ , que de nuevo coincide con el número de resultados posibles (las  $3! = 6$  posibles ordenaciones). Podríamos preguntarnos si se podrían ordenar estos tres números, con comparaciones binarias, en menos pasos, por ejemplo dos. Veremos que no, porque en un árbol casi binario se cumplirá que  $h \leq 2^a$ ; si  $a$  es 2, obtenemos que  $h \leq 4$ , y con ese número de hojas no podríamos cubrir todos los resultados posibles, que recordamos que eran 6. ♣

### Ejemplo 6.2.3: El juego de Nim con seis monedas.

Consideremos el siguiente juego: de un montón inicial de monedas, dos jugadores, que llamaremos I y II, van retirando, alternativamente, una o dos monedas del montón de seis. Gana el jugador que retira las últimas monedas de la mesa.

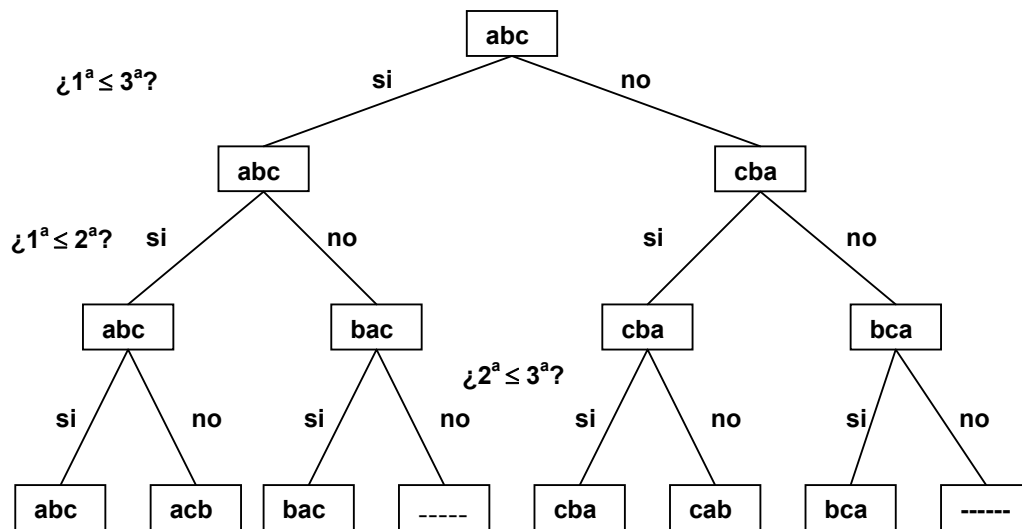


Figura 6.2.3

Esta es una de las muchas variantes del llamado **juego de Nim**, que analizaremos detalladamente mas adelante. Lo que ahora nos interesa es que podemos describir los posibles desarrollos de la partida con árboles: representaremos cada configuración de monedas con un vértice, que etiquetaremos con un **I o un II**, dependiendo de cuál sea el jugador al que le toca jugar, y un número, para recordar cuántas monedas quedan en el montón. Así, para el montón de partida que dibujamos a la derecha, el primer vértice vendría etiquetado con un **I<sub>6</sub>**, para recordar que juega **I** y que hay seis monedas en el montón.

El jugador **I** tiene dos opciones, quitar una o dos monedas; estas dos acciones vendrían representadas por aristas, hacia la derecha si quita dos monedas, hacia la izquierda si quita una. Para cada una de estas elecciones, el jugador **II** se encuentra con dos configuraciones distintas y en cada una de ellas puede tomar, a su vez, dos decisiones:

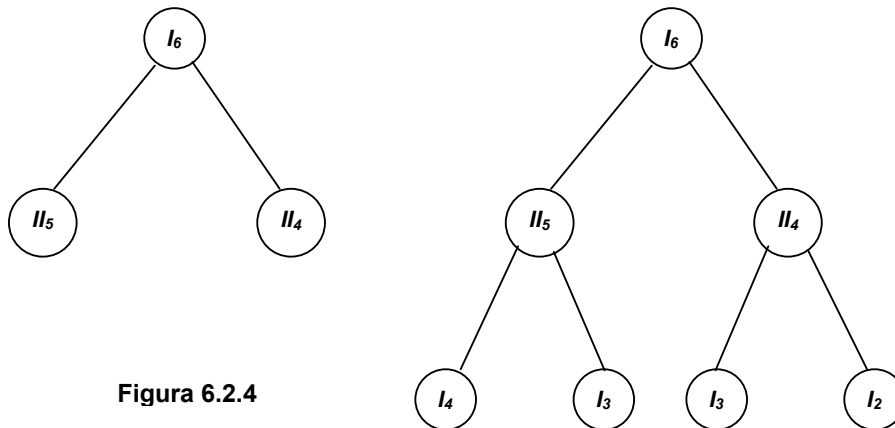


Figura 6.2.4

Obsérvese que, en cada paso, lo que obtenemos es un árbol. Además, como en cada movimiento se reduce el tamaño del montón, el juego es finito y, por tanto, el árbol que representa los diferentes desarrollos del mismo también lo sería. Para el caso que nos ocupa, un montón inicial de seis monedas, el árbol completo del juego es el que aparece debajo de

estas líneas. Como preparación al análisis que haremos mas adelante, etiquetamos las hojas del árbol con  $G$  si en esa hoja el jugador  $I$  ha ganado la partida y con  $P$  si ha perdido:

### 6.2.1.- RELACIÓN ENTRE $a$ Y $h$ EN UN ÁRBOL $q$ -ario

En los ejemplos anteriores, la clave para que los algoritmos (representados por árboles  $q$ -arios, o casi  $q$ -arios) funcionaran era que el número de hojas cubriera todas las posibles respuestas. Estos dos parámetros, la altura y el número de hojas, no son independientes, y las cotas que obtendremos nos permitirán establecer estimaciones *a priori* sobre, por ejemplo, el mínimo número de pasos que puede tener un cierto algoritmo.

Supongamos fijados  $a$  y  $q$ . Queremos estimar el número de hojas que puede tener un árbol con raíz con esas características. Parece que la configuración con mayor número de hojas es aquella en la que *todas* las hojas están en el último nivel. En el otro extremo, el árbol  $q$ -ario con menor número de hojas (para  $a$  fijo) sería aquél en el que las hojas van apareciendo lo antes posible.

Esto nos sugiere, por un lado, que  $h \leq q^a$ . Para la otra situación extrema, como en cada nivel, desde el 1 hasta el  $a - 1$ , aparecen  $q - 1$  hojas nuevas y en el nivel  $a$  hay  $q$  hojas, sospechamos que  $h \geq (a - 1)(q - 1) + q = (q - 1)a + 1$ .

**PROPOSICIÓN 6.4.-** En todo árbol con raíz casi  $q$ -ario,  $h \leq q^a$ .

Demostración. Nótese que hemos relajado las condiciones sobre el tipo de árbol, basta con que sea casi  $q$ -ario (por supuesto, un árbol  $q$ -ario es también casi  $q$ -ario; pero no al revés, en general).

Lo probaremos por inducción en  $a$ , la altura del árbol. Si  $a = 1$ , es claro que  $h \leq q$ . Sea entonces un árbol  $A$  casi  $q$ -ario con raíz y llamemos  $B_i$  a los árboles que tienen como raíz a los vecinos de la raíz del árbol  $A$ . Los  $B_i$  son mas pequeños (en altura) que  $A$  y son todos árboles con raíz casi  $q$ -arios. La hipótesis de inducción nos diría que para los  $B_i$  se tiene, llamando  $a_i$  y  $h_i$  a la altura y el número de hojas de cada sub-árbol  $B_i$ , respectivamente, que:

$$h_i \leq q^{a_i} \text{ (la misma } q \text{ para todos).}$$

Nótese que hay a lo sumo  $q$  sub-árboles  $B_i$  y que  $a_i \leq a - 1$ , para cada  $i$  (el peor caso correspondería a los sub-árboles que se extendieran hasta altura  $a - 1$ ). Así que

$$h = \sum_i h_i \leq \sum_i q^{a_i} \leq q q^{a-1} = q^a$$

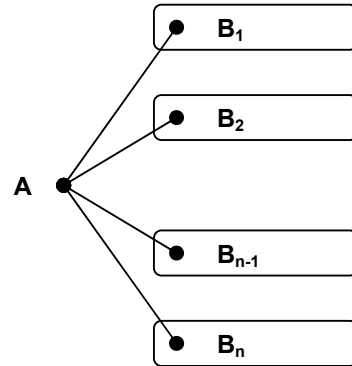


Figura 6.2.5

En el otro sentido, se puede probar la siguiente cota:

**PROPOSICIÓN 6.5.-** En todo árbol con raíz  $q$ -ario,  $h = s(q - 1) + 1$ , donde  $s$  es el número de vértices interiores del árbol (esto es, con descendientes).

Como  $a \geq s$  (porque en cada nivel, desde el 0 hasta el  $a - 1$ , ha de haber al menos un vértice interior), deducimos que  $h \geq a(q - 1) + 1$ , como afirmábamos antes. La prueba de este resultado la dejamos como ejercicio.

**Ejemplo 6.2.4.-** *Apliquemos las cotas obtenidas al problema de la balanza, pero ahora con  $r$  monedas (en lugar de cuatro), de las cuales a lo suma una es falsa, y la moneda patrón.*

Es claro que el número de posibles resultados es  $2r + 1$ , porque para cada moneda hay dos posibles (pesa más o menos de lo legal) y hay un resultado extra, que es que todas sean legales. Un algoritmo que permita detectar la moneda falsa debe recoger todos estos resultados. Si lo representamos por un árbol ternario, la altura será el número máximo de pesadas necesarias para alcanzar todos los posibles resultados; y el número de hojas debe poder cubrir todos los resultados. Como  $h \leq 3^a$  necesitaremos:

$$2r + 1 \leq 3^a \Rightarrow a \geq \log_3 (2r + 1).$$

Recordemos que con  $r$  pesadas siempre lo podemos hacer; aquí comprobamos que, sea cual sea el algoritmo, si está basado en comparaciones ternarias, entonces requerirá, como mínimo, un número de pasos del orden de  $\log r$ . Por ejemplo, si  $r = 4$ , como en el ejemplo que proponíamos, tendremos que:

$$r = 4 \Rightarrow a \geq \log_3 9 = 2,$$

así que al menos se requieren dos pesadas. De la misma manera obtendríamos que para  $r$  entre 3 y 13 necesitaríamos al menos necesitaremos 3 pesadas. Y se requerirían cuatro pesadas, al menos, para cualquier  $r$  entre 14 y 40. Pero éstas son cotas teóricas; otra cosa, por supuesto, es diseñar un algoritmo que permita hacerlo con ese número mínimo de pesadas.

**Ejemplo 6.2.5.-** *Apliquémoslas al algoritmo para ordenar  $n$  números con comparaciones binarias.*

El número de resultados posibles es  $n!$ , así que necesitaremos que

$$2^{\text{\#pasos}} \geq n! \Rightarrow \text{\#pasos} \geq \log_2 (n!)$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} n = 3 &\rightarrow \text{\#pasos} \geq \log_2 (3!) = \log_2 (6) \Rightarrow \text{\#pasos} \geq 3 \\ n = 4 &\rightarrow \text{\#pasos} \geq \log_2 (4!) = \log_2 (24) \Rightarrow \text{\#pasos} \geq 5 \\ n = 5 &\rightarrow \text{\#pasos} \geq \log_2 (5!) = \log_2 (120) \Rightarrow \text{\#pasos} \geq 7 \end{aligned}$$

Utilizando las estimaciones sobre el tamaño de  $n!$ , podemos asegurar que

$$\text{\#pasos} \geq \log_2 (n!) > \log_2 ((n/e)^n) = n \log_2 (n/e).$$

♣

**Ejemplo 6.2.6.-** *Contemos el número de hojas en el juego de Nim.*

En el ejemplo que hemos descrito, el juego de Nim con seis monedas, podemos contar en el árbol que hay exactamente 13 hojas. Aunque hemos etiquetado las hojas sólo con **G** y **P**, dependiendo de si el jugador **I** gana o pierde, en realidad cada hoja representa un posible final del juego (y de hecho, a cada hoja le corresponde un desarrollo del juego distinto). Si el juego de Nim parte de  $n$  monedas, es fácil convencerse de que la altura del árbol (que es casi-binario) es siempre  $n$ , porque el camino de mayor longitud en el árbol es aquél en el que vamos quitando una sola moneda en cada turno (la rama de la izquierda), así que podemos estimar

$$\{\text{\# posibles partidas en un Nim con } n \text{ monedas}\} = \{\text{\#hojas del árbol}\} \leq 2^n.$$

También podemos observar que el último nivel sólo tiene una hoja, así que podemos mejorar la estimación. Si llamamos  $P_n$  al número de hojas que tiene el árbol del juego de Nim con  $n$  monedas tendremos que:

$$P_n \leq 2^{n-1} + 1.$$

Pero en realidad podemos calcular explícitamente el número de hojas que hay. Para ello, fijémonos en que un árbol de Nim con  $n$  monedas se compone de un árbol de Nim con  $n - 1$  monedas (el árbol que encontramos a partir del descendiente de la raíz que está a la izquierda) y otro con  $n - 2$  monedas (el de la derecha). De acuerdo, los papeles de I y II están intercambiados, pero eso no afecta al número de hojas que tenga cada árbol. Por supuesto, el número de hojas del árbol total es la suma del número de hojas que tenga cada subárbol, es decir,

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2} \quad n \geq 2,$$

Nuestra conocida ecuación de Fibonacci. Los valores iniciales son  $P_1 = 1$  y  $P_2 = 2$ ; así que el número de hojas de un juego de Nim con  $n$  monedas es justamente el número de Fibonacci  $F_{n+1}$ .

### 6.3.- ÁRBOL RECUBRIDOR

Los árboles son unas estructuras especialmente adaptadas a los problemas de optimización. Una de las cuestiones que planteamos al principio del capítulo 5 era la siguiente: queremos construir una red que conecte una serie de puntos (por ejemplo, podría ser un oleoducto que conecte la refinería con unas cuantas ciudades, o una red de ordenadores) de la forma mas barata (en cuanto a número de tramos) a partir de un diseño previo, como el de la Figura 6.3.1. Si el objetivo es mantener conectadas todas las ciudades, hay tramos que se podrían eliminar; el objetivo es quitar el mayor número posible de aristas de manera que el grafo siga siendo conexo. O, dicho de otra manera, quedarnos con el número mínimo de aristas que garantizan la conexión del grafo. Estamos buscando, en definitiva, un árbol que incluya a todos los vértices.

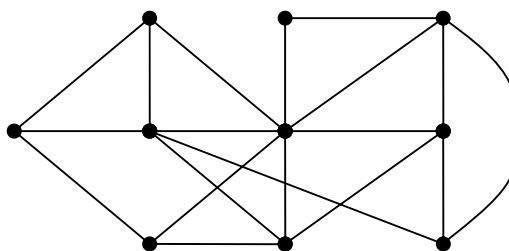


Figura 6.3.1

**DEFINICIÓN 6.3.-** Consideremos un grafo  $G = (V, A)$ . Diremos que un árbol  $H$  es **árbol recubridor o recubridor** de  $G$  si cumple que:

- $V(H) = V(G)$  (tiene los mismos vértices que  $G$ ).
- $A(H) \subseteq A(G)$  (tiene algunas —o todas— las aristas de  $G$ ).

Es decir, es un subgrafo recubridor del grafo inicial que, además, es un árbol. Asegurémonos primero de que tales árboles existen si, como es razonable, partimos de un grafo conexo.

**TEOREMA 6.5.-** Un grafo  $G$  es conexo si y sólo si tiene, al menos, un árbol recubridor.

**Demostración:** En un sentido, si un grafo tiene un árbol recubridor, que por definición es conexo, es obvio que  $G$  también lo será.

En el otro: consideremos un grafo  $G$  conexo. Si es un árbol, ya hemos acabado ( $G$  es su propio árbol recubridor). Pero si no es árbol, como es conexo, podemos todavía quitar una cierta arista  $e$  sin que se desconecte (recordemos el carácter extrema de los árboles en este sentido). Así que  $G \setminus \{e\}$  es conexo. Si es árbol, hemos acabado; pero si no lo es, podremos quitar una arista  $f$  de forma que  $(G \setminus \{e\}) \setminus \{f\}$  siga siendo conexo. Y así, sucesivamente. En

cada paso, los sucesivos grafos son conexos; cuando el número de aristas llegue a  $|V(G)| - 1$ , habremos llegado a un árbol recubridor.

De esta demostración deducimos que si el grafo  $G$  es conexo y  $|A(G)| + 1 = |V(G)| + k$ , con  $k \geq 0$ , entonces podemos quitar  $k$  aristas (convenientemente escogidas) y quedarnos con un árbol recubridor. Se trata de ir “eliminando aristas” hasta quedarnos con el número adecuado de ellas. El criterio para eliminarlas sería el de ir “rompiendo” los ciclos del grafo. Pero este proceso requiere identificar los distintos ciclos, algo difícil de implementar en el ordenador.

Existen otros algoritmos para construir un árbol recubridor, que van “haciendo crecer” el árbol en pasos sucesivos, y que resultan ser más sencillos desde el punto de vista computacional. Los veremos en la subsección 6.3.2, aunque allí, por el mismo precio, resolveremos una cuestión mas general, pues permitiremos que las aristas tengan “peso”. Como veremos, la cuestión de hallar un árbol recubridor en un grafo sin pesos no es sino un caso particular de este planteamiento mas general.

### 6.3.1.- EL NÚMERO DE ÁRBOLES RECUBRIDORES DE UN ÁRBOL

Que un grafo conexo tiene, en general, más de un árbol recubridor es bastante evidente. Dado un grafo  $G$ , ¿cuántos hay, exactamente? La respuesta, claro, dependería, del tipo de grafo considerado.

**Ejemplo 6.3.1.-** El número de árboles recubridores de los grafos  $C_n$ ,  $L_n$  y  $K_n$ .

Consideremos el grafo circular con  $n$  vértices,  $C_n$ , para el que  $|A(C_n)| = |V(C_n)|$ . Formar un árbol recubridor consiste, simplemente, en quitar una arista; y cualquiera de las  $n$  que hay vale para ello. Así que  $C_n$  tiene  $n$  posibles árboles recubridores.

El grafo lineal con  $n$  vértices,  $L_n$ , es ya un árbol. Así que  $L_n$  es el único árbol recubridor que tenemos. Esto es un resultado general: si  $G$  es un árbol, sólo tiene un árbol recubridor (él mismo).

Por último, consideremos el grafo completo con  $n$  vértices,  $K_n$ . Buscamos subgrafos  $H$  de  $K_n$  que sean árboles, que tengan  $V(H) = V(K_n) = \{1, \dots, n\}$ . Pero en  $K_n$  están todas las aristas posibles, así que:

$$\# \left\langle \begin{array}{c} \text{árboles} \\ \text{recubridores de } K_n \end{array} \right\rangle = \# \left\langle \begin{array}{c} \text{árboles distintos con el conjunto} \\ \text{de vértices } \{1, \dots, n\} \end{array} \right\rangle = n^{n-2}$$

$K_n$  es, claro, el grafo con  $n$  vértices que más árboles recubridores tiene.

**Ejemplo 6.3.2.-** ¿Cuántos árboles recubridores distintos contiene un  $K_{r,s}$ ?

Empecemos con el grafo bipartito completo  $K_{2,s}$ ,  $s \geq 2$ . El grafo tiene  $2s$  aristas y  $s + 2$  vértices, así que tendremos que quitar  $s - 1$  aristas sin que se desconecte el grafo. Es complicado localizar los ciclos del grafo para ir rompiéndolos, así que pensemos de otra manera. Un árbol recubridor del grafo contendría a una serie de vértices de los de la derecha que se conectan al vértice  $a$  y otros que se conectan al vértice  $b$ . Pero ha de haber al menos uno que se conecte a ambos, para que sea conexo. Y sólo uno, porque si hubiera dos (o más) vértices a la derecha que conservaran sus dos aristas, se formaría un ciclo. Con esta información podemos contar el número de árboles recubridores distintos. Llamemos

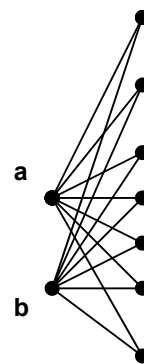


Figura 6.3.2



- $A = \{\text{vértices de } \{1, \dots, s\} \text{ que comparten arista con } a \text{ en el árbol recubridor}\}$
- $B = \{\text{vértices de } \{1, \dots, s\} \text{ que comparten arista con } b \text{ en el árbol recubridor}\}$

Lo que buscamos son conjuntos  $A$  y  $B$  tales que entre los dos tengamos todos los vértices de la derecha y de forma que su intersección conste de un único vértice:

Elegir un árbol recubridor de  $K_{2,s}$   $\Leftrightarrow$  Elegir dos conjuntos,  $A$  y  $B$  de manera que  $A \cup B = \{1, \dots, s\}$  y de forma que  $|A \cap B| = 1$

Para contar el número de maneras de elegir  $A$  y  $B$ , sigamos el siguiente proceso:

1. Elegimos el elemento de la intersección (hay  $s$  posibilidades).
2. Una vez elegido el elemento especial, basta decidir si el resto de los elementos están en  $A$  ó en  $B$ . O, lo que es equivalente, basta formar una lista de longitud  $s - 1$  con repetición permitida con dos símbolos (uno corresponde a estar en  $A$  y el otro a estar en  $B$ ). Esto se puede hacer de  $2^{s-1}$  formas distintas.

En total tenemos que hay  $s \cdot 2^{s-1}$  árboles recubridores de  $K_{2,s}$ . El resultado general es el siguiente: un grafo  $K_{r,s}$  tiene  $s^{r-1} \cdot r^{s-1}$  árboles recubridores distintos.

Si un grafo conexo  $G$  tiene  $n$  vértices, el número de árboles recubridores que contiene va desde 1 (si  $G$  es ya un árbol) hasta  $n^{n-2}$ , cuando  $G$  sea el grafo completo con  $n$  vértices. Este número mide, en cierta manera, la *complejidad* del grafo. El siguiente resultado, que enunciamos sin demostración, nos proporciona una manera de calcular esa medida de complejidad en un grafo arbitrario.

**TEOREMA 6.6.- (Kirchhoff)** *El número de árboles recubridores de un grafo  $G$  coincide con un cofactor cualquiera de la matriz  $D - M$ , donde  $M$  es la matriz de vecindades del grafo y  $D$  es la matriz diagonal cuyas entradas son los grados de los vértices.*

Obsérvese que, en la matriz  $D - M$ , todas sus filas y columnas suman 1, así que es una matriz singular. Este resultado permite, por ejemplo, calcular el número de árboles recubridores del grafo escalera que aparece en la Figura 6.3.3. Las matrices  $M$  y  $D$  son

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

El cálculo de un cofactor cualquiera de  $D - M$  (a mano o bien con ayuda de un paquete matemático) nos lleva a concluir que hay 15 árboles recubridores en el grafo.

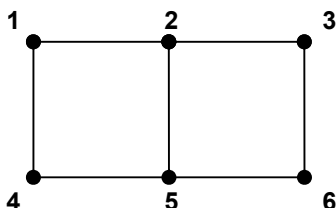


Figura 6.3.3

### Ejemplo 6.3.3.- Kirchhoff y Cayley.

Queremos contar cuántos árboles recubridores tiene un grafo completo  $K_n$ , cuyos vértices tienen todos grados  $n - 1$ , tal cual se indican en las matrices de la página siguiente.

La matriz de la derecha es  $n \times n$ , y la respuesta que buscamos está, salvo un signo, en el determinante de la matriz que es idéntica a  $D - M$ , pero de dimensiones  $(n - 1) \times (n - 1)$ . El valor de ese determinante, recordemos, no cambia con las operaciones de eliminación gaussiana. El lector podrá comprobar que, con las operaciones adecuadas (sumar la primera fila a las restantes, sacar un factor  $n$  de cada una de ellas, y sumarle finalmente todas las filas a la primera), el determinante original resulta ser  $n^{n-2} \det(I)$ , donde  $I$  es la matriz identidad  $(n - 1) \times (n - 1)$ . El resultado de Cayley queda, de nuevo, probado.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D - M = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

### 6.3.2.- ÁRBOL RECUBRIDOR DE MENOR PESO

Vamos a considerar de nuevo el problema de la red de conducción, pero ahora añadiremos un ingrediente nuevo. El estudio previo de ingeniería nos informa de qué tramos es posible construir pero, además, disponemos de la información sobre el *coste* de cada uno de esos tramos. Queremos, claro, elegir una red que conecte todas las ciudades con el menor coste posible. La información de los costes se traduce en que cada arista lleva asociado un número. Lo que buscamos es un árbol recubridor del grafo, pero justo aquél (o aquéllos) para el que la suma de los costes de las aristas elegidas sea mínima.

Para modelar esta situación, necesitamos una generalización del concepto de grafo. Un **grafo con pesos** (o grafo ponderado) sería un grafo  $G$  en el que, además, cada arista  $a$  tenga asociado lo que llamaremos su **peso**,  $p(a)$ , un número real no negativo, tal cual se indica en la Figura 6.3.4 (Esta restricción a pesos no negativos, aunque suene muy razonable, no es en realidad necesaria para la discusión que haremos sobre árboles recubridores de peso mínimo. Sin embargo, si que será fundamental cuando el problema que nos interese sea la construcción de caminos mas cortos). La matriz de adyacencia de un grafo con pesos sería simétrica, con ceros en la diagonal, y sus entradas serán los pesos de las aristas (o 0 si no hay tales aristas). La cantidad que nos interesa minimizar es lo que llamaremos el **peso del grafo**,

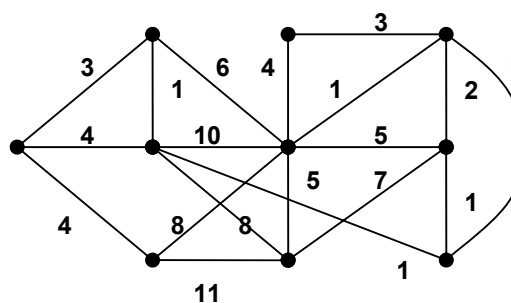


Figura 6.3.4

$$p(G) = \sum_{a \in A(G)} p(a)$$

El problema es el siguiente: elegir, de entre todos los posibles árboles recubridores de  $G$ , uno,  $H$ , de forma que:

$$p(H) = \sum_{a \in A(H)} p(a)$$

sea lo menor posible. Vamos a describir un par de algoritmos sencillos que consiguen este objetivo. Ambos son *algoritmos austeros*, como el que describimos para la coloración de un grafo: en cada paso, elegiremos la mejor decisión posible (que sea compatible con las restricciones del problema). Obsérvese que estos algoritmos servirán también para resolver la cuestión cuando se trate de un grafo sin pesos. Bastaría, por ejemplo, asignar peso 1 a cada arista. En estas condiciones, todos los árboles recubridores tienen el mismo peso (exactamente  $|V| - 1$ ), y el resultado del algoritmo será, simplemente, uno de estos árboles recubridores.

### ALGORITMO DE PRIM

Partimos de un grafo  $G = (V, A)$  con pesos, y vamos a ir construyendo, sucesivamente, conjuntos de vértices  $V_0, V_1, \dots \subseteq V$  y de aristas  $A_0, A_1, A_2, \dots \subseteq A$  de la siguiente manera:

- Elegimos un vértice  $v$  cualquiera del grafo y formamos  $V_0 = \{v\}$ . El conjunto de aristas es, en este paso,  $A_0 = \emptyset$ .
- Examinamos todas las aristas que tienen a  $v$  como uno de sus extremos y, de entre ellas, seleccionamos la que tenga un peso menor. Digamos que es la arista  $a$ , y sea  $w$  su otro extremo. Formamos entonces  $V_1 = \{v, w\}$  y  $A_1 = \{a\}$ .
- Supongamos que hemos construido los conjuntos  $V_{i-1}$  (que contendría  $i$  vértices) y  $A_{i-1}$  (con  $i-1$  aristas). De entre las aristas que unan vértices de  $V_{i-1}$  con vértices de  $V \setminus V_{i-1}$ , escogemos la de menor peso, que añadimos a  $A_{i-1}$  para formar  $A_i$ . El "nuevo" vértice se añade a los de  $V_{i-1}$  para formar  $V_i$ .

Si en el paso  $t$  no podemos encontrar una arista para continuar el procedimiento, el algoritmo acaba y la salida es el grafo  $G_t = (V_{t-1}, A_{t-1})$ .

Observemos que, tal como está diseñado el algoritmo, los sucesivos grafos  $G_j = (V_j, A_j)$  no pueden contener ciclos (y además son conexos). Si cuando el proceso acaba hemos incluido todos los vértices del grafo, el resultado es un árbol recubridor. Sobre el hecho de que sea de peso mínimo reflexionamos mas adelante. Observemos que no hemos exigido que el grafo  $G$  fuera conexo. Si lo fuera, el algoritmo produciría un árbol recubridor; pero si no, el resultado es un árbol recubridor de la componente conexa en la que se encuentre el vértice de partida  $v$ .

### ALGORITMO DE KRUSKAAL

El procedimiento comienza ordenando las aristas en orden creciente de pesos:  $(a_1, \dots, a_m)$ , donde  $p(a_i) \leq p(a_j)$  si  $i \leq j$ . En cada paso se van determinando conjuntos de aristas  $A_0, A_1, A_2, \dots \subseteq A$  de la siguiente manera:

- Al principio,  $A_0 = \emptyset$ .
- La arista  $a_1$  es la de menor peso del grafo, y la incluimos para formar  $A_1 = \{a_1\}$ .
- Supongamos que ya hemos determinado  $A_{i-1}$ . El conjunto  $A_i$  sería  $A_{i-1} \cup \{a_i\}$  si es que el grafo  $(V, A_{i-1} \cup \{a_i\})$  no contiene ciclos. Es decir, si la adición de la arista  $a_i$  no hace que se forme un ciclo en el grafo producido hasta el momento. En caso contrario,  $A_i = A_{i-1}$ .

El algoritmo acaba cuando  $A_i$  contenga  $|V| - 1$  aristas o bien cuando hayamos examinado todas las aristas (esto es, en el paso  $i = m$ ). Obsérvese que, a diferencia del algoritmo de Prim, los sucesivos grafos producidos por este procedimiento no tienen por qué ser árboles (aunque si bosques). Si el grafo de partida es conexo, entonces acaba necesariamente en un árbol recubridor (aunque el que sea de peso mínimo no es tan claro).

### Observaciones

Empecemos insistiendo en que, si  $G$  es conexo, ambos algoritmos producen árboles recubridores. Así que estos procedimientos sirven de comprobación de la conexión de un grafo arbitrario. En el de Prim, los sucesivos grafos son siempre árboles, mientras que en el de Kruskal no necesariamente: son bosques y sólo al final, si  $G$  es conexo, tendremos con seguridad un árbol recubridor.

En el grafo con pesos que aparece en la Figura 6.3.5, el algoritmo de Prim, empezando por ejemplo en el vértice 3, iría incluyendo, sucesivamente, las aristas  $\{3, 4\}$ ,  $\{3, 5\}$ ,  $\{5, 2\}$  y  $\{2, 1\}$ . En el último paso, se pueden elegir tanto la  $\{2, 6\}$  como la  $\{1, 6\}$ . Uno de los posibles resultados es el árbol recubridor, que es de peso mínimo, que dibujamos abajo a la izquierda. El de Prim partiría de una ordenación de las aristas según sus pesos. Podría ser, por ejemplo, la siguiente:

$\{1, 2\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{2, 6\}$ ,  $\{1, 6\}$ ,  $\{2, 5\}$ ,  $\{3, 5\}$ ,  $\{4, 5\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{5, 6\}$ .

El algoritmo iría incluyendo las aristas en el orden que aparecen en esa lista, saltándose  $\{1, 6\}$  (pues se formaría un ciclo), y acabando con la elección de la arista  $\{3, 5\}$  (ya tendríamos cinco aristas, las que necesitamos). El resultado sería el mismo árbol recubridor de antes. Si cambiamos la ordenación de las aristas, respetando el que aparezcan en orden creciente de pesos, obtendríamos un árbol recubridor distinto (lo mismo ocurriría con el de Prim en cada momento en que tengamos varias elecciones posibles).

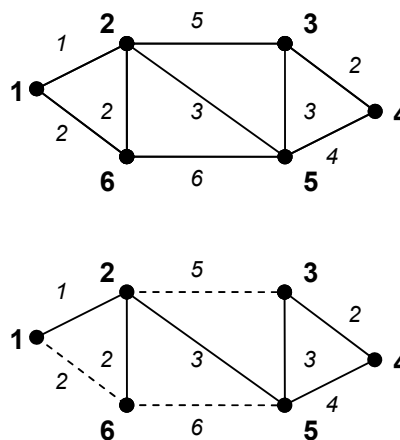


Figura 6.3.5

En un grafo  $G$  conexo con pesos, siempre existe, al menos, un árbol recubridor de peso mínimo, pero podría haber varios con ese peso mínimo. Piénsese, por ejemplo, en un grafo completo  $K_n$  con pesos 1 en cada una de sus aristas: hay  $n^{n-2}$  árboles recubridores distintos, y todos tienen el mismo peso,  $n-1$ . Los dos algoritmos que aquí hemos descrito pertenecen a los que hemos dado en llamar la clase de los *algoritmos austeros*, porque en cada etapa toman la decisión óptima, la mas “barata” en este caso, que sea compatible con las restricciones del problema (en el de Prim, mantener en cada paso el carácter de árbol, en el de Kruskal, que no se formen ciclos). No siempre estas estrategias “austeras” garantizan que el resultado obtenido sea el mejor posible (recuérdese el algoritmo de coloreado de grafos). Pero, en este caso, se puede demostrar que, dado un grafo  $G$  conexo con pesos, el resultado de ambos algoritmos, tanto el de Prim como el de Kruskal, es un árbol recubridor de peso mínimo (si hay varios, producen uno de ellos).

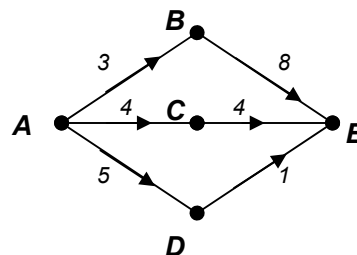


Figura 6.3.6

El siguiente ejemplo nos ilustra sobre las limitaciones que pueden tener métodos *localmente* óptimos. En el grafo dirigido de la derecha, queremos encontrar un camino barato de  $A$  a  $E$ , siguiendo el sentido de las flechas. Un análisis “global” (por ejemplo, enumerar todos los posibles caminos y determinar cuál es el más barato

de todos ellos) nos llevaría a la respuesta correcta:  $A \rightarrow D \rightarrow E$ . Pero si procediéramos “austeramente”, partiendo de  $A$  elegiríamos la de menor peso, la que lleva a  $C$ . Una vez tomada esta decisión, ya no hay marcha atrás: no nos queda más alternativa que escoger la arista que lleva a  $B$ . El camino sería  $A \rightarrow B \rightarrow E$ , que no es el mejor posible.

#### 6.4.- ÁRBOL BINARIO

**DEFINICIÓN 6.4.-** Un árbol con raíz es **binario** si para cada vértice  $v$ , el grado del mismo es  $\delta(v)=0, 1$  o  $2$ ; es decir, si  $v$  tiene cuando mucho dos hijos. Si  $\delta(v)=0$  o  $2$  para todo  $v$ , entonces el árbol con raíz es un árbol binario completo.

Mediante árboles binarios podemos representar a cualquier expresión algebraica. Veamos los siguientes ejemplos:

##### Ejemplo 6.4.1:

$$((7 - a) / 5) * ((a + b) \uparrow 3)$$

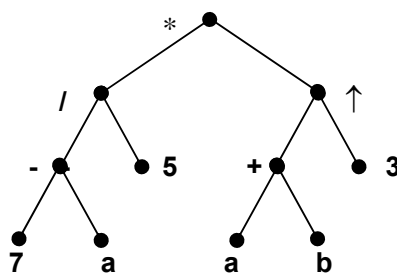


Figura 6.4.1

##### Ejemplo 6.4.2:

$$a - (3 / (b + 5))$$

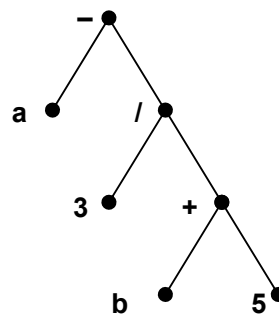


Figura 6.4.2

**DEFINICIÓN 6.5.-** Una **operación binaria**  $*$  tiene tres formas de representación:

1. **Notación infija:**  $a * b$
2. **Notación prefija (o polaca):**  $* a b$
3. **Notación postfija:**  $a b *$

**DEFINICIÓN 6.6.-** Sea  $T = (V, A)$  un árbol con raíz  $r$ . Si  $T$  no tiene otros vértices, entonces la misma raíz el recorrido en orden previo y posterior de  $T$ . Si  $|V| > 1$ . Sean  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ , los subárboles de  $T$ , de izquierda a derecha, entonces (como en la Figura 6.4.3):



### 6.4.1.- LA PODA DE UN ÁRBOL BINARIO

Tomemos el árbol binario (con raíz) infinito. En él vamos a seleccionar  $k$  vértices de manera que *ninguno de ellos sea antecesor de ningún otro*. Llamemos  $v_1, \dots, v_k$  a estos vértices señalados, que estarían a alturas (generaciones)  $h_1, \dots, h_k$ . Observemos que esta elección de vértices se corresponde con una *poda* del árbol en la que las hojas supervivientes están a alturas  $h_1, \dots, h_k$ . En la siguiente figura hemos escogido cuatro vértices,  $v_1, \dots, v_4$ :

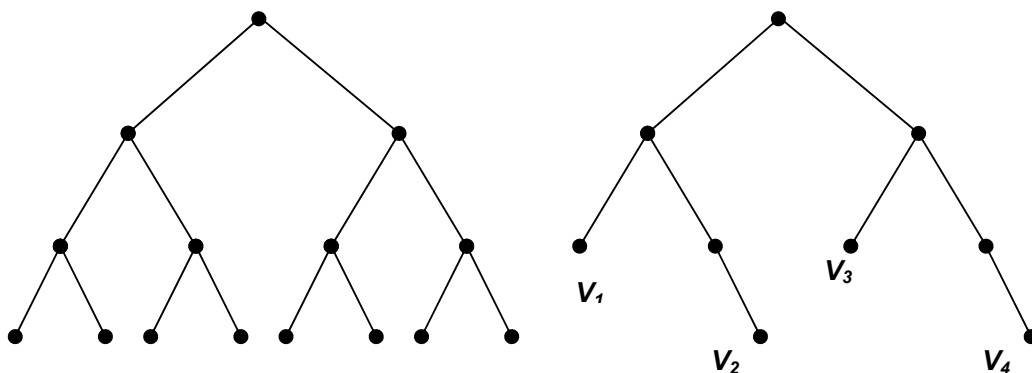


Figura 6.4.6

Exigir esta condición hace pensar que los vértices seleccionados no pueden estar todos muy “arriba” en el árbol, es decir, que los  $h_j$  no pueden ser arbitrariamente pequeños. De manera más precisa, y esto es lo que nos interesa comprobar, en una poda cualquiera, los  $h_j$  correspondientes han de cumplir que

$$\sum_{j=1}^k 2^{-h_j} \leq 1$$

Veámoslo: hemos seleccionado unos vértices  $v_1, \dots, v_k$  que están a alturas  $h_1, \dots, h_k$ . Llamemos  $H = \max. \{h_1, \dots, h_k\}$  a la mayor altura a la que encontramos alguno de los vértices señalados.

Vamos ahora, a partir de esta elección inicial, a seleccionar un conjunto de vértices en el árbol infinito con el siguiente procedimiento: tomamos el vértice  $v_1$  y escogemos sus  $2^{H-h_1}$  descendientes que están en la generación  $H$  (quizás solo el propio  $v_1$ , si es que es uno de los que vive en esa máxima generación). Esto lo hacemos, sucesivamente, con el resto de los vértices  $v_2, \dots, v_k$ . Nótese que los vértices que seleccionamos de esta manera son todos distintos.

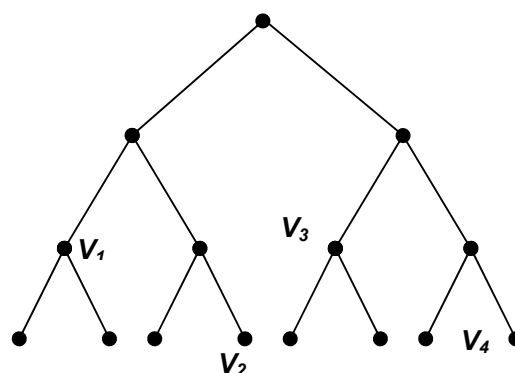


Figura 6.4.7

En el dibujo de la Figura 6.4.7 tenemos un ejemplo de este procedimiento. Los vértices escogidos en primer lugar son  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ : dos de la segunda generación y otros dos de la tercera. La máxima altura es  $H = 3$ . En trazo más grueso hemos señalado los vértices de esta tercera generación que seleccionamos en segundo lugar. Si sumamos los números  $2^{-h_j}$  para cada vértice  $v_j$  obtenemos  $1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/8 = 3/4$ , un número no mayor que 1. El cálculo

análogo, pero ahora para los vértices seleccionados en segundo lugar, nos lleva al mismo resultado.

Llamemos  $A$  a la elección inicial de vértices y  $A'$  a la nueva, y sea  $D(v_j) = 2^{H-h_j}$  el conjunto de vértices descendientes de  $v_j$  que escogemos. Entonces:

$$\sum_{v \in A'} 2^{-h(v)} = \sum_{j=1}^k \sum_{v \in D(v_j)} 2^{-h(v)} = \sum_{j=1}^k 2^{-H} |D(v_j)| = \sum_{j=1}^k 2^{-h_j} = \sum_{v \in A} 2^{-h(v)}$$

El valor de la suma es el mismo para  $A$  que para  $A'$ . Pero claro, en  $A'$  hay, a lo sumo,  $2^H$  vértices, así que:

$$\sum_{j=1}^k 2^{-h_j} = \sum_{v \in A} 2^{-h(v)} = |A'| 2^{-H} \leq 2^H 2^{-H} = 1$$

Lo interesante del asunto es que el resultado es cierto en el otro sentido: si damos unos números  $h_1, \dots, h_k$  tales que  $\sum 2^{-h_j} \leq 1$ , entonces en el árbol binario (infinito) podemos señalar  $k$  vértices  $v_1, \dots, v_k$  de alturas respectivas  $h_1, \dots, h_k$  y de manera que ninguno sea antecesor de ningún otro. Llamamos, como antes,  $H = \max\{h_1, \dots, h_k\}$ . Y observamos que:

$$1 \geq \sum_{j=1}^k 2^{-h_j} = 2^{-H} \sum_{j=1}^k 2^{H-h_j} \Rightarrow 2^H \geq \sum_{j=1}^k 2^{H-h_j}$$

Ahora, en el árbol binario infinito, en la generación  $H$  vamos señalando, de izquierda a derecha y sucesivamente,  $2^{H-h_1}$  vértices, luego  $2^{H-h_2}$ , etc. La desigualdad anterior nos dice que en esa generación encontramos suficientes vértices como para completar el proceso. El paso final consiste en señalar a  $v_1$  como el vértice de la generación  $h_1$  que tiene a los primeros  $2^{H-h_1}$  vértices seleccionados como descendientes en la generación  $H$ , a  $v_2$  como el que tiene a los  $2^{H-h_2}$  siguientes, etc. El lector podría comprobar que el argumento funciona de manera análoga para el caso de un árbol  $q$ -ario general (sustituyendo el 2 por  $q$  en la desigualdad).

Vamos ahora a interpretar este resultado etiquetando con listas de ceros y unos los vértices seleccionados. Digamos que elegir, en el árbol binario infinito, la rama de la izquierda es un 1, y elegir la de la derecha un 0. Seleccionar un vértice de altura  $h \geq 1$  no es, entonces, sino dar una lista de ceros y unos de longitud  $h$ . En el ejemplo que hemos estado considerando, al vértice  $v_1$  le correspondería la lista  $(1, 1)$ , al vértice  $v_2$  la lista  $(1, 0, 0)$ , y a los vértices  $v_3$  y  $v_4$ , las listas  $(0, 1)$  y  $(0, 0, 0)$ , respectivamente. Elegir, como en el ejemplo, vértices con la restricción de que unos no sean antecesores de otros se traduce en que ninguna de las listas correspondientes puede coincidir con el comienzo de ninguna otra.

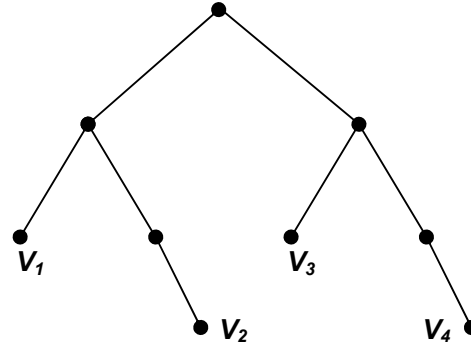


Figura 6.4.8

Mas adelante llamaremos a esta restricción **condición de prefijo** y veremos que será fundamental a la hora de construir ciertos códigos. Veamos ahora otro ejemplo en el que esta condición de prefijo es relevante.



**Ejemplo 6.4.5:** *El problema de los cuestionarios.*

Tenemos  $k$  objetos que se pueden identificar con una sucesión de preguntas cuya respuesta es un **SI** o un **NO**.

Por ejemplo, podríamos tener tres personajes, tres ilustres matemáticos: Hipatia de Alejandría, Gauss y Fermat. Preguntamos primero si el personaje es mujer, y posteriormente si es alemán. El resultado es el árbol que aparece a la izquierda. Con la identificación habitual de 1 para el **SI** y 0 para el **NO**, a Hipatia le corresponde la lista **(1)**, a Gauss la **(0, 1)** y a Fermat la **(0, 0)**. Las tres listas cumplen la condición de prefijo. Esto es algo general: si queremos que el cuestionario realmente identifique a los  $k$  objetos, las listas de ceros y unos que codifiquen las posibles respuestas han de cumplir esta condición.

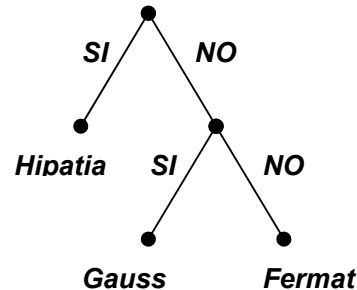


Figura 6.4.9

## 6.5.- ÁLGORITMOS DE BUSQUEDA EN UN ÁRBOL

### 6.5.1.- ALGORITMO DE BÚSQUEDA EN PROFUNDIDAD

Sea  $G = (V, A)$  un grafo no dirigido, conexo, sin lazos, tal que  $|V| = n$  y donde los vértices están ordenados como  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ . Para encontrar el árbol recubridor en profundidad  $T$ , ordenado, con raíz, se siguen los siguientes pasos:

- **Paso 1:** Se asigna  $v_1$  a la variable  $v$  y se inicializa  $T$  como el árbol que consta solamente de este vértice. (el vértice  $v_1$  será la raíz del árbol recubridor que se va a desarrollar).
- **Paso 2:** Seleccionamos el subíndice más pequeño  $i$ ,  $2 \leq i \leq n$ , tal que la arista  $\{v, v_i\} \in A$  y  $v_i$  no ha sido visitado todavía. Si no se encuentra tal subíndice entonces se va al paso 3. En caso contrario se hace lo siguiente: (1) Añadimos la arista  $\{v, v_i\}$  al árbol  $T$ ; (2) asignamos  $v_i$  a  $v$ ; y (3) regresamos al paso 2.
- **Paso 3:** Si  $v = v_1$ , el árbol  $T$  es el árbol recubridor (ordenado con raíz) del orden dado.
- **Paso 4:** Si  $v \neq v_1$ , retrocedemos desde  $v$ . Si  $u$  es el padre del vértice asignado a  $v$  en  $T$ , entonces asignamos  $u$  a  $v$  y regresamos al paso 2.

### 6.5.2.- ALGORITMO DE BÚSQUEDA EN ANCHURA

Sea  $G = (V, A)$  un grafo no dirigido (Figura 6.4.10), conexo, sin lazos, tal que  $|V| = n$  y donde los vértices están ordenados como  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ . Para encontrar el árbol recubridor en anchura  $T$ , ordenado, con raíz, se siguen los siguientes pasos:

- $T_1$  es un árbol recubridor de  $G$  generado por el Algoritmo de búsqueda en profundidad con los vértices en el siguiente orden:  $j, i, h, g, f, e, d, c, b, a$ .
- $T_2$  es un árbol recubridor de  $G$  generado por el Algoritmo de búsqueda en anchura con los vértices en el siguiente orden:  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$  (Figura 6.4.11).

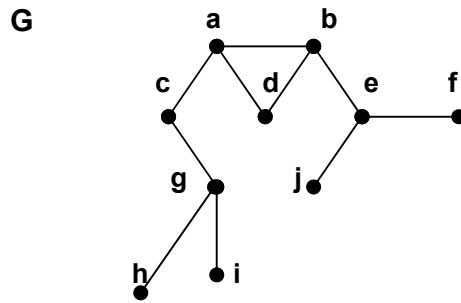


Figura 6.4.10

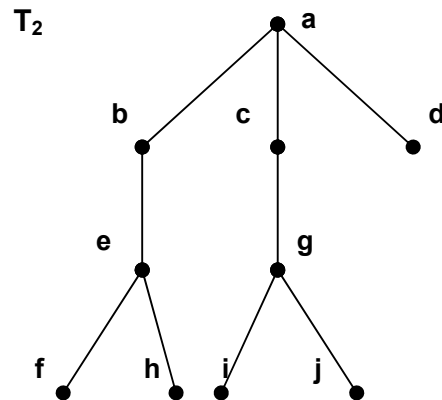


Figura 6.4.11

- **Paso 1:** Insertamos el vértice  $v_1$  en la cola  $Q$  e inicializamos  $T$  como el árbol formado por este único vértice  $v_1$  ( la raíz de la versión final de  $T$ )
- **Paso 2:** Eliminamos los vértices del frente de  $Q$ . Al eliminar un vértice  $v$ , consideramos  $v_i$ , para cada  $2 \leq i \leq n$ . Si la arista  $\{v, v_i\} \in A$  y  $v_i$  no ha sido visitado, agregamos la arista a  $T$ . Si examinamos todos los vértices que ya están en  $Q$  y no obtenemos aristas nuevas, el árbol  $T$  (generado hasta ese momento) es el árbol recubridor (ordenado con raíz) del orden dado
- **Paso 3:** Insertamos los vértices adyacentes a cada  $v$  (del paso 2) en el final de la cola  $Q$ , según el orden en que fueron visitados por primera vez. Después regresamos al paso 2.

=====

## 6.6.- PROBLEMAS CAPITULO VI.

- 1.- Probar que un grafo  $G$  es un árbol (conexo sin ciclos) si y sólo si no tiene ciclos y que se cumple  $|A(G)| = |V(G)| - 1$ .
- 2.- Probar que en un árbol existe un único camino que conecta dos vértices cualesquiera.
- 3.- Probar que el grafo  $G$  con  $n$  vértices es un árbol si y sólo si su polinomio cromático es  $G(k) = k(k-1)^{n-1}$ .  
**Sugerencia.** Para la implicación  $\Rightarrow$ , probar por inducción, y para ello, considerar un vértice de grado 1 del árbol y aplicar el algoritmo de "quitar aristas". Para la implicación  $\Leftarrow$ , usar el teorema del binomio y la caracterización de árboles como grafos conexos con  $n-1$  aristas.
- 4.- Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices cuyo polinomio cromático  $P_G$  cumple que  $P'_G(0) \neq 0$  y que  $P^{(n-1)}_G(0) = (1-n)(n-1)!$ . Demostrar que  $G$  es un árbol.
- 5.- (a) ¿Existen árboles de siete vértices y con cinco vértices de grado 1 y dos de grado 2?  
 (b) ¿Y con siete vértices de grados 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3?
- 6.- Si  $G$  es árbol con  $p$  vértices de grado 1,  $q$  vértices de grado 4 y ningún otro vértice, ¿qué relación hay entre  $p$  y  $q$ ?
- 7.- Denotemos por  $N(d_1, d_2, \dots, d_n)$  el número de árboles distintos que se pueden formar con el conjunto de vértices  $\{1, 2, \dots, n\}$ , donde  $\delta(j) = d_j + 1$ .  
 (a) Observar que si  $\sum_{j=1}^n d_j \neq n-2$  entonces  $N(d_1, d_2, \dots, d_n) = 0$ .  
 (b) Probar la siguiente fórmula de recurrencia:  

$$N(d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, 0) = N(d_1-1, d_2, \dots, d_{n-1}) + N(d_1, d_2-1, \dots, d_{n-1}) + \dots + N(d_1, d_2, \dots, d_{n-1}-1),$$
 donde en la suma anterior el término  $i$ -ésimo no aparece si  $d_i = 0$ .  
 (c) Deducir que si  $\sum_{j=1}^n d_j = n-2$ , entonces  $N(d_1, d_2, \dots, d_n) = \binom{n-2}{d_1, d_2, \dots, d_n}$   
 (d) Deducir finalmente la fórmula de Cayley: el número de árboles distintos que se pueden formar con los vértices  $\{1, 2, \dots, n\}$  es  $n^{n-2}$ .  
**Sugerencia.** Para el primer apartado, observar que la condición es justamente la necesaria para que tengamos un árbol. Para el segundo, clasificar los árboles dependiendo de a qué vértice está unido el de grado 1. Para el tercero, probar que ambos objetos comparten la misma recurrencia y las mismas condiciones iniciales. Para d), aplicar la fórmula del multinomio.
- 8.- Hallar el número de árboles distintos que se pueden formar con los siguientes vértices  $\{1, 2, \dots, n\}$  si (a)  $n = 6$  y cuatro vértices tienen grado 2; (b)  $n = 5$  y exactamente tres vértices tienen grado 1.
- 9.- ¿Cuántos árboles distintos se pueden formar con un conjunto de ocho vértices,  $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ , de manera que 2 de los vértices tengan grado 4 y los 6 restantes tengan grado 1?
- 10.- ¿Cuántos árboles con vértices  $\{1, 2, \dots, n\}$  tienen los grados de todos sus vértices menores o iguales a 2?
- 11.- Determine cuál de los siguientes grafos son árboles.

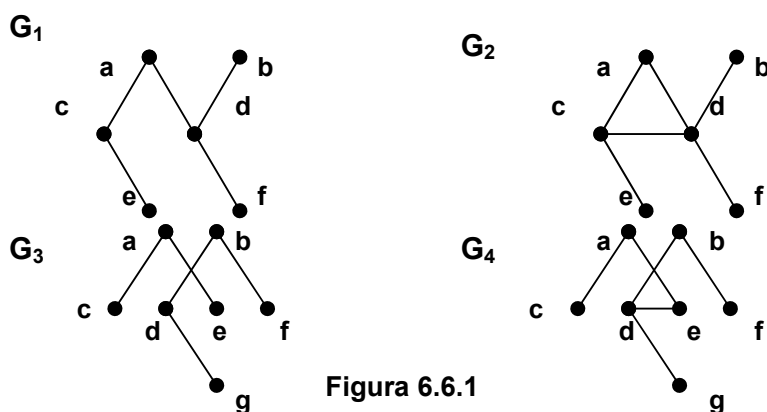


Figura 6.6.1

11.- Para los grafos de la Figura 6.6.1, diga cual de ellos es un bosque

12.- Para los grafos de la Figura 6.6.2, encuentre un árbol recubridor.

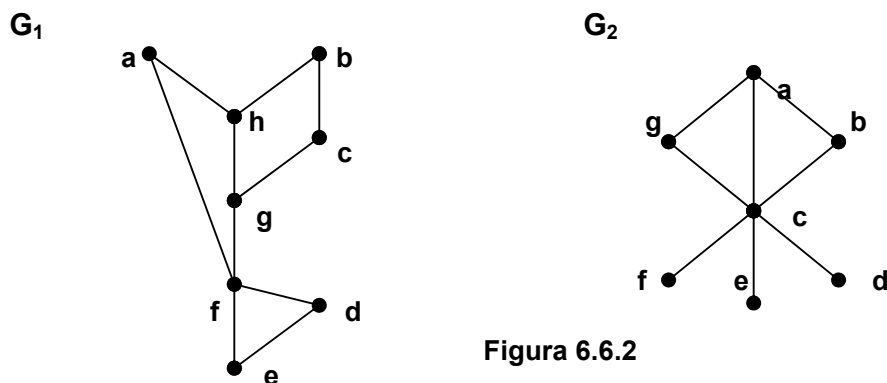


Figura 6.6.2

13.- Sean  $H$  y  $G$  dos grafos con los mismos vértices y de forma que toda arista de  $H$  lo sea también de  $G$ . Probar que  $p_G(x) \leq p_H(x)$ , para todo  $x$ ,  $x$  natural.

**Sugerencia.** Observar que en  $G$  hay mas prohibiciones (habrá menos coloraciones válidas).

14.- Deducir del ejercicio anterior que si  $G$  es un grafo conexo con  $n$  vértices entonces:

$$p_G(x) \leq x(x-1)^{n-1} \text{ para cada } x \text{ natural.}$$

**Sugerencia.** Por ser conexo,  $G$  tiene al menos un árbol recubridor.

15.- Calcular el número de árboles recubridores distintos de un grafo isomorfo a  $K_{3,s}$ .

16.- Consideremos el grafo que se obtiene al tomar  $n$  triángulos con exactamente un vértice común. (El número total de vértices es  $2n + 1$  y el número de aristas es  $3n$ .) ¿Cuántos árboles recubridores tiene?

**Sugerencia.** Hay que quitar una arista en cada triángulo.

17.- Sea  $H$  un árbol recubridor de peso mínimo de un grafo ponderado  $G$ . Sea  $f$  una arista de  $G$  que no está en  $H$ . Y sea  $e$  cualquier arista del camino (único) en  $H$  que une los vértices de  $f$ . Probar que el peso de  $e$  es menor o igual que el peso de  $f$ .

**Sugerencia.** Obsérvese que si no se cumpliera esa condición podríamos escoger un árbol recubridor con menor peso.

- 18.- Sea  $G$  el grafo con vértices  $\{a, b, 1, 2, \dots, 10\}$  (12 vértices) y aristas  $\{\{a, j\}, j = 1, 2, \dots, 10\}$  y  $\{\{b, j\}, j = 1, 2, \dots, 10\}$  (20 aristas). Las aristas que tienen a  $a$  como extremo pesan 1 y las aristas que tiene a  $b$  como extremo pesan 2. ¿Cuál es el peso mínimo de entre los árboles recubridores de  $G$ ?  
**Sugerencia.** Hay que mantener una (y sólo una) arista de las que llegan a  $b$ .
- 19.- Encuentre dos árboles recubridores no isomorfos para el grafo completo bipartito  $K_{2,3}$ . ¿Cuántos árboles recubridores no isomorfos tiene  $K_{2,3}$ ?
- 20.- Sean  $T_1 = (E_1, V_1)$  y  $T_2 = (V_2, E_2)$  dos árboles tales que  $|E_1| = 17$  y  $|V_2| = 2 \cdot |V_1|$ . determinar  $|V_1|$ ,  $|V_2|$  y  $|E_2|$ .
- 21.- Trace un árbol recubridor del grafo  $G_1$  de la Figura 6.10.2 tal que posea  $n$  vértices colgantes siendo:  
 a)  $n = 2$   
 b)  $n = 3$   
 c)  $n = 5$
- 22.- a) Si un árbol tiene cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5, ¿cuántos vértices colgantes tiene?  
 b) Si un árbol  $T = (V, A)$  tiene  $v_2$  vértices de grado 2,  $v_3$  vértices de grado 3, ... y  $v_m$  vértices de grado  $m$ , ¿cuánto valen  $|V|$  y  $|A|$ ?
- 23.- Trace, si existe, un árbol que corresponda a cada una de las propiedades dadas en los siguientes apartados. En caso de no existir explique la causa.  
 a) con todos los vértices con valencia 2.  
 b) con 5 vértices que tienen valencias 1,2,3,1,1  
 c) con 6 vértices que tienen valencias 1, 2, 1, 1, 3,3.  
 d) binario, completo, con 4 vértices internos y 5 vértices terminales.  
 e) binario completo, con altura igual a 4 y 9 vértices terminales.  
 f) Binario completo de 5 vértices internos y 5 vértices terminales  
 g) No binario, de altura 3 y 6 vértices terminales  
 h) Tenga 10 vértices y 8 lados
- 24.- Sean los siguientes árboles dirigidos. Determine cuál de ellos es **árbol dirigido con raíz**

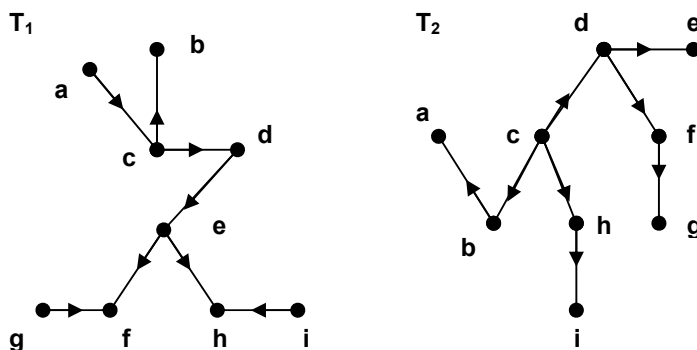
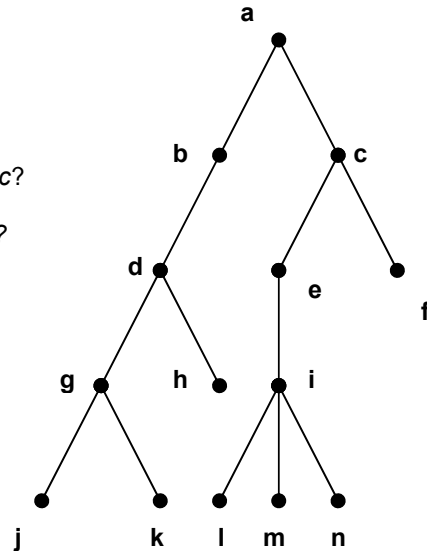


Figura 6.6.3

25.- Sea el siguiente árbol:

- ¿Qué vértices son las *hojas*?
- ¿Qué vértice es la *raíz*?
- ¿Qué vértice es el *padre* de *g*?
- ¿Qué vértices son los *descendientes* de *c*?
- ¿Qué vértices son los *hermanos* de *m*?
- ¿Cuál es el número de nivel del vértice *f*?
- ¿Cuál es la altura del árbol?
- ¿Es un árbol *binario*?
- ¿Cuál es el *sub-árbol inducido por e*?

Figura 6.6.4



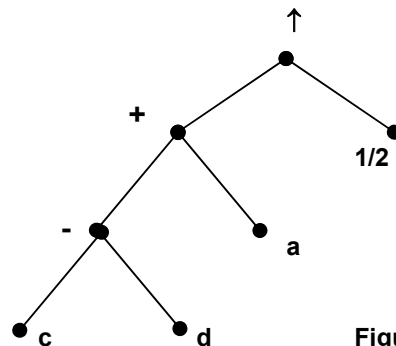
26.- Traza árboles binarios que represente a las siguientes expresiones algebraicas:

a)  $(a + b)^2 - 4 / (a - b)$

b)  $\sqrt[3]{5 + x} / (2 + a - b)$

27.- Encuentra las expresiones algebraicas que están representadas por los siguientes árboles

a)



b)

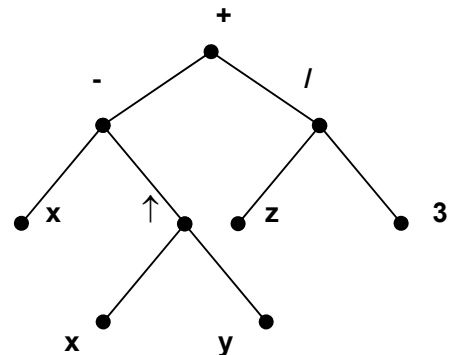


Figura 6.6.5

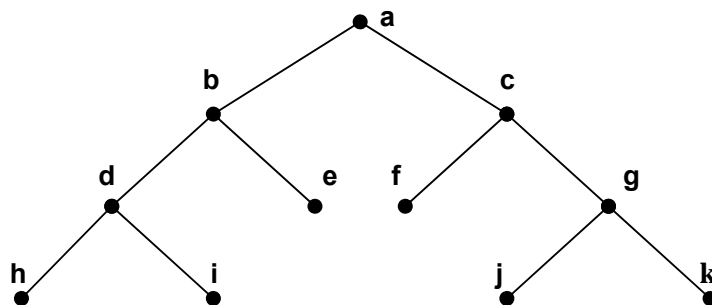
28.- a) Escriba la expresión  $(w + x - y) / (\pi * z^3)$  en notación polaca, mediante un árbol con raíz.

b) ¿Cuál es el valor de la expresión (en notación polaca)

$/ \uparrow a - bc + d * ef$ , si  $a = c = d = e = 2$ ,  $b = f = 4$  ?.

29.- Para los siguientes árboles, enumere los vértices según el recorrido en orden previo, el recorrido en orden simétrico y el recorrido en orden posterior.

a)



b)

Figura 6.6.6

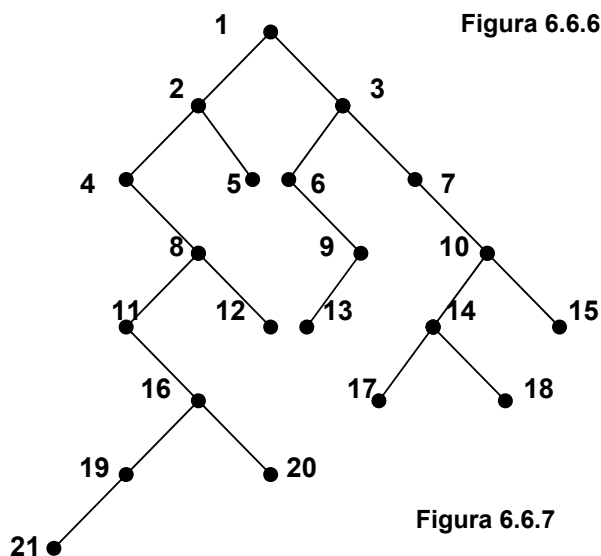


Figura 6.6.7

43 – a) Para el grafo  $G_1$ , encuentre dos árboles recubridores si el orden de los vértices es

i)  $a, b, c, d, e, f, g, h$     ii)  $h, g, f, e, d, c, b, a$     iii)  $a, b, c, d, h, g, f, e$

b) Repita el apartado a) para el grafo  $G_2$

$G_1$

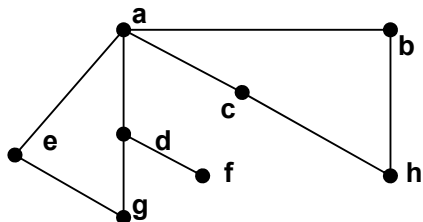
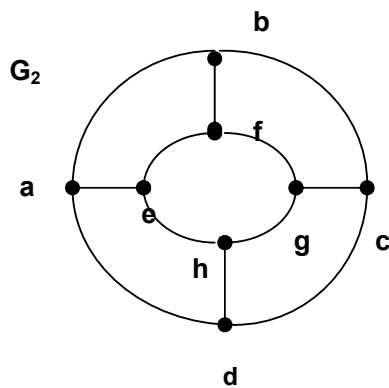


Figura 6.6.8



## 6.7.- **BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA**

1. - AN INTRODUCTION OF FIRST ORDER PREDICATE LOGIC  
J.P. Tremblay - McGRAW HILL – 1989
2. - AXIOMATIC SET THEORY AND FIRST ORDER LOGIC  
Patrick Suppes - PRENTICE HALL - 1988
3. - DISCRETE MATHEMATICAL STRUCTURES TO COMPUTER SCIENCE  
J.P. Tremblay & R. Manohar - McGRAW HILL – 1988
4. - DISCRETE MATHEMATICS and its APPLICATIONS – IV EDITION  
Kenneth H. Rosen - McGRAW HILL - 1999
5. - DISCRETE MATHEMATICS FOR COMPUTER SCIENTISTS – II EDITION  
John Truss – ADDISON WESLEY - 1999
6. - ESTRUCTURAS DE MATEMATICAS DISCRETAS PARA LA COMPUTACION  
B.Kolman - R.C.Busby – Sharon Ross - PRENTICE HALL - 1995
7. - ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS DISCRETAS  
C. L. Liu - McGRAW HILL - 1999
8. - FUNDAMENTOS DE LA LÓGICA COMPUTACIONAL  
Juan Frausto Solís, Bilardo Sánchez Ante – EDITORIAL TRILLAS - 2000
9. - FUZZY SETS, UNCERTAINTY, AND INFORMATION  
G.J. Klir - T.A.Folger - PRENTICE HALL - 1993
10. - INTRODUCTION TO FORMAL LOGIC  
Patrick Suppes - PRENTICE HALL - 1990
11. - INTRODUCTION TO FORMAL LOGIC  
S.V. Yablonsky - MIR PUBLISHERS - 1989
12. - INTRODUCTION TO KNOWLEDGE BASE SYSTEMS  
Richard Frost - Macmillan Publishing Co. - 1986
13. - LÓGICA  
Carlos Ibarra Barrón – PEARSON EDUCACIÓN - 1998
14. - LÓGICA COMPUTACIONAL  
Enrique Paniagua Arís, J.L. Sánchez González y Fernando M. Rubio – ITES PARAINFO - THMSON - 2003
15. - LOGICA FORMAL PARA INFORMÁTICOS  
Lourdes Arenas Alegría – EDITORIAL DIAZ DE SANTOS - 1996
16. - LÓGICA PARA COMPUTACIÓN  
Francisco S. Naishtat - EUDEBA - 1986
17. - LOGICA, PROGRAMACION E INTELIGENCIA ARTIFICIAL  
Robert Kowalski - DIAZ DE SANTOS S.A. – 1986
18. - LOGIC AND ITS APPLICATIONS  
E.Burke - E. Foxley - PRENTICE HALL - 1996
19. - LOGIC FOR COMPUTER SCIENCE  
Jean H. Gallier - JOHN WILEY & SONS Inc. - 1987
20. - MATEMATICAS DISCRETAS  
R.Johnsonbaugh - MACMILLAN PUBLISHING CO. - 1994
21. - MATEMATICAS DISCRETAS  
K.Ross - C.R.B.Wright - PRENTICE HALL - 1990
22. - MATEMATICA DISCRETA Y SUS APLICACIONES – V Edición  
Kenneth H. Rosen – McGRAW HILL - 2004
23. - MATEMATICA DISCRETA Y LÓGICA  
Winfried K. Grassmann & Jean Paul Tremblay – PRENTICE HALL – 1996.
24. - MATHEMATICAL LOGIC FOR COMPUTER SCIENCE  
M.Ben-Ari - PRENTICE HALL - 1993
25. - THE ESSENCE OF LOGIC  
John Kelly - PRENTICE HALL - 1997