



Supergravedad:

Compactificación de Kaluza-Klein

Tomás Codina

Dado que el sector de Neveu-Schwarz de supergravedad vive en un espacio tiempo de $D = 10$ dimensiones, para hacer contacto con la física observable es necesario bajar a $d = 4$ extrayendo información de las dimensiones extra, dicho mecanismo se conoce como **compactificación**. Existen numerosas formas de realizar una compactificación, en nuestro caso particular trataremos el escenario más sencillo de todos, conocido como **reducción dimensional de Kaluza Klein**, donde suponemos que las dimensiones extra se encuentran "enrolladas" en un N-Toro. Esto dará lugar a un Ansatz en donde ningún campo depende del espacio interno, obteniendo así una ungauged supergravity como teoría efectiva. Luego, nos proponemos gaugear la teoría, lo que corresponde a promover una simetría global a local, introduciendo derivadas covariantes de la mano del embedding tensor, esto último da lugar a una gauged supergravity.

1. Campos de la teoría efectiva

La reducción dimensional que llevaremos a cabo es el caso más sencillo de **compactificación de Scherk-Schwarz** la cual preserva todas las supersimetrías de la teoría padre y se basa en la idea original de Kaluza-Klein.

Para ello se comienza dividiendo a las $D = 10$ coordenadas x^i , en

$$x^i = (x^\mu, y^m) \quad (1.1)$$

donde las coordenadas i, j, k, \dots van de 0 a D y corresponden a la **teoría padre**, $\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots = 1, \dots, d$ son las coordenadas de la teoría efectiva de dimensión d , o **espacio externo**, y $m, n, o, p = 1, \dots, N$ corresponden al **espacio interno**.

De aquí, surge naturalmente la necesidad de separar los campos originales en componentes siendo para la métrica y 2-forma

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \begin{pmatrix} G_{\mu\nu} & G_{\mu n} \\ G_{m\nu} & G_{mn} \end{pmatrix} \\ B_{ij} &= \begin{pmatrix} B_{\mu\nu} & B_{\mu n} \\ B_{m\nu} & B_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Si bien esta manera de escribir las componentes es la más sencilla, por motivos que quedarán claro luego, resulta conveniente parametrizarlas de una forma distinta explotando los grados de libertad del problema. Dado que G_{ij} tiene $D \frac{(D+1)}{2}$ componentes independientes, podemos reescribirlo en término de d y N

$$D \frac{(D+1)}{2} = d \frac{(d+1)}{2} + N \frac{(N+1)}{2} + dN \quad (1.3)$$

donde el primer y segundo término corresponden a los grados de libertad de un tensor $\binom{0}{2}$ simétrico en el espacio externo e interno, notados $g_{\mu\nu}$ y G_{mn} respectivamente. Por otro lado, los dN podemos acomodarlos en N vectores de la teoría efectiva A_ν^m . La misma historia para la 2-forma, donde tendremos un tensor $\binom{0}{2}$ antisimétrico para el espacio externo, $b_{\mu\nu}$, y otro para el interno, B_{mn} y N vectores $V_{m\nu}$. Una posible manera de parametrizar a G_{ij} y B_{ij} utilizando los nuevos campos se escribe como



$$G_{ij} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + G_{op} A_\mu^o A_\nu^p & A_\mu^p G_{pn} \\ G_{mp} A_\nu^p & G_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.4a)$$

$$G^{ij} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\nu} A_\nu^n \\ -A_\mu^m g^{\mu\nu} & G^{mn} + A_\mu^m A_\nu^n g_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (1.4b)$$

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} b_{\mu\nu} - A_{[\mu}^p V_{p\nu]} + A_\mu^p A_\nu^q B_{pq} & V_{n\mu} - B_{np} A_\mu^p \\ -V_{m\nu} + B_{mp} A_\nu^p & B_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.4c)$$

Para la parametrización de G^{ij} se utilizó un abuso de notación en donde G^{mn} no corresponde a la componente m, n de la métrica inversa. Luego, por consistencia con la invertibilidad de la métrica $G_{ik} G^{kj} = \delta_j^i$, se necesita que

$$\begin{aligned} g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} &= \delta_\nu^\mu \\ G_{mp} G^{pn} &= \delta_n^m \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ahora bien, el desdoblamiento de los índices no tiene nada que ver con la dependencia de los nuevos campos sobre las coordenadas, el proceso de reducción dimensional nos da la libertad de decidir dicha dependencia lo que se relaciona con la variedad en la cual se compactifica. En otras palabras todavía debemos especificar la geometría del espacio interno lo que nos lleva a escoger un **Ansatz de reducción**. En nuestro caso particular supondremos que la variedad padre es un producto del espacio externo y un N-Toro

$$\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_d \otimes T^N = \mathcal{M}_d \otimes \underbrace{S^1 \dots \otimes S^1}_N \quad (1.6)$$

Para analizar la dependencia en y , tomaremos por simplicidad una sola dirección m_1 y un campo bosónico genérico \mathcal{B} . Como vemos de 1.6, la coordenada interna vive en un círculo, lo que nos permite afirmar $0 \leq y^{m_1} \leq 2\pi R_{m_1}$ donde R_{m_1} representa el radio del círculo. Luego, al ser un espacio compacto y periódico, podemos desarrollar la dependencia de los campos en coeficientes de Fourier¹

$$\mathcal{B}(x, y^{m_1}, y^{m_2}, \dots, y^{m_N}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{B}^{(n)}(x, y^{m_2}, \dots, y^{m_N}) e^{iny^{m_1}/R_{m_1}} \quad (1.7)$$

donde los coeficientes del desarrollo $\mathcal{B}^{(n)}$ son infinitos campos conocidos como **torre de estados de Kaluza-Klein**. Resulta ser que dichos modos poseen masas que crecen con potencias de $\frac{n}{R}$, de esta forma, si suponemos que la dimensión del espacio interno (R) es muy pequeña comparada con las distancias típicas involucradas en cualquier experimento de altas energías, obtenemos estados muy masivos. A modo ilustrativo se puede demostrar sencillamente el caso de un campo escalar no masivo en una dimensión compacta, de él obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_k \partial^k \phi(x, y) &= \partial_p \partial^p \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x) e^{iny/R} \right) \\ &= \partial_\mu \partial^\mu \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x) e^{iny/R} \right) + \partial_p \partial^p \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x) e^{iny/R} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\partial_\mu \partial^\mu \phi^{(n)}(x) + \left(\frac{i^2 n^2}{R^2} \right) \phi^{(n)}(x) \right] e^{iny/R} = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde por completitud de la base, cada coeficiente debe anularse por separado. Desde el punto de vista de la teoría efectiva, esto nos lleva a infinitas ecuaciones de Klein-Gordon para campos escalares con masas $m^{(n)} = \frac{n}{R}$

$$\left[\square - (m^{(n)})^2 \right] \phi^{(n)}(x) = 0 \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.9)$$

siendo el modo cero el único no masivo.

¹[Entender esto! -- > " la dependencia en y de los campos admite un desarrollo en la base de auto-funciones del operador Laplaciano de la variedad interna"]



Sencillamente, el argumento puede extenderse al caso N dimensional para campos escalares y utilizando otras herramientas se puede demostrar también para vectores y tensores. Lo relevante de todo esto es que al estar trabajando en regímenes efectivos de la teoría de cuerdas, incluir estados masivos del orden de R^{-1} sería observar contribuciones de orden mayor en la teoría efectiva comparables con otros estados propios de cuerdas que dejamos de lado en un principio! lo cual no tendría ningún sentido. De esto se sigue que resulta sensato quedarnos solo con el modo cero no masivo, lo que corresponde a adoptar un Ansatz en donde ningún campo depende de las coordenadas internas! (ver 1.7). Ahora claro está porque compactificar en un Toro representa el escenario más sencillo.

El siguiente paso en la construcción de una teoría efectiva es identificar la naturaleza de los nuevos campos. Para ello, la mejor manera es estudiar sus propiedades de transformación ante difeomorfismos y Gauge, las cuales podemos agrupar en

$$\delta G_{ij} = \mathcal{L}_\xi G_{ij} = \xi^k \partial_k G_{ij} + \partial_i \xi^k G_{kj} + \partial_j \xi^k G_{ik} \quad (1.10a)$$

$$\delta B_{ij} = \mathcal{L}_\xi B_{ij} = \xi^k \partial_k B_{ij} + \partial_i \xi^k B_{kj} + \partial_j \xi^k B_{ik} + 2\partial_{[i} \lambda_{j]} \quad (1.10b)$$

$$\delta \phi = \mathcal{L}_\xi \phi = \xi^k \partial_k \phi \quad (1.10c)$$

Luego, desdoblando índices podemos ver las propiedades de transformación heredadas para los campos G_{mn} , B_{mn} , A_ν^m , $V_{m\nu}$, $g_{\mu\nu}$ y $b_{\mu\nu}$. Para los primeros de ellos obtenemos

$$\delta G_{mn} = \xi^\rho \partial_\rho G_{mn} + \xi^p \partial_p G_{mn} + \partial_m \xi^\rho G_{\rho n} + \partial_n \xi^p G_{p m} + \partial_n \xi^\rho G_{m \rho} + \partial_n \xi^p G_{m p}$$

y el análogo para B_{mn} . Luego, utilizando el ansatz en donde ningún campo depende de las coordenadas internas, las derivadas ∂_m eliminan algunos términos obteniendo así.

$$\begin{aligned} \delta G_{mn} &= \xi^\rho \partial_\rho G_{mn} = \mathcal{L}_\xi G_{mn} \\ \delta B_{mn} &= \xi^\rho \partial_\rho B_{mn} = \mathcal{L}_\xi B_{mn} \end{aligned} \quad (1.11)$$

De aquí vemos, desde el punto de vista de la teoría efectiva, G_{mn} y B_{mn} son 36 campos escalares²! Con esto se sigue trivialmente que G^{mn} también transforma como tal.

Luego, utilizando 1.5 podemos invertir la coordenadas $G_{p\nu}$ para obtener

$$A_\nu^m = G^{mp} G_{p\nu} \quad (1.12)$$

de donde podemos deducir la regla de transformación

$$\begin{aligned} \delta A_\nu^m &= \delta G^{mp} G_{p\nu} + G^{mp} \delta G_{p\nu} = \mathcal{L}_\xi G^{mp} G_{p\nu} + G^{mp} (\xi^\rho \partial_\rho G_{p\nu} + \partial_\nu \xi^\rho G_{p\rho} + \partial_\nu \xi^\rho G_{\rho p}) \\ &= \mathcal{L}_\xi G^{mp} G_{p\nu} + G^{mp} \mathcal{L}_\xi G_{p\nu} + \partial_\nu \xi^\rho G^{mp} G_{\rho p} \end{aligned}$$

$$\delta A_\nu^m = \mathcal{L}_\xi A_\nu^m + \partial_\nu \xi^m \quad (1.13)$$

habiendo utilizado 1.5 y la regla de Leibniz para la última igualdad. Esto nos dice que desde el punto de vista de la teoría efectiva, nuestro campo A se comporta como un vector de Gauge con parámetro ξ^m !

Luego, despejando la coordenada $B_{\mu n}$ de 1.4c e introduciendo las reglas de transformación de B_{mn} y A_μ^m , 1.11 y 1.13, podemos obtener

$$\begin{aligned} \delta V_{n\nu} &= \delta B_{\mu n} + \delta (B_{np} A_\mu^p) \\ &= \xi^\rho \partial_\rho B_{\mu n} + \partial_\mu \xi^\rho B_{\rho n} + \partial_\mu \xi^p B_{pn} + \partial_\mu \lambda_n + \mathcal{L}_\xi (B_{np} A_\mu^p) + B_{np} \partial_\mu \xi^p \\ &= \mathcal{L}_\xi (B_{\mu n} + B_{np} A_\mu^p) + \partial_\mu \xi^p (B_{pn} + B_{np}) + \partial_\mu \lambda_n \end{aligned}$$

$$\delta V_{n\mu} = \mathcal{L}_\xi V_{n\mu} + \partial_\mu \lambda_n \quad (1.14)$$

²El número 36 viene de la suma de los $\frac{6(6+1)}{2} G_{mn}$ y los $\frac{6(6-1)}{2} B_{mn}$

Que nuevamente corresponde a un vector de Gauge con parámetro λ_n .

Las ecuaciones 1.13 y 1.14 corresponden a las transformaciones para vectores de Gauge **Abelianos**, caracterizadas por un grupo de Lie $U \equiv \underbrace{U(1) \otimes U(1) \otimes \cdots \otimes U(1)}_{2N} \equiv U(1)^{2N}$ donde ξ^n y λ_n juegan el

papel de coeficientes en el álgebra de dicho grupo. La aparición de este grupo abeliano no es un dato menor, el mismo se encuentra relacionado con las simetrías del espacio interno en donde se realizó la compactificación. En nuestro caso, el N-toro es una variedad plana cuyos vectores de Killing pueden tomarse simplemente como el conjunto ortogonal de vectores $\{\partial_m\}$ $m = 1, \dots, N$ que generan un álgebra con constantes de estructura $f_{mn}^o = 0$ para todos los conmutadores, de esto se sigue que el grupo de isometrías es ni más ni menos que el grupo abeliano $U(1)^N$!. Las teorías de supergravedad con vectores de gauge abelianos reciben el nombre de **Ungauged Supergravity**. Puede demostrarse que usualmente el grupo de isometrías del espacio interno aparecerá como un subgrupo del grupo de gauge de la teoría efectiva!

Este resultado lleva a la conclusión de que así como compactificar en espacios planos nos brinda una teoría ungauged, podemos hacerlo en otras variedades con curvatura no nula, lo que llevará a un gauge no-abeliano y por consecuente una **gauged supergravity**. Este mecanismo no es el único para obtener simetrías de gauge no-abelianas, sino que existe la posibilidad de compactificar la teoría padre en una variedad plana y luego forzar un subgrupo del grupo de simetrías globales de la teoría a ser una simetría local de la acción lo que resulta en la necesidad de remplazar derivadas parciales por objetos covariantes. Luego de este procedimiento la acción resultante posee una estructura de gauge cuyos generadores no conmutan. Este último mecanismo resulta ser más general que el primero mencionado ya que con él se pueden obtener nuevos objetos en la teoría efectiva conocidos como flujos no geométricos. Dicho mecanismo se explicará y será utilizado en la sección 3.

Volviendo a donde nos habíamos quedado, estudiemos la transformación de $g_{\mu\nu}$, viendo 1.4a se sigue que

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &= \delta G_{\mu\nu} - \delta (G_{op} A_\mu^o A_\nu^p) \\ &= \mathcal{L}_\xi G_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^p G_{p\nu} + \partial_\nu \xi^p G_{\mu p} - \mathcal{L}_\xi (G_{op} A_\mu^o A_\nu^p) - \partial_\mu \xi^o G_{op} A_\nu^p - \partial_\nu \xi^p G_{op} A_\mu^o \\ &= \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^p G_{po} A_\nu^o + \partial_\nu \xi^p G_{op} A_\mu^o - \partial_\mu \xi^o G_{op} A_\nu^p - \partial_\nu \xi^p G_{op} A_\mu^o \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\delta g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

Lo que nos lleva a interpretar a $g_{\mu\nu}$ como un objeto tensorial $\binom{0}{2}$ simétrico, que no es otra cosa que la métrica en la teoría efectiva!

Por último, la transformación de $b_{\mu\nu}$ la hacemos por partes para mayor prolijidad. En primer lugar, de 1.4c vemos que

$$b_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + A_{[\mu}^p V_{p\nu]} - A_\mu^p A_\nu^q B_{pq} \quad (1.17)$$

donde al transformar las componentes obtenemos

$$\begin{aligned} \delta B_{\mu\nu} &= \mathcal{L}_\xi B_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^p B_{p\nu} - \partial_\nu \xi^p B_{p\mu} + \partial_\mu \lambda_\nu - \partial_\nu \lambda_\mu \\ &= \mathcal{L}_\xi B_{\mu\nu} - 2\partial_{[\mu} \xi^p V_{\nu]p} + 2B_{po} \partial_{[\mu} \xi^p A_{\nu]}^o + 2\partial_{[\mu} \lambda_{\nu]} \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\delta (A_{[\mu}^p V_{\nu]p}) = \mathcal{L}_\xi (A_{[\mu}^p V_{\nu]p}) - \partial_{[\mu} \lambda_p A_{\nu]}^p + \partial_{[\mu} \xi^p V_{\nu]p} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \delta (A_\mu^o A_\nu^p B_{op}) &= \mathcal{L}_\xi (A_\mu^o A_\nu^p B_{op}) + B_{op} (\partial_\nu \xi^p A_\mu^o + \partial_\mu \xi^o A_\nu^p) \\ &= \mathcal{L}_\xi (A_\mu^o A_\nu^p B_{op}) + B_{po} (\partial_\mu \xi^p A_\nu^o - \partial_\nu \xi^p A_\mu^o) \\ &= \mathcal{L}_\xi (A_\mu^o A_\nu^p B_{op}) + 2B_{po} \partial_{[\mu} \xi^p A_{\nu]}^o \end{aligned} \quad (1.20)$$

finalmente, introduciendo 1.18, 1.19 y 1.20 en la variación de 1.17 vemos que



$$\delta b_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi b_{\mu\nu} + 2\partial_{[\mu} \lambda_{\nu]} - \partial_{[\mu} \xi^a V_{\nu]a} - \partial_{[\mu} \lambda_a A_{\nu]}^a$$

en donde podemos definir dos objetos que serán explicados en mayor detalle en la siguiente sección

$$\begin{aligned}\Lambda_A &\equiv (\xi^a, \lambda_a) \\ A_\mu^A &\equiv (V_{a\mu}, A_\mu^a)\end{aligned}\tag{1.21}$$

y así obtener finalmente

$$\delta b_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi b_{\mu\nu} + 2\partial_{[\mu} \lambda_{\nu]} - \partial_{[\mu} \Lambda_A A_{\nu]}^A\tag{1.22}$$

Concentrandonos en 1.22 y omitiendo por un momento el último término extra, vemos que $b_{\mu\nu}$ se corresponde con un tensor $\binom{0}{2}$ antisimétrico con transformación de Gauge parametrizada por λ_μ , esto nos permite pensar a $b_{\mu\nu}$ como el campo de Kalb-Ramond de la teoría efectiva!. Los términos extra se conocen como **Términos de Green-Schwarz** y deberán tenerse en cuenta en la siguiente sección al momento de construir invariantes de gauge en la acción efectiva.

[Poner algo más sobre esto]

2. Acción de Ungauged Supergravity

Una vez identificados los campos del espacio externo, el siguiente y último paso en la reducción dimensional consiste en obtener la acción de la teoría efectiva de la cual se desprenderán las ecuaciones de movimiento correspondientes y con ello toda la física involucrada. Dado que compactificamos en una variedad con curvatura nula, la transformación de gauge para los vectores corresponde a un grupo abeliano y esto define una ungauged supergravity como teoría efectiva.

Para lograr esto, debemos introducir el ansatz propuesto en la acción de supergravedad

$$S = \int dx^D \sqrt{-G} e^{-2\phi} \left[R + 4\partial_i \phi \partial^i \phi - \frac{1}{12} H_{ijk} H^{ijk} \right]\tag{2.1}$$

descomponiendo todos los términos en índices griegos y los propios del espacio interno. Observando sin demasiado detenimiento la definición del escalar de Ricci, el término del tensor de esfuerzos para la 2-forma y las parametrizaciones propuestas en 1.4a, 1.4b y 1.4c, se ve claramente que el desdoble de índices no es para nada trivial y la cantidad de términos finales en la teoría efectiva crece de manera significativa con cada reemplazo. De todas formas, veremos en instantes que muchos de estos términos se cancelan entre sí y otros pueden agruparse en estructuras que obedecen leyes de transformación con respecto a un dado grupo global.

Antes de comenzar con los reemplazos es recomendable saber de antemano los términos que esperamos encontrar una vez compactificada la teoría, esto simplifica enormemente el trabajo.

Como mencionamos anteriormente la teoría padre de la cual partimos, corresponde al sector bosónico de supergravedad con $D=10$ y $\mathcal{N} = 1$ supersimetrías (16 supercargas). Al utilizar la reducción dimensional de Kaluza-Klein preservamos el número de supercargas por lo que en $d = 4$ obtenemos una teoría con $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías, la mitad del máximo posible, lo que lleva el nombre de **Half-maximal ungauged supergravity**. Este tipo de teorías son muy rígidas debido al gran número de supersimetrías, por ello, la teoría a la cual llegamos resulta ser única siempre y cuando se especifique los campos presentes en la acción padre. Puede demostrarse que el caso tratado no es el más general, supersimetría permitiría introducir un número arbitrario n de vectores en 2.1, lo que llevaría a una teoría efectiva caracterizada por ese número de vectores adicionales. Para nuestro caso particular ($d = 4, \mathcal{N} = 4$) con 2.1, vimos que los campos involucrados consisten de una métrica



$g_{\mu\nu}$, una 2-forma ³ $b_{\mu\nu}$, 12 vectores⁴ A^A_μ (ver 1.21) y 37 escalares G_{mn}, B_{mn} y ϕ . Para la métrica, la propuesta más sencilla de introducir un término cinético en la nueva acción es mediante el escalar de curvatura \mathcal{R} . Por otro lado, al igual que en otras teorías de gauge, esperamos que los campos vectoriales aparezcan en la acción por medio de tensores de esfuerzo en estructuras de Yang-Mills, las cuales coinciden con la acción de Maxwell para el caso abeliano $\mathcal{F}_{a\mu\nu}\mathcal{F}_b^{\mu\nu}$ y $\mathcal{F}^a_{\mu\nu}\mathcal{F}^{b\mu\nu}$ para V y A respectivamente o de forma más compacta $\mathcal{F}^{A\mu\nu}\mathcal{F}^B_{\mu\nu}$ con

$$\mathcal{F}^A_{\mu\nu} \equiv 2\partial_{[\mu} A^A_{\nu]} \quad (2.2)$$

En donde puede demostrarse que, si bien la parecencia de gravedad requiere una derivada covariante sobre vectores para mantener la invarianza de la acción ante difeomorfismos, dentro de un antisimetrizador, las conexiones libres de torsión se anulan y es lícito reemplazar derivadas covariantes por derivadas parciales.

Al dejar los índices A y B sin contraer entre sí, estamos proponiendo un caso más general en donde aparecerán términos cuadráticos en derivadas de A, otros cuadráticos en derivadas de V y unos terceros mixtos. Dicho esto, es necesario contraer estos índices libres con algún objeto escalar de Lorentz (debido a que no existen índices griegos con los cuales contraer) simétrico en A, B, que no tiene porqué ser constante, una posibilidad es introducir el objeto $M_{AB}(\phi, G_{mn}, B_{mn})$ donde la dependencia en las coordenadas vendrá dada por los escalares ya presentes en la teoría. Una posible parametrización sería

$$M_{AB} \equiv \begin{pmatrix} G^{ab} & -G^{ac}B_{cb} \\ B_{ac}G^{cb} & G_{ab} - B_{ac}G^{cd}B_{db} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Luego, dado que los grados de libertad de los 36 escalares presentes ahora se encuentran dentro de un único objeto simétrica de 12×12 ⁵ Los términos cinéticos de los escalares vendrá dado, a menos de un factor multiplicativo, por

$$D_\mu M_{AB} D^\mu M^{AB} = \partial_\mu M_{AB} \partial^\mu M^{AB} \quad (2.4)$$

Esto se ve motivado por un hecho bien sabido en teorías de supergravedad, en las cuales los escalares siempre se ubican en modelos sigma no lineales

$$g_{ab}(\phi) \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^b \quad (2.5)$$

donde los campos escalares $\phi^a(x)$ pueden identificarse como coordenadas de una variedad Riemanniana no compacta denominada **variedad escalar**, cuya métrica positiva definida viene dada por $g_{ab}(\phi)$!

Por último, para la 2-forma esperamos recuperar un término cinético correspondiente a su tensor de esfuerzos pero necesariamente modificado por los nuevos términos de Green-Schwarz que aparecen en su transformación ante gauge 1.22. Esto se debe a que ahora la transformación para la 2-forma no se escribe como una derivada exterior de una 1-forma, por lo que al escribir el tensor de esfuerzos como la derivada exterior de $b_{\mu\nu}$, la nilpotencia de la derivada exterior ya no será de ayuda. Por simple inspección, puede verificarse que agregar un término de la forma $-3\partial_{[\mu} A^A_{\nu} A_{\rho]A}$ al tensor de esfuerzos efectivo garantiza la invarianza de gauge. Con esta discusión, esperamos encontrar un término cinético para $b_{\mu\nu}$ de la forma

$$-\frac{1}{12} \mathcal{W}_{\mu\nu\rho} \mathcal{W}^{\mu\nu\rho} \quad (2.6)$$

con

$$\mathcal{W}_{\mu\nu\rho} \equiv 3\partial_{[\mu} b_{\nu\rho]} - 3\partial_{[\mu} A^A_{\nu} A_{\rho]A} \quad (2.7)$$

Para probar que efectivamente este objeto es invariante ante transformaciones de gauge, utilizamos la notación 1.21 y agrupamos las transformaciones 1.13, 1.14 en

³En estas teorías de supergravedad existe una dualidad al nivel de las ecuaciones de movimiento (simetría on-shell) que nos permite intercambiar p-formas y (d-p-2)-formas sin alterar la física del problema. En particular, para d=4, obtenemos que el campo de Kalb-Ramond puede dualizarse a un escalar utilizando el operador de Hodge (\star), mientras que los vectores son tensores auto-duales. Esto nos permitiría dejar a la teoría solo con la métrica, vectores y escalares!

⁴En el caso más general se tienen $12 + n$, donde los mismos 12 vienen de compactificar R y H^2 en 2.1, mientras que n viene de la cantidad de vectores adicionales que se encuentran presentes de entrada en la acción padre

⁵[Entender conteo de grados de libertad]



$$\delta A_{\mu}^A = \partial_{\mu} \Lambda^A \quad (2.8)$$

Luego, podemos ver sencillamente que

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}_{\mu\nu\rho} &= 3\partial_{[\mu} \left(2\partial_{\nu} \lambda_{\rho]} - \partial_{\nu} \Lambda_A A_{\rho]}^A \right) - 3\partial_{[\mu} \partial_{\nu} \Lambda^A A_{\rho]}^A - 3\partial_{[\mu} A_{\nu}^A \partial_{\rho]} \Lambda_A \\ &= -3\partial_{[\nu} \Lambda_A \partial_{\mu} A_{\rho]}^A - 3\partial_{[\mu} A_{\nu}^A \partial_{\rho]} \Lambda_A \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

que es lo que queríamos probar.

De esta forma, agrupando todos los objetos e introduciendo los factores multiplicativos que sabemos que quedarán al final del día (esto solo es posible luego de llevar a cabo la compactificación), podemos construir la acción efectiva de la forma

$$S_{eff} = Vol(T^N) \int dx^d \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[\mathcal{R} + 4\partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{12} \mathcal{W}_{\mu\nu\rho} \mathcal{W}^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4} M_{AB} \mathcal{F}^{A\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}^B + \frac{1}{8} \partial_{\mu} M_{AB} \partial^{\mu} M^{AB} \right] \quad (2.10)$$

donde introducimos el volúmen del espacio compacto como resultado de integrar trivialmente sobre las coordenadas internas.

En esta acción, los índices dobles A, B, \dots van de 1 a $2N$ y se suben y bajan con la métrica.

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_a^b \\ \delta_a^b & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

la cual no es otra que la métrica invariante del grupo $O(N, N)$, de hecho, al estar todos estos índices contraídos, es fácil ver que la teoría completa goza de una simetría global ante el grupo $G = O(N, N)!$. Esto nos da una idea del porque de las estructuras 1.21, 2.2, 2.3 y 2.7 involucrando objetos covariantes de $O(N, N)$. Al escoger esta forma de escribir la acción simplemente hicimos manifiesta una simetría global de la teoría efectiva que, como veremos, no es para nada obvia ni inmediata al ver los términos de la compactificación. Estas simetrías globales que no pueden deducirse de la teoría padre y solo se manifiestan una vez realizada la compactificación llevan el nombre de **simetrías escondidas**.

En 2.10, los vectores son ubicados en representaciones lineales del grupo G mientras que los escalares G_{mn} y B_{mn} los agrupamos en un objeto que transforma en la bi-fundamental del grupo y es invariante ante un subgrupo particular de G conocido como **subgrupo máximo compacto**, $H = O(N) \times O(N)$, de esta forma se dice que M_{AB} parametriza el grupo cociente G/H .

Luego de haber construido la acción ungauged, resulta conveniente desglosar los términos involucrados para ver que esperamos encontrar en el camino. Con respecto al término cinético para los escalares, podemos ver

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \partial_{\mu} M_{AB} \partial^{\mu} M^{AB} &= \frac{1}{8} (\partial_{\mu} M^{ab} \partial^{\mu} M_{ab} + \partial_{\mu} M_a^b \partial^{\mu} M_b^a + \partial_{\mu} M_a^b \partial^{\mu} M_b^a + \partial_{\mu} M_{ab} \partial^{\mu} M^{ab}) \\ &= \frac{1}{4} \partial_{\mu} M^{ab} \partial^{\mu} M_{ab} + \frac{1}{4} \partial_{\mu} M_a^b \partial^{\mu} M_b^a \\ &= \frac{1}{4} \partial_{\mu} G^{ab} \partial^{\mu} G_{ab} - \frac{1}{4} \partial_{\mu} G^{ab} \partial^{\mu} (B_{ac} G^{cd} B_{db}) - \frac{1}{4} \partial_{\mu} (G^{ac} B_{cb}) \partial^{\mu} (B_{ac} G^{cb}) \\ &= \frac{1}{4} \partial_{\mu} G^{ab} \partial^{\mu} G_{ab} - \frac{1}{4} G^{ab} G^{cd} \partial_{\mu} B_{ad} \partial^{\mu} B_{bc} \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde se introdujo la definición 2.3 y para la última igualdad se aplico Leibniz y distribución. Por otro lado, el término correspondiente al tensor de esfuerzos de los nuevos campos de gauge viene dado por



$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}M_{AB}\mathcal{F}^{A\mu\nu}\mathcal{F}^B_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}M^{ab}\mathcal{F}_a^{\mu\nu}\mathcal{F}_{b\mu\nu} - \frac{1}{2}M^a_b\mathcal{F}_a^{\mu\nu}\mathcal{F}^b_{\mu\nu} - \frac{1}{4}M_{ab}\mathcal{F}^{a\mu\nu}\mathcal{F}^b_{\mu\nu} \\
&= -G^{ab}\partial_{[\mu}V_{\nu]a}\partial_{[\rho}V_{\sigma]b}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \\
&\quad + 2G^{ac}B_{cb}\partial_{[\mu}V_{\nu]a}\partial_{[\rho}A^b_{\sigma]}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \\
&\quad - G_{ab}\partial_{[\mu}A^a_{\nu]}\partial_{[\rho}A^b_{\sigma]}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + B_{ac}G^{cd}B_{cb}\partial_{[\mu}A^b_{\nu]}\partial_{[\rho}A^b_{\sigma]}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Siguiendo con el escalar de curvatura, para ver los términos completos deberíamos utilizar la definición

$$\mathcal{R}^\sigma_{\mu\rho\nu} \equiv 2\partial_{[\rho}\Gamma^\sigma_{\nu]\mu} + 2\Gamma^\eta_{\mu[\nu}\Gamma^\sigma_{\rho]\eta} \tag{2.14}$$

y reemplazar en él la definición de la conexión de Levi-Civita para la métrica del espacio externo

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}[\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}] \tag{2.15}$$

Si bien realizar todas las sustituciones, identificar términos iguales, cancelar, etc puede ser muy tedioso, utilizando un script de Cadabra podemos realizar dicha tarea velozmente. Al correr el programa, obtenemos el resultado

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= -\frac{1}{2}\partial_\mu g_{\rho\sigma}\partial_\nu g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\partial_\mu g^{\rho\sigma}\partial_\nu g_{\rho\sigma}g^{\mu\nu} + \partial_\mu g^{\mu\rho}\partial_\nu g_{\rho\sigma}g^{\nu\sigma} \\
&\quad - \partial_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + \partial_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\partial_\mu g_{\rho\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\alpha}g^{\mu\rho}g^{\sigma\nu}g^{\lambda\alpha}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Finalmente, el término cinético para la 2-forma lo dejaremos tal como esta por motivos que quedarán claros en breve.

Con estos términos en mente, comencemos introduciendo las parametrizaciones 1.4a, 1.4b y 1.4c en 2.1.

2.1. Determinante y campo escalar

En primer lugar, observamos que la métrica padre 1.4a puede ser reescrita en notación matricial como

$$G_p = \begin{pmatrix} g + A^t G A & A^t G \\ G A & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & A^t \\ 0 & 1_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_e & 0 \\ G A & G \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

en donde 1_i y 1_e son las matrices identidad del espacio interno y externo respectivamente. Con esta forma de escribir la métrica padre G_p , podemos aplicar la propiedad del determinante sobre matrices triangulares por bloque

$$Det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = Det(A) Det(C) \tag{2.18}$$

y la distribución del determinante sobre producto de matrices para obtener sencillamente

$$\begin{aligned}
\sqrt{-Det(G_p)} &= \sqrt{-Det(g)} \sqrt{Det(G)} \\
&\equiv \sqrt{-g} \sqrt{G}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

en donde utilizamos la notación usual donde g y G representan los determinantes de $g_{\mu\nu}$ y G_{mn} respectivamente. De esta forma, la medida compactificada junto con el factor del dilatón queda

$$\sqrt{-G_p} = \sqrt{-g} \sqrt{G} e^{-2\phi} \tag{2.20}$$

Si bien esto podríamos dejarlo así, es conveniente llevar la acción compactificada a una forma análoga a la teoría padre. Para ello, podemos redefinir el dilatón de la forma

$$\sqrt{-g} \sqrt{G} e^{-2\phi} \equiv \sqrt{-g} e^{-2\tilde{\phi}} \tag{2.21}$$

tal que



$$\begin{aligned}\tilde{\phi} &= -\frac{1}{4} \log (G e^{-4\phi}) = -\frac{1}{4} \log G + \phi \\ \phi &= \frac{1}{4} \log G + \tilde{\phi}\end{aligned}\quad (2.22)$$

Con esta definición, el prefactor de la acción efectiva queda tal como queríamos pero el término cinético del dilatón en 2.1 introduce nuevos compañeros ya que

$$\begin{aligned}4\partial_i\phi\partial^i\phi &= 4\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \partial_\mu(\log G + 4\tilde{\phi})\partial^\mu\left(\frac{1}{4}\log G + \tilde{\phi}\right) \\ &= \frac{1}{4}\partial_\mu(\log G)\partial^\mu(\log G) + 2\partial_\mu(\log G)\partial^\mu\tilde{\phi} + 4\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\tilde{\phi}\end{aligned}\quad (2.23)$$

donde el último término corresponde a la parte cinética del nuevo dilatón y los primeros dos términos extra se pueden reescribir de una forma más amigable utilizando la propiedad

$$\partial_\mu G = G G^{mn} \partial_\mu G_{mn} \quad (2.24)$$

y obtener así

$$\partial_\mu(\log G) = \frac{1}{G} \partial_\mu G = G^{mn} \partial_\mu G_{mn} \quad (2.25)$$

lo que nos lleva a la acción compactificada

$$S_c = Vol(T^N) \int dx^d \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[R + 4\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{12} H_{ijk} H^{ijk} + \frac{1}{4} G^{mn} \partial_\mu G_{mn} G^{op} \partial^\mu G_{op} + 2G^{mn} \partial_\mu G_{mn} \partial^\mu\phi \right] \quad (2.26)$$

donde volvimos a la notación usual para el dilatón por comodidad y utilizamos que ningún campo depende de las coordenadas internas por lo que efectuamos trivialmente la integral sobre el espacio interno compacto de volumen $Vol(T^N)$.

2.2. Escalar de curvatura

Luego de obtener la contribución del determinante y del dilatón a la teoría efectiva, podemos seguir con el escalar de curvatura, el cual al desdoblar índices obtenemos

$$\begin{aligned}R &= G^{\mu\nu} R^\rho{}_{\mu\rho\nu} + G^{\mu m} R^\nu{}_{\mu\nu m} + G^{\mu\nu} R^m{}_{\mu m\nu} + G^{\mu n} R^n{}_{\mu n\mu} \\ &+ G^{\mu m} R^\nu{}_{m\nu\mu} + G^{mn} R^\mu{}_{m\mu n} + G^{\mu m} R^n{}_{mn\mu} + G^{mn} R^o{}_{mon}\end{aligned}\quad (2.27)$$

En él, debemos reemplazar las distintas componentes del tensor de curvatura tal como hicimos en 2.14 y 2.15 pero ahora con los campos e índices de la teoría padre. De aquí se ve que el trabajo no es nada fácil y por ello recurrimos nuevamente a Cadabra, creando un algoritmo que nos permita realizar este tipo de reemplazos e identificar términos iguales para sumarlos o cancelarlos entre si. Con ello obtenemos

$$\begin{aligned}R &= \left. \begin{aligned} &-\frac{1}{2}\partial_\mu g_{\rho\sigma}\partial_\nu g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\partial_\mu g^{\rho\sigma}\partial_\nu g_{\rho\sigma}g^{\mu\nu} + \partial_\mu g^{\mu\rho}\partial_\nu g_{\rho\sigma}g^{\nu\sigma} \\ &-\partial_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + \partial_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\partial_\mu g_{\rho\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\alpha}g^{\mu\rho}g^{\sigma\nu}g^{\lambda\alpha} \\ &-\frac{1}{4}\partial_\mu g_{\rho\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\alpha}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}g^{\lambda\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\mu g_{\rho\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\alpha}g^{\mu\lambda}g^{\rho\nu}g^{\sigma\alpha} + \frac{1}{4}\partial_\mu g_{\rho\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\alpha}g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}g^{\sigma\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (1) \\ &+ \left. \begin{aligned} &-\frac{1}{2}G^{mn}\partial_\mu G_{mn}\partial_\nu g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu G_{mn}\partial_\nu G^{mn}g^{\mu\nu} - \partial_{\mu\nu}G_{mn}G^{mn}g^{\mu\nu} \\ &-\frac{1}{4}G^{mn}G^{op}\partial_\mu G_{mn}\partial_\nu G_{op}g^{\mu\nu} + \frac{1}{4}G^{mn}G^{op}\partial_\mu G_{mo}\partial_\nu G_{np}g^{\mu\nu} \\ &+\frac{1}{2}G^{mn}\partial_\mu G_{mn}\partial_\nu g_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - \frac{1}{2}G^{mn}\partial_\mu G_{mn}\partial_\nu g_{\rho\sigma}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (2) \end{aligned}\quad (2.28)$$



$$\left. \begin{aligned} &+G_{mn}A^m{}_{\mu}\partial_{\rho\sigma}A^n{}_{\nu}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}-G_{mn}A^m{}_{\mu}\partial_{\rho\sigma}A^n{}_{\nu}g^{\mu\rho}g^{\sigma\nu} \\ &+\frac{1}{2}G_{mn}\partial_{\rho}A^m{}_{\mu}\partial_{\sigma}A^n{}_{\nu}g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}-\frac{1}{2}G_{mn}\partial_{\rho}A^m{}_{\mu}\partial_{\sigma}A^n{}_{\nu}g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu} \\ &+G_{mn}\partial_{\rho\sigma}A^m{}_{\mu}A^n{}_{\nu}g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}-G_{mn}\partial_{\rho\sigma}A^m{}_{\mu}A^n{}_{\nu}g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

donde los primeros términos, se corresponden con la distribución completa del Ricci en términos de la métrica del espacio externo 2.14, es decir, recuperamos el escalar de curvatura para la teoría efectiva!

$$(1) = \mathcal{R} \quad (2.29)$$

Luego, podemos trabajar el segundo conjunto de términos sin campos de gauge, intercambiando derivadas y demás para obtener

$$(2) = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu}(\sqrt{-g}G^{mn}\partial_{\mu}G_{mn}g^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}G^{mn}\partial_{\mu}G_{mn}G^{op}\partial_{\mu}G_{op} + \frac{1}{4}\partial_{\mu}G_{mn}\partial^{\mu}G^{mn} \quad (2.30)$$

Por último, manipulando un poco los últimos seis términos, vemos que algunos se cancelan entre sí quedando simplemente

$$(3) = -G_{ab}\partial_{[\mu}A^a{}_{\nu]}\partial_{[\rho}A^b{}_{\sigma]}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \quad (2.31)$$

En definitiva, agrupando 2.29, 2.30 y 2.31 obtenemos finalmente

$$R = \mathcal{R} + \frac{1}{4}\partial_{\mu}G_{mn}\partial^{\mu}G^{mn} - G_{ab}\partial_{[\mu}A^a{}_{\nu]}\partial_{[\rho}A^b{}_{\sigma]}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - \frac{1}{4}G^{mn}\partial_{\mu}G_{mn}G^{op}\partial_{\mu}G_{op} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu}(\sqrt{-g}G^{mn}\partial_{\mu}G_{mn}g^{\mu\nu}) \quad (2.32)$$

donde reconocemos el segundo y tercer término de 2.12 y 2.13 respectivamente. Por otro lado, al introducir 2.32 en 2.26, vemos que los términos cuadráticos en G_{mn} se cancelan entre sí mientras que

$$\begin{aligned} &\sqrt{-g}e^{-2\phi}\left[2G^{mn}\partial_{\mu}G_{mn}\partial^{\mu}\phi - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu}(\sqrt{-g}G^{mn}\partial_{\mu}G_{mn}g^{\mu\nu})\right] \\ &= -\sqrt{-g}G^{mn}\partial_{\mu}G_{mn}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}(e^{-2\phi}) - \partial_{\nu}(\sqrt{-g}G^{mn}\partial_{\mu}G_{mn}g^{\mu\nu})e^{-2\phi} \\ &= -\partial_{\nu}(\sqrt{-g}G^{mn}\partial_{\mu}G_{mn}g^{\mu\nu}e^{-2\phi}) \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde se utilizó

$$\partial^{\mu}\phi = G^{\mu i}\partial_i\phi = G^{\mu\nu}\partial_{\nu}\phi = g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\phi \quad (2.34)$$

debido a la independencia del dilatón sobre las coordenadas internas. Lo interesante de la forma que toman los términos extra en 2.33, es que dentro de la acción contribuyen como un término de borde! En definitiva, habiendo compactificado el determinante y el escalar de curvatura tenemos la acción

$$S_c = Vol(T^N) \int dx^d \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[\mathcal{R} + 4\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - \frac{1}{12}H_{ijk}H^{ijk} + \frac{1}{4}\partial_{\mu}G_{mn}\partial^{\mu}G^{mn} - G_{ab}\partial_{[\mu}A^a{}_{\nu]}\partial_{[\rho}A^b{}_{\sigma]}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \right] \quad (2.35)$$

2.3. Tensor de esfuerzos

Finalmente, introduzcamos el ansatz en nuestro último elemento, el tensor de esfuerzos de la 2-forma. Este caso requiere un poco más de trabajo, y para ello, la estrategia será identificar de donde pueden venir los términos que necesitamos para completar nuestros objetos covariantes de $O(N, N)$ y luego verificar que el resto se cancela entre sí. Para ello, nuevamente comenzamos desdoblando los índices en $H_{ijk}H^{ijk}$ y agrupando aquellos que sean iguales por permutaciones de sus índices

$$-\frac{1}{12}H_{ijk}H^{ijk} = -\frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4}H_{\mu\nu n}H^{\mu\nu n} - \frac{1}{4}H_{\mu mn}H^{\mu mn} - \frac{1}{12}H_{mno}H^{mno} \quad (2.36)$$



donde el último término se anula por la definición de H y la hipótesis de no dependencia sobre coordenadas internas. Concentrandonos por un momento en el primer término, puede introducirse la parametrización 1.4c y obtener

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\rho} &= 3\partial_{[\mu} b_{\nu\rho]} - 3\partial_{[\mu} (A^p_{\nu} V_{\rho]p}) + 3\partial_{[\mu} (A^o_{\nu} A^p_{\rho]} B_{op}) \\ &= \mathcal{W}_{\mu\nu\rho} + 6\partial_{[\mu} V_{p\nu} A^p_{\rho]} + 3\partial_{[\mu} (A^o_{\nu} A^p_{\rho]} B_{op}) \end{aligned} \quad (2.37)$$

de donde vemos que $H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}$ recupera directamente el término de tensor de esfuerzos en la teoría efectiva 2.7 con algunos términos extra, sin la necesidad de tener que desglosar todo e identificar cada término por separado. De esta forma, podemos utilizar nuevamente Cadabra para crear un algoritmo que reemplace la definición de H , la parametrización de B_{ij} , doble todos los índices, distribuya, etc y obtener finalmente

$$\begin{aligned} -\frac{1}{12}H_{ijk}H^{ijk} &= -\frac{1}{12}\mathcal{W}_{\mu\nu\rho}\mathcal{W}^{\mu\nu\rho} \\ &\quad -\frac{1}{4}G^{ab}G^{cd}\partial_{\mu}B_{ad}\partial^{\mu}B_{bc} \\ &\quad -\frac{1}{2}G^{mn}\partial_{\mu}V_{m\nu}\partial_{\rho}V_{n\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + \frac{1}{2}G^{mn}\partial_{\mu}V_{m\nu}\partial_{\rho}V_{n\sigma}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} + G^{mn}B_{mp}\partial_{\mu}V_{n\nu}\partial_{\rho}A^p_{\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \\ &\quad -G^{mn}B_{mp}\partial_{\mu}V_{n\nu}\partial_{\rho}A^p_{\sigma}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - \frac{1}{2}B_{mn}G^{mo}B_{op}\partial_{\mu}A^n_{\nu}\partial_{\rho}A^p_{\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \\ &\quad +\frac{1}{2}B_{mn}G^{mo}B_{op}\partial_{\mu}A^n_{\nu}\partial_{\rho}A^p_{\sigma}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} \quad \text{A} \\ &\quad +\frac{1}{2}g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}G^{op}B_{on}A^m_{\mu}\partial_{\rho}B_{pm}\partial_{\sigma}A^n_{\nu} + \frac{1}{2}g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}G^{op}B_{pn}A^m_{\mu}\partial_{\rho}B_{om}\partial_{\sigma}A^n_{\nu} \\ &\quad -\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu}G^{op}B_{on}A^m_{\mu}\partial_{\rho}B_{pm}\partial_{\sigma}A^n_{\nu} - \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu}G^{op}B_{pn}A^m_{\mu}\partial_{\rho}B_{om}\partial_{\sigma}A^n_{\nu} \\ &\quad +g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}G^{op}B_{on}A^m_{\mu}\partial_{\rho}B_{pm}\partial_{\sigma}A^n_{\nu} - g^{\mu\sigma}g^{\rho\nu}G^{op}B_{on}A^m_{\mu}\partial_{\rho}B_{pm}\partial_{\sigma}A^n_{\nu} \quad \text{B} \\ &\quad -g^{\lambda\alpha}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}B_{op}A^m_{\mu}A^n_{\nu}A^o_{\rho}\partial_{\lambda}B_{mn}\partial_{\alpha}A^p_{\sigma} + g^{\lambda\alpha}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}B_{mp}A^m_{\mu}A^n_{\nu}A^o_{\rho}\partial_{\lambda}B_{no}\partial_{\alpha}A^p_{\sigma} \\ &\quad -\frac{3}{2}g^{\lambda\sigma}g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}B_{mp}A^m_{\mu}A^n_{\nu}A^o_{\rho}\partial_{\lambda}B_{no}\partial_{\alpha}A^p_{\sigma} + \frac{3}{2}g^{\lambda\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\alpha}B_{op}A^m_{\mu}A^n_{\nu}A^o_{\rho}\partial_{\lambda}B_{mn}\partial_{\alpha}A^p_{\sigma} \\ &\quad -\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}g^{\nu\alpha}g^{\rho\sigma}A^m_{\mu}A^n_{\nu}B_{mp}\partial_{\lambda}B_{no}A^o_{\rho}\partial_{\alpha}A^p_{\sigma} + \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}g^{\mu\alpha}g^{\nu\sigma}\partial_{\lambda}B_{mn}A^m_{\mu}A^n_{\nu}A^o_{\rho}B_{op}\partial_{\alpha}A^p_{\sigma} \quad \text{C} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Si bien el resultado parece monstruoso, las expresiones pueden manipularse por separado para ver que hay luz al final del tunel! Para ello, comenzamos observando la parte (A) del cálculo, en donde reconocemos inmediatamente el primer renglón como el tensor de esfuerzos de la 2-forma en la teoría efectiva y el segundo renglón como el término que nos faltaba para completar 2.12. A su vez, puede verificarse sencillamente que el tercer renglón completa el término cinético para los vectores de gauge 2.13 finalizando nuestra búsqueda para la teoría efectiva!

Sin embargo, así como encontramos todo lo que buscamos, resta demostrar que los términos extra que notamos como (B) y (C) no contribuyen a la acción efectiva. Veamos que efectivamente este es el caso.

Comenzando con (B), puede demostrarse sencillamente que intercambiando los índices $o \leftrightarrow p$ los dos términos del primer renglón se suman y lo mismo sucede con el segundo renglón. A su vez, se sigue inmediatamente que los dos últimos términos cancelan exactamente la contribución de los recién obtenidos dando lugar a (B) = 0.

Para los términos con cuatro vectores de gauge la situación es similar aunque requiere un poco más de trabajo ver la igualdad entre términos del mismo renglón. Para ello, hagamos un caso de (C) a modo de ejemplo. El primer término del primer renglón se puede reescribir como

$$\begin{aligned} -g^{\lambda\alpha}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}B_{op}A^m_{\mu}A^n_{\nu}A^o_{\rho}\partial_{\lambda}B_{mn}\partial_{\alpha}A^p_{\sigma} &= -g^{\lambda\alpha}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}B_{op}A^m_{\mu}A^n_{\nu}A^o_{\rho}\partial_{\lambda}B_{mn}\partial_{\alpha}A^p_{\sigma} \\ &= -g^{\lambda\alpha}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}B_{np}A^m_{\mu}A^n_{\nu}A^o_{\rho}\partial_{\lambda}B_{mo}\partial_{\alpha}A^p_{\sigma} \\ &= -g^{\lambda\alpha}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}B_{mp}A^m_{\mu}A^n_{\nu}A^o_{\rho}\partial_{\lambda}B_{no}\partial_{\alpha}A^p_{\sigma} \\ &= -g^{\lambda\alpha}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}B_{mp}A^m_{\mu}A^n_{\nu}A^o_{\rho}\partial_{\lambda}B_{no}\partial_{\alpha}A^p_{\sigma} \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde vemos que cancela exactamente el segundo término del primer renglón!. Siguiendo un procedimiento análogo puede demostrarse que todos los términos dentro de un mismo renglón se



cancelan entre si, haciendo nula la contribución de (C).

Anulado los términos sobrantes podemos introducir en 2.35 el único conjunto sobreviviente de 2.38, (A) y juntar todos los términos que dan lugar a la cinética de los campos escalares y vectores de gauge para obtener nuestra tan ansiada acción efectiva totalmente compactificada

$$S_{eff} = Vol(T^N) \int dx^d \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[\mathcal{R} + 4\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{12} \mathcal{W}_{\mu\nu\rho} \mathcal{W}^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4} M_{AB} \mathcal{F}^{A\mu\nu} \mathcal{F}^B_{\mu\nu} + \frac{1}{8} \partial_\mu M_{AB} \partial^\mu M^{AB} \right]$$

tal como esperabamos de 2.10.

3. Gauge Supergravity

Aunque la compactificación en un toro resulta ser el escenario más sencillo, lamentablemente las teorías ungauged supergravity poseen diversos problemas fenomenológicos desde el comienzo que hacen necesario "mejorarlas" de algún modo. Entre ellos se encuentra la ausencia de un potencial escalar: esto lleva a un estado de vacío completamente degenerado por lo que resulta imposible otorgarle masa a las partículas por un mecanismo de ruptura espontánea de simetría. A su vez esto no permite generar una constante cosmológica, lo que contradice experimentos actuales en donde se observa una constante muy pequeña positiva que caracteriza un universo de De Sitter. Otro problema fenomenológico que se encuentra a la vista es la aparición de una simetría de Gauge abeliana, en lugar de estructuras no conmutativas propias del modelo estándar.

La idea de mejorar la teoría viene de la mano de los **Gaugings**. Por un lado se sabe que estos objetos son las únicas deformaciones posibles que se le pueden hacer a las ungauged con la condición de preservar supersimetría. A su vez, como ya hemos mencionado, estas teorías ungauged son muy rígidas por tener un gran número de supersimetrías, lo que las convierte en únicas siempre y cuando se especifiquen los campos presentes. Por ejemplo, para las maximal supergravities en $d < 10$ existe una única ungauged, mientras que para las half-maximal supergravities debe especificarse el número de multipletes de vectores. Estos dos factores nos permiten afirmar que cualquier compactificación en una variedad que preserve supersimetría, por más complicada que sea, da lugar a una deformación de la ungauged que puede identificarse con un gauging particular!

Cuando hablamos de gaugear la teoría nos referimos a promover un subgrupo G del grupo de simetría global de la teoría ungauged G_0 , a una simetría local. Si bien esto puede parecer un poco forzado o rebuscado, la historia nos demuestra que grandes resultados se obtienen de dicho mecanismo ya que la idea no es para nada propia de supergravedad, sino que se remonta a los métodos originales del modelo estándar para introducir las interacciones fundamentales en el lagrangiano de Dirac!

3.1. El embedding tensor

Para un caso genérico, gaugear la teoría consiste en tomar el grupo de simetrías global G_0 de la acción efectiva en cuestión y promover un subgrupo G a simetría local. Considerando G_0 como un grupo de Lie con generadores del álgebra \mathfrak{g}_0 , t_α $\alpha = 1, \dots, Dim(G_0)$, tenemos las reglas de conmutación

$$[t_\alpha, t_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma t_\gamma \quad (3.1)$$

donde las constantes de estructura, $f_{\alpha\beta}^\gamma$ distintas de cero definen un grupo no abeliano. En nuestro caso particular en half-maximal $d = 4$, el grupo de simetrías global se corresponde con $G_0 = O(6, 6)$ que consta de aquellos tensores que dejan invariante la métrica 2.11. La invarianza de la acción puede verse fácilmente de 2.10, donde todos los índices de $O(6, 6)$ se encuentran contraídos con la métrica. Ahora bien, una sutileza en el razonamiento anterior es el hecho de estar tratando objetos de G_0 independientes de las coordenadas. La situación es distinta si queremos tomar un subgrupo G e introducirle dependencia en las coordenadas externas. Para preservar dicha simetría es necesario introducir objetos que trasformen de manera covariante ante estos grupos, la famosa derivada covariante D_μ . Para ello necesitamos los generadores de nuestro subgrupo y vectores de



gauge que funcionen de conexión para la derivada covariante. A diferencia de lo que estábamos acostumbrados en las teorías de gauge del modelo estándar, no es necesario introducir a mano estos objetos, ya que la teoría misma viene equipada con 36 vectores A_μ^A ! De esta forma, siendo X_M los generadores de \mathfrak{g} , proponemos covariantizar la teoría mediante el acoplamiento mínimo con la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - q A_\mu^M X_M \quad (3.2)$$

donde q es la constante de acople. De 3.2 vemos que el número de generadores está limitado por el número de vectores, esto restringe la dimensión del subgrupo G a $\text{Dim}(G) \leq 36$! Dado que estos generadores son un subconjunto de t_α , existe una manera de relacionarlos mediante el **embedding tensor** Θ_M^α dada por

$$X_M = \Theta_M^\alpha t_\alpha \quad (3.3)$$

Este objeto de índices mixtos, con M en la fundamental de G_0 y α en la adjunta, define los posibles gaugings de la teoría ungauged, es decir contiene información sobre todas las posibles deformaciones, el mismo determina como se encuentra sumergido el grupo de gauge en la simetría global.

El embedding tensor debe satisfacer una serie de relaciones y por ello no cualquier subgrupo será válido para gaugear la teoría. En nuestro caso particular solo se necesitan dos vínculos para garantizar la invarianza de gauge de la teoría, uno cuadrático y otro lineal. El primero de ellos tiene que ver con la clausura de los generadores en un álgebra, puede demostrarse que esta condición coincide con pedir invarianza de los objetos

$$X_{MA}^P = \Theta_M^\alpha (t_\alpha)_A^P \quad (3.4)$$

ante las transformaciones generadas por ellos mismos. Los objetos 3.4 no son otra cosa más que los generadores de \mathfrak{g} expresando t_α en la representación fundamental.

Para ver esto, comenzamos pidiendo que ante una transformación de gauge el embedding tensor o equivalentemente X_{MN}^P varíe de manera covariante con respecto a la estructura de sus índices, es decir

$$\begin{aligned} \delta X_{MN}^P &= q\xi^Q \Theta_Q^\alpha (t_\alpha)_M^O X_{ON}^P + q\xi^Q \Theta_Q^\alpha (t_\alpha)_N^O X_{MO}^P - q\xi^Q \Theta_Q^\alpha (t_\alpha)_O^P X_{MN}^O \\ &= q\xi^Q X_{QM}^O X_{ON}^P + q\xi^Q X_{QN}^O X_{MO}^P - q\xi^Q X_{QO}^P X_{MN}^O \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde simplemente transformamos los índices contravariantes con un signo más y los covariantes con signo negativo, dicha convención se explica en mayor detalle en la siguiente sección. Ahora bien, si imponemos que el embedding tensor no solo se comporte de manera covariante sino que sea invariante ante gauge, podemos igualar 3.5 a cero y tirar el factor común $q\xi^Q$ para llegar a la relación **[SEGUIR DE ACÁ]**

$$\begin{aligned} 0 &= X_{QM}^O (X_O)_N^P + (X_Q)_N^O (X_M)_O^P - (X_M)_N^O (X_Q)_O^P \\ &= X_{QM}^O (X_O)_N^P + [X_Q, X_M]_N^P \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde podemos expresarlo en forma matricial y obtener finalmente la clausura del álgebra

$$[X_M, X_N] = -X_{MN}^P X_P \quad (3.7)$$

En definitiva, para tener realmente una simetría de gauge, X_M (o equivalentemente Θ_M^α) debe satisfacer este vínculo cuadrático. Que 3.7 sea efectivamente un vínculo para los generadores se debe a que las constantes de estructura ya se encuentran fijas de entrada por el grupo global. Un resultado interesante es que los objetos X_{MN}^P no tienen porque ser antisimétricos en sus dos primeros índices, 3.7 demanda que esto se cumpla solo ante la proyección con X_P .

Sumado a 3.7, es necesario un vínculo lineal para Θ_M^α que solo puede deducirse observando la teoría supersimétrica completa. Dado que el embedding tensor transforma en la representación $V^* \otimes \mathfrak{g}_0$ (con V^* la representación dual fundamental), con objeto de introducir una simetría de gauge sin romper supersimetría, es necesario quedarnos solo con un conjunto de las representaciones irreducibles de dicho producto



$$V^* \otimes \mathfrak{g}_0 = \theta_1 \oplus \theta_2 \cdots \oplus \theta_n \quad (3.8)$$

Demandando que dicho vínculo lineal sea G_0 -covariante, puede demostrarse que puede escribirse en la forma

$$\mathbb{P}\Theta = 0 \quad (3.9)$$

donde \mathbb{P} es un proyector que selecciona aquellos subespacios no permitidos por la invarianza de gauge y supersimetría. Puede demostrarse que en nuestro caso particular con 12 vectores de gauge y 66 generadores del grupo $O(6, 6)$, el embedding tensor transforma en la representación

$$12 \otimes 66 = 12 \oplus 220 \oplus \dots \quad (3.10)$$

y los únicos subespacios permitidos corresponden a los primeros 2 de 3.10. Esto nos lleva a dividir a los X_{MN}^P en una parametrización para el subespacio de 12 dimensiones y otra para 220. Para el primero de ellos, las 12 dimensiones caben dentro de una representación vectorial f_A , mientras que para el subespacio restante podemos representarlas en constantes de estructura de 3 índices completamente antisimétrico, $f_{MNP} = f_{[MNP]}$ teniendo $\frac{12 \times 11 \times 10}{3!} = 220$ grados de libertad. En nuestro caso particular estudiaremos el caso en donde se prenden solo las constantes de estructura correspondientes al subespacio de 220, anulando $f_A = 0$ lo que se conoce como adoptar un gauge **unimodular**. En este caso particular, y solo en él, el vínculo lineal nos permite asumir que las constantes de estructura $X_{MNP} = f_{MNP}$ son completamente antisimétricas! En definitiva, ambos vínculos pueden resumirse en

$$\begin{aligned} [X_M, X_N] &= -X_{MN}^P X_P \\ X_{MNP} &= f_{MNP} = f_{[MNP]} \end{aligned} \quad (3.11)$$

De esta forma vemos que cualquier subgrupo cuyos generadores estén caracterizados por un embedding tensor cumpliendo 3.11, corresponderá con una posible deformación supersimétrica de la teoría con invarianza de gauge. Lo remarcable de este método en donde utilizamos el embedding tensor como un objeto covariante del grupo global para parametrizar los generadores, es que nos permite preservar dicha simetría a lo largo de todo el proceso de gaugear supergravedad, hasta el momento en donde especificamos un subgrupo particular y rompemos la simetría global.

[Corroborar esto, entender y escribir mejor.]

3.2. Transformaciones y derivada covariante

Con estos generadores, objetos con distinto número de índices transforman de manera distinta ante una variación infinitesimal según una dada convención. Por ejemplo, tomando los elementos de G

$$h = e^{q\xi^P X_P} \in G \quad (3.12)$$

con $\xi^P(x)$ el parámetro local de la transformación, podemos proponer la transformación de un co-vector W según

$$(W')_A = \left(e^{q\xi^P X_P} \right)_A^B W_B = (\delta_A^B + q\xi^P X_{PA}^B) W_B + \mathcal{O}(\xi^2) \quad (3.13)$$

y por consiguiente la versión infinitesimal

$$\delta W_A = q\xi^M X_{MA}^P W_P \quad (3.14)$$

Luego, podemos utilizar la invarianza de la métrica ante transformaciones del grupo ($\delta\eta_{MN} = \delta\eta^{MN} = 0$), lo que nos permite subir y bajar índices dentro de las variaciones infinitesimales, en otras palabras

$$\delta V^B = \delta(\eta^{BA} V_A) = \eta^{BA} q\xi^M X_{MA}^P V_P = q\xi^M X_M^{BP} V_P = -q\xi^M X_{MP}^B V^P \quad (3.15)$$



donde utilizamos la antisimetría de las constantes de estructura. La ecuación 3.15 resulta ser la variación para un vector del grupo. A su vez, tomando el producto tensorial entre dos objetos y aplicando la regla de Leibniz, podemos obtener la regla de transformación para tensores de orden más alto. Por ejemplo, para un tensor de rango 2 e índices mixtos tenemos

$$\delta H_A^B = q\xi^M X_{MA}^P H_P^B - q\xi^M X_{MP}^B H_A^P \quad (3.16)$$

Las transformaciones para tensores de orden mayor se pueden seguir sencillamente de 3.16.

Con estas propiedades de transformación podemos proponer una forma conveniente para la derivada covariante 3.2, aplicada a tensores de diversos rangos. Inspirados en las teorías de gauge bien conocidas y con el propósito de cancelar la no covarianza de los diversos objetos ante la derivada parcial, D_μ debe actuar sobre tensores con el signo contrario a como transforman. Concretamente, partiendo de 3.2 como la acción de la derivada covariante sobre 1-formas y utilizando $D_\mu \eta_{AB} = 0$, se pueden construir las aplicaciones sobre diversos tensores

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= \partial_\mu \phi \\ D_\mu W_A &= \partial_\mu W_A - qA_\mu^M X_{MA}^P W_P \\ D_\mu V^A &= \partial_\mu V^A + qA_\mu^M X_{MP}^A V^P \\ D_\mu H_A^B &= \partial_\mu H_A^B - qA_\mu^M X_{MA}^P H_P^B + qA_\mu^M X_{MP}^B H_A^P \end{aligned} \quad (3.17)$$

para un escalar, 1-forma, vector y tensor $\binom{1}{1}$ respectivamente.

3.3. Acción gaugeada

Con los vínculos 3.11 en mente, antes del proceso de transformación de 2.10 a una teoría no abeliana, deduzcamos como debe transformar la conexión.

Al igual que en la teoría de Yang-Mills lo que buscamos es una derivada covariante que transforme como

$$(D_\mu \Lambda)' = h (D_\mu \Lambda) \quad (3.18)$$

donde introducimos un campo de prueba Λ y el elemento del grupo $h(x) \in G$. Explicitando 3.18, se puede leer la regla de transformación para la conexión, por un lado tenemos

$$\begin{aligned} (D_\mu \Lambda)' &= \left(\partial_\mu - qA_\mu'^M X_M \right) h\Lambda \\ &= \partial_\mu h\Lambda + h\partial_\mu \Lambda - qA_\mu'^M X_M h\Lambda \end{aligned} \quad (3.19)$$

y por el otro

$$(D_\mu \Lambda)' = h (D_\mu \Lambda) = h\partial_\mu \Lambda - qA_\mu^M hX_M \Lambda \quad (3.20)$$

donde escribimos todo en forma matricial. Luego, igualando ambas relaciones y tirando el campo de prueba, se obtiene la ley de transformación para la conexión

$$A_\mu'^M X_M = A_\mu^M hX_M h^{-1} + \frac{1}{q} (\partial_\mu h) h^{-1} \quad (3.21)$$

que podemos llevar a la forma infinitesimal

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^M X_M &= A_\mu^M (q\xi^P X_P X_M - qX_M \xi^P X_P) + \partial_\mu \xi^M X_M + \mathcal{O}(\xi^2) \\ &= \partial_\mu \xi^M X_M - qA_\mu^M \xi^P [X_M, X_P] + \mathcal{O}(\xi^2) \\ &= \partial_\mu \xi^M X_M + qA_\mu^N \xi^P X_{NP}^M X_M + \mathcal{O}(\xi^2) \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde para la última igualdad utilizamos el vínculo cuadrático. Esto nos lleva a la ley de transformación

$$\delta A_\mu^M = \partial_\mu \xi^M + qA_\mu^N X_{NP}^M \xi^P = D_\mu \xi^M \quad (3.23)$$



donde reconocemos (ver 3.17) que equivale a una derivada covariante del parámetro ξ^M . Esto era de esperar ya que los vectores que usamos como conexión ya tenían una simetría de gauge abeliana desde el comienzo dada por $\delta A_\mu^A = \partial_\mu \xi^A$ y lo que hicimos simplemente es covariantizar dicha relación cambiando derivadas parciales por covariantes! Cualquiera de los dos procedimientos llevan al mismo resultado. Un comentario importante sobre 3.23 es que la conexión no transforma de manera covariante por la derivada parcial sobre el parámetro.

Con esta transformación en mente, podemos pasar ahora si a covariantizar todos los términos de 2.10. Un rápido análisis nos hace notar que el escalar de curvatura para la métrica y el modelo sigma del dilatón tal como están se encuentran en una forma covariante ya que ambos campos son escalares ante el grupo de gauge! Por otro lado los términos restantes deben ser modificados para tratar el nuevo carácter no abeliano del grupo de gauge, por ello en lo siguiente nos ocuparemos de $F_{\mu\nu}^A$, M_{AB} y $\mathcal{W}_{\mu\nu\rho}$ y su cinemática correspondiente.

3.3.1. F

Para el tensor de esfuerzos, una propuesta es inspirarnos en la teoría de Yang-Mills y plantear la extensión más sencilla del caso abeliano

$$F_{\mu\nu}^A = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^A + qX_{BC}^A A_\mu^B A_\nu^C \quad (3.24)$$

donde X_{BC}^A juega el papel de menos las constantes de estructura. La segunda propuesta y tal vez más elegante es observar el conmutador de dos derivadas covariantes, para ello calculamos

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu \Lambda &= (\partial_\mu - qA_\mu^M X_M) (\partial_\nu - qA_\nu^N X_N) \Lambda \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - 2qX_M A_{(\mu}^M \partial_{\nu)} \Lambda - q\partial_\mu A_\nu^M X_M \Lambda + q^2 A_\mu^M A_\nu^N X_M X_N \Lambda \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde Λ es un co-vector auxiliar. Luego podemos tomar el conmutador de estas dos derivadas covariantes en donde los primeros dos términos simétricos de 3.25 se van

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] \Lambda &= -2q\partial_{[\mu} A_{\nu]}^M X_M \Lambda + 2q^2 X_M X_N A_{[\mu}^M A_{\nu]}^N \Lambda \\ &= -q \left(2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^M X_M - q[X_M, X_N] A_\mu^M A_\nu^N \right) \Lambda \\ &= -q \left(2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^M X_M + qX_{NP}^M X_M A_\mu^N A_\nu^P \right) \Lambda \\ &= -q \left(2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^M + qX_{NP}^M A_\mu^N A_\nu^P \right) X_M \Lambda \end{aligned} \quad (3.26)$$

Donde para las últimas dos igualdades se utilizó el vínculo cuadrático. Finalmente explicitando los índices del campo auxiliar podemos identificar esto como la **identidad de Ricci**

$$[D_\mu, D_\nu] \Lambda_A = -qF_{\mu\nu}^M X_{MA}^B \Lambda_B \quad (3.27)$$

lo cual define de una forma más natural el tensor de esfuerzos. A su vez, aplicando impunemente la métrica sobre 3.27 para subir los índices, obtenemos la versión vectorial de la identidad

$$[D_\mu, D_\nu] \Lambda^A = qF_{\mu\nu}^M X_{MB}^A \Lambda^B \quad (3.28)$$

Una vez propuesto $F_{\mu\nu}^A$ debemos corroborar que realmente tomamos una decisión afortunada y el objeto se comporta de manera covariante con respecto a sus índices. Para ver ello, nos resulta muy útil la identidad de Ricci recién mencionada, en efecto

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu}^A &= 2\partial_{[\mu} \delta A_{\nu]}^A + qX_{BC}^A (\delta A_\mu^B A_\nu^C + A_\mu^B \delta A_\nu^C) \\ &= 2\partial_{[\mu} \delta A_{\nu]}^A + 2qX_{BC}^A A_{[\mu}^B \delta A_{\nu]}^C \\ &= 2D_{[\mu} \delta A_{\nu]}^A \\ &= 2D_{[\mu} D_{\nu]} \xi^A \\ &= [D_\mu, D_\nu] \xi^A \\ &= qF_{\mu\nu}^B X_{BP}^A \xi^P \end{aligned} \quad (3.29)$$



donde se llega finalmente al resultado

$$\delta F^A_{\mu\nu} = -q\xi^M X_{MN}{}^A F^N_{\mu\nu} \quad (3.30)$$

transformación propia de un vector!

Para concluir que el término cinético de los campos de gauge es un invariante ante las nuevas transformaciones locales, notamos que el objeto que contrae los índices libres de $F^A_{\mu\nu} F^{B\mu\nu}$ se comporta de manera covariante por simple construcción, es decir, M_{AB} se comporta como un tensor $\binom{0}{2}$ del grupo completo G_0 y como no tiene derivadas parciales en su estructura, también lo hace ante el subgrupo local G . De esta forma concluimos que el término para los campos de gauge en 2.10 con el nuevo tensor de esfuerzos 3.24 es invariante de gauge.

3.3.2. ∂M

Pasemos ahora a la derivada sobre la matriz de escalares. Dado que M_{AB} es un tensor de dos índices, no es obvio a priori que la transformación que impusimos sobre objetos que transforman en representaciones lineales de G , 3.18, también nos brinde

$$(D_\mu M)' = h^t (D_\mu M) h \quad (3.31)$$

para objetos que transformen según

$$M' = h^t M h \quad (3.32)$$

como es el caso de la matriz de escalares. Veamos que esto es efectivamente así...

[Demostrar esto de alguna forma linda]

... donde felizmente se obtiene la versión infinitesimal de 3.31!

De esta forma, tenemos permiso para covariantizar dicho término de la manera más económica posible, promoviendo las derivadas usuales a covariantes

$$D_\mu M_{AB} = \partial_\mu M_{AB} - qA^C_\mu X_{CA}{}^P M_{PB} - qA^C_\mu X_{CB}{}^P M_{AP} \quad (3.33)$$

De esta forma, por simple contracción de índices, el término cinético para la matriz escalar se comporta invariante ante el gauge.

3.3.3. \mathcal{W}

Pasemos ahora a la generalización del tensor de esfuerzos para la 2-forma. Si bien 2.7 solo tiene índices de $GL(d, \mathbb{R})$, dentro suyo aparece la derivada parcial sobre Λ_A y los problemas no terminan allí ya que el campo de Kalb-Ramond transformaba ante el gauge abeliano introduciendo términos de Green-Schwarz que también inducen objetos covariantes ante G .

[SEGUIR DESDE ACA, NUEVO W, CINEMATICA INVARIANTE Y FINALMENTE POTENCIAL ESCALAR. FIN]