Supergravedad:
Compactificación de Scherk-Schwarz

Tomás Codina

Dado que el sector de Neveu-Schwarz de supergravedad vive en un espacio tiempo de $D = 10$ dimensiones, para hacer contacto con la física observable contemporánea es necesario bajar a $d = 4$ extrayendo información de las dimensiones extra, dicho mecanismo se conoce como **compactificación**. Existen numerosas formas de realizar una compactificación, en nuestro caso particular trataremos el escenario más sencillo de todos conocido como **reducción dimensional de Kaluza Klein**, donde suponemos que las dimensiones extra se encuentran "enrolladas" en un N-Toro. Esto dará lugar a un Ansatz en donde ningún campo depende del espacio interno, obteniendo así una ungauged supergravity como teoría efectiva. Luego, nos proponemos gaugear la teoría, lo que corresponde a promover una simetría global a local, introduciendo derivadas covariantes de la mano del embedding tensor, esto último da lugar a una gauged supergravity.

1. Campos de la teoría efectiva

La reducción dimensional que llevaremos a cabo es el caso más sencillo de **compactificación de Scherk-Schwarz** la cual preserva todas las supersimetrías de la teoría padre y se basa en la idea original de Kaluza-Klein.

Para ello se comienza dividiendo a las $D = 10$ coordenadas x^i, en

$$x^i = (x^\mu, y^m) \tag{1.1}$$

donde las coordenadas $i, j, k, ...$ van de 0 a D y corresponden a la **teoría padre**, $\mu, \nu, \rho, \sigma ... = 1, ..., d$ son las coordenadas de la teoría efectiva de dimensión d, o **espacio externo**, y $m, n, o, p = 1, ..., N$ corresponden al **espacio interno**.
De aquí, surge naturalmente la necesidad de separar los campos originales en componentes siendo para la métrica y 2-forma

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \begin{pmatrix} G_{\mu\nu} & G_{\mu n} \\ G_{m\nu} & G_{mn} \end{pmatrix} \\ B_{ij} &= \begin{pmatrix} B_{\mu\nu} & B_{\mu n} \\ B_{m\nu} & B_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Si bien esta manera de escribir las componentes es la más sencilla, por motivos que quedarán claro luego, resulta conveniente parametrizarlas de una forma distinta explotando los grados de libertad del problema. Dado que G_{ij} tiene $D\frac{(D+1)}{2}$ componentes independientes, podemos reescribirlo en término de d y N

$$D\frac{(D+1)}{2} = d\frac{(d+1)}{2} + N\frac{(N+1)}{2} + dN \tag{1.3}$$

donde el primer y segundo término corresponden a los grados de libertad de un tensor $\binom{0}{2}$ simétrico en el espacio externo e interno respectivamente, mientras que dn lo podemos acomodar en N vectores de la teoría efectiva, estos suelen notarse como $g_{\mu\nu}$, G_{mn} y A^m_ν respectivamente. La misma historia para la 2-forma, donde tendremos un tensor $\binom{0}{2}$ antisimétrico para el espacio externo, $b_{\mu\nu}$, y otro para el interno, B_{mn} y N vectores $V_{m\nu}$. Una posible manera de parametrizar a G_{ij} y B_{ij} utilizando los nuevos campos se escribe como

$$
\begin{aligned}
G_{ij} &= \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + G_{op}A^o{}_\mu A^p{}_\nu & A^p{}_\mu G_{pn} \\ G_{mp}A^p{}_\nu & G_{mn} \end{pmatrix} && \text{(1.4a)} \\
G^{ij} &= \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\nu}A^n{}_\nu \\ -A^m{}_\mu g^{\mu\nu} & G^{mn} + A^m{}_\mu A^n{}_\nu g_{\mu\nu} \end{pmatrix} && \text{(1.4b)} \\
B_{ij} &= \begin{pmatrix} b_{\mu\nu} - A^p{}_{[\mu}V_{p\nu]} + A^p{}_\mu A^q{}_\nu B_{pq} & V_{n\mu} - B_{np}A^p{}_\mu \\ -V_{m\nu} - B_{mp}A^p{}_\nu & B_{mn} \end{pmatrix} && \text{(1.4c)}
\end{aligned}
$$

Para la parametrización de G^{ij} se utilizó un abuso de notación en donde G^{mn} no corresponde a la componente m,n de métrica inversa. Luego, por consistencia con la invertibilidad de la métric $G_{ik}G^{kj} = \delta^i_j$, se necesita que $g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$ y $G_{mp}G^{pn} = \delta^m_n$.

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} &= \delta^\mu_\nu \\
G_{mp}G^{pn} &= \delta^m_n
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Ahora bien, el desdoblamiento de los indices no tiene nada que ver con la dependencia de los nuevos campos sobre las coordenadas, el proceso de reducción dimensional nos da la libertad de decidir dicha dependencia lo que se relaciona con la variedad en la cual se compactifica. En otras palabras todavía debemos especificar la geometría del espacio interno lo que nos lleva a escoger un **Ansatz de reducción**. En nuestro caso particular supondremos que la variedad padre es un producto del espacio externo y un N-Toro

$$
\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_d \otimes T^N = \mathcal{M}_d \otimes \underbrace{S^1 \cdots \otimes S^1}_{N} \tag{1.6}
$$

Para analizar la dependencia en y, tomaremos por simplicidad una sola dirección m_1 y un campo bosónico genérico $\mathcal{B}$. Como vemos de 1.6, la coordenada interna vive en un círculo, lo que nos permite afirmar $0 \leq y^{m_1} \leq 2\pi R_{m_1}$ donde R_{m1} representa el radio del circulo. Luego, al ser un espacio compacto y periódico, podemos desarrollar la dependencia de los campos en coeficientes de Fourier[1]

$$
\mathcal{B}(x, y^{m_1}, y^{m_2}, ..., y^{m_N}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{B}^{(n)}(x, y^{m_2}, ..., y^{m_N}) e^{iny^{m_1}/R_{m_1}} \tag{1.7}
$$

donde los coeficientes del desarrolo $\mathcal{B}^{(n)}$ son infinitos campos conocidos como **torre de estados de Kaluza-Klein**. Resulta ser que dichos modos poseen masas que crecen con potencias de $\frac{n}{R}$, lo que da lugar a estados muy masivos si pensamos que las dimensiones extra poseen tamaños del orden de la escala de Planck. A modo ilustrativo se puede demostrar sencillamente el caso de un campo bosónico escalar no masivo en una dimensión compacta, de él obtenemos

$$
\begin{aligned}
\partial_k\partial^k\phi(x,y) &= \partial_p\partial^p \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x) e^{iny/R} \right) \\
&= \partial_\mu\partial^\mu \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x) e^{iny/R} \right) + \partial_p\partial^p \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x) e^{iny/R} \right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\partial_\mu\partial^\mu\phi^{(n)}(x) + \left(\frac{i^2n^2}{R^2} \right) \phi^{(n)}(x) \right] e^{iny/R} = 0
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

donde por completitud de la base, cada coeficiente debe anularse por separado. Desde el punto de vista de la teoría efectiva, esto nos lleva a infinitas ecuaciones de Klein-Gordon para campos escalares con masas $m^{(n)} = \frac{n}{R}$

$$
\left[\Box - (m^{(n)})^2 \right] \phi^{(n)}(x) = 0 \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.9}
$$

siendo el modo cero el único no masivo.

[1] [Entender esto! $--\ >$ " la dependencia en y de los campos admite un desarrollo en **la base de auto-funciones del operador Laplaciano de la variedad interna"**]

Sencillamente, el argumento puede extenderse al caso N dimensional para campos escalares y utilizando otras herramientas se puede demostrar también para vectores y tensores. Lo relevante de todo esto es que trabajando en el límite de bajas energías en teoría de cuerdas, solo debemos conservar aquellos modos no masivos, lo que corresponde a adoptar un Ansatz en donde ningún campo depende de las coordenadas internas! Ahora claro está porque compactificar en un Toro representa el escenario más sencillo.

El siguiente paso en la construcción de una teoría efectiva es identificar la naturaleza de los nuevos campos. Para ello, la mejor manera es estudiar sus propiedades de transformación ante difeomorfismos y Gauge, las cuales podemos agrupar en

$$\delta G_{ij} = \mathcal{L}_\xi G_{ij} = \xi^k \partial_k G_{ij} + \partial_i \xi^k G_{kj} + \partial_j \xi^k G_{ik} \tag{1.10a}$$

$$\delta B_{ij} = \mathcal{L}_\xi B_{ij} = \xi^k \partial_k B_{ij} + \partial_i \xi^k B_{kj} + \partial_j \xi^k B_{ik} + 2\partial_{[i}\lambda_{j]} \tag{1.10b}$$

$$\delta\phi = \mathcal{L}_\xi \phi = \xi^k \partial_k \phi \tag{1.10c}$$

Luego, desdoblando indices podemos ver las propiedades de transformación heredadas para los campos $G_{mn}, B_{mn}, A^m_{\ \nu}, V_{m\nu}, g_{\mu\nu}$ y $b_{\mu\nu}$. Para los primeros de ellos obtenemos

$$\delta G_{mn} = \xi^\rho \partial_\rho G_{mn} + \xi^p \partial_p G_{mn} + \partial_m \xi^\rho G_{\rho n} + \partial_m \xi^p G_{pn} + \partial_n \xi^\rho G_{m\rho} + \partial_n \xi^p G_{mp}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta G_{mn} &= \xi^\rho \partial_\rho G_{mn} = \mathcal{L}_\xi G_{mn} \\ \delta B_{mn} &= \xi^\rho \partial_\rho B_{mn} = \mathcal{L}_\xi B_{mn} \end{aligned} \qquad (1.11)}$$

donde se utilizó el ansatz en donde la derivada de cualquier campo con respecto a coordenadas internas es cero. De aquí vemos, desde el punto de vista de la teoría efectiva, G_{mn} y B_{mn} son 36 campos escales[2]! Con esto se sigue trivialmente que G^{mn} también transforma como tal.
Luego, podemos invertir la coordenadas $G_{p\nu}$ para obtener

$$A^m_{\ \nu} = G^{mp} G_{p\nu} \tag{1.12}$$

de donde podemos deducir la regla de transformación

$$\begin{aligned} \delta A^m_{\ \nu} &= \delta G^{mp} G_{p\nu} + G^{mp} \delta G_{p\nu} = \mathcal{L}_\xi G^{mp} G_{p\nu} + G^{mp} \left(\xi^\rho \partial_\rho G_{p\nu} + \partial_\nu \xi^\rho G_{p\rho} + \partial_\nu \xi^o G_{po} \right) \\ &= \mathcal{L}_\xi G^{mp} G_{p\nu} + G^{mp} \mathcal{L}_\xi G_{p\nu} + \partial_\nu \xi^o G^{mp} G_{po} \end{aligned}$$

$$\boxed{\delta A^m_{\ \nu} = \mathcal{L}_\xi A^m_{\ \nu} + \partial_\nu \xi^m \qquad (1.13)}$$

habiendo utilizado 1.5 y la regla de Leibniz para la última igualdad. Esto nos dice que desde el punto de vista de la teoría efectiva, nuestro campo A se comporta como un vector de Gauge con parámetro ξ^m!
Luego, invirtiendo la coordenada $B_{\mu n}$ de 1.4c e introduciendo las reglas de transformación de B_{mn} y A, 1.11 y 1.13, podemos obtener

$$\begin{aligned} \delta V_{n\nu} &= \delta B_{\mu n} + \delta\left(B_{np} A^p_\mu \right) \\ &= \xi^\rho \partial_\rho B_{\mu n} + \partial_\mu \xi^\rho B_{\rho n} + \partial_\mu \xi^p B_{pn} + \partial_\mu \lambda_n + \mathcal{L}_\xi \left(B_{np} A^p_\mu \right) + B_{np} \partial_\mu \xi^p \\ &= \mathcal{L}_\xi \left(B_{\mu n} + B_{np} A^p_\mu \right) + \partial_\mu \xi^p \left(B_{pn} + B_{np} \right) + \partial_\mu \lambda_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\delta V_{n\mu} = \mathcal{L}_\xi V_{n\mu} + \partial_\mu \lambda_n \qquad (1.14)}$$

Que nuevamente corresponde a un vector de Gauge con parámetro λ_n.
Las ecuaciones 1.13 y 1.14 corresponden a las transformaciones para vectores de Gauge **Abelianos**, caracterizadas por un grupo de Lie $U \equiv \underbrace{U(1) \otimes U(1) \otimes \cdots \otimes U(1)}_{2N} \equiv U(1)^{2N}$ donde ξ^n y λ_n juegan

[2]El número 36 viene de la suma de los $\frac{6(6+1)}{2}$ G_{mn} y los $\frac{6(6-1)}{2}$ B_{mn}

el papel de coeficientes en el álgebra de dicho grupo. La aparición de este grupo abeliano no es un dato menor, el mismo se encuentra relacionado con las simetrías del espacio interno en donde se realizó la compactificación. En nuestro caso, el N-toro es una variedad plana cuyos vectores de Killing pueden tomarse simplemente como el conjunto ortogonal de vectores $\{\partial_m\}\ \ m = 1, ..., N$ que generan un álgebra con constantes de estructura ${f_{mn}}^o = 0$ para todos los conmutadores, de esto se sigue que el grupo de isometrías es ni más ni menos que el grupo abeliano $U(1)^N$!. Las teorías de supergravedad con vectores de gauge abelianos reciben el nombre de **Ungauged Supergravity**. Puede demostrarse que usualmente el grupo se isometrías del espacio interno aparecerá dentro del grupo de gauge de la teoría efectiva. Este resultado lleva a la conclusión de que así como compactificar en espacios planos nos brinda una teoría ungauged, podemos hacerlo en otras variedades con geometría no plana, lo que llevará a un gauge no-abeliano y por consecuente una **gauged supergravity**. Este mecanismo no es el único para obtener simetrías de gauge no-abelianas, existe la idea de gaugear la acción ungauged de la teoría efectiva lo que resulta en una estructura de gauge más general que el obtenido por el método anterior. Dicho mecanismo se explica y utiliza en la sección 3.

Volviendo a donde nos habíamos quedado, estudiemos la transformación de $g_{\mu\nu}$, viendo 1.4a se sigue que

$$\begin{aligned}\delta g_{\mu\nu} &= \delta G_{\mu\nu} - \delta\left(G_{op}A^o_\mu A^p_\nu\right)\\ &= \mathcal{L}_\xi G_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi^p G_{p\nu} + \partial_\nu\xi^p G_{\mu p} - \mathcal{L}_\xi\left(G_{op}A^o_\mu A^p_\nu\right) - \partial_\mu\xi^o G_{op}A^p_\nu - \partial_\nu\xi^p G_{op}A^o_\mu\\ &= \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi^p G_{po}A^o_\nu + \partial_\nu\xi^p G_{op}A^o_\mu - \partial_\mu\xi^o G_{op}A^p_\nu - \partial_\nu\xi^p G_{op}A^o_\mu\end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\boxed{\delta g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}} \tag{1.16}$$

Lo que nos lleva a interpretar a $g_{\mu\nu}$ como un objeto tensorial $\binom{0}{2}$ simétrico, que no es otra cosa que la métrica en la teoría efectiva!.
Por último, la transformación de $b_{\mu\nu}$ la hacemos por partes para mayor prolijidad. En primer lugar, de 1.4c vemos que

$$b_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + {A^p}_{[\mu}V_{p\nu]} - {A^p}_\mu {A^q}_\nu B_{pq} \tag{1.17}$$

donde al transformar las componentes obtenemos

$$\begin{aligned}\delta B_{\mu\nu} &= \mathcal{L}_\xi B_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi^p B_{p\nu} + \partial_\nu\xi^p B_{p\mu} + \partial_\mu\lambda_\nu - \partial_\nu\lambda_\mu\\ &= \mathcal{L}_\xi B_{\mu\nu} - 2\partial_{[\mu}\xi^p V_{\nu]p} + 2B_{po}\partial_{[\mu}\xi^p {A_{\nu]}}^o + 2\partial_{[\mu}\lambda_{\nu]}\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\delta\left({A^p}_{[\mu}V_{\nu]p}\right) = \mathcal{L}_\xi\left({A^p}_{[\mu}V_{\nu]p}\right) - \partial_{[\mu}\lambda_p {A_{\nu]}}^p + \partial_{[\mu}\xi^p V_{\nu]p} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}\delta\left(A^o_\mu A^p_\nu B_{op}\right) &= \mathcal{L}_\xi\left(A^o_\mu A^p_\nu B_{op}\right) + B_{op}\left(\partial_\nu\xi^p {A^o}_\mu + \partial_\mu\xi^o {A^p}_\nu\right)\\ &= \mathcal{L}_\xi\left(A^o_\mu A^p_\nu B_{op}\right) + B_{po}\left(\partial_\mu\xi^p {A^o}_\nu - \partial_\nu\xi^p {A^o}_\nu\right)\\ &= \mathcal{L}_\xi\left(A^o_\mu A^p_\nu B_{op}\right) + 2B_{po}\partial_{[\mu}\xi^p {A_{\nu]}}^o\end{aligned} \tag{1.20}$$

finalmente, itroduciendo 1.18, 1.19 y 1.20 en la variación de 1.17 vemos que

$$\delta b_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi b_{\mu\nu} + 2\partial_{[\mu}\lambda_{\nu]} - \partial_{[\mu}\xi^a V_{\nu]a} - \partial_{[\mu}\lambda_a {A_{\nu]}}^a$$

$$\boxed{\delta b_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi b_{\mu\nu} + 2\partial_{[\mu}\lambda_{\nu]} - \partial_{[\mu}\Lambda_A {A_{\nu]}}^A} \tag{1.21}$$

en donde definimos dos objetos que serán explicados en mayor detalle en la siguiente sección

$$\begin{aligned}\Lambda_A &\equiv (\xi^a, \lambda_a)\\ A^A_{\ \mu} &\equiv \left(V_{a\mu}, A^a_{\ \mu}\right)\end{aligned} \tag{1.22}$$

Concentrandonos en 1.21, si no fuese por el último término extra, $b_{\mu\nu}$ se correspondería con un tensor $\binom{0}{2}$ antisimetrico con transformación de Gauge parametrizada por λ_μ lo que podríamos identificar con el campo de Kalb-Ramond de la teoría efectiva!. Los términos extra se conocen como **Términos de Green-Schwarz** y deberán tenerse en cuenta en la siguiente sección al momento de construir invariantes de gauge en la acción efectiva.

2. Acción de Ungauged Supergravity

Una vez identificados los campos del espacio externo, el siguiente y último paso en la reducción dimensional consiste en obtener la acción de la teoría efectiva de la cual se desprenderán las ecuaciones de movimiento correspondientes y con ello toda la física involucrada. Dado que compactificamos en una variedad con curvatura nula, la transformación de gauge para los vectores corresponde a un grupo abeliano y esto define una ungauged supergravity como teoría efectiva.
Para lograr esto, debemos introducir el ansatz propuesto en la acción de supergravedad

$$S = \int \mathrm{dx^D}\sqrt{-G}\; e^{-2\phi}\left[R + 4\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\alpha}H^{\mu\nu\alpha}\right] \tag{2.1}$$

descomponiendo todos los términos en indices griegos y los propios del espacio interno. Observando sin demasiado detenimiento la definición del escalar de Ricci, el término del tensor de esfuerzos para la 2-forma y las parametrizaciones propuestas en 1.4a, 1.4b y 1.4c, se ve claramente que el desdoble de indices no es para nada trivial y la cantidad de términos finales en la teoría efectiva crece de manera significativa con cada reemplazo. De todas formas, veremos en instantes que muchos de estos términos se cancelan entre sí y otros pueden agruparse en estructuras que obedecen leyes de transformación con respecto a un dado grupo global.

Antes de comenzar con los reemplazos es recomendable saber de antemano los términos que esperamos encontrar una vez compactificada la teoría, esto simplifica enormemente el trabajo.

Como mencionamos anteriormente la teoría padre de la cual partimos, corresponde al sector bosónico de supergravedad con D=10 y $\mathcal{N}=1$ supersimetrías (16 supercargas). Al utilizar la reducción dimensional de Kaluza-Klein preservamos el número de supercargas por lo que en $d=4$ obtenemos una teoría con $\mathcal{N}=4$ supersimetrias, la mitad del máximo posible, lo que lleva el nombre de **Half-maximal ungauged supergravity**. Este tipo de teorías son muy rígidas debido al gran número de supersimetrías, por ello, la teoría a la cual llegamos resulta ser única siempre y cuando se especifique los campos presentes en la acción padre. Puede demostrarse que el caso tratado no es el más general, supersimetría permitiría introducir un número arbitrario n de vectores en 2.1, lo que llevaría a una teoría efectiva caracterizada por ese número de vectores adicionales. Para nuestro caso particular ($d=4, \mathcal{N}=4$) con 2.1, vimos que los campos involucrados consisten de una métrica $g_{\mu\nu}$, una 2-forma [3] $b_{\mu\nu}$, 12 vectores[4] $A^A_{\ \mu}$ (ver 1.22) y 37 escalares G_{mn}, B_{mn} y ϕ. Para la métrica, la propuesta más sencilla de introducir un término cinético en la nueva acción es mediante el escalar de curvatura R. Por otro lado, al igual que en otras teorías de gauge, esperamos que los campos vectoriales aparezcan en la acción por medio de tensores de esfuerzo en estructuras de Yang-Mills, las cuales coinciden con la acción de Maxwell para el caso abeliano $\mathcal{F}_{a\mu\nu}\mathcal{F}_b^{\ \mu\nu}$ y $\mathcal{F}^a_{\ \mu\nu}\mathcal{F}^{b\mu\nu}$ para V y A respectivamente o de forma más compacta $\mathcal{F}^{A\mu\nu}\mathcal{F}^B_{\ \mu\nu}$ con

$$\mathcal{F}^A_{\ \mu\nu} \equiv 2\partial_{[\mu}A^A_{\ \nu]} \tag{2.2}$$

Donde al dejar los indices A y B sin contraer entre sí, estamos proponiendo un caso más general en donde aparecerán términos cuadráticos en derivadas de A, otros cuadráticos en derivadas de

[3] En estas teorías de supergravedad existe una dualidad al nivel de las ecuaciones de movimiento (simetría on-shell) que nos permite intercambiar p-formas y (d-p-2)-formas sin alterar la física del problema. En particular, para d=4, obtenemos que el campo de Kalb-Ramond puede dualizarse a un escalar utilizando el operador de Hodge ($\star$), mientras que los vectores son tensores auto-duales. Esto nos permitiría dejar a la teoría solo con la métrica, vectores y escalares!

[4] En el caso más general se tienen $12+n$, donde los mismos 12 vienen de compactificar R y H^2 en 2.1, mientras que n viene de la cantidad de vectores adicionales que se encuentran presentes de entrada en la acción padre

V y unos terceros mixtos. Dicho esto, es necesario contraer estos términos libres con algún objeto escalar de Lorentz (debido a que no existen indices griegos con los cuales contraer) simétrico en A, B, que no tiene porqué ser constante, una posibilidad es introducir el objeto $M_{AB}(\phi, G_{mn}, B_{mn})$ donde la dependencia en las coordenadas vendrá dada por los escalares ya presentes en la teoría. Una posible parametrización sería

$$M_{AB} \equiv \begin{pmatrix} G^{ab} & -G^{ac}B_{cb} \\ B_{ac}G^{cb} & G_{ab} - B_{ac}G^{cd}B_{db} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Luego, dado que los grados de libertad de los 36 escalares presentes ahora se encuentran dentro de un único objeto simétrica de 12×12 [5] Los términos cinéticos de los escalares vendrá dado, a menos de un factor multiplicativo, por

$$D_\mu M_{AB} D^\mu M^{AB} = \partial_\mu M_{AB} \partial^\mu M^{AB} \tag{2.4}$$

Esto se ve motivado por un hecho bien sabido en teorías de supergravedad, en las cuales los escalares siempre se ubican en modelos sigma no lineales

$$g_{ab}(\phi)\partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^b \tag{2.5}$$

donde los campos escalares $\phi^a(x)$ pueden identificarse como coordenadas de una variedad Riemanniana no compacta denominada **variedad escalar**, cuya métrica positiva definida viene dada por $g_{ab}(\phi)$!

Por último, para la 2-forma esperamos recuperar un término cinético correspondiente a su tensor de esfuerzos pero necesariamente modificado por los nuevos términos de Green-Schwarz que aparecen en su transformación ante gauge 1.21. Esto se debe a que ahora la transformación para la 2-forma no se escribe como una derivada exterior de una 1-forma, por lo que al escribir el tensor de esfuerzos como la derivada exterior de $b_{\mu\nu}$, la nilpotencia de la derivada exterior ya no será de ayuda. Por simple inspección, puede verificarse que agregar un término de la forma $-3\partial_{[\mu} A^A_{\ \nu} A_{\rho]A}$ al tensor de esfuerzos efectivo garantiza la invarianza de gauge. Con esta discusión, esperamos encontrar un término cinético para $b_{\mu\nu}$ de la forma

$$-\frac{1}{12}\mathcal{W}_{\mu\nu\rho}\mathcal{W}^{\mu\nu\rho} \tag{2.6}$$

con

$$\mathcal{W}_{\mu\nu\rho} \equiv 3\partial_{[\mu} b_{\nu\rho]} - 3\partial_{[\mu} A^A_{\ \nu} A_{\rho]A} \tag{2.7}$$

De esta forma, agrupando todos los objetos e introduciendo los factores multiplicativos que sabemos que quedarán al final del día (esto solo es posible luego de llevar a cabo la compactificación), podemos construir la acción efectiva de la forma

$$S_{eff} = \int \mathrm{dx^d} \sqrt{-g}\, e^{-2\phi} \left[R + 4\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{12}\mathcal{W}_{\mu\nu\rho}\mathcal{W}^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4} M_{AB}\mathcal{F}^{A\mu\nu}\mathcal{F}^B_{\ \mu\nu} + \frac{1}{8}\partial_\mu M_{AB}\partial^\mu M^{AB} \right] \tag{2.8}$$

En esta acción, los indices dobles $A, B, ...$ van de 1 a 2N y se suben y bajan con la métrica.

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^a_{\ b} \\ \delta_a^{\ b} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

la cual no es otra que la métrica invariante del grupo $O(N, N)$, de hecho, al estar todos estos indices contraídos, es fácil ver que la teoría completa goza de una simetría global ante el grupo $G = O(N, N)$!. Esto nos da una idea del porque de las estructuras 1.22, 2.2, 2.3 y 2.7 involucrando objetos covariantes de $O(N, N)$. Al escoger esta forma de escribir la acción simplemente hicimos manifiesta una simetría global de la teoría efectiva que, como veremos, no es para nada obvia ni inmediata al ver los términos de la compactificación. Estas simetrías globales que no pueden deducirse de la teoría padre y solo se manifiestan una vez realizada la compactificación llevan el nombre de **simetrías escondidas**.

En 2.8, los vectores son ubicados en representaciones lineales del grupo G mientras que los escalares G_{mn} y B_{mn} los agrupamos en un objeto que transforma en la bi-fundamental del grupo

[5] [**Entender conteo de grados de libertad**]

y es invariante ante un subgrupo particular de G conocido como **subgrupo máximo compacto**, $H = O(N) \times O(N)$, de esta forma se dice que M_{AB} parametriza el grupo cociente G/H.

- **¿Porque en el tensor de esfuerzos aparecen derivadas parciales y no covariantes por la presencia de la interacción gravitatoria?.**

Luego de haber construido la acción que esperamos obtener, resulta conveniente desglosar esta última acción para ver que esperamos encontrar en el camino. Con respecto al término cinético para los escalares, podemos ver

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8}\partial_\mu M_{AB}\partial^\mu M^{AB} &= \frac{1}{8}\left(\partial_\mu M^{ab}\partial^\mu M_{ab} + \partial_\mu M^a{}_b\partial^\mu M_a{}^b + \partial_\mu M_a{}^b\partial^\mu M^a{}_b + \partial_\mu M_{ab}\partial^\mu M^{ab}\right) \\
&= \frac{1}{4}\partial_\mu M^{ab}\partial^\mu M_{ab} + \frac{1}{4}\partial_\mu M^a{}_b\partial^\mu M_a{}^b \\
&= \frac{1}{4}\partial_\mu G^{ab}\partial^\mu G_{ab} - \frac{1}{4}\partial_\mu G^{ab}\partial^\mu\left(B_{ac}G^{cd}B_{db}\right) - \frac{1}{4}\partial_\mu\left(G^{ac}B_{cb}\right)\partial^\mu\left(B_{ac}G^{cb}\right) \\
&= \frac{1}{4}\partial_\mu G^{ab}\partial^\mu G_{ab} - \frac{1}{4}G^{ab}G^{cd}\partial_\mu B_{ad}\partial^\mu B_{bc}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

donde se introdujo la definición 2.3 y para la última igualdad se aplico Leibniz y distribución. Por otro lado, el término correspondiente al tensor de esfuerzos de los nuevos campos de gauge viene dado por

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}M_{AB}\mathcal{F}^{A\mu\nu}\mathcal{F}^B{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}M^{ab}\mathcal{F}_a{}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{b\mu\nu} &- \frac{1}{2}M^a{}_b\mathcal{F}_a{}^{\mu\nu}\mathcal{F}^b{}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}M_{ab}\mathcal{F}^{a\mu\nu}\mathcal{F}^b{}_{\mu\nu} \\
= -\,G^{ab}\ &\partial_{[\mu}V_{\nu]a}\partial_{[\rho}V_{\sigma]b}\ g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \\
&+ 2G^{ac}B_{cb}\ \partial_{[\mu}V_{\nu]a}\partial_{[\rho}A_{\sigma]}^{\ b}\ g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \\
&- G_{ab}\ \partial_{[\mu}A_{\nu]}^{\ a}\partial_{[\rho}A_{\sigma]}^{\ b}\ g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + B_{ac}G^{cd}B_{cb}\ \partial_{[\mu}A_{\nu]}^{\ b}\partial_{[\rho}A_{\sigma]}^{\ b}\ g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Finalmente, el escalar de curvatura y el tensor de esfuerzos para la 2-forma lo dejaremos como está por motivos que quedarán claro más adelante.

Con estos términos en mente, comencemos introduciendo las parametrizaciones 1.4a, 1.4b y 1.4c en 2.1. En primer lugar, observamos que la medida puede ser reescrita como

$$\sqrt{-G} = \sqrt{-g}\sqrt{-det\{G_{mn}\}} \tag{2.12}$$

[**Llegar al resultado anterior expresando la medida en forma matricial y luego introducirlo en un nuevo dilatón redefiniendo este último. Esto me genera nuevos términos en el lagrangiano provenientes del término cinético del dilatón, obtenerlos.**]

Luego del determinante, podemos seguir con el escalar de curvatura, el cual al desdoblar indices obtenemos

$$\begin{aligned}
R = G^{\mu\nu}R^\rho{}_{\mu\rho\nu} + G^{\mu m}R^\nu{}_{\mu\nu m} + G^{\mu\nu}R^m{}_{\mu m\nu} + G^{\mu m}R^n{}_{\mu nm} + G^{\mu m}R^\nu{}_{m\nu\mu} \\
+ G^{mn}R^\mu{}_{m\mu n} + G^{\mu m}R^n{}_{mn\mu} + G^{mn}R^o{}_{mon}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Y utilizando Cadabra obtenemos

$$
\begin{aligned}
R = & -\frac{1}{2}\partial_\mu g_{\rho\sigma}\partial_\nu g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\partial_\mu g^{\rho\sigma}\partial_\nu g_{\rho\sigma}g^{\mu\nu} + \partial_\mu g^{\mu\rho}\partial_\nu g_{\rho\sigma}g^{\nu\sigma} - \partial_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + \partial_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \\
& + \frac{1}{2}\partial_\mu g_{\rho\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\alpha}g^{\mu\rho}g^{\sigma\nu}g^{\lambda\alpha} - \frac{1}{4}\partial_\mu g_{\rho\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\alpha}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}g^{\lambda\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\mu g_{\rho\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\alpha}g^{\mu\lambda}g^{\rho\nu}g^{\sigma\alpha} + \frac{1}{4}\partial_\mu g_{\rho\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\alpha}g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}g^{\sigma\alpha} \\
& - \frac{1}{2}G^{mn}\partial_\mu G_{mn}\partial_\nu g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu G_{mn}\partial_\nu G^{mn}g^{\mu\nu} - \partial_{\mu\nu}G_{mn}G^{mn}g^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G^{mn}G^{op}\partial_\mu G_{mn}\partial_\nu G_{op}g^{\mu\nu} \\
& + \frac{1}{4}G^{mn}G^{op}\partial_\mu G_{mo}\partial_\nu G_{np}g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}G^{mn}\partial_\mu G_{mn}\partial_\nu g_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - \frac{1}{2}G^{mn}\partial_\mu G_{mn}\partial_\nu g_{\rho\sigma}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} \\
& + G_{mn}A^m{}_\mu\partial_{\rho\sigma}A^n{}_\nu g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - G_{mn}A^m{}_\mu\partial_{\rho\sigma}A^n{}_\nu g^{\mu\rho}g^{\sigma\nu} + \frac{1}{2}G_{mn}\partial_\rho A^m{}_\mu\partial_\sigma A^n{}_\nu g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma} \\
& - \frac{1}{2}G_{mn}\partial_\rho A^m{}_\mu\partial_\sigma A^n{}_\nu g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu} + G_{mn}\partial_{\rho\sigma}A^m{}_\mu A^n{}_\nu g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu} - G_{mn}\partial_{\rho\sigma}A^m{}_\mu A^n{}_\nu g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

donde los términos en negro se corresponden con la distribución completa del Ricci para la teoría efectiva, $\mathcal{R}$! Luego, trabajando la expresión sobrante, podemos comenzar con aquellos que no poseen campos de Gauge (rojos), en los cuales intercambiando derivadas y demás, se obtiene

$$
R = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}G^{mn}\partial_\mu G_{mn}g^{\mu\nu}\right) - \frac{1}{4}G^{mn}\partial_\mu G_{mn}G^{op}\partial_\mu G_{op} + \frac{1}{4}\partial_\mu G_{mn}\partial^\mu G^{mn} \tag{2.15}
$$

donde el último término es uno de los tantos que estabamos buscando, correspondiente a 2.10. Luego, fijándonos en los términos azules de 2.14, vemos que algunos de ellos se cancelan entre si y nos queda simplemente

$$
R = -G_{ab}\,\partial_{[\mu}A^a_{\nu]}\partial_{[\rho}A^b_{\sigma]}\,g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \tag{2.16}
$$

donde vemos que se recupera uno de los términos en 2.11. En definitiva

$$
R = \mathcal{R} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}G^{mn}\partial_\mu G_{mn}g^{\mu\nu}\right) - \frac{1}{4}G^{mn}\partial_\mu G_{mn}G^{op}\partial_\mu G_{op} + \frac{1}{4}\partial_\mu G_{mn}\partial^\mu G^{mn} - G_{ab}\,\partial_{[\mu}A^a_{\nu]}\partial_{[\rho}A^b_{\sigma]}\,g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \tag{2.17}
$$

Para el tensor de esfuerzos de la 2-forma, la situación requiere un poco más de trabajo. Para ello, la estrategia será identificar de donde pueden venir los términos que necesitamos para completar nuestros objetos covariantes de $O(N,N)$ y luego verificar que el resto se cancela entre si. Para ello, nuevamente comenzamos desdoblando los indices en $H_{ijk}H^{ijk}$ y agrupando aquellos que sean iguales por permutaciones de sus indices con lo que obtenemos

$$
-\frac{1}{12}H_{ijk}H^{ijk} = -\frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4}H_{\mu\nu n}H^{\mu\nu n} - \frac{1}{4}H_{\mu mn}H^{\mu mn} - \frac{1}{12}H_{mno}H^{mno} \tag{2.18}
$$

donde el último término se anula por la definición de H y la hipótesis de no dependencia sobre coordenadas internas. Concentrandonos por un momento en el primer término, puede introducirse la parametrización 1.4c y obtener

$$
\begin{aligned}
H_{\mu\nu\rho} &= 3\partial_{[\mu}b_{\nu\rho]} - 3\partial_{[\mu}\left(A^p{}_\nu V_{\rho]p}\right) + 3\partial_{[\mu}\left(A^o{}_\nu A^p{}_{\nu]}B_{op}\right) \\
&= W_{\mu\nu\rho} - 6\partial_{[\mu}A^p{}_\nu V_{\rho]p} + 3\partial_{[\mu}\left(A^o{}_\nu A^p{}_{\nu]}B_{op}\right)
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

de donde vemos que $H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}$ recupera directamente el término de tensor de esfuerzos en la teoría efectiva con algunos términos extra, sin la necesidad de tener que desglosar todo e identificar cada término por separado. De esta forma, podemos reemplazar la definición de H, la parametrización de B_{ij}, doblar todos los indices, distribuir, etc y ver que se recuperan los términos de 2.10 de 2.11. Sin embargo, el resto no se anula como esperabamos, sino que obtenemos

$$
\begin{aligned}
H_{resto} = &\partial_\rho b_{\lambda\alpha}\left(g^{\mu\lambda}g^{\sigma\alpha}g^{\nu\rho}A^m{}_\mu\partial_\sigma V_{m\nu} - g^{\mu\lambda}g^{\sigma\rho}g^{\nu\alpha}A^m_\mu\partial_\sigma V_{m\nu} + g^{\mu\rho}g^{\sigma\lambda}g^{\nu\alpha}A^m{}_\mu\partial_\sigma V_{m\nu}\right.\\
&\left.+g^{\sigma\lambda}g^{\mu\alpha}g^{\nu\rho}\partial_\sigma A^m_\mu V_{m\nu} - g^{\sigma\lambda}g^{\mu\rho}g^{\nu\alpha}\partial_\sigma A^m_\mu V_{m\nu} + g^{\sigma\rho}g^{\mu\lambda}g^{\nu\alpha}\partial_\sigma A^m_\mu V_{m\nu}\right)\\
&-\frac{1}{2}g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}G^{op}B_{on}A^m{}_\mu\partial_\rho B_{pm}\partial_\sigma A^n{}_\nu + \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu}G^{op}B_{on}A^m{}_\mu\partial_\rho B_{pm}\partial_\sigma A^n{}_\nu\\
&+\frac{1}{2}g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}G^{op}B_{pn}A^m{}_\mu\partial_\rho B_{om}\partial_\sigma A^n{}_\nu - \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu}G^{op}B_{pn}A^m{}_\mu\partial_\rho B_{om}\partial_\sigma A^n{}_\nu\\
&-\frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\partial_\lambda B_{mn}A^m{}_\mu A^n{}_\nu A^o{}_\rho B_{op}\partial_\alpha A^p{}_\sigma + g^{\lambda\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\alpha}\partial_\lambda B_{mn}A^m{}_\mu A^n{}_\nu A^o{}_\rho B_{op}\partial_\alpha A^p{}_\sigma\\
&+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}g^{\rho\sigma}A^m{}_\mu A^n{}_\nu B_{mp}\partial_\lambda B_{no}A^o{}_\rho\partial_\alpha A^p{}_\sigma - g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}g^{\rho\alpha}A^m{}_\mu A^n{}_\nu B_{mp}\partial_\lambda B_{no}A^o{}_\rho\partial_\alpha A^p{}_\sigma
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Donde los términos en rojo se anulan simplemente redefiniendo $p \rightleftarrows o$, mientras que los azules se suman entre sí para obtener

$$
H = A^m{}_\mu A^n{}_\nu A^o{}_\rho B_{mp}\partial_\lambda B_{no}\partial_\alpha A^p{}_\sigma\left(g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}g^{\rho\sigma} - 2g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}g^{\rho\alpha}\right) \tag{2.21}
$$

Por otro lado, los términos en negro se pueden reescribir en término de los vectores 1.22 observando, por ejemplo, que el primer y quinto término puede agruparse en la siguiente estructura

$$
\begin{aligned}
&\partial_\rho b_{\lambda\alpha}\left(g^{\mu\lambda}g^{\sigma\alpha}g^{\nu\rho}\partial_\sigma V_{m\nu}A^m{}_\mu - g^{\sigma\lambda}g^{\mu\rho}g^{\nu\alpha}\partial_\sigma A^m_\mu V_{m\nu}\right)\\
&\partial_\rho b_{\lambda\alpha}\left(g^{\mu\lambda}g^{\sigma\alpha}g^{\nu\rho}\partial_\sigma V_{m\nu}A^m{}_\mu - g^{\sigma\lambda}g^{\nu\rho}g^{\mu\alpha}\partial_\sigma A^m_\nu V_{m\mu}\right)\\
&\partial_\rho b_{\lambda\alpha}\left(g^{\mu\lambda}g^{\sigma\alpha}g^{\nu\rho}\partial_\sigma V_{m\nu}A^m{}_\mu + g^{\sigma\alpha}g^{\nu\rho}g^{\mu\lambda}\partial_\sigma A^m_\nu V_{m\mu}\right)\\
&\partial_\rho b_{\lambda\alpha}g^{\mu\lambda}g^{\sigma\alpha}g^{\nu\rho}\left(\partial_\sigma V_{m\nu}A^m{}_\mu + \partial_\sigma A^m_\nu V_{m\mu}\right)\\
&\partial_\rho b_{\lambda\alpha}g^{\mu\lambda}g^{\sigma\alpha}g^{\nu\rho}\partial_\sigma A^M_\nu A_{M\mu}
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

del mismo modo se pueden agrupar el tecero con el cuarto, simplemento intercambiando $\mu \rightleftarrows \nu$ y obtener

$$
\partial_\rho b_{\lambda\alpha}g^{\mu\rho}g^{\sigma\lambda}g^{\nu\alpha}\partial_\sigma A^M_\nu A_{M\mu} \tag{2.23}
$$

Por último, el segundo con el sexto se agrupan en

$$
-\partial_\rho b_{\lambda\alpha}g^{\mu\lambda}g^{\sigma\rho}g^{\nu\alpha}\partial_\sigma A^M_\nu A_{M\mu} \tag{2.24}
$$

juntando todo esto, el resto para la compactificación de H^2 nos queda

$$
\begin{aligned}
H_{resto} = &\partial_\rho b_{\lambda\alpha}\partial_\sigma A^M_\nu A_{M\mu}\left(g^{\mu\lambda}g^{\sigma\alpha}g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho}g^{\sigma\lambda}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\lambda}g^{\sigma\rho}g^{\nu\alpha}\right)\\
&+A^m{}_\mu A^n{}_\nu A^o{}_\rho B_{mp}\partial_\lambda B_{no}\partial_\alpha A^p{}_\sigma\left(g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}g^{\rho\sigma} - 2g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}g^{\rho\alpha}\right)
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

lo cual seguramente se puede reescribir de una mejor forma.

De esta forma, solo resta agrupar todos estos términos y observar que la acción efectiva toma la forma de 2.8 más unos términos extra

$$
\begin{aligned}
S_{resto} = \int \mathrm{d}^d x\sqrt{-g}e^{-2\phi}\Big\{&\frac{-1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}G^{mn}\partial_\mu G_{mn}g^{\mu\nu}\right) - \frac{1}{4}G^{mn}\partial_\mu G_{mn}G^{op}\partial_\mu G_{op}\\
&+\partial_\rho b_{\lambda\alpha}\partial_\sigma A^M_\nu A_{M\mu}\left(g^{\mu\lambda}g^{\sigma\alpha}g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho}g^{\sigma\lambda}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\lambda}g^{\sigma\rho}g^{\nu\alpha}\right)\\
&+A^m{}_\mu A^n{}_\nu A^o{}_\rho B_{mp}\partial_\lambda B_{no}\partial_\alpha A^p{}_\sigma\left(g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}g^{\rho\sigma} - 2g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}g^{\rho\alpha}\right)\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

3. Gauge Supergravity

Aunque la compactificación en un toro resulta ser el escenario más sencillo, lamentablemente las teorías ungauged supergravity poseen diversos problemas fenomenológicos desde el comienzo que hacen necesario "mejorarla" de algún modo. Entre ellos se encuentra la ausencia de un potencial escalar: esto lleva a un estado de vacío completamente degenerado por lo que resulta imposible otorgarle masa a las partículas por un mecanismo de ruptura espontánea de simetría. A su vez

esto no permite generar una constante cosmologica, lo que contradice experimentos actuales en donde se observa una constante muy pequeña positiva que caracteriza un universo de De Sitter. Otro problema fenomenológico que se encuentra a la vista es la aparición de una simetría de Gauge abeliana, en lugar de estructuras no conmutativas propias del modelo estándar.
La idea de mejorar la teoría viene de la mano de los **Gaugings**. Por un lado se sabe que estos objetos son las únicas deformaciones posibles que se le pueden hacer a las ungauged con la condición de preservar supersimetría. A su vez, como ya hemos mencionado, estas teorías ungauged son muy rígidas por tener un gran número de supersimetrías, lo que las convierte en únicas siempre y cuando se especifiquen los campos presentes. Por ejemplo, para las maximal supergravities en $d < 10$ existe una única ungauged, mientras que para las half-maximal supergravities debe especificarse el número de multipletes de vectores. Estos dos factores nos permiten afirmar que cualquier compactificación en una variedad que preserve supersimetría, por más complicada que sea, da lugar a una deformación de la ungauged que puede identificarse con un gauging particular!
Cuando hablamos de gaugear la teoría nos referimos a promover un subgrupo G del grupo de simetría global de la teoría ungauged G_0, a una simetría local. Si bien esto puede parecer un poco forzado o rebuscado, la historia nos demuestra que grandes resultados se obtienen de dicho mecanismo ya que la idea no es para nada propia de supergravedad, sino que se remonta a las métodos originales del modelo estándar para introducir las interacciones fundamentales en el lagrangiano de Dirac! Repasemos brevemente a modo de motivación la teoría de Yang-Mills.

3.1. Repaso de Yang-Mills

¿Es innecesaria esta sección?

3.2. El embedding tensor

Para gaugear la teoría, comenzamos con el grupo de simetrías global G_0 con generadores del álgebra $\mathfrak{g}_0$, $t_\alpha \quad \alpha = 1, ..., Dim(G_0)$ que ciertamente obedecen una regla de conmutación

$$[t_\alpha, t_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^{\gamma} t_\gamma \tag{3.1}$$

donde las constantes de estructura, $f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ son distintas de cero, por lo que definen un grupo no abeliano. En nuestro caso particular en half-maximal $d = 4$, el grupo de simetrías global se corresponde con $G_0 = O(6,6)$ que consta de aquellos tensores que dejan invariante la métrica 2.9. La invarianza de la acción puede verse facilmente de 2.8, donde todos los indices de $O(6,6)$ se encuentran contraídos con la métrica. Ahora bien, todos estos términos incluyen derivadas las cuales no actúan sobre los objetos de G_0 global. La situación es distinta si queremos tomar un subgrupo G e introducirle dependencia en las coordenadas a los parámetros del álgebra. Para preservar dicha simetría es necesario introducir objetos que trasformen de manera covariante ante estos grupos, la famosa derivada covariante D_μ. Para ello necesitamos los generadores de nuestro subgrupo y vectores de gauge que funcionen de conexión para la derivada covariante. A diferencia de lo que estábamos acostumbrados en las teorías de gauge del modelo estándar, no es necesario introducir a mano estos objetos, ya que la teoría misma viene equipada con 36 vectores A^A_μ! De esta forma, siendo X_M los generadores de $\mathfrak{g}$, tenemos la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - q A^M_\mu X_M \tag{3.2}$$

donde q es la constante de acople. De 3.2 vemos el número de generadores está limitado por el número de vectores, esto restringe la dimensión del subgrupo G a $Dim(G) \leq 36$! Dado que estos generadores son un subconjunto de t_α, existe una manera de relacionarlos mediante el **embedding tensor** $\Theta_M^{\ \alpha}$ dada por

$$X_M = \Theta_M^{\ \alpha} t_\alpha \tag{3.3}$$

Este objeto de indices mixtos define los posibles gaugings de la teoría ungauged, es decir contiene información sobre todas la posibles deformaciones, el mismo determina como el grupo de gauge se encuentra escondido dentro del grupo global G_0.
Con estos generadores, objetos con distinto número de indices transforman de manera distinta ante una variación infinitesimal. Por ejemplo, objetos en la fundamental de G_0 varían según

Para decir esto me baso en la transformación de un vector, luego veo como trasnforma la métrica de O(N,N) y con ella utilizo la regla de Leibniz para obtener la transformación de una 1-forma. Con estos objetos utilizo nuevamente Leibniz indefinidamente para obtener las transformaciones de tensores de cualquier orden.

$$\begin{aligned} \delta\Lambda_A &= q\xi^M X_{MA}{}^P \Lambda_P \\ \delta\Lambda^A &= -q\xi^M X_{MP}{}^A \Lambda^P \\ \delta H_A{}^B &= q\xi^M X_{MA}{}^P H_P{}^B - q\xi^M X_{MP}{}^B H_A{}^P \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $\xi^M(x)$ es el parámetro local de la transformación y se definió

$$X_{MA}{}^P = \Theta_M^{\alpha} (t_\alpha)_A{}^P \tag{3.5}$$

donde expresamos a los generadores de G_0 en la representación fundamental. De forma análoga las derivadas covariantes en estos objetos también actúan de forma diferente siendo

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= \partial_\mu \phi \\ D_\mu H_A{}^B &= \partial_\mu H_A{}^B - qA_\mu^M X_{MA}{}^P H_P{}^B + qA_\mu^M X_{MP}{}^B H_A{}^P \end{aligned} \tag{3.6}$$

para un escalar y tensor de indices mixtos respectivamente. Que la conexión entre en la derivada covariante en los distintos objetos con el signo opuesto a las transformaciones no es un capricho, de hecho, es lo que permite cancelar la no covarianza de los diversos objetos.
El embedding tensor nos dice como se encuentra sumergido el grupo de gauge en la simetría global, no cualquier subgrupo será válido para realizar esto debido a la necesidad de obedecer ciertas relaciones. En nuestra caso particular solo se necesitan dos vínculos para garantizar la invarianza de gauge de la teoría, uno cuadrático y otro lineal. El primero de ellos tiene que ver con la clausura de los generadores en un álgebra, puede demostrarse que esta condición coincide con pedir invarianza de los $X_{MA}{}^P$ ante las transformaciones generadas por ellos mismos!.
Para ver esto...

donde se llega a la relación

$$[X_M, X_N] = X_{MN}{}^P X_P \tag{3.7}$$

En definitiva, para tener realmente una simetría de gauge, X_M (o equivalentemente Θ_M^α) debe satisfacer este vínculo cuadrático. Que 3.7 sea efectivamente un vínculo para los generadores se debe a que las constantes de estructura ya se encuentran fijas de entrada por el grupo global. Un resultado interesante es que los objetos $X_{MN}{}^P$ no tienen porque ser antisimétricos en sus dos primeros indices, 3.7 demanda que esto se cumpla solo ante la proyección con X_P.
Sumado a 3.7, es necesario un vínculo lineal para Θ_M^α que solo puede deducirse observando la teoría supersimétrica completa. Dado que el embedding tensor transforma en la representación $V^* \otimes \mathfrak{g}_0$ (con V^* la representación dual fundamental), con objeto de introducir una simetría de gauge sin romper supersimetría, es necesario quedarnos solo con un conjunto de las representaciones irreducibles de dicho producto

$$V^* \otimes \ \mathfrak{g}_0 = \theta_1 \oplus \theta_2 \cdots \oplus \theta_n \tag{3.8}$$

Demandando que dicho vínculo lineal sea G_0-covariante, puede demostrarse que puede escribirse en la forma

$$\mathbb{P}\Theta = 0 \tag{3.9}$$

donde $\mathbb{P}$ es un proyector que selecciona aquellos subespacios no permitidos por la invarianza de gauge y supersimetría. Puede demostrase que en nuestro caso particular con 12 vectores de gauge y 66 generadores del grupo $O(6,6)$, el embedding tensor transforma en la representación

$$12 \otimes 66 = 12 \oplus 220 \oplus \ldots \tag{3.10}$$

y los únicos subespacios permitidos corresponden a los primeros 2 de 3.10. Esto nos lleva a dividir a los $X_{MN}{}^P$ en una parametrización para el subespacio de 12 dimensiones y otra para 220. Para el

primero de ellos, las 12 dimensiones caben dentro de una representación vectorial de las constantes de estructura f_A, mientras que para el subespacio restante podemos representarlas en constantes de estructura de 3 indices completamente antisimétrico, $f_{MNP} = f_{[MNP]}$ teniendo $\frac{12\times11\times10}{3!} = 220$ grados de libertad. En nuestro caso particular estudiaremos el caso en donde se prenden solo las constantes de estructura correspondientes al subespacio de 220, anulando $f_A = 0$ lo que se conoce como adoptar un **frame eléctrico**. En este caso particular, y solo en él, el vínculo lineal nos permite asumir que las constantes de estructura $X_{MN}{}^P$ son completamente antisimétricas
[**Corroborar esto, entender y escribir mejor.**]

De esta forma vemos que cualquier subgrupo cuyos generadores estén caracterizados por un embedding tensor cumpliendo 3.7 y 3.9, corresponderá con una posible deformación supersimétrica de la teoría con invarianza de gauge. Lo remarcable de este método en donde utilizamos el embedding tensor como un objeto covariante del grupo global para parametrizar los generadores, es que nos permite preservar dicha simetría a lo largo de todo el proceso de gaugear supergravedad, hasta el momento en donde especificamos un subgrupo particular y rompemos la simetría global.

3.3. Transformación de la teoría efectiva ante el gauging

Con los vínculos 3.7 y 3.9 en mente, comencemos el proceso de transformación de 2.8 a una teoría no abeliana, observando como debe transformar la conexión. Al igual que en la teoría de Yang-Mills lo que buscamos es una derivada covariante que transforme como

$$(D_\mu\Lambda)' = h\,(D_\mu\Lambda) \tag{3.11}$$

donde introducimos un campo vectorial de prueba Λ y el elemento del grupo $h(x) \in G$. Explicitando 3.11, se puede leer la regla de transformación para la conexión, por un lado tenemos

$$\begin{aligned}(D_\mu\Lambda)' &= \left(\partial_\mu - qA'^M_\mu X_M\right) h\Lambda \\ &= \partial_\mu h\Lambda + h\partial_\mu\Lambda - qA'^M_\mu X_M h\Lambda\end{aligned} \tag{3.12}$$

y por el otro

$$(D_\mu\Lambda)' = h\,(D_\mu\Lambda) = h\partial_\mu\Lambda - qA^M_\mu\, hX_M\Lambda \tag{3.13}$$

Luego, igualando ambas relaciones y tirando el campo de prueba, se obtiene la ley de transformación para la conexión

$$A'^M_\mu X_M = A^M_\mu hX_M h^{-1} + \frac{1}{q}\,(\partial_\mu h)\,h^{-1} \tag{3.14}$$

que podemos llevar a la forma infinitesimal

$$\begin{aligned}\delta A^M_\mu X_M &= A^M_\mu\left(q\xi^P X_P X_M - qX_M\xi^P X_P\right) + \partial_\mu\xi^M X_M \\ &= \partial_\mu\xi^M X_M - qA^M_\mu\xi^P\,[X_M, X_P] \\ &= \partial_\mu\xi^M X_M + 2qA^N_\mu\xi^P X_{NP}{}^M X_M\end{aligned} \tag{3.15}$$

donde para la última igualdad utilizamos el vínculo cuadrático. Esto nos lleva a la ley de transformación

$$\boxed{\delta A^M_\mu = \partial_\mu\xi^M + 2qA^N_\mu X_{NP}{}^M\xi^P = D_\mu\xi^M} \tag{3.16}$$

Lo que vemos que equivale a una derivada covariante del parámetro ξ^M. Esto era de esperar ya que los vectores que usamos como conexión ya tenían una simetría de gauge abeliana desde el comienzo dada por $\delta A^A_\mu = \partial_\mu\xi^A$ y lo que hicimos simplemente es covariantizar dicha relación cambiando derivadas parciales por covariantes! Cualquiera de los dos procedimientos llevan al mismo resultado. Un comentario importante sobre 3.16 es que la conexión no transforma de manera covariante por el la derivada parcial sobre el parámetro.

Con esta transformación en mente, podemos pasar ahora si a covariantizar todos los términos de 2.8. La mecánica resulta ser la misma para todos ellos, haciendo analogía con el problema de Yang-Mills, dado un término con derivadas usuales sobre objetos covariantes, simplemente debemos promover las derivadas parciales a covariantes siguiendo las convenciones de 3.6. Para el tensor de esfuerzos de la conexión debemos tener cuidado antes de covariantizar todo sin pensar, dado que ,como mencionamos en el parrafo anterior, el cambio de derivada solo será valido sobre objetos covariantes, y el tensor de esfuerzos involucra derivadas sobre la conexión que no transforma como tal. Sin embargo, observando 3.16 vemos que si bien A^M_μ no transforma de manera tensorial, al tomar el conmutador de derivadas de ellos, este término extra se va por nilpotencia de la derivada exterior! De esta manera concluimos que el mecanismo propuesto también aplica en este caso, siendo

$$\begin{aligned} F^A_{\mu\nu} &= 2D_{[\mu} A^A_{\nu]} = \partial_\mu A^A{}_\nu + qA^C{}_\mu X_{CB}{}^A A^B{}_\nu - \partial_\nu A^A{}_\mu - qA^C{}_\nu X_{CB}{}^A A^B{}_\mu \\ &= 2\partial_{[\mu} A^A{}_{\nu]} + qA^B{}_\mu A^C{}_\nu \left(X_{BC}{}^A - X_{CB}{}^A\right) \\ &= 2\partial_{[\mu} A^A{}_{\nu]} + 2qX_{[BC]}^{\ \ A} A^B{}_\mu A^C{}_\nu \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde podemos estudiar un poco su relación con la derivada covariante calculando

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu \Lambda &= \left(\partial_\mu - qA^M_\mu X_M\right)\left(\partial_\nu - qA^N{}_\nu X_N\right)\Lambda \\ &= \partial_\mu\partial_\nu\Lambda - 2qX_M A^M_{(\mu}\partial_{\nu)}\Lambda - q\partial_\mu A^M{}_\nu X_M\Lambda + q^2 A^M{}_\mu A^N{}_\mu X_M X_N\Lambda \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde Λ es un campo vectorial auxiliar. Luego podemos tomar el conmutador de estas dos derivadas covariantes en donde los primeros dos términos simétricos de 3.18 se van

$$\begin{aligned} \left[D_\mu, D_\nu\right]\Lambda &= -2q\partial_{[\mu} A^M_{\nu]} X_M\Lambda + 2q^2 X_M X_N A^M_{[\mu} A^N{}_{\nu]}\Lambda \\ &= -q\left(2\partial_{[\mu} A^M_{\nu]} X_M - q\left[X_M, X_N\right] A^M_\mu A^N_\nu\right)\Lambda \\ &= -q\left(2\partial_{[\mu} A^M_{\nu]} + 2qX_{NP}{}^M X_M A^N_\mu A^P_\nu\right)\Lambda \\ &= -q\left(2\partial_{[\mu} A^M_{\nu]} + 2qX_{[NP]}^{\ \ M} A^N_\mu A^P{}_\nu\right) X_M\Lambda \end{aligned} \tag{3.19}$$

Donde para las últimas dos igualdad se utilizó el vínculo cuadrático para introducir las constantes de estructura y para quedarnos solo con la parte antisimétrica al contraer con X_M. Finalmente tirando el campo auxiliar, obtenemos la identidad de Ricci para la curvatura

$$\boxed{\left[D_\mu, D_\nu\right] = -gF^M_{\mu\nu} X_M} \tag{3.20}$$

Pasemos ahora a la derivada sobre la matriz de escalares. Dado que M_{AB} es un tensor de dos indices, no es obvio a priori que la transformación que impusimos sobre objetos que transforman en representaciones lineales de G, 3.11, también nos brinde

$$\left(D_\mu M\right)' = h^t\left(D_\mu M\right)h \tag{3.21}$$

para objetos que transformen según

$$M' = h^t M h \tag{3.22}$$

como es el caso de la matriz de escalares. Veamos que esto es efectivamente así...
[**Demostrar esto con lo de la traza y demás...**]

... donde felizmente se obtiene 3.21! De esta forma, una vez más tenemos el permiso para promover las derivadas usuales a covariantes en el término cinético para los escalares, siendo

$$\boxed{D_\mu M_{AB} = \partial_\mu M_{AB} - qA^C_\mu X_{CA}{}^P M_{PB} - qA^C_\mu X_{CB}{}^P M_{AP}} \tag{3.23}$$

Luego, la derivada dentro del tensor de esfuerzos para la 2-forma 2.7 cambia a

$$\begin{aligned} 3D_{[\mu} A^A{}_\nu A_{\rho]A} &= 3\partial_{[\mu} A^A{}_\nu A_{\rho]A} + 3qX_{BC}{}^A A^B_{[\mu} A^C{}_\nu A_{\rho]A} \\ &= 3\partial_{[\mu} A^A{}_\nu A_{\rho]A} + 3qX_{[BC]}^{\ \ A} A^B_{[\mu} A^C{}_\nu A_{\rho]A} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Por último, todas las demás derivadas aplicadas a objetos sin indices de $O(6,6)$ quedan como derivadas parciales ya que son escalares desde el punto de vista de G_0.
Concentrandonos unos momentos en la forma del nuevo tensor de esfuerzos, vemos que gracias a 3.7 podemos identificar $-2X_{[MN]}^{\ \ P}$ con la parte antisimétrica de las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$. Esto no es del todo lo que esperabamos ya que las estructuras de Yang-Mills para el tensor de esfuerzos vienen dadas por

$$F^A_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A^A{}_{\nu]} - f_{BC}{}^A A^B{}_\mu A^C{}_\nu \tag{3.25}$$

donde aparecen las constantes de estructura en su totalidad, veamos que esta pequeña disgresión con otras teorías de gauge hacen al tensor de esfuerzos, un objeto no covariante ante transformaciones de gauge.

Ahora si, con esta transformación, veamos como transforma el tensor de esfuerzos. Para ello, utilizamos 3.16 y 3.20 y obtenemos

$$\begin{aligned} \delta F^M_{\mu\nu} &= 2D_{[\mu}\delta M^A_{\nu]} = 2D_{[\mu} D_{\nu]}\xi^M = qF^N_{\mu\nu} X_{NP}{}^M \xi^P \\ &= qF^N_{\mu\nu} X_{NP}{}^M \xi^P + q\xi^P X_{PN}{}^M F^N_{\mu\nu} - q\xi^P X_{PN}{}^M F^N_{\mu\nu} \\ &= -q\xi^P X_{PN}{}^M F^N_{\mu\nu} + 2qF^N_{\mu\nu} X_{(PN)}^{\ \ \ M} \xi^P \end{aligned} \tag{3.26}$$

donde vemos que el primer término corresponde a la transformación que esperabamos pero aperecen términos extras acomplados a la parte simétrica de $X_{MN}{}^P$ que rompen la covarianza! La raíz de este problema es que la dimensión del grupo de gauged puede ser menor que el número de vectores abelianos de la teoría ungauged, por lo que no todos los vectores son realmente necesarios como campos de gauged. Una forma de resolver esto es modificando el tensor de esfuerzos mediante la inserción a mano de **términos de Stückelberg** que se acoplen a nuevos campos $L_{\mu\nu M}$, siendo 2-formas con respecto a sus indices de Lorentz (2-forma) y un vector desde el punto de vista de G_0. En este caso tendríamos una nueva curvatura para los campos de gauged

$$\mathcal{H}^M_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A^A{}_{\nu]} + 2qX_{[BC]}^{\ \ \ A} A^B{}_\mu A^C{}_\nu + qZ^{MP} L_{\mu\nu P} \tag{3.27}$$

donde Z^{MP} es el encargado de absorber estos términos no deseados que rompen la simetría de gauge. A su vez, al introducir nuevos campos, es necesario especificar su transformación de gauge e introducirle un término cinético propio en el lagrangiano, este vendrá dado por una 3-forma como tensor de esfuerzos.