Mathematatik für Informatiker
Kombinatorik, Stochastik und Statistik

Übungsblatt 3

Tom Paßberg , Iain Dorsch

Aufgabe 1

a)

Zu zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$$

Beweis:

- **Induktionsanfang:** $n = 0$

$$\sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0$$

- **Induktionsvoraussetzung:** Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$$

- **Induktionsschritt:** $n \to n + 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} &= 2 + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} && (1)\\
&= 2 + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) && (2)\\
&= 2 + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} && (3)\\
&= 2 + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} && (4)\\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} && (5)\\
&= 2 * \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} && (6)\\
&= 2 * 2^n && (7)\\
&= 2^{n+1} && (8)
\end{aligned}$$

(1) und (4) folgt aus $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
(2) folgt aus Skript 1.2.14.
(7) folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

b)

Zu zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{j} && (9)\\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} && (10)\\
&= \binom{n+n}{n} && (11)\\
&= \binom{2n}{n} && (12)
\end{aligned}$$

(10) folgt aus Skript 1.2.5.
(11) folgt aus Skript 1.2.12.