Mathematatik für Informatiker
Kombinatorik, Stochastik und Statistik

Übungsblatt 3

Tom Paßberg , Iain Dorsch

Aufgabe 1

a)

Zu zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$$

Beweis:

- **Induktionsanfang:** $n = 0$

$$\sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0$$

- **Induktionsvoraussetzung:** Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$$

- **Induktionsschritt:** $n \to n + 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} &= 2 + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} && (1)\\
&= 2 + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) && (2)\\
&= 2 + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} && (3)\\
&= 2 + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} && (4)\\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} && (5)\\
&= 2 \cdot \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} && (6)\\
&= 2 \cdot 2^n && (7)\\
&= 2^{n+1} && (8)
\end{aligned}$$

(1) und (5) folgt aus $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
(2) folgt aus Skript 1.2.14.
(7) folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

b)

Zu zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

Beweis:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{j} \tag{9}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} \tag{10}$$

$$= \binom{n+n}{n} \tag{11}$$

$$= \binom{2n}{n} \tag{12}$$

(10) folgt aus Skript 1.2.5.
(11) folgt aus Skript 1.2.12.

Aufgabe 2

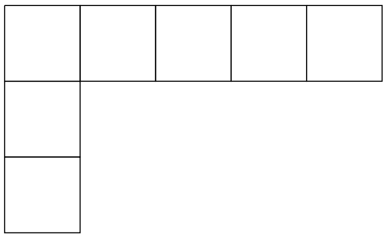
a)

Algorithm 1 Find Partitions

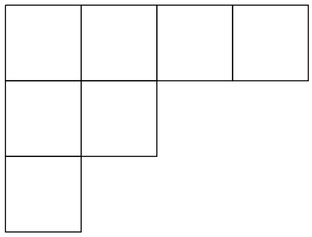
```
procedure PARTITIONS(n,m)
    if m = 1 then return [[n]]
    result ← []
    for i ← 1 to n − m + 1 do
        for p ∈ PARTITIONS(n − i, m − 1) do
            if p[p.len() − 1] ≥ i then
                p.push(i)
                result.push(p)
    return result
```

b)

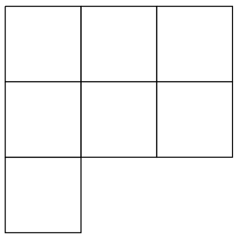
- $[5, 1, 1]$



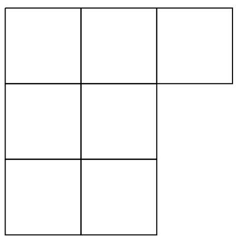
- $[4, 2, 1]$



- $[3, 3, 1]$



- $[3, 2, 2]$



Aufgabe 3

Zu zeigen: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt für die Anzahl der geordneten Zahlpartitionen von n in m positive Summanden:

$$P(n,m) = \binom{n-1}{m-1}$$

Beweis:

- Induktionsanfang: $m = 1$:
  Für $m = 1$ ist die Anzahl der möglichen Partitionen von n in m positive Summanden gleich 1.

  $$P(n,1) = 1 = \binom{n-1}{0}$$

- Induktionsvoraussetzung:
  Die Aussage gilt für ein beliebige aber feste $n, m \in \mathbb{N}$ und für alle $n', m' \in \mathbb{N}$ mit $n' < n$ und $m' < m$.

- Induktionsschritt:
  Die Anzahl der geordneten Zahlpartitionen von n in m positive Summanden lässt sich rekursiv berechnen aus der Summe der Anzahlen der geordneten Zahlpartitionen von $n - i$ in $m - 1$ positive Summanden für $i = 1, \ldots, n - m + 1$. Daraus folgt:

  $$\begin{aligned} P(n,m) &= \sum_{i=1}^{n-m+1} P(n-i, m-1) && (13) \\ &= \sum_{i=1}^{n-m+1} \binom{n-i-1}{m-2} && (14) \\ &= \sum_{i=0}^{n-m} \binom{m-2+i}{m-2} && (15) \\ &= \binom{m-2+n-m+1}{m-2+1} && (16) \\ &= \binom{n-1}{m-1} && (17) \end{aligned}$$

  (14) folgt aus der Induktionsvoraussetzung.
  (15) invertiert die Reihenfolge der Summanden
  (16) folgt aus $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$

Aufgabe 4

a)

Äquivalenzrelationen auf $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(a, a) \mid a \in M\} \\
R_2 &= \{(a, b) \in M^2\} \\
R_3 &= \{(a, b) \mid a, b \in \{1\} \lor a, b \in \{2, 3, 4\}\} \\
R_4 &= \{(a, b) \mid a, b \in \{2\} \lor a, b \in \{1, 3, 4\}\} \\
R_5 &= \{(a, b) \mid a, b \in \{3\} \lor a, b \in \{1, 2, 4\}\} \\
R_6 &= \{(a, b) \mid a, b \in \{4\} \lor a, b \in \{1, 2, 3\}\} \\
R_7 &= \{(a, b) \mid a, b \in \{1, 2\} \lor a, b \in \{3, 4\}\} \\
R_8 &= \{(a, b) \mid a, b \in \{1, 3\} \lor a, b \in \{2, 4\}\} \\
R_9 &= \{(a, b) \mid a, b \in \{1, 4\} \lor a, b \in \{2, 3\}\} \\
R_{10} &= \{(a, b) \mid a, b \in \{1\} \lor a, b \in \{2\} \lor a, b \in \{3, 4\}\} \\
R_{11} &= \{(a, b) \mid a, b \in \{1\} \lor a, b \in \{3\} \lor a, b \in \{2, 4\}\} \\
R_{12} &= \{(a, b) \mid a, b \in \{1\} \lor a, b \in \{4\} \lor a, b \in \{2, 3\}\} \\
R_{13} &= \{(a, b) \mid a, b \in \{2\} \lor a, b \in \{3\} \lor a, b \in \{1, 4\}\} \\
R_{14} &= \{(a, b) \mid a, b \in \{2\} \lor a, b \in \{4\} \lor a, b \in \{1, 3\}\} \\
R_{15} &= \{(a, b) \mid a, b \in \{3\} \lor a, b \in \{4\} \lor a, b \in \{1, 2\}\}
\end{aligned}
$$

b)

c)

- $B_0 = 1$
- $B_1 = 1$
- $B_2 = 2$
- $B_3 = 5$
- $B_4 = 15$

Aufgabe 5

Code:

```
fn partition(n: u32, m: u32) -> Vec<Vec<u32>> {
    if m == 1 {
        return vec![vec![n]];
    }
    (1..=n-m+1).flat_map(|i|
        partition(n-i, m-1)
            .into_iter()
            .filter(|p| p[p.len()-1] >= i)
            .map(|mut p| { p.push(i); p })
            .collect::<Vec<_>>()
    ).collect()
}
```

Funktionsaufruf:

```
fn main() {
    let n = 8;
    let m = 4;
    let result = partition(n, m);
    for p in result {
        println!("{:?}", p);
    }
}
```

Ausgabe:

```
[5, 1, 1, 1]
[4, 2, 1, 1]
[3, 3, 1, 1]
[3, 2, 2, 1]
[2, 2, 2, 2]
```