Mathematik für Informatiker
Kombinatorik, Stochastik und Statistik

Übungsblatt 6

Tom Paßberg , Iain Dorsch

Aufgabe 1

a)

Es gibt $n!$ Möglichkeiten n Personen auf n Stühlen zu platzieren. Es gibt n Möglichkeiten jede Anordnung zu drehen.
Es gibt demnach $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ mögliche Anordnungen.

b)

Mögliche Anordnungen für $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$(1, 2, 3, 4)$$
$$(1, 2, 4, 3)$$
$$(1, 3, 2, 4)$$
$$(1, 3, 4, 2)$$
$$(1, 4, 2, 3)$$
$$(1, 4, 3, 2)$$

Aufgabe 2

a)

Sei die Warscheinlichkeit eine 1 zu würfeln $P(1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
P(2) &= 2 \cdot P(1) \\
P(3) &= 3 \cdot P(1) \\
P(4) &= 4 \cdot P(1) \\
P(5) &= 5 \cdot P(1) \\
P(6) &= 6 \cdot P(1)
\end{aligned}$$

Die Summe der Warscheinlichkeiten muss 1 sein, also gilt

$$\begin{aligned}
1 &= P(1) + 2 \cdot P(1) + 3 \cdot P(1) + 4 \cdot P(1) + 5 \cdot P(1) + 6 \cdot P(1) \\
1 &= 21 \cdot P(1) \\
P(1) &= \frac{1}{21}
\end{aligned}$$

Die Warscheinlichkeiten sind

$$
\begin{aligned}
P(1) &= \frac{1}{21} \\
P(2) &= \frac{2}{21} \\
P(3) &= \frac{3}{21} \\
P(4) &= \frac{4}{21} \\
P(5) &= \frac{5}{21} \\
P(6) &= \frac{6}{21}
\end{aligned}
$$

b)

Die Warscheinlichkeit eine ungerade Zahl zu würfeln ist

$$
\begin{aligned}
P(1) + P(3) + P(5) &= \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} \\
&= \frac{3}{7}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

a)

Induktionsanfang
Für $m = 1$ ist die Warscheinlichkeit mit einem n-seitigen Würfel eine 1 zu würfeln $\frac{1}{n}$.
Die Warscheinlichkeit keine 1 zu würfeln ist $P(1) = 1 - \frac{1}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^1$
Induktionsvoraussetzung
Für ein beliebiges aber festes m ist die Warscheinlichkeit mit einem n-seitigen Würfel mit m würfen keine 1 zu würfeln

$$P(m) = \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^m$$

Induktionsschritt $m \to m + 1$
Jeder weitere Wurf hat eine Warscheinlichkeit von $1 - \frac{1}{n}$ keine 1 zu würfeln.

$$
\begin{aligned}
P(m+1) &= P(m) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) && (1) \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) && (2) \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m+1} && (3)
\end{aligned}
$$

(2) gilt nach der Induktionsvoraussetzung.

b)

Zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n\cdot\ln(2)} = \frac{1}{2}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n\cdot\ln(2)} &= \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot\ln(2)\cdot\ln(1-\frac{1}{n})} && (4)\\
&= \lim_{n\to\infty} 2^{n\cdot\ln(1-\frac{1}{n})} && (5)\\
&= \lim_{n\to\infty} 2^{\ln((1-\frac{1}{n})^n)} && (6)\\
&= 2^{\ln(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{-1}{n})^n)} && (7)\\
&= 2^{\ln(e^{-1})} && (8)\\
&= 2^{-1} && (9)\\
&= \frac{1}{2} && (10)
\end{aligned}$$

(4) folgt aus dem Hinweis auf dem Übungsblatt.
(8) folgt aus Skript Lemma 3.8.4.

Aufgabe 4

Programmcode in Rust:

```rust
fn multimenge(input: &Vec<u8>, n: u8) -> Vec<Vec<u8>> {
    if n == 0 {
        return vec![vec![]];
    }
    if n == 1 {
        return input.iter().map(|&x| vec![x]).collect();
    }
    multimenge(input, n - 1).iter().flat_map(|x|
        input.iter()
            .filter(|&y| x[x.len() - 1] <= *y)
            .map(|y: &u8| {
                let mut z = x.clone();
                z.push(*y);
                z
            })
    ).collect()
}
```

Funktionsaufruf:

```
fn main() {
    let result = multimenge(&vec![1,2,3], 3);

    for i in result {
        println!("{:?}", i);
    }
}
```

Ausgabe:

```
[1, 1, 1]
[1, 1, 2]
[1, 1, 3]
[1, 2, 2]
[1, 2, 3]
[1, 3, 3]
[2, 2, 2]
[2, 2, 3]
[2, 3, 3]
[3, 3, 3]
```