

# **Mathematik für Informatiker**

## **Kombinatorik, Stochastik und Statistik**

Übungsblatt 6

Tom Paßberg , Iain Dorsch

## Aufgabe 1

a)

Es gibt  $n!$  Möglichkeiten  $n$  Personen auf  $n$  Stühlen zu platzieren. Es gibt  $n$  Möglichkeiten jede Anordnung zu drehen.

Es gibt demnach  $\frac{n!}{n} = (n-1)!$  mögliche Anordnungen.

b)

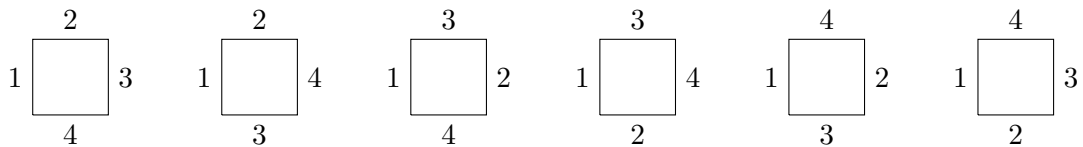


Abbildung 1: Mögliche Anordnungen für  $\{1, 2, 3, 4\}$

## Aufgabe 2

a)

Sei die Wahrscheinlichkeit eine 1 zu würfeln  $P(1)$ . Dann gilt

$$P(2) = 2 \cdot P(1)$$

$$P(3) = 3 \cdot P(1)$$

$$P(4) = 4 \cdot P(1)$$

$$P(5) = 5 \cdot P(1)$$

$$P(6) = 6 \cdot P(1)$$

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten muss 1 sein, also gilt

$$1 = P(1) + 2 \cdot P(1) + 3 \cdot P(1) + 4 \cdot P(1) + 5 \cdot P(1) + 6 \cdot P(1)$$

$$1 = 21 \cdot P(1)$$

$$P(1) = \frac{1}{21}$$

Die Wahrscheinlichkeiten sind

$$\begin{aligned}P(1) &= \frac{1}{21} \\P(2) &= \frac{2}{21} \\P(3) &= \frac{3}{21} \\P(4) &= \frac{4}{21} \\P(5) &= \frac{5}{21} \\P(6) &= \frac{6}{21}\end{aligned}$$

b)

Die Wahrscheinlichkeit eine ungerade Zahl zu würfeln ist

$$\begin{aligned}P(1) + P(3) + P(5) &= \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} \\&= \frac{3}{7}\end{aligned}$$

### Aufgabe 3

a)

#### Induktionsanfang

Für  $m = 1$  ist die Wahrscheinlichkeit mit einem  $n$ -seitigen Würfel eine 1 zu würfeln  $\frac{1}{n}$ .

Die Wahrscheinlichkeit keine 1 zu würfeln ist  $P(1) = 1 - \frac{1}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^1$

#### Induktionsvoraussetzung

Für ein beliebiges aber festes  $m$  ist die Wahrscheinlichkeit mit einem  $n$ -seitigen Würfel mit  $m$  Würfeln keine 1 zu würfeln

$$P(m) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$$

#### Induktionsschritt $m \rightarrow m + 1$

Jeder weitere Wurf hat eine Wahrscheinlichkeit von  $1 - \frac{1}{n}$  keine 1 zu würfeln.

$$P(m+1) = P(m) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \tag{1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \tag{2}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m+1} \tag{3}$$

(2) gilt nach der Induktionsvoraussetzung.

b)

**Zu zeigen:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n \cdot \ln(2)} = \frac{1}{2}$$

**Beweis:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n \cdot \ln(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot \ln(2) \cdot \ln(1 - \frac{1}{n})} \quad (4)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n \cdot \ln(1 - \frac{1}{n})} \quad (5)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\ln((1 - \frac{1}{n})^n)} \quad (6)$$

$$= 2^{\ln(\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{-1}{n})^n)} \quad (7)$$

$$= 2^{\ln(e^{-1})} \quad (8)$$

$$= 2^{-1} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2} \quad (10)$$

(4) folgt aus dem Hinweis auf dem Übungsblatt.

(8) folgt aus Skript Lemma 3.8.4.

## Aufgabe 4

**Programmcode in Rust:**

```
1 fn multimenge(input: &Vec<u8>, n: u8) -> Vec<Vec<u8>> {
2     if n == 0 {
3         return vec![vec![]];
4     }
5     if n == 1 {
6         return input.iter().map(|&x| vec![x]).collect();
7     }
8     multimenge(input, n - 1).iter().flat_map(|x|
9         input.iter()
10            .filter(|&y| x[x.len() - 1] <= *y)
11            .map(|y: &u8| {
12                let mut z = x.clone();
13                z.push(*y);
14                z
15            })
16    ).collect()
17 }
```

**Funktionsaufruf:**

```
1 fn main() {  
2     let result = multimenge(&vec![1,2,3], 3);  
3  
4     for i in result {  
5         println!("{}", i);  
6     }  
7 }
```

**Ausgabe:**

```
1 [1, 1, 1]  
2 [1, 1, 2]  
3 [1, 1, 3]  
4 [1, 2, 2]  
5 [1, 2, 3]  
6 [1, 3, 3]  
7 [2, 2, 2]  
8 [2, 2, 3]  
9 [2, 3, 3]  
10 [3, 3, 3]
```