

# **Mathematik für Informatiker**

## **Kombinatorik, Stochastik und Statistik**

Übungsblatt 3

Tom Paßberg , Iain Dorsch

## Aufgabe 1

a)

**Zu zeigen:** Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$$

**Beweis:**

- **Induktionsanfang:**  $n = 0$

$$\sum_{j=0}^0 \binom{0}{j} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0$$

- **Induktionsvoraussetzung:** Für ein beliebiges, aber festes  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$$

- **Induktionsschritt:**  $n \rightarrow n + 1$

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} = 2 + \sum_{j=1}^n \binom{n+1}{j} \quad (1)$$

$$= 2 + \sum_{j=1}^n \left( \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) \quad (2)$$

$$= 2 + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \quad (3)$$

$$= 2 + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \quad (4)$$

$$= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \quad (5)$$

$$= 2 \cdot \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \quad (6)$$

$$= 2 \cdot 2^n \quad (7)$$

$$= 2^{n+1} \quad (8)$$

(1) und (5) folgt aus  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ .

(2) folgt aus Skript 1.2.14.

(7) folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

b)

**Zu zeigen:** Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

**Beweis:**

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n}{j} \quad (9)$$

$$= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n}{n-j} \quad (10)$$

$$= \binom{n+n}{n} \quad (11)$$

$$= \binom{2n}{n} \quad (12)$$

(10) folgt aus Skript 1.2.5.

(11) folgt aus Skript 1.2.12.

## Aufgabe 2

a)

---

**Algorithm 1** Find Partitions

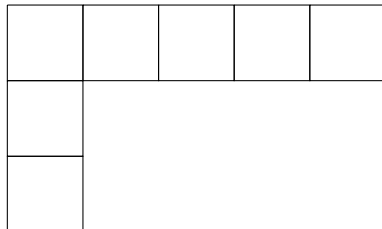
---

```
1: procedure PARTITIONS( $n, m$ )  
2:   if  $m = 1$  then return  $[[n]]$   
3:    $result \leftarrow []$   
4:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n - m + 1$  do  
5:     for  $p \in \text{PARTITIONS}(n - i, m - 1)$  do  
6:       if  $p[\text{len}() - 1] \geq i$  then  
7:          $p.\text{push}(i)$   
8:          $result.\text{push}(p)$   
9:   return  $result$ 
```

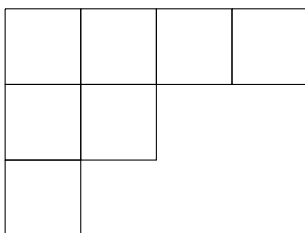
---

b)

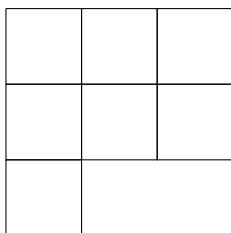
- $[5, 1, 1]$



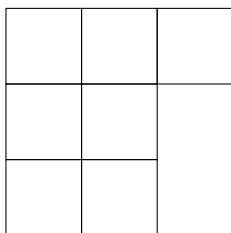
- $[4, 2, 1]$



- $[3, 3, 1]$



- $[3, 2, 2]$



### Aufgabe 3

**Zu zeigen:** Für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt für die Anzahl der geordneten Zahlpartitionen von  $n$  in  $m$  positive Summanden:

$$P(n, m) = \binom{n-1}{m-1}$$

**Beweis:**

- Induktionsanfang:  $m = 1$ :

Für  $m = 1$  ist die Anzahl der möglichen Partitionen von  $n$  in  $m$  positive Summanden gleich 1.

$$P(n, 1) = 1 = \binom{n-1}{0}$$

- Induktionsvoraussetzung:

Die Aussage gilt für ein beliebige aber feste  $n, m \in \mathbb{N}$  und für alle  $n', m' \in \mathbb{N}$  mit  $n' < n$  und  $m' < m$ .

- Induktionsschritt:

Die Anzahl der geordneten Zahlpartitionen von  $n$  in  $m$  positive Summanden lässt sich rekursiv berechnen aus der Summe der Anzahlen der geordneten Zahlpartitionen von  $n - i$  in  $m - 1$  positive Summanden für  $i = 1, \dots, n - m + 1$ . Daraus folgt:

$$P(n, m) = \sum_{i=1}^{n-m+1} P(n-i, m-1) \quad (13)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-m+1} \binom{n-i-1}{m-2} \quad (14)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-m} \binom{m-2+i}{m-2} \quad (15)$$

$$= \binom{m-2+n-m+1}{m-2+1} \quad (16)$$

$$= \binom{n-1}{m-1} \quad (17)$$

(14) folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

(15) invertiert die Reihenfolge der Summanden

(16) folgt aus  $\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$

## Aufgabe 4

a)

Äquivalenzrelationen auf  $M = \{1, 2, 3, 4\}$ :

$$R_1 = \{(a, a) \mid a \in M\}$$

$$R_2 = \{(a, b) \in M^2\}$$

$$R_3 = \{(a, b) \mid a, b \in \{1\} \vee a, b \in \{2, 3, 4\}\}$$

$$R_4 = \{(a, b) \mid a, b \in \{2\} \vee a, b \in \{1, 3, 4\}\}$$

$$R_5 = \{(a, b) \mid a, b \in \{3\} \vee a, b \in \{1, 2, 4\}\}$$

$$R_6 = \{(a, b) \mid a, b \in \{4\} \vee a, b \in \{1, 2, 3\}\}$$

$$R_7 = \{(a, b) \mid a, b \in \{1, 2\} \vee a, b \in \{3, 4\}\}$$

$$R_8 = \{(a, b) \mid a, b \in \{1, 3\} \vee a, b \in \{2, 4\}\}$$

$$R_9 = \{(a, b) \mid a, b \in \{1, 4\} \vee a, b \in \{2, 3\}\}$$

$$R_{10} = \{(a, b) \mid a, b \in \{1\} \vee a, b \in \{2\} \vee a, b \in \{3, 4\}\}$$

$$R_{11} = \{(a, b) \mid a, b \in \{1\} \vee a, b \in \{3\} \vee a, b \in \{2, 4\}\}$$

$$R_{12} = \{(a, b) \mid a, b \in \{1\} \vee a, b \in \{4\} \vee a, b \in \{2, 3\}\}$$

$$R_{13} = \{(a, b) \mid a, b \in \{2\} \vee a, b \in \{3\} \vee a, b \in \{1, 4\}\}$$

$$R_{14} = \{(a, b) \mid a, b \in \{2\} \vee a, b \in \{4\} \vee a, b \in \{1, 3\}\}$$

$$R_{15} = \{(a, b) \mid a, b \in \{3\} \vee a, b \in \{4\} \vee a, b \in \{1, 2\}\}$$

b)

c)

- $B_0 = 1$
- $B_1 = 1$
- $B_2 = 2$
- $B_3 = 5$
- $B_4 = 15$

## Aufgabe 5

### Code:

```
fn partition(n: u32, m: u32) -> Vec<Vec<u32>> {
    if m == 1 {
        return vec![vec![n]];
    }
    (1..=n-m+1).flat_map(|i|
        partition(n-i, m-1)
            .into_iter()
            .filter(|p| p[p.len()-1] >= i)
            .map(|mut p| { p.push(i); p })
            .collect::
```

### Funktionsaufruf:

```
fn main() {
    let n = 8;
    let m = 4;
    let result = partition(n, m);
    for p in result {
        println!("{}", p);
    }
}
```

### Ausgabe:

```
[5, 1, 1, 1]
[4, 2, 1, 1]
[3, 3, 1, 1]
[3, 2, 2, 1]
[2, 2, 2, 2]
```