Mathematik für Informatiker
Kombinatorik, Stochastik und Statistik
Ubungsblatt 1

Tom Paßberg , Iain Dorsch

Aufgabe 1

Zu zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot \binom{n}{j} && (1)\\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot \binom{n}{n-j} && (2)\\
&= \binom{n+n}{n} && (3)\\
&= \binom{2n}{n} && (4)
\end{aligned}$$

(2) folgt aus Skript 1.2.5
(3) folgt aus Skript 1.2.12.

Aufgabe 2

Die Anzahl der kürzeseten Pfade c wird gegeben durch die Formel:

$$c = \frac{(n-1+m-1)!}{(n-1)! \cdot (m-1)!}$$

$$= \binom{n+m-2}{n-1}$$

Beweis:

Indunktionsanfang: Für $n = 1$ und $m = 1$ ist die Position von Start und Ziel identisch. Es gibt trivial einen kürzesten Pfad.

$$c = \binom{0}{0} = 1$$

Indunktionsschritt:

Aufgabe 3

$$
\begin{aligned}
a &= |\{x \mod 3 = 0 \mid 0 \leq x \leq 100000\}| = \left\lfloor \frac{100000}{3} \right\rfloor \\
b &= |\{x \mod 5 = 0 \mid 0 \leq x \leq 100000\}| = \left\lfloor \frac{100000}{5} \right\rfloor \\
c &= |\{x \mod 7 = 0 \mid 0 \leq x \leq 100000\}| = \left\lfloor \frac{100000}{7} \right\rfloor \\
d &= |\{x \mod 11 = 0 \mid 0 \leq x \leq 100000\}| = \left\lfloor \frac{100000}{11} \right\rfloor \\
ab &= |\{x \mod 3 = 0 \land x \mod 5 = 0 \mid 0 \leq x \leq 100000\}| = \left\lfloor \frac{100000}{3 \cdot 5} \right\rfloor \\
ac &= |\{x \mod 3 = 0 \land x \mod 7 = 0 \mid 0 \leq x \leq 100000\}| = \left\lfloor \frac{100000}{3 \cdot 7} \right\rfloor \\
ad &= |\{x \mod 3 = 0 \land x \mod 11 = 0 \mid 0 \leq x \leq 100000\}| = \left\lfloor \frac{100000}{3 \cdot 11} \right\rfloor \\
bc &= |\{x \mod 5 = 0 \land x \mod 7 = 0 \mid 0 \leq x \leq 100000\}| = \left\lfloor \frac{100000}{5 \cdot 7} \right\rfloor \\
bd &= |\{x \mod 5 = 0 \land x \mod 11 = 0 \mid 0 \leq x \leq 100000\}| = \left\lfloor \frac{100000}{5 \cdot 11} \right\rfloor \\
cd &= |\{x \mod 7 = 0 \land x \mod 11 = 0 \mid 0 \leq x \leq 100000\}| = \left\lfloor \frac{100000}{7 \cdot 11} \right\rfloor \\
abc &= |\{x \mod 3 = 0 \land x \mod 5 = 0 \land x \mod 7 = 0 \mid 0 \leq x \leq 100000\}| = \left\lfloor \frac{100000}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor \\
abd &= |\{x \mod 3 = 0 \land x \mod 5 = 0 \land x \mod 11 = 0 \mid 0 \leq x \leq 100000\}| = \left\lfloor \frac{100000}{3 \cdot 5 \cdot 11} \right\rfloor \\
acd &= |\{x \mod 3 = 0 \land x \mod 7 = 0 \land x \mod 11 = 0 \mid 0 \leq x \leq 100000\}| = \left\lfloor \frac{100000}{3 \cdot 7 \cdot 11} \right\rfloor \\
bcd &= |\{x \mod 5 = 0 \land x \mod 7 = 0 \land x \mod 11 = 0 \mid 0 \leq x \leq 100000\}| = \left\lfloor \frac{100000}{5 \cdot 7 \cdot 11} \right\rfloor \\
abcd &= |\{x \mod 3 = 0 \land x \mod 5 = 0 \land x \mod 7 = 0 \land x \mod 11 = 0 \mid 0 \leq x \leq 100000\}| \\
&= \left\lfloor \frac{100000}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} \right\rfloor \\
\text{result} &= a + b + c + d - ab - ac - ad - bc - bd - cd + abc + abd + acd + bcd - abcd \\
&= 58441
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

a)

Für jede weiter Stufe wird die voerherige Mengen kopiert und um das nächste Element erweitert.
Die neuen und die alten Elemente werden in einer neuen Menge zusammengefasst.

- $n = 0$
  $\{\{\}\}$
- $n = 1$
  $\{\{\}, \{1\}\}$
- $n = 2$
  $\{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $n = 3$
  $\{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
- $n = 4$
  $\{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\},$
  $\{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

b)

Beschreibung

Für $n = 0$ gibt der Algorithmus eine Liste mit einer leeren Liste zurück. (Eine Menge in der sich eine leere Menge befindet)
Für $n > 0$ wird die Funktion rekursiv aufgerufen um die Teilmengen von $\{1, \ldots, n - 1\}$ zu berechnen.
Die Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ ergeben sich aus den Teilmengen von $\{1, \ldots, n-1\}$, indem von jeder Teilmengen aus $\{1, \ldots, n-1\}$ eine Kopie erstellt wird, in die n hinzugefügt wird.

Funktion zur Berechnung der Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$

```
fn teilmengen_rec(n: u8) -> Vec<Vec<u8>> {
    if n == 0 {
        return vec![vec![]];
    }
    teilmengen_rec(n - 1)
        .into_iter()
        .flat_map(|old| {
            let mut new = old.clone();
            new.push(n);
            [old, new]
        })
        .collect()
}
```

Funktiosnaufrufe für $n = 1, \ldots, 20$

```
fn main() {
    for i in 1..=20 {
        let teilmengen = teilmengen_rec(i);
        println!(
            "Anzahl der Teilmengen von {{1,..,{}}}: {}",
            i, teilmengen.len()
        );
        if i <= 4 {
            println!("Teilmengen von {{1,..,{}}}: {:?}", i, teilmengen);
        }
    }
}
```

Output:

```
Anzahl der Teilmengen von {1,..,1}: 2
Teilmengen von {1,..,1}: [[], [1]]
Anzahl der Teilmengen von {1,..,2}: 4
Teilmengen von {1,..,2}: [[], [2], [1], [1, 2]]
Anzahl der Teilmengen von {1,..,3}: 8
Teilmengen von {1,..,3}: [[], [3], [2], [2, 3], [1],
[1, 3], [1, 2], [1, 2, 3]]
Anzahl der Teilmengen von {1,..,4}: 16
Teilmengen von {1,..,4}: [[], [4], [3], [3, 4], [2],
[2, 4], [2, 3], [2, 3, 4], [1], [1, 4], [1, 3], [1, 3, 4],
[1, 2], [1, 2, 4], [1, 2, 3], [1, 2, 3, 4]]
Anzahl der Teilmengen von {1,..,5}: 32
Anzahl der Teilmengen von {1,..,6}: 64
Anzahl der Teilmengen von {1,..,7}: 128
Anzahl der Teilmengen von {1,..,8}: 256
Anzahl der Teilmengen von {1,..,9}: 512
Anzahl der Teilmengen von {1,..,10}: 1024
Anzahl der Teilmengen von {1,..,11}: 2048
Anzahl der Teilmengen von {1,..,12}: 4096
Anzahl der Teilmengen von {1,..,13}: 8192
Anzahl der Teilmengen von {1,..,14}: 16384
Anzahl der Teilmengen von {1,..,15}: 32768
Anzahl der Teilmengen von {1,..,16}: 65536
Anzahl der Teilmengen von {1,..,17}: 131072
Anzahl der Teilmengen von {1,..,18}: 262144
Anzahl der Teilmengen von {1,..,19}: 524288
Anzahl der Teilmengen von {1,..,20}: 1048576
```

Aufgabe 5

Funktion um die Anzahl der Zahlen zwischen 1 und n zu berechnen, die durch mindestens einen der Teiler teilbar sind.

```
use rayon::iter::{IntoParallelIterator, ParallelIterator};

fn count_numbers(n: u64, teiler: &Vec<u64>) -> usize {
    (1..=n).into_par_iter()
        .filter(|&n| teiler.iter().any(|&t| n % t == 0))
        .count()
}
```

Funktiosnaufrufe für $n = 10, 100, \ldots, 10000000000$ auf:

```
fn main() {
    let teiler: Vec<u64> = vec![3,5,7,11];
    for n in (1..=10).map(|i| 10u64.pow(i)) {
        println!(
            "{:11} gerade Zahlen zwischen 1 und {n:11}
            sind durch mindestens einen der Teiler {} teilbar.",
            count_numbers(n, &teiler),
            teiler.iter().map(|&t|
                t.to_string()).collect::<Vec<String>>().join(", ")
        );
    }
}
```

Output:

```
6 Zahlen zwischen 1 und 10 sind durch mindestens einen
der Teiler 3, 5, 7, 11 teilbar.
59 Zahlen zwischen 1 und 100 sind durch mindestens einen
der Teiler 3, 5, 7, 11 teilbar.
585 Zahlen zwischen 1 und 1000 sind durch mindestens einen
der Teiler 3, 5, 7, 11 teilbar.
5845 Zahlen zwischen 1 und 10000 sind durch mindestens einen
der Teiler 3, 5, 7, 11 teilbar.
58441 Zahlen zwischen 1 und 100000 sind durch mindestens einen
der Teiler 3, 5, 7, 11 teilbar.
584416 Zahlen zwischen 1 und 1000000 sind durch mindestens einen
der Teiler 3, 5, 7, 11 teilbar.
5844156 Zahlen zwischen 1 und 10000000 sind durch mindestens einen
der Teiler 3, 5, 7, 11 teilbar.
58441559 Zahlen zwischen 1 und 100000000 sind durch mindestens einen
der Teiler 3, 5, 7, 11 teilbar.
584415585 Zahlen zwischen 1 und 1000000000 sind durch mindestens einen
```

der Teiler 3, 5, 7, 11 teilbar.
5844155845 Zahlen zwischen 1 und 10000000000 sind durch mindestens einen der Teiler 3, 5, 7, 11 teilbar.