北京交通大学　2020-2021 学年暑期学期

计算机与信息技术学院　硕士研究生《智能计算数学基础》试题

出题教师：《智能计算数学基础》课程组

班级:__________　姓名:__________　学号:__________　上课教师:__________

注意：1. 请将所有答案写在答题纸上，写在试卷上无效。2. 考完后试卷必须随答题纸一同上交，否则成绩无效。3. 试卷共 50 道题，每题 2 分，满分 100 分。4. 题目排序与难度无关。5. 判断题请回答“是”或“否”。

1。判断题：若$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$在$x$点处可微，则该函数在$x$点处连续。✓

2。判断题：级数$\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n^2+1}$收敛。✗

3。计算序列极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n-1}$。$=\frac{1}{2}$

4。计算函数极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$。$=3$

5。判断题：函数$\frac{\sin x}{x}$在$x=0$时不可导。✓

6。$f(x)=\frac{1}{2}x^tPx+q^tx+r$，其中$P$是$n$阶对称方阵，$q\in\mathbb{R}^n$，$r\in\mathbb{R}$。计算梯度$\nabla f(x)$。

7。$f(x)=\frac{1}{2}x^tPx+q^tx+r$，其中$P$是$n$阶对称方阵，$q\in\mathbb{R}^n$，$r\in\mathbb{R}$。计算Hessian矩阵$\nabla^2 f(x)$。

8。计算函数$f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$在$(1,0)$点处的偏导数$\partial_x f(1,0)$。

9。计算函数$f(x,y)=x^2+2xy+2y^2-y$的极小值。

10。判断题：给定$n>1$，一个n维向量的l_1范数一定大于等于其l_2范数。✓

11。判断题：给定$a_1=(1,0,1),a_2=(0,1,1),b=(1,1,0)$，则$b$属于由$a_1,a_2$所生成的线性子空间。✗

12。计算将向量$(1,2)$逆时针旋转30度所得到的向量。

13。计算矩阵$\begin{pmatrix}5&4&2\\0&1&3\\1&0&3\end{pmatrix}$的三个特征值之和。9　　$\frac{9}{16}$

14。计算矩阵$\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$的奇异值。

15。给定矩阵$A=\begin{pmatrix}3&0\\4&5\end{pmatrix}$。已知$A^tA$的两个特征值为45和5，对应的特征向量为$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$和$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$。设$A$的SVD分解为：$A=U\Sigma V^t$。计算矩阵$U$。

16。判断题：矩阵$\begin{pmatrix}2&3&4\\3&5&5\\4&5&10\end{pmatrix}$半正定。✓

17。判断题：记$A^\dagger$为矩阵A的伪逆，则$AA^\dagger A=A$并且$A^\dagger AA^\dagger=A^\dagger$。✓

18。判断题：$AA^\dagger$是投影矩阵。（提示：满足条件$P^2=P$的矩阵P是投影矩阵）✓

19。假设x_1,x_2是取值在$[-1,1]$之间的均匀分布独立随机变量。计算x_1+x_2的方差。$\frac{2}{3}$

20。假设$x_1,x_2,...,x_{100}$是取值在$[-1,1]$之间的均匀分布独立随机变量。则$\sum_{i=1}^{100}x_i$服从何种分布？

21。假设x_1,x_2是相互独立的均值为0方差为1的高斯随机变量，即$x_1,x_2\sim\mathcal{N}(0,1)$。计算$x_1+x_2$的方差。2

20. $(0,\frac{100}{3})$ 高斯分布

6。$f(x)=\frac{1}{2}x^tPx+q^tx+r$，其中$P$是$n$阶对称方阵，$q\in\mathbb{R}^n$，$r\in\mathbb{R}$。计算梯度$\nabla f(x)$。

7。$f(x)=\frac{1}{2}x^tPx+q^tx+r$，其中$P$是$n$阶对称方阵，$q\in\mathbb{R}^n$，$r\in\mathbb{R}$。计算Hessian矩阵$\nabla^2 f(x)$。

6. $\nabla f(x)=\frac{1}{2}Px+\frac{1}{2}(x^tP)^t+(q^t)^t$
$=\frac{1}{2}Px+\frac{1}{2}Px+q=Px+q$

7. $\nabla^2 f(x)=P^t$

8。计算函数$f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$在$(1,0)$点处的偏导数$\partial_x f(1,0)$。

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=0$$

12。计算将向量$(1,2)$逆时针旋转30度所得到的向量。

$$(1,2)\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}=\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2},\frac{2\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

逆时针旋转矩阵

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

顺时针

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

9. $f(x,y)=x^2+2xy+2y^2-y$

$f_x'(x,y)=2x+2y \quad =0$

$f_y'(x,y)=2x+4y-1=0$

$$\begin{cases} 2x+2y=0 \\ 2x+4y-1=0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 为驻点

$f_{xx}(x,y)=2 \qquad A=2 \quad B=2 \quad C=4$

$f_{xy}(x,y)=2 \qquad B^2-AC<0 \quad A>0$

$f_{yy}(x,y)=4 \qquad$ 极小值点 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{4}$

14。计算矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$的奇异值。

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 5\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\-1 & \lambda-5\end{vmatrix}=0 \qquad (\lambda-1)(\lambda-5)-1=\lambda^2-6\lambda+4$$

$$(\lambda-3)^2=5 \qquad \lambda=3\pm\sqrt{5}$$

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} \qquad \sqrt{3-\sqrt{5}}$$

15。给定矩阵$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\4 & 5\end{pmatrix}$。已知$A^tA$的两个特征值为45和5，对应的特征向量为$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$和$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$。设$A$的SVD分解为：$A=U\Sigma V^t$。计算矩阵$U$。

$$U_1=\frac{1}{\sigma_1}AV_1^T=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}3 & 0\\4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\\frac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}$$

$$U_2=\frac{1}{\sigma_2}AV_2^T=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}3 & 0\\4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{10}\\\frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}}\\\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$$

(0,100)高斯

22。假设$x_1, x_2, ..., x_{100}$是相互独立的均值为0方差为1的高斯随机变量。则$\sum_{i=1}^{100} x_i$服从何种分布？

23。假设$y = Sh + w$，其中y是$k \times 1$的向量，S是$k \times 3$的矩阵, h是3×1的向量，w是$k \times 1$的向量。假设$w \sim \mathcal{N}(0, I_w)$为高斯白噪声，向量$h$为要估计的参数。已知$y$和$S$，如果要估计出向量$h$，则要求$k$的大小应当是多少？

24。如上题，如果用LS方法来估计向量h，请写出得到的估计量$\widehat{h}$的表达式。

~~25。如上题，如果用LMMSE方法来估计向量h，请写出得到的估计量$\widehat{h}$的表达式。~~

26。判断题：郭足智得到一个数值$y = 3.06$。假设郭足智已经知道$y = x + w$，其中w是均值为2方差也为2的高斯噪声；x是个随机变量，只有两种取值，取值要么为2要么为-2。郭足智根据$y = 3.06$推断x 取值肯定为2。请判断郭足智这个决策是否正确。

27。判断题：称重问题中，13个外观完全一样的小球，其中有1个小球重量与其余12个不同，如果要找到这个小球并判断其轻重，则该问题中，需要解除的不确定度大小（自信息量）为$\log_2 13$比特。

28。某一无记忆信源的符号集为$\{0, 1\}$，已知$p_0 = 1/4$，$p_1 = 3/4$，计算该信源的信息熵。（给出计算表达式即可，无需求出最终结果）。

$H=\frac{1}{4}\log 4+\frac{3}{4}\log\frac{4}{3}$

29。在熵函数的对称性、确定性、极值性、可加性等性质中，公式$H(XY) = H(X) + H(Y|X)$反映了信息熵的何种属性？

可加性

30。若$H(XY) = H(X) + H(Y)$，$I(X; Y)$等于多少？ 0

31。判断题：若$Z = f(Y)$，则$I(X; Z) \le I(X; Y)$反应了信息的不可增性。

32。判断题：遍历性马尔柯夫序列的极限熵为$H_\infty(X) = -\sum_{i,j} p_i p_{i,j} \log p_{i,j}$，其中$p_i$是序列的平稳分布，它与序列的起始状态有关。

33。已知某对称信道矩阵为$\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$，计算该信道的信道容量。（给出计算表达式即可，无需求出最终结果）。

34。判断题：P问题中的规约$\le$关系在语言上是一种传递关系。

35。判断题：NP-Hard问题都是多项式时间可验证的问题。

36。判断题：如果一个已知的NP-Complete问题B可以规约($\le$)到问题A，那么A也是NP-Complete。

37。判断题：近似度是近似解与最优解的比值，因此它的取值范围为$(0, 1]$。

38。判断题：NP-Complete问题的多项式时间复杂度算法都是近似算法。

39。判断题：如果NP$\neq$co-NP，则P=NP。

40。请将MAXTSP问题“求无向完全图$G = (V, E, C)$中一条花费最大的旅行路线，其中V是顶点的集合，E是边的集合，C是边上权重的集合。”转化为语言描述。

P, NP, NP-complete, NP-hard

41。请根据问题的难易程度，对P、NP、NP-Hard、NP-Complete这四类问题，从易到难排序。

42。判断题：每个有限决策者、有限行动组合的博弈至少存在一个纳什均衡。

43。判断题：博弈中每个决策者的一个混合策略是其纯策略集合上的一个概率分布。

44。判断题：马尔可夫博弈（或随机博弈）是机器学习中多智能体强化学习的理论基础。

45。判断题：Figure-1博弈中纯策略组合(C, D)为帕雷托最优。

46。判断题：Figure-1博弈中纯策略组合(C, C)为纳什均衡。

23。假设$y = Sh + w$，其中y是$k \times 1$的向量，S是$k \times 3$的矩阵，h是3×1的向量，w是$k \times 1$的向量。假设$w \sim \mathcal{N}(0, I_w)$为高斯白噪声，向量$h$为要估计的参数。已知$y$和$S$，如果要估计出向量$h$，则要求$k$的大小应当是多少？

24。如上题，如果用LS方法来估计向量h，请写出得到的估计量$\widehat{h}$的表达式。

24. $f(h) = |y - Sh|^2 = (y - Sh)^T (y - Sh)$

$= (y^T - h^T S^T)(y - Sh)$

$= y^T y - y^T S h - h^T S^T y + h^T S^T S h$

$$\frac{\partial f(h)}{\partial h} = -(y^T S)^T - S^T y + S^T S h + (h^T S^T S)^T$$

$= -S^T y - S^T y + S^T S h + S^T S h$

$= -2S^T y + 2S^T S h = 0$

$$\hat{h} = \frac{y}{S} = S^{-1} y$$

47。解释Figure-2博弈中虚线的含义。 同一信息集

48。利用Minimax搜索算法判断Figure-3博弈中Min的最优初始选择是X还是Y？ X

49。利用α-β剪枝算法判断Figure-3博弈中哪条枝可以剪掉。（至少写出两条枝，一条枝可以写成例如A-B或H-6的形式）。

	C	D
C	6, 6	1, 7
D	7, 1	2, 2

Figure 1: 博弈示例

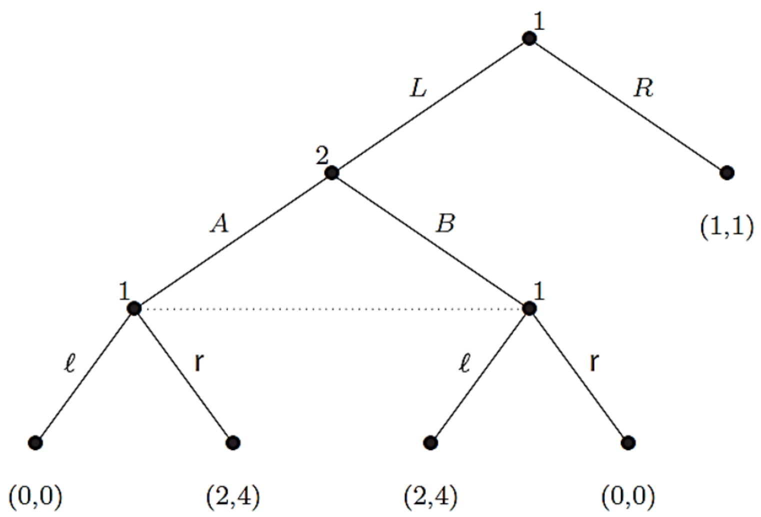

Figure 2: 博弈示例

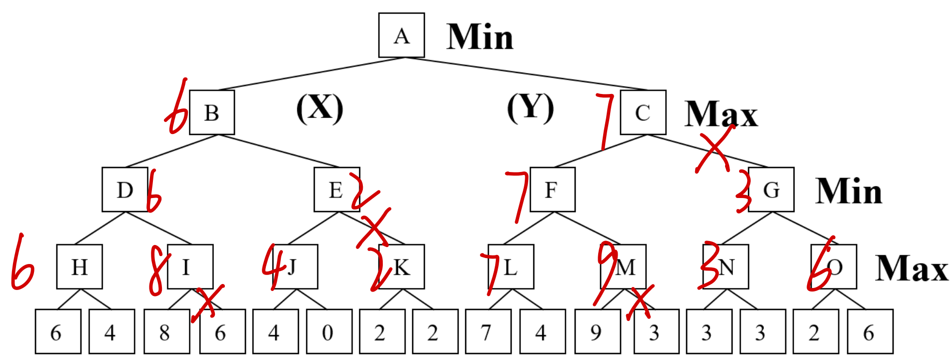

Figure 3: 博弈示例

50。三羊问题。在你眼前有3扇巨大的关闭的门，编号分别是A、B、C。站在旁边的主持人告诉你，其中一扇门的后面摆着极为诱人的大奖（比如说一辆小轿车），而另外两扇门的后面各站着一头羊，你需要在这3扇门中选择1扇门，并获得那扇门后面的奖品。你经过深思熟虑，选择了编号为A的门，在你紧张兮兮正准备打开时，通晓一切的主持人说慢着，然后他打开了编号为C的门，后面正好是一头山羊，然后他问你：现在再给你一次选择的机会，你是坚持选择现在的门A，还是更换成门B？给出你的理由。

更换B