

# 北京交通大学 2022-2023 学年暑期学期

计算机与信息技术学院 硕士研究生《智能计算数学基础》试题

出题教师:《智能计算数学基础》课程组

班级: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_ 上课教师: \_\_\_\_\_

注意: 1. 试卷共 50 道题, 每题 2 分, 满分 100 分。2. 题目排序与难度无关。3. 判断题请回答“是”或“否”。

1. 计算序列极限:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^2+n+1}{n \log n} \right)$ 。

答案:  $\infty$

2. 计算函数极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3)}{x^2}$ 。

答案:  $0$

3. 计算二元函数  $f(x, y) = x^3 - y^2 + 2xy + x - 2$  在点  $(1, 0)$  处的 Hessian 矩阵。

答案: \_\_\_\_\_

4. 判断题: 定义在  $\mathbb{R}^n$  上的 Lipschitz 函数一定是连续函数。

备注: 我们称  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为 Lipschitz 函数, 若存在常数  $K > 0$  使得  $\|f(x) - f(y)\|_2 \leq K\|x - y\|_2$  对任何  $x, y \in \mathbb{R}^n$  都成立。

答案:  $\checkmark$

5. 计算二元函数  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$  在约束条件  $|x + y| \leq 1$  以及  $|x - y| \leq 2$  下的极大值。

答案: \_\_\_\_\_

6. 计算平面点集  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 1\}$  的面积。

答案:  $4$

7. 计算二次函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^t P x + q^t x + r$  的梯度和 Hessian 矩阵, 其中  $P \in \mathbb{S}_{++}^n$ ,  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $r \in \mathbb{R}$ 。

答案: \_\_\_\_\_

8. 判断题: 对于任何  $P \in \mathbb{S}_{++}^n$ , 二次函数  $f(x) = x^t P x$  在约束条件  $\|x\|_2 \leq 1$  下有唯一的极小值点。

答案:  $\checkmark$

9. 求出下述优化问题的极小值  $\begin{cases} \text{minimize} & f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - z^2 + yz \\ \text{subject to} & x + y - z = 1 \end{cases}$ 。

3. 计算二元函数  $f(x, y) = x^3 - y^2 + 2xy + x - 2$  在点  $(1, 0)$  处的 Hessian 矩阵。

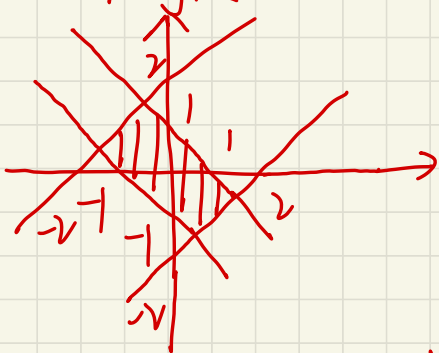
$$f'_x = 3x^2 + 2y + 1 \quad f'_y = -2y + 2x$$

$$f''_{xx} = 6x \quad f''_{xy} = 2 \quad f''_{yy} = -2$$
$$= 6 \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

5. 计算二元函数  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$  在约束条件  $|x + y| \leq 1$  以及  $|x - y| \leq 2$  下的极大值。

$$|x + y| \leq 1 \quad -1 \leq x + y \leq 1 \quad x - 1 \leq y \leq 1 - x$$

$$|x - y| \leq 2 \quad -2 \leq x - y \leq 2 \quad x - 2 \leq y \leq x + 2$$



$$f'_x = 4x \quad f'_y = 2y$$

$$f''_{xx} = 4 \quad f''_{xy} = 0 \quad f''_{yy} = 2$$

$$AC - B^2 > 0 \quad A > 0 \quad \text{极小值}$$

极大值在边界上

$$f_{\max}(x, y) = f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$$

7. 计算二次函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Px + q^T x + r$  的梯度和Hessian矩阵, 其中  $P \in \mathbb{S}_{++}^n$ ,  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .

$$\nabla f(x) = \frac{1}{2}Px + \frac{1}{2}P^T x + q = Px + q$$

$$\nabla^2 f(x) = P^T \quad \text{Hessian 矩阵 } [P^T]$$

9. 求出下述优化问题的极小值  $\begin{cases} \text{minimize} & f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - z^2 + yz \\ \text{subject to} & x + y - z = 1 \end{cases}$ 。

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 3x^2 + y^2 - z^2 + yz + \lambda(x + y - z - 1)$$

$$\mathcal{L}'_x = 6x + \lambda = 0 \quad ① \quad ② - ③ \quad y + 3z = 0 \quad y = -3z \quad ⑤$$

$$\mathcal{L}'_y = 2y + z + \lambda = 0 \quad ② \quad ① - ② \quad 6x - 2y - z = 0 \quad ⑥$$

$$\mathcal{L}'_z = -2z + y + \lambda = 0 \quad ③ \quad ⑤ \text{代} \lambda \quad 6x + 6z - z = 0$$

$$\mathcal{L}'_\lambda = x + y - z - 1 = 0 \quad ④ \quad x = -\frac{5}{6}z \quad ⑦$$

$$⑤, ⑦ \text{代} \lambda \quad ④ \quad -\frac{5}{6}z - 3z - z - 1 = 0 \quad z = -\frac{6}{29}$$

$$x = \frac{5}{29} \quad y = \frac{18}{29}$$

答案: .....

10. 设  $f(A) = \|X - AY\|^2$ , 其中  $A$ 、 $X$  和  $Y$  分别是维度为  $n \times m$ 、 $n \times k$  和  $m \times k$  的矩阵, 计算  $Df(A)$ 。

答案: .....

11. 方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$  是否存在实数解? 若存在, 解空间的维数是多少?

答案: .....

12. 判断题: 矩阵  $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$  是正交方阵。

答案: ~~X~~ .....

~~13.~~ 设  $W$  是三维欧氏空间中由  $(1, 1, 1)$  和  $(1, 0, 2)$  所生成的二维子空间, 计算向量  $(1, -1, 0)$  在  $W$  上的投影向量。

答案: .....

14. 对于实矩阵  $A_{m \times n}$  和  $B_{n \times m}$ , 若存在非零向量  $\alpha$  以及  $c \neq 0$  满足  $AB\alpha = c\alpha$ , 请写出矩阵  $BA$  的特征值为  $c$  的一个特征向量。

答案: ~~BA~~ .....

15. 计算向量  $(1, -2, 3)$  的  $\ell_1$  范数。

答案:  $1+2+3=6$  .....

16. 给定矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ , 计算函数  $f(x) = \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$  的最大值。

答案:  $f(x)_{\max} = \|A\|_2$   $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$   $\begin{vmatrix} \lambda-6 & -3 \\ -3 & \lambda-14 \end{vmatrix} = 0$   $(\lambda-6)(\lambda-14)-9=0$   $\lambda^2-20\lambda+75=0$   $(\lambda-5)(\lambda-15)=0$   $\sqrt{15}$

17. 判断题: 假设矩阵  $A$  的行向量线性无关, 请问  $AA^t$  是否是可逆方阵?

答案:  $\checkmark$  .....

~~18.~~ 利用奇异值分解计算矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  的 rank 1 逼近。

答案: .....

19. 请用简洁的语言解释大数定理。样本越多, 平均值越接近期望

10. 设  $f(A) = \|X - AY\|^2$ , 其中  $A$ 、 $X$  和  $Y$  分别是维度为  $n \times m$ 、 $n \times k$  和  $m \times k$  的矩阵, 计算  $Df(A)$

$$\begin{aligned} f(A) &= (X - AY)(X - AY)^T = (X - AY)(X^T - Y^T A^T) \\ &= XX^T - XY^T A^T - AYX^T + AY Y^T A^T \\ Df(A) &= -XY^T - XY^T + (Y Y^T A^T)^T + AY Y^T \\ &= -2XY^T + 2AY Y^T \end{aligned}$$

11. 方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$  是否存在实数解? 若存在, 解空间的维数是多少?

不存在

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

答案: .....

20. 请用简洁的语言解释中心极限定理。

答案: 服从高斯分布, 随机变量无限多个

21. 对于何种被估计量, 最大似然估计和最大后验估计是一致的。

答案: 先验无偏

22. 假设随机变量 $x$ 和 $y$ 的联合概率密度为 $f(x, y) = 1/4$ , 其中 $-1 \leq x, y \leq 1$ 。请问 $x$ 和 $y$ 是否正交? 是否独立? 是否相关?

答案: 正交, 独立, 不相关

23. 已知随机变量 $w = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{10000} z_i$ , 其中 $z_i$ 是相互独立的均匀分布随机变量,  $z_i \sim \mathcal{U}(-1, 1)$ 。请写出随机变量 $w$ 的近似概率密度函数。

答案:  $w \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{3})$

24. 假设 $y_1 = x_1 + w_1$ 和 $y_2 = x_2 + w_2$ , 其中 $w_1 \sim \mathcal{N}(a, M_1)$ 和 $w_2 \sim \mathcal{N}(b, M_2)$ 是独立的高斯噪声信号, 注意,  $a, b, M_1, M_2$ 都是已知常数。计算似然函数 $p(y_1|x_1)$ 。

答案:  $p(y_1|x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi M_1}} e^{-\frac{[y_1 - x_1 + a]^2}{2M_1}}$

25. 接上题, 定义2个向量,  $y = [y_1, y_2]^t$ 和 $x = [x_1, x_2]^t$ , 计算似然函数 $p(y|x)$ 。

答案: .....

26. 接上题, 当满足什么条件时, 最大似然函数等价于最小距离 $\|y - x\|^2$ 。

答案: 噪声独立, 且方差相等  $M_1 = M_2$

27. 对于通信系统来说, 传输的是信号, 信号承载着消息, 消息中的不确定成份是什么?

答案: 信息

28. 信息传输系统模型包括信源、编码器、\_\_\_?\_\_\_、译码器和信宿五个部分。请问“?”指的是什么?

答案: 信道

29. 盒子里有4个不同颜色的小球, 随机选取一个小球并确定颜色, 计算该事件提供的信息量。

答案:  $I = -\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 4 = 2$

30. 判断题: 信源发出消息 $x$ , 信宿收到消息 $y$ , 则公式 $I(x; y) = I(x) - I(y|x)$ 是否正确?  $\times$

答案: .....

31. 已知两个信源分别为  $\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} Y \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$ , 则在信源熵  $H(X)$  和  $H(Y)$  中, 较大的是  $H(Y)$ , 其值为多少 bit/符号?

答案:  $H(Y) = 4 \times 0.25 \log_2 4 = 2$  .....

32. 联合熵公式  $H(XY) = H(X) + H(Y)$  成立的条件是什么?

答案:  $X, Y$  独立 .....

33. 判断题: 对于固定的信源  $X$  和信宿  $Y$ , 平均互信息  $I(X; Y)$  具有凸状性, 是信源概率分布  $P(X)$  的上凸函数。

答案: .....

34. 判断题: 假设  $p$  和  $q$  是同一概率空间上的两种分布, 则  $D(p||q) = D(q||p)$ 。

答案:  $X$  .....

35. 判断题: 博弈问题中的帕雷托最优只是各种理想态标准中的最低标准。

答案: .....

36. 判断题: 不完全信息博弈中的不确定性比不完美信息博弈中的不确定性要低。

答案:  $X$  .....

37. 判断题: 如下图的博弈矩阵中, 策略组合  $(E, E)$  是一个纳什均衡解。

		Player 2	
		E	S
Player 1	E	2, 2	-1, 3
	S	3, -1	0, 0

答案: .....

38. 判断题: 斯塔克伯格博弈是多智能体强化学习的理论基础。

答案:  $X$  .....

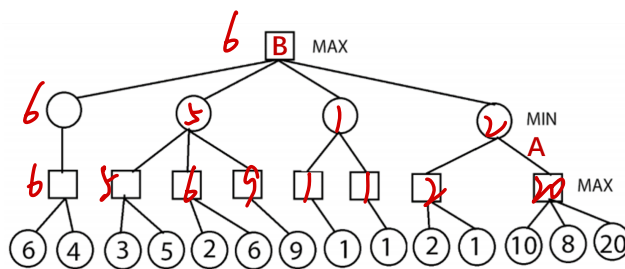
39. 判断题: 在一个完美回忆的不完美信息博弈中, 行为策略与混合策略等价。

答案:  $\checkmark$  .....

40. 一个正则型博弈可以等价转化为一个带有 ? 的不完美信息扩展型博弈。请问“?”指的是什么?

答案: 不完全信息

41. 判断题: 下图的博弈树中,  $A$ 处可以进行 $\alpha$ - $\beta$ 剪枝。



答案: ✓

42. 上图的博弈树中,  $B$ 处的值是多少?

答案: 6

43. 判断题: 已知 $L$ 问题是NP-complete问题, 如果 $S$ 可以规约到 $L$ 即 $S \leq L$ , 则 $S$ 是NP-hard问题。

答案: ✓

44. 判断题: NP-complete问题一定是NP-hard问题。

答案: ✓

45. 判断题: 如果 $P \subseteq NP$ , 则 $P=NP$ 。

答案: X

46. 判断题: 近似算法的近似度一定大于等于1。

答案: ✓

47. 判断题: 如果一个NP-complete问题有多项式时间复杂度的解法, 则所有NP-complete问题均有多项式时间复杂度的解法。

答案: ✓

48. 判断题: NP问题的补问题也是NP问题。

答案: X

49. 请将作业调度问题“已知 $m$ 个性能相同的处理器和 $n$ 个作业单核执行的时间记为 $J_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , 求最小的时间 $t$ 使得在 $t$ 时间内 $m$ 核完成 $n$ 个作业的调度”, 将其转化为判断问题。

答案: .....

50. 接上题, 将其转化为语言描述。

答案: .....