

# TÓM TẮT LÝ THUYẾT TOÁN HỌC 12

## CHƯƠNG 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

### Bài 1. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

#### 1. Các kiến thức cần nhớ

##### Định nghĩa:

Cho hàm số  $y=f(x)$  xác định trên  $K$  ( $K$  có thể là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng)

- Hàm số  $y=f(x)$  được gọi là đồng biến trên  $K$  nếu  $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Hàm số  $y=f(x)$  được gọi là nghịch biến trên  $K$  nếu  $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

##### Định lý:

Cho hàm số  $y=f(x)$  xác định và có đạo hàm trên  $K$

- a) Nếu  $f'(x) > 0, \forall x \in K$  thì hàm số  $y=f(x)$  đồng biến trên  $K$
- b) Nếu  $f'(x) < 0, \forall x \in K$  thì hàm số  $y=f(x)$  nghịch biến trên  $K$

##### Định lý mở rộng:

Giả sử hàm số  $y=f(x)$  có đạo hàm trên  $K$

- a) Nếu  $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên  $K$
- b) Nếu  $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên  $K$

#### 2. Một số dạng toán thường gặp

##### Dạng 1: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số.

##### Phương pháp:

- **Bước 1:** Tìm TXĐ của hàm số.
  - **Bước 2:** Tính đạo hàm  $f'(x)$ , tìm các điểm  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
  - **Bước 3:** Xét dấu đạo hàm và nêu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.
- + Các khoảng mà  $f'(x) > 0$  là các khoảng đồng biến của hàm số.
- + Các khoảng mà  $f'(x) < 0$  là các khoảng nghịch biến của hàm số.

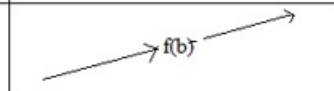
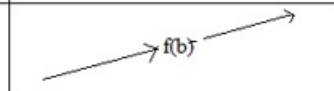
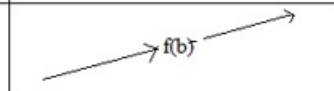
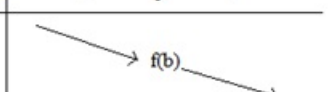
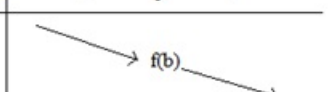
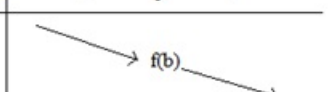



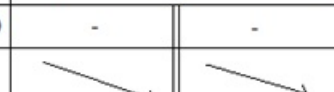
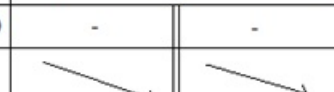
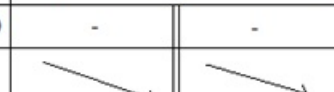
**Ví dụ 1:** Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số  $y=2x^4+1$

Ta có:

$y'=8x^3, y' > 0 \Leftrightarrow x > 0$  nên hàm số đã cho đồng biến trên  $(0; +\infty)$

$y' < 0 \Leftrightarrow x < 0$  nên hàm số đã cho nghịch biến trên  $(-\infty; 0)$

##### Một số trường hợp đặc biệt:

<table><tr><td>x</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>f(x)</td><td colspan="3"></td></tr></table>	x	a	b	c	f'(x)	+	0	+	f(x)				Hàm số đồng biến trên (a; c)
x	a	b	c										
f'(x)	+	0	+										
f(x)													
<table><tr><td>x</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>f(x)</td><td colspan="3"></td></tr></table>	x	a	b	c	f'(x)	-	0	-	f(x)				Hàm số nghịch biến trên (a; c)
x	a	b	c										
f'(x)	-	0	-										
f(x)													
<table><tr><td>x</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td>+</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>f(x)</td><td colspan="3"></td></tr></table>	x	a	b	c	f'(x)	+		+	f(x)				Hàm số đồng biến trên các khoảng (a; b) và (b; c) <b>Kết luận sai:</b> Hàm số đồng biến trên (a; c) hoặc hàm số đồng biến trên $(a; b) \cup (b; c)$ .
x	a	b	c										
f'(x)	+		+										
f(x)													
<table><tr><td>x</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td>-</td><td></td><td>-</td></tr><tr><td>f(x)</td><td colspan="3"></td></tr></table>	x	a	b	c	f'(x)	-		-	f(x)				Hàm số nghịch biến trên các khoảng (a; b) và (b; c) <b>Kết luận sai:</b> Hàm số nghịch biến trên (a; c) hoặc hàm số nghịch biến trên $(a; b) \cup (b; c)$ .
x	a	b	c										
f'(x)	-		-										
f(x)													

**Dạng 2:** Tìm giá trị của m để hàm số đơn điệu trên R.

**Phương pháp:**

- **Bước 1:** Tính  $f'(x)$

- **Bước 2:** Nêu điều kiện của bài toán:

+ Hàm số  $y=f(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'=f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $y'=0$  tại hữu hạn điểm.

+ Hàm số  $y=f(x)$  nghịch biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'=f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $y'=0$  tại hữu hạn điểm.

- **Bước 3:** Từ điều kiện trên sử dụng các kiến thức về dấu của nhị thức bậc nhất, tam thức bậc hai để tìm m.

**Ví dụ 2:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số  $y=(\frac{1}{3})x^3-(m+1)x^2-(2m+3)x+2017$  đồng biến trên R.

**Giải:** Hàm số đã cho đồng biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'=-x^2-2(m+1)x-(2m+3) \geq 0 \Leftrightarrow y'=-x^2-2(m+1)x-(2m+3) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2+(2m+3) \leq 0 \Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2+(2m+3) \leq 0 \Leftrightarrow m^2+4m+4 \leq 0 \Leftrightarrow m=-2$$

- Cho hàm số  $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$   $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ . Khi đó:
- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{a > 0, \Delta \leq 0\} \Leftrightarrow \{a < 0, \Delta \leq 0\} \Leftrightarrow \{a > 0, \Delta \leq 0\} \Leftrightarrow \{a < 0, \Delta \leq 0\}$

**Dạng 3:** Tìm m để hàm số đơn điệu trên miền D cho trước.

**Phương pháp:**

- **Bước 1:** Nêu điều kiện để hàm số đơn điệu trên D:

+ Hàm số  $y=f(x)$  đồng biến trên  $D \Leftrightarrow y'=f'(x) \geq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow y'=f'(x) \geq 0, \forall x \in D.$

+ Hàm số  $y=f(x)$  nghịch biến trên  $D \Leftrightarrow y'=f'(x) \leq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow y'=f'(x) < 0, \forall x \in D$ .

- **Bước 2:** Từ điều kiện trên sử dụng các cách suy luận khác nhau cho từng bài toán để tìm  $m$ .



Dưới đây là một trong những cách hay được sử dụng:

- Rút  $m$  theo  $x$  sẽ xảy ra một trong hai trường hợp:  $m \geq g(x), \forall x \in D$  hoặc  $m \leq g(x), \forall x \in D$ .

- Khảo sát tính đơn điệu của hàm số  $y=g(x)$  trên  $D$ .

- Kết luận:  $m \geq g(x), \forall x \in D \Rightarrow m \geq \max_{x \in D} g(x)$  hoặc  $m \leq g(x), \forall x \in D \Rightarrow m \leq \min_{x \in D} g(x)$ .

- **Bước 3:** Kết luận.

**Dạng 4: Tìm  $m$  để hàm số  $y=ax+bcx+dy=ax+bcx+d$  đồng biến, nghịch biến trên khoảng  $(\alpha;\beta)$**

- **Bước 1:** Tính  $y'$ .

- **Bước 2:** Nêu điều kiện để hàm số đồng biến, nghịch biến:

+ Hàm số đồng biến trên  $(\alpha;\beta) \Leftrightarrow \{ \begin{cases} y'=f'(x) > 0, \forall x \in (\alpha;\beta) \end{cases}$

+ Hàm số nghịch biến trên  $(\alpha;\beta) \Leftrightarrow \{ \begin{cases} y'=f'(x) < 0, \forall x \in (\alpha;\beta) \end{cases}$

- **Bước 3:** Kết luận.