Определение фазы движения человека по сигналам носимых устройств

Курдюкова Антонина Дмитриевна

Московский физико-технический институт

Курс: Автоматизация научных исследований (практика, В. В. Стрижов)/Группа 874

Эксперт: В. В. Стрижов

Консультанты: Г. В. Кормаков, Д. М. Тихонов

2021

Обнаружение фазы

Задача

Построение модели, определяющей фазу точек исходного временного ряда.

Проблема

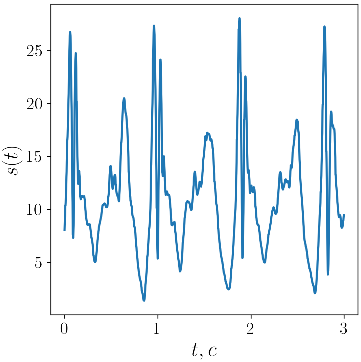
Нахождение фазы квазипериодического временного ряда.

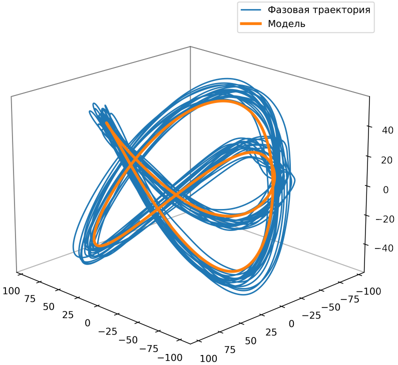
Решение

Переход в фазовое пространство уменьшенной размерности, в котором аппроксимация фазовой траектории не имеет самопересечений. Восстановление фазы по точкам полученной траектории.

Временной ряд и его фазовая траектория

- $\{s_i\}_{i=1}^N$ временной ряд
- $\mathbf{H} = \begin{bmatrix}\mathbf{s}_1 & \dots & \mathbf{s}_m\end{bmatrix}$, $m = N - n + 1$ траекторная матрица
- $\mathbf{s}_k \in \mathbb{R}^n$ образуют фазовую траекторию
- $\mathbf{X} = \mathbf{HW} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_m\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ понижение размерности (PCA)
- $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^p$ фазовая траектория в пространстве меньшей размерности





Смежные работы в изучаемой области

1. Motrenko A., Strijov V. Extracting fundamental periods to segment biomedical signals //IEEE journal of biomedical and health informatics, 2015.
2. Ignatov A. D., Strijov V. V. Human activity recognition using quasiperiodic time series collected from a single tri-axial accelerometer //Multimedia tools and applications, 2016.
3. Grabovoy A. V., Strijov V. V. Quasi-Periodic Time Series Clustering for Human Activity Recognition //Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020.

Понижение размерности фазового пространства

- Траекторная матрица

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ s_2 & \dots & s_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{N-n+1} & \dots & s_N \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

- Сингулярное разложение матрицы $\mathbf{H}$

$$\frac{1}{n}\mathbf{H}^{\mathsf{T}}\mathbf{H} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{\mathsf{T}}, \qquad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

- Выбранные главные компоненты $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p$, где

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{v}_k, \; k \in \overline{1, n}$$

- Восстановленная часть траекторной матрицы $\mathbf{H}$

$$\widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_1 + \dots + \mathbf{H}_p, \quad \mathbf{H}_j = \sqrt{\lambda_j}\mathbf{v}_j\mathbf{y}_j^{\mathsf{T}}, \; j \in 1, p.$$

- Понижение размерности $\mathbf{X} = \widehat{\mathbf{H}}\mathbf{W} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_m\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$

Аппроксимация фазовой траектории

- Модель $g : \varphi \to \mathbf{x}$ ставит в соответствие фазе $\varphi \in [0, 2\pi)$ точку средней траектории $\mathsf{E}(\mathbf{x}|\varphi)$ и значение дисперсии $\mathsf{D}(\mathbf{x}|\varphi)$, где $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$ – точка фазового пространства.
- Регрессия Надарая-Ватсона

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{x}|\varphi) = \frac{\sum\limits_{\boldsymbol{x}_k \in X} \boldsymbol{x}_k K\left(\frac{\rho(\varphi'_k, \varphi)}{h}\right)}{\sum\limits_{\boldsymbol{x}_k \in X} K\left(\frac{\rho(\varphi'_k, \varphi)}{h}\right)},$$

  где φ'_i – фаза, назначенная точке $\boldsymbol{x}_i$ с предположением о периоде T: $\varphi'_i = \frac{2\pi}{T} \cdot i \mod 2\pi, \; i \in \overline{1, m}$.
- Введена метрика

$$\rho(\varphi', \varphi) = \frac{1 - \cos(\varphi' - \varphi)}{2}, \quad \varphi', \varphi \in [0, 2\pi)$$

Пространство оптимальной размерности

Оптимальная размерность

Размерность находится путем проверки модели фазовой тракетории на наличие самопересечений.

Самопересечения

Точки, близкие в фазовом пространстве, с существенно разными фазами.

$$\exists\, i, j \in \overline{1, m}: \ \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|^2 < \ \mathrm{D}(\mathbf{x}_i|\varphi) + \mathrm{D}(\mathbf{x}_j|\varphi), \quad \|\boldsymbol{\varphi}_i - \boldsymbol{\varphi}_j\|_1 > \tfrac{\pi}{4}.$$

Модель определения фазы

Точки $\boldsymbol{x}_i \rightsquigarrow \boldsymbol{x}_j$ соседствуют, если $\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|_2^2 < \varepsilon$,
ε – гиперпараметр.

Предполложения

1. Точке с большим индексом соответствует большая фаза

$$j > i \;\rightarrow\; \varphi_j > \varphi_i \quad i, j \in \overline{1, m}.$$

2. Фазы соседствующих точек близки

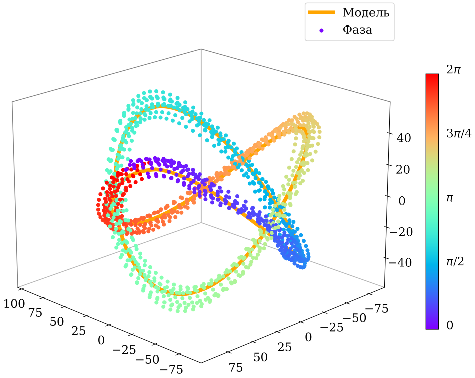
$$\boldsymbol{x}_i \rightsquigarrow \boldsymbol{x}_j \quad \rightarrow \quad \|\varphi_i - \varphi_j\| < \delta \quad i, j \in \overline{1, m}.$$

Искомое значение фазы

$$\widehat{\varphi}_i = \arg\min_{\varphi_j} L(\varphi_j).$$

$$L(\varphi_j) = \lambda_1 \sum_{i<j} |\varphi_i - \varphi_j|_+ + (1 - \lambda_1) \sum_{\|\mathrm{x}_i - \mathrm{x}_j\| < \varepsilon} \rho(\varphi_i, \varphi_j).$$

Результаты



Аппроксимация фазовой траектории. Значения фазы для точек фазовой траектории.

Заключение

- Предложена модель аппроксимации фазовой траектории
- Предложен критерий обнаружения самопересечений средней траектории
- Разработан алгоритм оценки фазы квазипериодического временного ряда