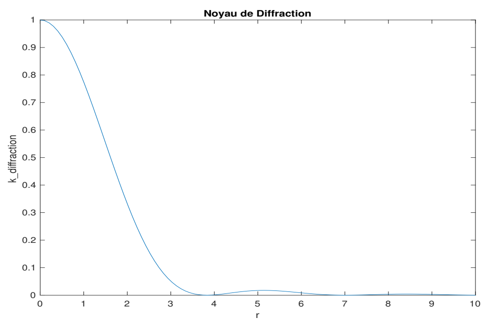
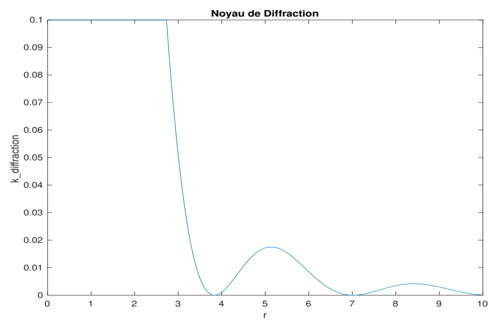
TP 1 - Diffraction par une Pupille Circulaire

Imagerie sous-pixellique

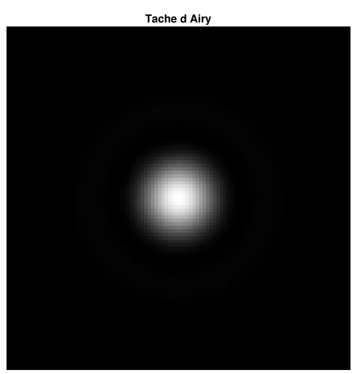
Tong ZHAO (tong.zhao@eleves.enpc.fr)

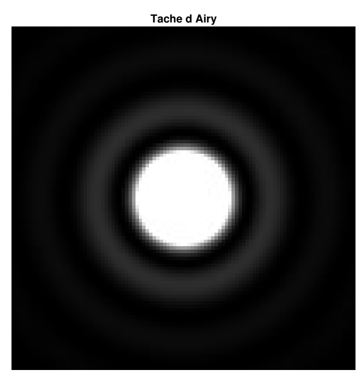
(1) En echantillonant 1000 points uniformément sur l'interval $[0.001, 10]$, on calcule le noyau de diffraction et trace la courbe. La figure à gauche correspond la fonction et celle à droite correspond la fonction bornée par 0.1.



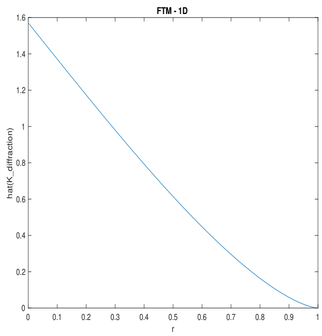


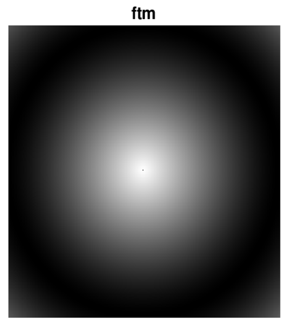
(2) On génère une grille de taille 100×100 sur l'interval $[-10, 10]^2$. Pour évider la quantité indeterminée $0/0$ dans les calculs, on met 0 sur le point d'orgine. La figure à gauche correspond la fonction sans saturation et celle à droite correspond la fonction avec saturation $[0, 0.1]$

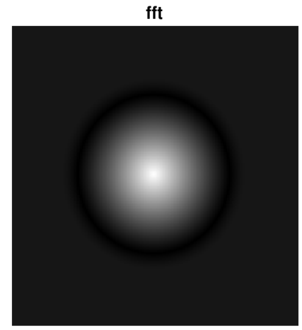




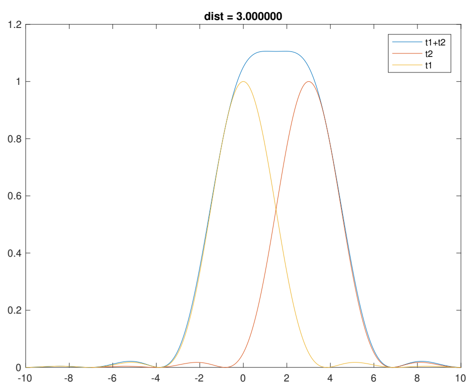
(3) On prend tout d'abord 100 points entre 0.001 et 1, ensuite on calcule le profil radial. Après on calcule la fonction de transfert de modulation sur une image bidimensionnelle de taille 201×201 echantillonnée sur l'interval $[-1, 1]^2$. Pour comparer le résultat avec la transformée de Fourier discrète, on applique la commande **fft2** calculée sur une tâche d'Airy sur le domaine $[-100, 100]^2$.

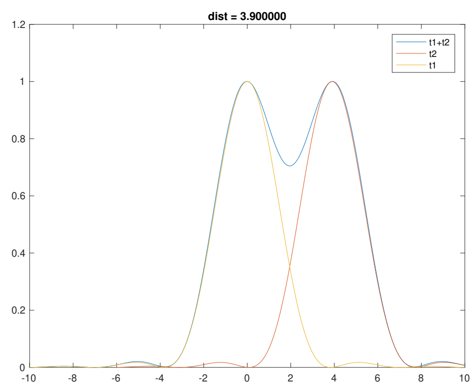






(4) Afin de déterminer numériquement le résultat, on fixe tout d'abord une tâche d'Airy et on translate l'autre petit à petit. Ici on s'intéresse aux deux points, le point qui représent le critère de rayleigh et le point qu'on n'admet plus qu'un seul maximum sur la droite qui joint les centres. On voit que la proportion entre deux distances est vers $\frac{3.0}{3.9} = 0.77$.





(5) On calcule le noyau de diffraction associé à un disque de diamètre D occulté au centre par un disque de diamètre ϵD.

$$K(x,y) = \frac{1}{2f^2}\left|\int_{\epsilon D/2}^{D/2}\int_0^{2\pi}\exp\left(\frac{2i\pi\rho(xcos\theta + ysin\theta)}{\lambda f}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho\right)\right|^2$$

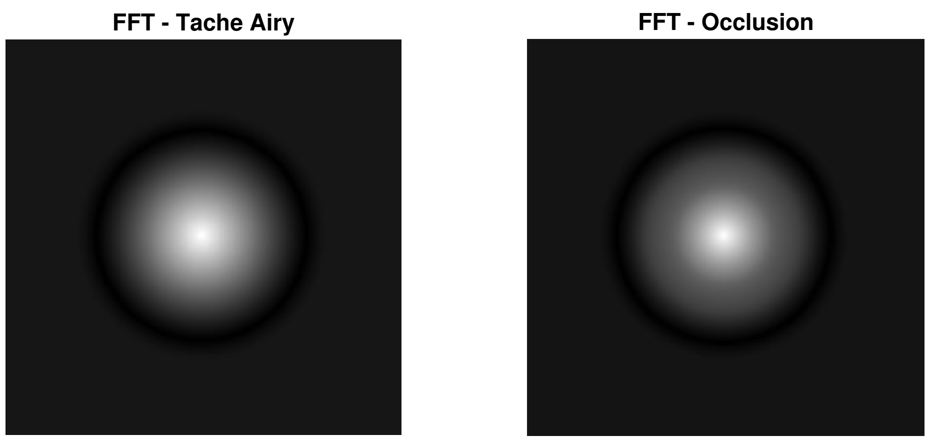
En utilisent la propieté de symmétrie et le changement de variable $\rho' = 2r\rho/D$, on a

$$K(\mathbf{x}) = \frac{1}{2f^2}\left|\frac{2D^2}{4r^2}\int_{\epsilon r}^{r}\int_0^{\pi} cos(\rho' sin\theta)\rho' \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho'\right|^2 = \frac{\pi^2 D^4}{8f^2}\left|\frac{1}{r^2}\int_{\epsilon r}^{r} J_0(\rho')\rho' \mathrm{d}\rho'\right|^2$$

Donc on a:

$$K(\mathbf{x}) = \frac{\pi^2 D^4}{32 f^2}\left(\frac{2J_1(r)}{r} - \frac{2\epsilon J_1(\epsilon r)}{r}\right)^2 = C\left(\frac{2J_1(r)}{r} - \frac{2\epsilon J_1(\epsilon r)}{r}\right)^2$$

(6) On fait une tâche d'airy sur un disque et l'autre sur une pupille de téléscope. On utilise la fonction **ftt2** pour trouver le support de la FTM et on visualize le résultat. La figure à gauche correspond le support de la FTM sur une disque et celle à droite correspond le support de la FTM sur une pupille de telescope. On en déduit que les résolutions respectives d'un téléscope et d'une lunette de mêmes diamètres sont prèsque les memes.



Fiche 1: kernel_diffraction.m

```
function [ k_df ] = kernel_diffraction( r, c )
%calculate the kernel of the diffraction
%   k_df(r) = C * (2 J1(r) / r)^2
  if r == 0
    k_df = c;
  else
    k_df = c .* ((2 .* besselj(1, r) ./ r).^2);
  end
end
```

Fiche 2: ftm_diffraction.m

```
function [ k_ftm ] = ftm_diffraction( r, c )
%Module de la transform?e de Fourier
%   k_ftm = c * (arccos(r) - r * sqrt(1 - r^2))

  k_ftm = c .* (acos(r) - r .* sqrt(1 - r.^2));
end
```

Fiche 3: occlusion_diffraction.m

```
function [ occ_df ] = occlusion_diffraction( r, delta, c )
%Calculer le noyau de diffraction sur une pupille de t?l?scope
%   Detailed explanation goes here
  term_r = 2 .* besselj(1, r) ./ r;
  term_delta = (2 * delta) .* besselj(1, delta .* r) ./ r;
  occ_df = c .* (term_r - term_delta) .^ 2;
end
```

Fiche 4: main.m

```
%%% Exercice 1
%%% Diffraction par une pupille circulaire

%% Part 1

lr = linspace(0.001, 10, 1000);
lk_df = kernel_diffraction(lr, 1);

figure(1);
%plot(lr, lk_df);
plot(lr, min(0.1, lk_df));
title('Noyau de Diffraction');
xlabel('r');
ylabel('k\_diffraction');

%% Part 2
```

```
[lx, ly] = meshgrid(linspace(-10, 10, 100), linspace(-10, 10,
    100));
lr = sqrt(lx .^ 2 + ly .^ 2);
lk_df = kernel_diffraction(lr, 1);

figure(2);
%imshow(lk_df,'InitialMagnification','fit');
% Resultat avec saturation
imshow(lk_df,[0, .1],'InitialMagnification','fit');
title('Tache d Airy');

%% Part 3

lr = linspace(0.001, 1, 100);
lk_ftm = ftm_diffraction(lr, 1);

figure(3);
plot(lr, lk_ftm);
title('FTM - 1D');
xlabel('r');
ylabel('hat(K\_diffraction)');
[lx, ly] = meshgrid(-1:0.005:1, -1:0.005:1);
lr = sqrt(lx .^ 2 + ly .^ 2);
lk_ftm = abs(ftm_diffraction(lr, 1));
lk_ftm(lr == 0) = 0;

[lx_fft, ly_fft] = meshgrid(-100:1:100, -100:1:100);
lr_fft = sqrt(lx_fft .^ 2 + ly_fft .^ 2);
lk_df = kernel_diffraction(lr_fft, 1);
lk_df(lr_fft == 0) = 0;
lfft = fftshift(abs(fft2(lk_df)));

figure(4);
subplot(1, 2, 1);
imshow(lk_ftm, [], 'InitialMagnification', 'fit');
title('FTM');
subplot(1, 2, 2);
imshow(lfft, [], 'InitialMagnification', 'fit');
title('FFT');

%% Part 4

lr = linspace(-10, 10, 1000);
lk_df = kernel_diffraction(lr, 1);

k = 195;
dist = 20. / 1000 * k;
```

```
lk_sum = lk_df;
lk_sum(k+1:end) = lk_sum(k+1:end) + lk_df(1:1000-k);

figure(5);
a1 = plot(lr, lk_sum);
hold on;
a2 = plot(lr(k+1:end), lk_df(1:1000-k));
hold on;
a3 = plot(lr, lk_df);
legend([a1; a2; a3], 't1+t2', 't2', 't1');
title(sprintf('dist = %f', dist));

%% Part 6

[lx, ly] = meshgrid(-1:1:100, -1:1:100);
lr = sqrt(lx .^ 2 + ly .^ 2);
lk_ftm = kernel_diffraction(lr, 1);
lk_ftm_o = occlusion_diffraction(lr, 0.25, 1);

lk_ftm(lr == 0) = 0;
lk_ftm_o(lr == 0) = 0;

figure(6);
subplot(1, 2, 1);
imshow(fftshift(abs(fft2(lk_ftm))), [], 'InitialMagnification', '
    fit');
title('FFT - Tache Airy');
subplot(1, 2, 2);
imshow(fftshift(abs(fft2(lk_ftm_o))), [], 'InitialMagnification',
     'fit');
title('FFT - Occlusion');
```