Géométrie et Espace de Formes

Exercice 1

ZHAO Tong

1.1 On peut considérer une submersion $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$, $f(x_0, x_1, \cdots, x_{d-1}, x_d) = \sum_{i=0}^{d} x_i^2 - 1$, alors $f^{-1}(0)$ correspond exactement la sphère S^d. De plus, la fonction f est C^∞ à support compact, donc on en conclut que la sphère $S^d = \{ (x_0, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \sum_{i=0}^{d} x_i^2 = 1 \}$ est une sous variété C^∞ de dimension d de $\mathbb{R}^{d+1}$

1.2 On considère une fonction $f : M_n^+(\mathbb{R}) \to Sym_n(\mathbb{R})$, $f(A) = A^TA - Id$ (parce que $f(A)^T = (A^TA)^T - Id = f(A)$). $f^{-1}(0) = SO(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1$ et $A^TA = Id \}$. On calcule ensuite la differential de f. On suppose H une matrice dans $M_n^+(\mathbb{R})$ suffisament petite, alors on a

$$f(A+H) - f(A) = (A+H)^T(A+H) - A^TA = H^TA + A^TH + o(H^TH)$$

Donc $Df(A)H = H^TA + A^TH$ est surjective en tout point car pour tout $C \in Sym_n(\mathbb{R})$, on trouve la solution $H = \frac{AC}{2}$ tel que $Df(A)H = \frac{1}{2}(CA^TA + A^TAC) = C$. $A \in SO(n)$

De plus $M_n^+(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, $Sym_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, donc $SO(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1$ et $A^TA = Id \}$ est une sous variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$

1.3 On considère une espace de dimension n centré au pôle nord. L'application $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d+1}$ est comme suit : pour tout $p \in \mathbb{R}^d$, on associe p et le pôle sud, et $g(p)$ correspond au point d'insection du segment et S^d. Donc on a une paramétrisation de S^d au voisinage d'un pôle.

1.4 Tout d'abord, on montre que $A_g : x \to A(g, x)$ est une injection. Pour $\forall\, x, y \in X$, si $A_g(x) = A_g(y)$, on a $A(g^{-1}, A(g, x)) = A(g^{-1}, A(g, y)) \Rightarrow A(g^{-1}g, x) = A(g^{-1}g, y) \Rightarrow x = y$.

Ensuite, on montre que A_g est une surjection. Pour $\forall x \in X$, on a $x = A(e, x) = A(gg^{-1}, x) = A(g, A(g^{-1}, x)) = A_g(A(g^{-1}, x)) = A_g(y)$ où $y = A(g^{-1}, x) \in X$ est unique.

Donc A_g définit bien une bijection sur X.

En prennant deux groupes G et G', deux applications $A : G \times X \to X$, $A' : G' \times X \to X$. Donc pour $\forall g \in G$, $g' \in G'$, $A_g \circ A'_{g'} = A_{gg'}$. On en déduit que la propriété d'action définit un morphisme $G \to E(X)$ puisque $A_g \circ A'_{g'} = A_{gg'}$

1.5 On a $y = e \cdot y \in Gy$, donc il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$ (car $Gx = Gy$).

Pour tout $x \in X$, on a $Gx = Gx$

$(\forall g' \in G,\ g'g \in G)$

Pour tout $x, y \in X$, si $Gx = Gy$, on a $g \cdot x = y$. $Gy = Ggx = Gx$

Pour tout $x, y, z \in X$, si $Gx = Gy$, $Gy = Gz$, on a $g \cdot x = y$. $G(g \cdot x) = Gx = Gz$

on en déduit que $\sim$ vient de la notion ……

1.6 Dans le cas de la métrique euclidienne. $d(x, x_i) = \|x - x_i\|_2$, donc la moyenne de Fréchet est $x_* = \arg\min_x \sum_{i=1}^{k} \|x - x_i\|_2$ qui correspond exactement la définition de la moyenne géodésique

1.7 D'après (1), on a $d_M(m, m') \triangleq \inf\{d_G(g, g') \mid g x_0 = m,\ g' x_0 = m'\}$

Sachant que $g^{-1}g = e \in G$, $g^{-1}g' = g'' \in G$, $g^{-1}G = G$ car pour chaque $g'' \in G$, si on prend $g' = g g'' \in G$, on a $g^{-1}g' = g''$. Donc $d_M(m, m') = \inf\{d_G(e, g') \mid e x_0 = x_0 = m,\ g' x_0 = m'\} =$ $\inf\{d_G(e, g') \mid g' m = m'\}$

1.9 On considère l'application $(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)_{(i,j) \in I \times J}$, alors pour $i_1, i_2 \in I$, $j_1, j_2 \in J$

$(\varphi_{i_1} \times \psi_{j_1}) \circ (\varphi_{i_2} \times \psi_{j_2})^{-1} = (\varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2}^{-1}) \times (\psi_{j_1} \cdot \psi_{j_2}^{-1})$. Sachant que $\varphi_{i_1} \varphi_{i_2}^{-1} \in C^P$, $\psi_{j_1} \psi_{j_2}^{-1} \in C^P$, leur produit est aussi C^P.

Sachant que $\bigcup_{(i,j) \in I \times J} U_i \times V_j = M \times N$, pour $\forall\, U_{i_1}, U_{i_2} \in U$, $V_{j_1}, V_{j_2} \in V$, $(\varphi_{i_2} \times \psi_{j_2})((U_{i_1} \times V_{j_1}) \cap (U_{i_2} \times V_{j_2})) = \varphi_{i_2}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \times \psi_{j_2}(V_{j_1} \cap V_{j_2})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{m+n}$.

Donc $(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)_{(i,j) \in I \times J}$ engend bien des applications de changement de carte C^P.

1.8 $d(R_{g_1 g_2})(h)(\xi) = h(\xi (R_{g_2} R_{g_1})) = h((\xi R_{g_2}) R_{g_1}) = dR_{g_1}(h)(\xi R_{g_2}) = dR_{g_2}(dR_{g_1}(h))(\xi) =$ $dR_{g_2}(h g_1)\, dR_{g_1}(h)(\xi)$