Géométrie et Espaces de Formes - Exercice 5

Tong ZHAO (tong.zhao@eleves.enpc.fr)

Exo 5.1

Etant donnée que $f \in \mathscr{C}^{1,lip}_{loc}(E,F)$, il existe $K_R \geq 0$ tel que pour tous x, y dans la boule $B_E(0,R)$ sur E, on a $|df(x) - df(y)| \leq K_R|x-y|$ et $|f(x) - f(y)| \leq K'_R|x-y|$.

Etant donnée que $g \in \mathscr{C}^{1,lip}_{loc}(F,G)$, il existe $K_R \geq 0$ tel que pour tous x, y dans la boule $B_F(0,R)$ sur F, on a $|dg(x) - dg(y)| \leq K_R|x-y|$.

Donc on a:

$$\begin{aligned}
|dg(f(x))df(x) - dg(f(y))dg(y)| &= |dg(f(x))df(x) - dg(f(y))df(x) + dg(f(y))df(x) - dg(f(y))df(y)| \\
&\leq |df(x)||dg(f(x)) - dg(f(y))| + |dg(f(y))||df(x) - df(y)| \\
&\leq K_G|df(x)||f(x) - f(y)| + K_F|dg(f(y))||x-y| \\
&\leq K_G|df(x)|K'_G|x-y| + K_F|dg(f(y))||x-y| \\
&= (K_G K'_G|df(x)| + K_F|dg(f(y))|)|x-y| \\
&= K|x-y|
\end{aligned}$$

Sachant que $g \circ f \in \mathscr{C}^1(E,G)$, $g \circ f \in \mathscr{C}^{1,lip}_{loc}$.

Exo 5.2

(1) Selon la formule trouvée dans le section 1,

$$\begin{aligned}
H_r(q,p) &= \frac{1}{2}\langle Kj, j\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\langle K\sum_{i=1}^{k}\delta_{x_i}^{p_i}, \sum_{j=1}^{k}\delta_{x_j}^{p_j}\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} p_i K(x_i,x_j) p_j
\end{aligned}$$

(2) Si V s'injecte continuement dans $C_b^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, selon la proposition V.2, δ_x^α est dans $\mathscr{C}_{loc}^{1,lip}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, V^*)$. On en déduit donc que K est $\mathscr{C}_{loc}^{1,lip}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

(3) On calcule ses dérivées partielles de H_r et on obtient les équations hamiltoniennes comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x_i} = \frac{\partial H_r}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^k p_j K(x_i, x_j) \\ \dot{p_i} = -\frac{\partial H_r}{\partial x_i} = -p_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial K}{\partial x_i}(x_i, x_j) p_j \end{cases}$$

Exo 5.3

$$\begin{aligned}
&\big(dj(q+\Delta q, p+\Delta p)\cdot(\delta q, \delta p)|v\big) - \big(dj(q,p)\cdot(\delta q,\delta p)|v\big) \\
&= \big(\delta p, v\circ(q+\Delta q)\big) + \big(p+\Delta p|dv\circ(q+\Delta q)\cdot\delta q\big) - \big(\delta p, v\circ q\big) - \big(p|dv\circ q\cdot\delta q\big) \\
&= \big(\delta p, v\circ(q+\Delta q - q)\big) + \big(dv^*\circ(q+\Delta q)\cdot(p+\delta p) - dv^*\circ q\cdot p|\delta q\big) \\
&\leq K|v|_V|\Delta q||\delta p| + K|v|_V|\Delta q||\Delta p||\delta q|
\end{aligned}$$

ce qui nous indique que dj est localement lipschitzienne et donc $j \in \mathscr{C}_{loc}^{1,lip}(\mathscr{B}\times B_e^*, V^*)$.

Exo 5.4

Sachant que $q_1(s)$ et $y(s)$ sont continue sur $[0,1]$, $s \to q_1(s) - y(s)$ est continue en s pour tout $s \in [0,1]$.

Selon le lemme V.1, $g = \int_0^1 |q_1(s) - y(s)|^2 ds$ est dans $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est $dg(q_1(s)) = q_1(s) - y(s)$, qui est dans $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}^d)$.

Exo 5.5

$$\begin{aligned}
H_r(q,p) &= \frac{1}{2}(Kj|j) \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \int_0^1 p(r)K(q(r),x)dr, \int_0^1 \delta_{x_s}^{p_s} ds \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 p^T(r)K(q(r),q(s))p(s)drds
\end{aligned}$$

On calcule ses dérivées partielles de H_r et on obtient les équations hamiltoniennes comme suit:

$$\begin{cases} \dot{q}(x) = \frac{\partial H_r}{\partial p}(x) = \int_0^1 K(x, q(s))p(s)ds \\ \dot{p}(x) = -\frac{\partial H_r}{\partial q}(x) = p(x)^T \int_0^1 \frac{\partial K}{\partial q}(q, q(s))p(s)ds \end{cases}$$