# TP 5 - Interpolation, Translation et Diffraction

Imagerie sous-pixellique

Tong ZHAO (tong.zhao@eleves.enpc.fr)

## 1 Exercice 13

**(2)** Soit $u = u[k], k \in \mathbb{Z}$, on peut exprimer $v$ comme:

$$v[k] = \begin{cases} u[\frac{k}{2}], & \text{si k est pair} \\ 0.5(u[\frac{k+1}{2}] + u[\frac{k-1}{2}]), & \text{sinon} \end{cases}$$

On calcule la transformée de fourier discrête de $v$,

$$\begin{aligned}
\hat{v}(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}, k\ pair} u[\frac{k}{2}]e^{-ik\xi} + \sum_{k\in\mathbb{Z}, k\ impair} \frac{1}{2}(u[\frac{k+1}{2}] + u[\frac{k-1}{2}])e^{-ik\xi} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} u[n]e^{-i2n\xi} + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} u[n]e^{-i(2n-1)\xi} + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} u[n]e^{-i(2n+1)\xi} \\
&= \hat{u}(2\xi) + \frac{e^{i\xi}}{2}\hat{u}(2\xi) + \frac{e^{-i\xi}}{2}\hat{u}(2\xi) \\
&= \hat{u}(2\xi)(1 + cos(\xi))
\end{aligned}$$

Le zoom de $u$ obtenu par interpolation de Shannon est exprimé comme:

$$w[k] = U[\frac{k}{2}] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u[n]sinc(\frac{k}{2} - n)$$

Donc on a:

$$\begin{aligned}
\hat{w}(\xi) &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} u[n]sinc(\frac{k}{2} - n)e^{-ik\xi} \\
&= \sum_{l,n\in\mathbb{Z}} u[n]sinc(l - n)e^{-i2l\xi} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} u[n]e^{-i2n\xi} \sum_{l\in\mathbb{Z}} sinc(l - n)e^{-i2(l-n)\xi} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} u[n]e^{-i2n\xi} \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(2\xi) \\
&= \hat{u}(2\xi)\mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(\xi)
\end{aligned}$$

On en conclut que quand $\xi$ est dans la période $[-\frac{\xi}{2}, \frac{\xi}{2}]$, $\hat{v}(\xi) = \hat{w}(\xi)(1 + cos(\xi))$.

**(2)** Soit $u = u[m, n], m \in \{0, \cdots, M-1\}, n \in \{0, \cdots, N\}$, on exprime $v$ comme:

$$v[m,n] = \begin{cases} u[\frac{m}{2},\frac{n}{2}], & \text{si m et n sont pairs} \\ \frac{1}{2}(u[\frac{m-1}{2},\frac{n}{2}]+u[\frac{m}{2},\frac{n}{2}]), & \text{si m est impair, n est pair} \\ \frac{1}{2}(u[\frac{m}{2},\frac{n-1}{2}]+u[\frac{m}{2},\frac{n+1}{2}]), & \text{si n est impair, m est pair} \\ \frac{1}{4}(u[\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}]+u[\frac{m-1}{2},\frac{n+1}{2}]+u[\frac{m+1}{2},\frac{n-1}{2}]+u[\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}]), & \text{si m et n sont impairs} \end{cases}$$

On calcule ensuite la transformée de Fourier discrète de $v$:

$$\begin{aligned} \hat{v}[x,y] =& \sum_{m,n} v[m,n]e^{-2i\pi(\frac{mx}{M}+\frac{ny}{N})} \\ =& \Big(1+\frac{1}{2}e^{-\frac{2i\pi x}{M}}+\frac{1}{2}e^{\frac{2i\pi x}{M}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{2i\pi y}{N}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{2i\pi y}{N}}+\frac{1}{4}e^{-\frac{2i\pi y}{N}}e^{-\frac{2i\pi x}{M}}+\frac{1}{4}e^{\frac{2i\pi y}{N}}e^{-\frac{2i\pi x}{M}} \\ &+\frac{1}{4}e^{-\frac{2i\pi y}{N}}e^{\frac{2i\pi x}{M}}+\frac{1}{4}e^{\frac{2i\pi y}{N}}e^{\frac{2i\pi x}{M}}\Big)\sum_{k,l} u[k,l]e^{-2i\pi(\frac{k(2x)}{M}+\frac{l(2y)}{N})} \\ =& \Big(1+cos(\frac{2\pi x}{M})+cos(\frac{2\pi y}{N})+cos(\frac{2\pi x}{M})cos(\frac{2\pi y}{N})\Big)\hat{u}(2x,2y) \end{aligned}$$

Le zoom de $u$ obtenu par interpolation de Shannon est exprimé comme:

$$u[m,n] = \sum_{k,l} u(k,l)sinc(\frac{m}{2}-k)sinc(\frac{n}{2}-l)$$

Donc on a:

$$\begin{aligned} \hat{u}[x,y] &= \sum_{m,n} u[m,n]e^{-2i\pi(\frac{mx}{M}+\frac{ny}{N})} \\ &= \sum_{p,q,k,l} u[k,l]sinc(p-k)sinc(q-l)e^{-2i\pi(\frac{2px}{M}+\frac{2qy}{N})} \\ &= \sum_{k,l} u[k,l]e^{-2i\pi(\frac{2kx}{M}+\frac{2ly}{N})}\sum_{p,q} sinc(p-k)sinc(q-l)e^{-2i\pi(\frac{2(p-k)x}{M}+\frac{2(q-l)y}{N})} \\ &= \hat{u}[2x,2y]\mathbb{1}_{-\frac{\pi}{2}}(x)\mathbb{1}_{-\frac{\pi}{2}}(y) \end{aligned}$$

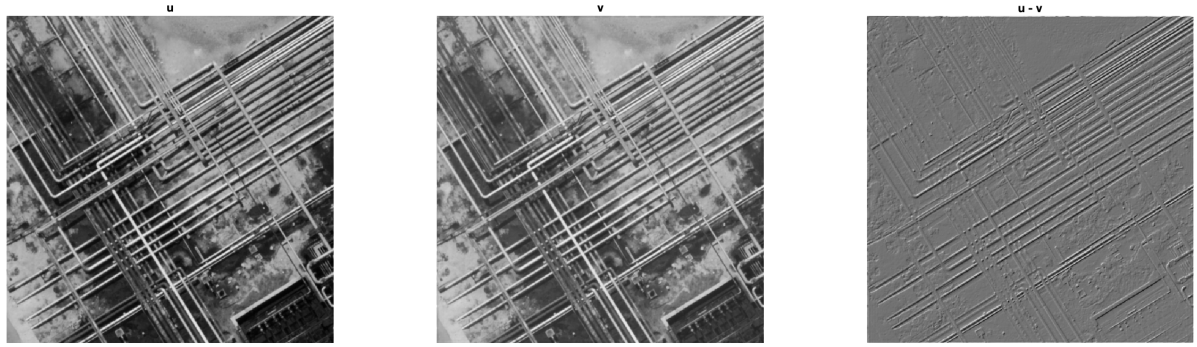
On en conclut que quand $x$ est dans la période $[-\frac{\xi}{2},\frac{\xi}{2}]$, $y$ est dans la période $[-\frac{\xi}{2},\frac{\xi}{2}]$, on a

$$\hat{v}[x,y] = \hat{w}[x,y]\Big(1+cos(\frac{2\pi x}{M})+cos(\frac{2\pi y}{N})+cos(\frac{2\pi x}{M})cos(\frac{2\pi y}{N})\Big)$$

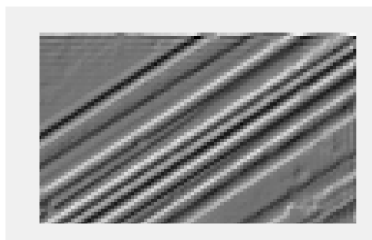
.

## 2 Exercice 16

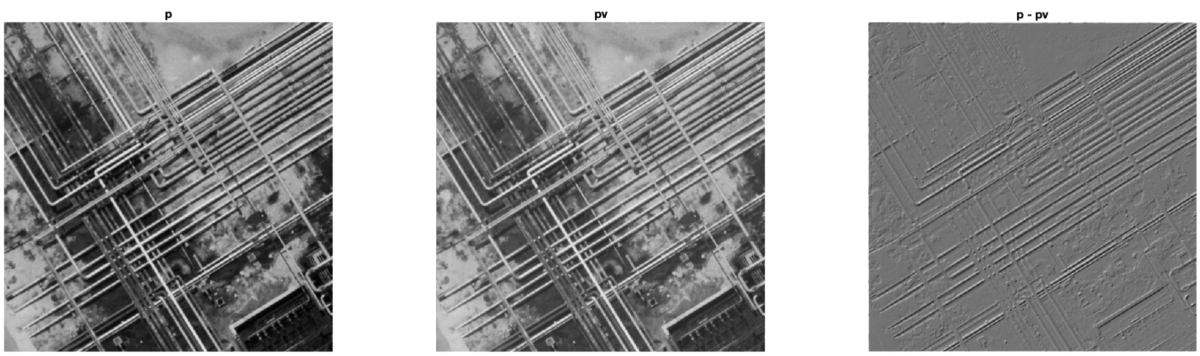
On affiche l'image $u$, $v$, et $u-v$ et on voit que sur les bords, les pixels ne sont pas continus parfaitement.




Par exemple, le texture du bord est totalement que celui du contenu de l'image.



Une solution partique est qu'on applique la translation sur la composant périodique de l'image. Dans ce cas-là, le résultat s'améliore.




## 3 Exercice 3

**(1)** On suppose que la taille de l'image est $W$ et on a $tan(\theta) = \frac{W}{f}$ d'où $\theta = \frac{1}{180}^{\circ}$. Comme le webcam réalise l'échantillonnage critique correspondant à la limite spectrale de la diffraction, on a: $\delta_c = \frac{\lambda f}{2D}$. Donc le nombre de pixels en diamètre est égale à $\frac{W}{\delta_c} = \frac{2Dtan\theta}{\lambda} \approx 25.87$.

**(2)** Le focal des yeux de l'homme est 17mm et le diamètre de la pupille ouverte est 5mm. On calcule le rayon de la tâche d'Airy par $r_a = 1.22\frac{\lambda}{f} = 1.22 \times \frac{380\times10^{-9}}{5\times10^{-3}} = 3.8 \times 10^{-4}m$. La distance pour assurer de ne plus pouvoir distinguier les pixels est donc $d = \frac{f}{r_a}l = \frac{17\times10^{-3}\times0.5}{2\times1080\times3.8\times10^{-4}} \approx 0.0104m$.

**(3)** On calcule tout d'abord le longeur du pixel $\delta_c = \sqrt{\frac{24\times36\times10^{-6}}{3\times10^{8}}} \approx 2.425 \times 10^{-6}m$. Selon la forumule de l'échantillonnage critique correspondant à la limite de diffraction, $\frac{f}{D} = \frac{2\delta_c}{\lambda} \approx 3.23$.

**Fiche 1: main.m**

```
%%% Exercise 16
u = double(imread('images/bouc.pgm'));
v = ffttrans(u,0.5,0.5);

figure(1);
subplot(1, 3, 1);
imshow(u, []);
title('u');
subplot(1, 3, 2);
imshow(v, []);
title('v');
subplot(1, 3, 3);
imshow(u - v, []);
title('u - v');

%% Solution

[p,s] = perdecomp(u);
pv = ffttrans(p,0.5,0.5);

figure(2);
subplot(1, 3, 1);
imshow(u, []);
title('p');
subplot(1, 3, 2);
imshow(v, []);
title('pv');
subplot(1, 3, 3);
imshow(u - v, []);
title('p - pv');
```