Géométrie et Espaces de Formes - Exercice 6

Tong ZHAO (tong.zhao@eleves.enpc.fr)

Exo 6.1

Soit $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ une suite minimisante, on a:

$$\sup_n d_G(Id, \varphi_n) < \infty$$

Par suite $\exists$ $(u_n) \in (L^2_V)^{\mathbb{N}}$ tel que $\varphi_n = \phi_1^{u_n}$ et $\|u_n\|_2 = d_G(Id, \varphi_n)$. $\|u_n\|_2$ est borné en n. Il existe u_{n_k} qui converge faiblement vers u_∞. On a donc:

$$\|u_\infty\|_2 \leq \lim \|u_{n_k}\|_2$$

On a $\varphi_\infty \in G$ et $\varphi_\infty \stackrel{\triangle}{=} \phi_1^\infty$, alors:

$$d_G(Id, \varphi_\infty) \leq \|u_\infty\|_2 \leq \lim d_G(Id, \varphi_{n_k})$$

Par la continuté faiblement du flot, φ_{n_k} converge compacte uniformément vers φ_∞ d'où $E(\varphi_\infty) \leq \lim E(\varphi_{n_k})$. $d_G(\varphi, \varphi') \geq \|u_\infty\|_2 \geq \|u_\infty\|_1 \geq d_G(\varphi, \varphi')$.

Ainsi:

$$J(\varphi_\infty) = R(d_G(Id, \varphi_\infty)) + E(\varphi_\infty)$$

$$R(d_G(Id, \varphi_\infty)) = \underline{\lim} R(d_G(Id, \varphi_\infty))$$

$$E(\varphi_\infty) = \underline{\lim} E(\varphi_\infty)$$

donc $\inf J(\varphi) \leq J(\varphi_\infty) = \underline{\lim} R(d_G(Id, \varphi_\infty)) + \underline{\lim} E(\varphi_\infty) \leq \underline{\lim} J(\varphi_n) = \inf J(\varphi)$.

On en déduit alors qu'il existe $\varphi^* \in G_V$ tel que $J(\varphi^*) = \inf_{\varphi \in G_V} J(\varphi)$.