Géométrie et Espaces de Formes - TP2

Tong ZHAO (tong.zhao@eleves.enpc.fr)

1 De l'appariement linéaire aux difféomorphismes

Exo 1. On génère aléatoirement cinq points dans $\mathbb{R}^2$ noté *lmk1* et on les pertube par un bruit gaussien noté *lmk2*. On calcule la grille de déformation en utilisant $n_t \in \{3, 5, 10\}$.

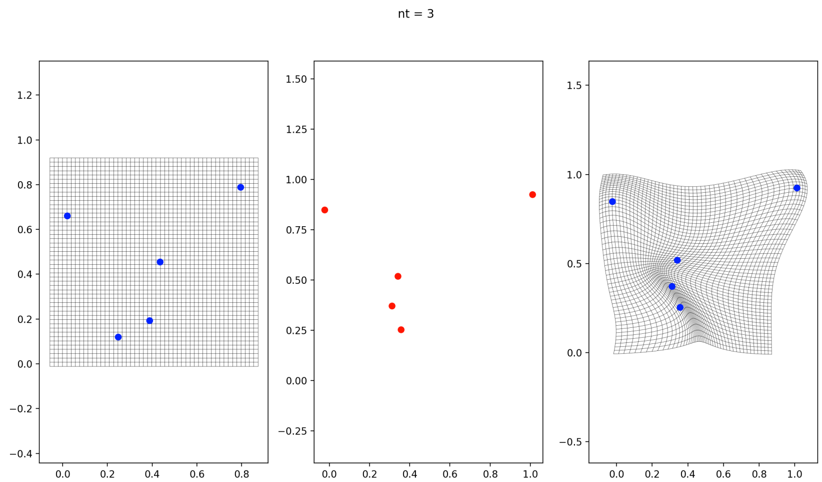

Figure 1: $n_t = 3$

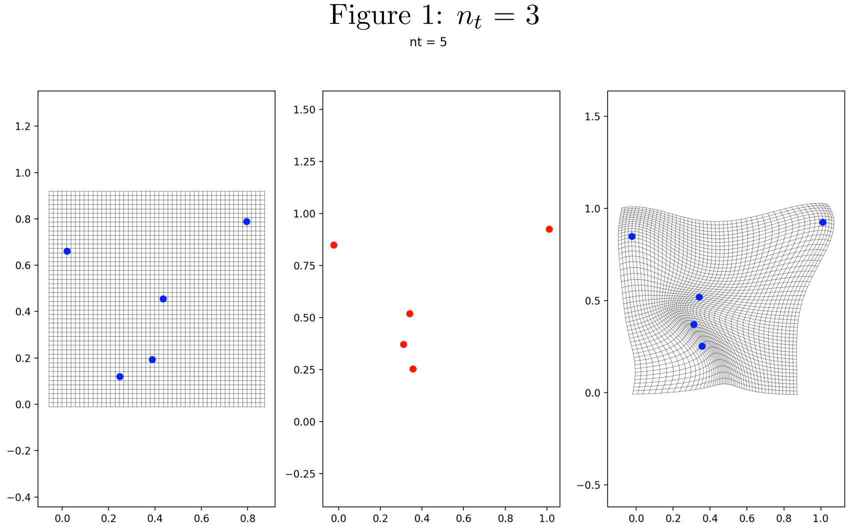

Figure 2: $n_t = 5$

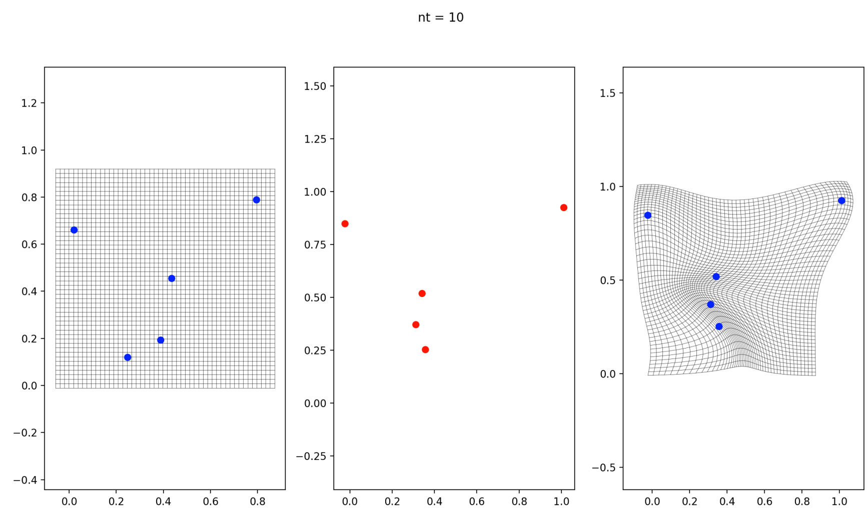

Figure 3: $n_t = 10$

Exo 3. On applique tout d'abord l'appriement sur les données artificielles (cinq points) avec le pas de descente 0.01. Après on l'applique sur l'exemple des poissons avec un pas de descente 0.00001.

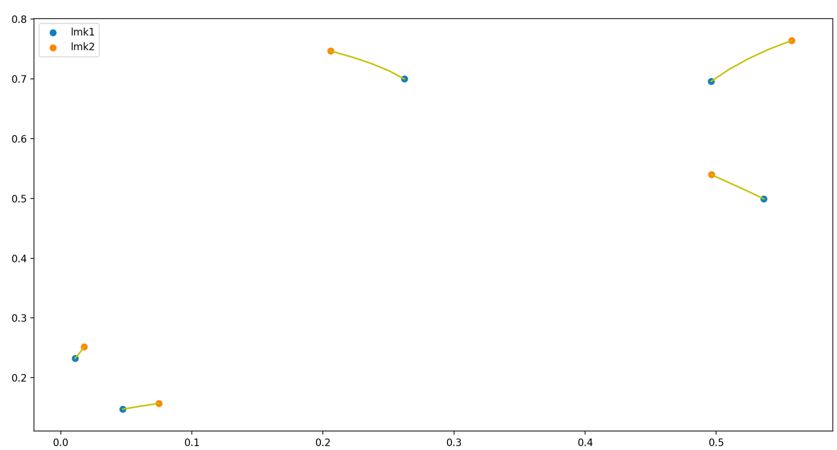

Figure 4: L'exemple des points générés

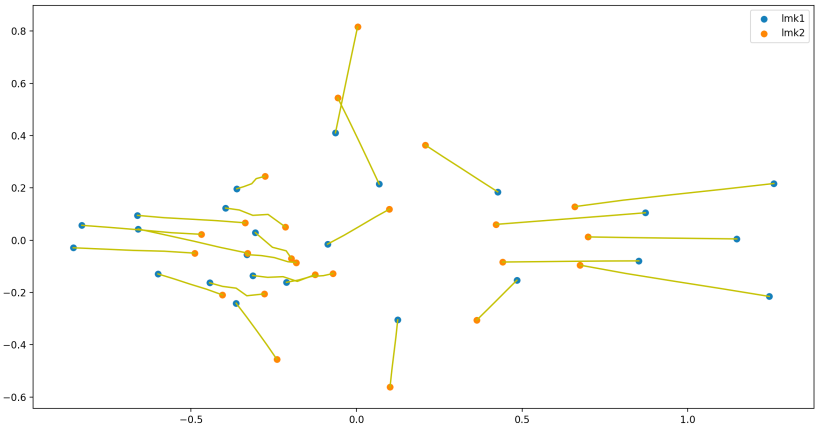

Figure 5: L'exemple des poissons

Exo 4. Ce qu'on a optimisé dans le modèle précédent est les points bougés après chaque déformation en temp discret. Il est equivalent à optimiser le champs de vecteurs car si on prend le résidu de chaques deux pas, on se retrouve exactement $(v(t,\cdot))_{t\in[0,1]}$.

2 Approche hamiltonnienne et équations géodésiques

Exo 6. On a:

$$
\begin{aligned}
L(q,\dot{q}) &= \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbb{K}\ \dot{q} \\
H(p,q) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} p_i^T p_j K(q_i,q_j) \\
\nabla_{p_i} H &= \sum_{j=1} p_j K(q_i,q_j) \\
\nabla_{q_k} H &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} p_i^T p_j \frac{\partial K(q_i,q_j)}{\partial q_k}
\end{aligned}
$$

où $\mathbb{K}$ est la matrice de gram avec $\mathbb{K}_{ij} = K(q_i,q_j)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} \\
&= -\nabla_p H(p,q)\nabla_q H(p,q) + \nabla_q H(p,q)\nabla_p H(p,q) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Donc $H(p,q)$ est constant pour une trajectoire géodésique.

Exo 7. On prend la configuration précédente dans l'exercice 1. On initialise aléatoirement p_0 et on fais un shooting résolu par un schéma d'Euler simple. Le résultat est comme suit:

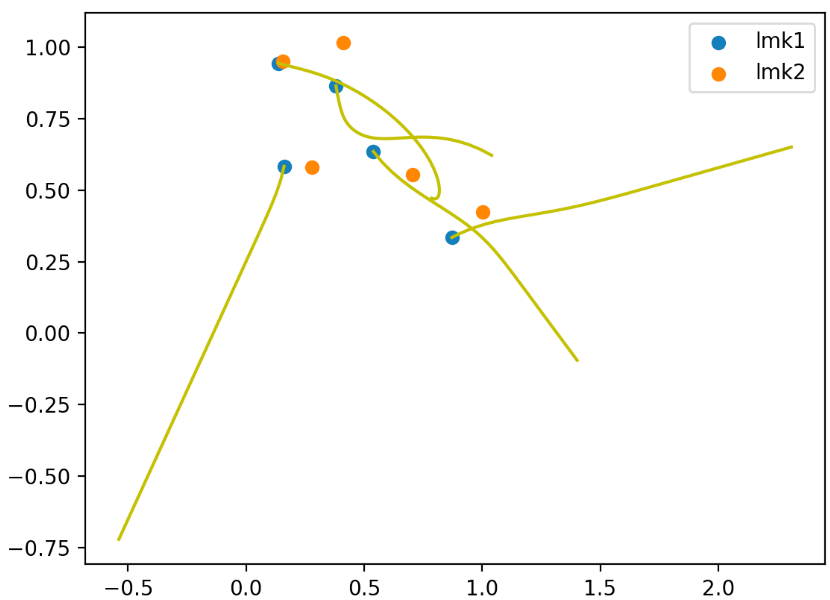

Figure 6: L'exemple des points

Exo 8. On optimise la initialisation p_0 en utilisant une descente de gradient. La perte est la somme des carrés des distances des $q_i(1)$ aux z_i. Le résultat est comme suit:

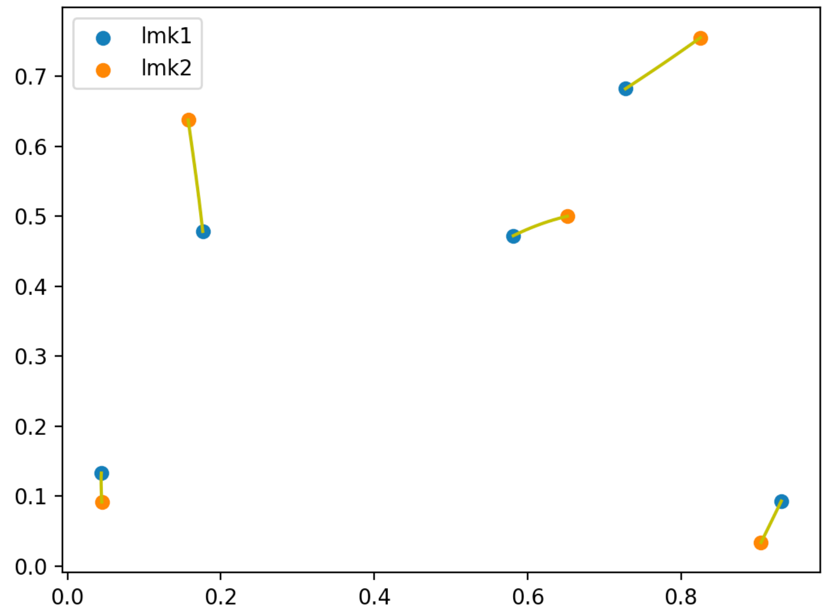

Figure 7: L'exemple des points

On observe que la descente de gradient nous donne un résultat raisonable, car le problème est assez simple. Mais si on le pratique sur le poisson, il ne converge pas à un bon optimum.

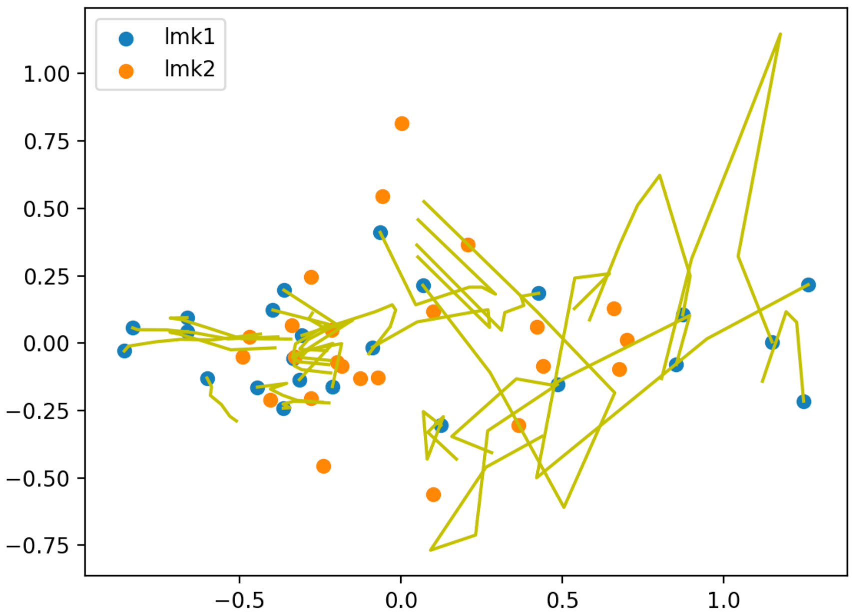

Figure 8: L'exemple des poisson par la descente de gradient simple

Par contre si on utilise un optimisateur plus sophistiqué, on obtient un résultat raisonable.

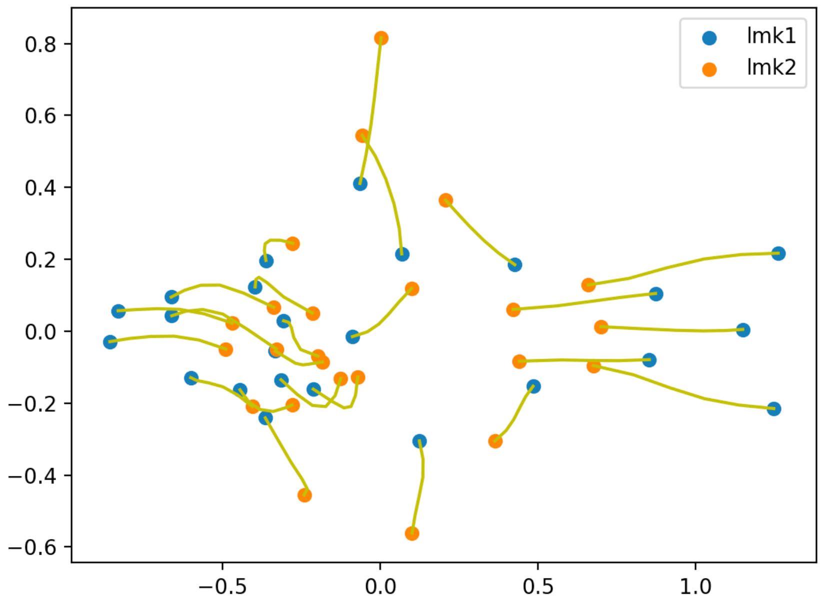

Figure 9: L'exemple des poisson par LBFGS

Sachant qu'il n'y a pas de régularisation sur le trajectoire de p, parfois le résultat obtenu n'est pas lisse.