Géométrie et Espaces de Formes - Exercice 4

Tong ZHAO (tong.zhao@eleves.enpc.fr)

Exo 4.1

Soit H_f tient, on a pour tous $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ suffisament petits:

$$|f(q+\epsilon_1, u) - f(q,u)| \leq K\epsilon_1(|u|+1)$$

$$|f(q, u+\epsilon_2) - f(q,u)| \leq K\epsilon_2(|q-b|+1)$$

On pose $q' = q + \epsilon_1$, $u' = u + \epsilon_2$. Par l'inégalité triangulaire:

$$\begin{aligned}
|f(q', u') - f(q,u)| &\leq |f(q', u') - f(q, u')| + |f(q, u') - f(q,u)| \\
&\leq K(|u'|+1)|q'-q| + K(|q-b|+1)|u'-u| \\
&= K\Big(\big(|q-b|+1\big)|u'-u| + \big(|u'|+1\big)|q'-q|\Big)
\end{aligned}$$

ce qui entraîne la condition (33).

Exo 4.2

(1) On pose $\delta m = (\delta x_1, \cdots, \delta x_k)$ une petite perturbation en m, et donc:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial m}(m,u) &= \frac{f(m+\delta m, u) - f(m,u)}{\delta m} \\
&= \Big(\frac{u(x_1+\delta x_1) - u(x_1)}{\delta x_1}, \cdots, \frac{u(x_k+\delta x_k) - u(x_k)}{\delta x_m}\Big) \\
&= \Big(du(x_1), \cdots, du(x_k)\Big)
\end{aligned}$$

Donc:

$$\frac{\partial f}{\partial m}(m,u)\delta m = \Big(du(x_1)\delta x_1, \cdots, du(x_k)\delta x_k\Big)$$

Sachant que $u \in V$ admissible,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u}(m,u) &= \frac{f(m,u+\delta u) - f(m,u)}{\delta u} \\
&= \Big(\frac{(u+\delta u)(x_1) - u(x_1)}{\delta u}, \cdots, \frac{(u+\delta u)(x_k) - u(x_k)}{\delta u}\Big) \\
&= \Big(\frac{\delta u(x_1)}{\delta u}, \cdots, \frac{\delta u(x_k)}{\delta u}\Big)
\end{aligned}$$

Donc on a: $\frac{\partial f}{\partial u}(m,u)\delta u = \big(\delta u(x_1), \cdots, \delta u(x_k)\big)$.

(2) Du fait que $u \in V$ est admissible, du est continue sur $\mathscr{B}$, ce qui nous indique que $\frac{\partial f}{\partial m}(m,u)\delta m = \big(du(x_1)\delta x_1, \cdots, du(x_k)\delta x_k\big)$ est continue sur $(\mathbb{R}^d)^k$. Du fait que la fonctionnel δ est linéaire, $\frac{\partial f}{\partial u}(m,u)\delta u = \big(\delta u(x_1), \cdots, \delta u(x_k)\big)$ est continue. On en déduit que f est $\mathscr{C}^1$.

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial f}{\partial m}(m,u)\delta m\Big| &\leq \sum_{i=1}^{k} |du(x_i)\delta x_i| \\
&\leq C|u|_V|\delta m|
\end{aligned}$$

Donc on a: $|\frac{\partial f}{\partial m}| \leq C|u|_V$.

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial f}{\partial u}(m,u)\delta u\Big| &\leq \sum_{i=1}^{k} |\delta u(x_i)| \\
&\leq C|\delta u|_V|m|
\end{aligned}$$

Donc on a: $|\frac{\partial f}{\partial u}| \leq C|m|$.

En prennant $K = C$, $b = 0$, on retrouve la condition (H_f).

Exo 4.3

(1) On calcule tout d'abord la dérivée partielle par rapport à q:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial q}(q,u) &= \frac{u \circ (q+\delta q) - u \circ q}{\delta q} \\
&= \frac{u \circ q + \delta q \cdot du \circ q + o(\delta q) - u \circ q}{\delta q} \\
&= du \circ q
\end{aligned}
$$

Par hypothèse, $u \in V$ est admissible donc $\frac{\partial f}{\partial q}$ est continue. On calcule ensuite la dérivée partielle par rapport à u:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u}(q,u) &= \frac{(u+\delta u) \circ q - u \circ q}{\delta u} \\
&= \frac{u \circ q + \delta u \circ q - u \circ q}{\delta u} \\
&= \frac{\delta u \circ q}{\delta u}
\end{aligned}
$$

Comme δu est linéaire, $\frac{\partial f}{\partial u}$ est continue. On en déduit que f est $\mathscr{C}^1$.

(2) Inspiré par l'exercice précédente, on a:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial q}(q,u)\delta q\right| &= |\delta q \cdot du \circ q| \\
&\leq C|u|_V|\delta q|
\end{aligned}
$$

Et donc $\frac{\partial f}{\partial q}(q,u) \leq C|u|_V$.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial u}(q,u)\delta u\right| &= |\delta u \circ q| \\
&\leq C|\delta u|_V|q|
\end{aligned}
$$

Et donc $\frac{\partial f}{\partial u}(q,u) \leq C|q|$. On en déduit que f satisfait les conditions (H_f).

Exo 4.4 Du fait que $C(q,u) = \frac{1}{2}|u|_V^2$ est indépendant de q, la dérivée partielle de C par rapport à

q est donc 0, qui satisfait la seconde hypothèse de (H_C).

On calcule la dérivée partielle par rapport à u:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial u}(q,u)\delta u &= C(q,u+\delta u) - C(q,u) \\ &= \frac{1}{2}|u+\delta u|_V^2 - \frac{1}{2}|u|_V^2 \\ &= \langle u, \delta u\rangle_V + o(\delta u)\end{aligned}$$

Et donc:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial C}{\partial u}(q,u)\delta u\right| &= |\langle u, \delta u\rangle_V| \\ &\le |u|_V|\delta u|_V\end{aligned}$$

En prennant $K = 1$, on a $|\frac{\partial C}{\partial u}| \le K|u|$, qui satisfait la première condition de (H_C).

Exo 4.5

(1) D'après le théorème IV.3, le hamiltonien $H(q,p,u) = \big(p|f(q,u)\big) - C(q,u)$. En prenant le côut $C(q,u) = \frac{1}{2}|u|_V^2$ dans l'exercice précédente, on a:

$$\begin{aligned}H(q,p,u) &= \big((p_1,\cdots,p_k)|(u(q_1),\cdots,u(q_k))\big) - \frac{1}{2}|u|_V^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k}(p_i|u(q_i)) - \frac{1}{2}|u|_V^2\end{aligned}$$

Les équations hamiltoniennes sont:

$$\begin{cases}\dot{q_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = u(q_i) \\ \dot{p_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}^\star(q_i,u_i)p_i \\ \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}^\star p - u = 0\end{cases}$$

Et donc la solution $u^\star = \frac{\partial f}{\partial u}^\star p$

(2) Comme précédemment, le hamiltonien est:

$$H(q,p,u) = \big(p|q \circ u\big) - \frac{1}{2}|u|_V^2$$

Les équations hamiltoniennes sont:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = u \circ q \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}^\star (q_i, u_i) p_i = -(du \circ q)^\star p \\ \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}^\star p - u = 0 \end{cases}$$

Et donc la solution $u^\star = \frac{\partial f}{\partial u}^\star p$