Géométrie et Espaces de Formes - Exercice 2

Tong ZHAO (tong.zhao@eleves.enpc.fr)

Exo 2.1

On considère un espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d) \triangleq \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) | \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi < +\infty\}$ muni un produit scalaire $\langle f, g\rangle_{H^s} = \sum_{|\alpha|\leq s} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

Tout d'abord on montre que H^s est un espace de Hilbert. Selon la définition de l'espace de Sobolev, la fonction F: $f \to \left(\sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)^{1/2}$ définit bien une norme $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$ sur H^s. Pour le montrer explicitement, on prend deux fonctions f, $g \in H^s(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} &= \Big(\sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha f + \partial^\alpha g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\Big)^{1/2} \\
&\leq \Big(\sum_{|\alpha|\leq s} \left[\|\partial^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\partial^\alpha g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right]^2\Big)^{1/2} \\
&\leq \Big(\sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\Big)^{1/2} \\
&= \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}$$

ce qui nous indique que la fonction vérifie l'inégalité triangulaire. Après on montre que l'espace H^s est complete. Posant une suite de Cauchy $\{f_i\}_{i=1}^\infty \subset H^s$, l'ensemble $\{\partial^\alpha f_i\}_{i=1}^\infty$ est une suite de Cauchy dans l'espace $L_2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\|\alpha\| \leq s$. Sachant que l'espace L_2 est complet, il existe une fonction $g_\alpha \in L_2(\mathbb{R}^2)$ telle que $g_\alpha - \lim_{i\to\infty} \partial^\alpha f_i \to 0$. Pour tout $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
\langle f, \partial^\alpha \phi\rangle &= \lim_{i\to\infty} \langle f_n, \partial^\alpha \phi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \lim_{i\to\infty} \langle \partial^\alpha f, \phi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \lim_{i\to\infty} \langle g_\alpha, \phi\rangle
\end{aligned}$$

ceci indique que $f \in H^s$ existe et $\lim_{i\to\infty} f_i \to f$. On en déduit que $H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$, la fonction d'évaluation $\delta^\alpha : h \to \langle h(x), \alpha \rangle$ est une forme linéaire, grâce à la propriété du produit scalaire dans L_2. Si $s > \frac{d}{2}$, selon le théorème de Sobolev Embedding, $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^d)$, la fonction d'évaluation est continue. On en déduit que H^s est un ENR.

Exo 2.2

On a $K(x, y) = f(x)^T f(y) = \langle f(x), f(y) \rangle_{\mathbb{R}^d}$, qui nous indique que K définit bien un noyau, associé un espace de Hilbert $\mathbb{R}^d$ minu un produit scalaire $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tel que pour $\forall h_1, h_2 \subset \mathbb{R}^d$, $\langle h_1, h_2 \rangle = h_1^T h_2$.

Exo 2.3

Sachant que A et B sont deux matrices symétriques positives de taille $n \times n$, on les décompose en éléments propres. Soit $\{\lambda_i^a\}_{i=1}^n$ les valeurs propres de A, $\{v_i^a\}_{i=1}^n$ les vecteurs propres associés, on a $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i^a v_i^a (v_i^a)^T$. De la même façon, on décompose B comme $B = \sum_{i=1}^n \lambda_i^b v_i^b (v_i^b)^T$. Donc le produit d'Hadamard de A et B peut s'exprimer comme suit:

$$
\begin{aligned}
A \circ B &= \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i^a v_i^a (v_i^a)^T \Big) \circ \Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j^b v_j^b (v_j^b)^T \Big) \\
&= \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b \Big(v_i^a (v_i^a)^T \Big) \circ \Big(v_j^b (v_j^b)^T \Big) \\
&= \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b \Big(v_i^a \circ v_j^b \Big) \Big(v_i^a \circ v_j^b \Big)^T
\end{aligned}
$$

On en déduit que $A \circ B$ est symmétrique et semi-positive définitive. Après on va montrer que le produit est positive. On considère deux matrices $C = v^c (v^c)^T$, $D = v^d (v^d)^T$ (c'est-à-dire leurs valeurs propres sont tous 1), pour chaque vecteur a, on a:

$$
a^T \Big(v_i^c \circ v_j^d \Big) \Big(v_i^c \circ v_j^d \Big)^T a = \Big(\sum_k v_{ik}^c v_{jk}^d a_k \Big)^2 \geq 0
$$

Sachant que D est positive, il existe j tel que $v_{jk}^d a_k > 0$ pour certains k. De même façon, C est positive, donc il existe i tel que $v_{ik}^c v_{jk}^d a_k > 0$ pour certains k. Donc pour cette paire (i, j),

$$a^T\left(v_i^c \circ v_j^d\right)\left(v_i^c \circ v_j^d\right)^T a > 0$$

Revenons au cas général, $A \circ B > 0$ ce qui nous indique que le produit est positif définitif.

Maintenant on pose deux noyau $K_1(x, y)$ et $K_2(x, y)$, on voulais montrer que $K(x, y) = K_1(x, y) \circ K_2(x, y)$ est un noyau. On a prouvé que $K(x, y)$ vérifie $\sum_{i,j} a_i^* K(x_i, x_j) a_j \geq 0$, il nous reste la propriété $K(x, y) = K(y, x)^T$.

$$\begin{aligned}
K(x, y) &= K_1(x, y) \circ K_2(x, y) \\
&= \langle \phi_1(x), \phi_1(y) \rangle \circ \langle \phi_2(x), \phi_2(y) \rangle \\
&= \Big(\sum_i \phi_{1,i}(x)\phi_{1,i}(y) \Big) \circ \Big(\sum_j \phi_{2,j}(x)\phi_{2,j}(y) \Big) \\
&= \sum_{i,j} \Big(\phi_{1,i}(x) \circ \phi_{2,j}(x) \Big) \Big(\phi_{1,i}(y) \circ \phi_{2,j}(y) \Big) \\
&= \sum_{i,j} \phi_{ij}(x)\phi_{ij}(y) \\
&= \phi(x)^T \phi(y)
\end{aligned}$$

où $\phi_{ij}(z) = \phi_{1,i}(z) \circ \phi_{2,j}(z)$. Donc $K(y, x)^T = K(x, y)$ et on en conclut que $K(x, y)$ est un noyau.

Exo 2.4

On suppose que le noyau $K(x, y)$ est définit sur un ENR dont les opérateurs de translations $\tau : H \to H$ sont des isométries. En prennant $\tau_{-x} : \tau_{-x}h(z) = h(z - x)$ on a:

$$K(x, y) = \langle x, y \rangle_H = \langle \tau_{-x}x, \tau_{-x}y \rangle_H = \langle 0, y - x \rangle_H = \rho(y - x)$$

où $\rho(z) = \langle 0, z \rangle_H$. On en conclut que le noyau K est invariant par translation.

Exo 2.5

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ et sa transformée de fourier se calcule comme suit:

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-i\xi x}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-i\xi x}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-i\xi x}dx \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{e^{(1-i\xi)x}}{1-i\xi}\Big]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\Big[\frac{e^{-(1+i\xi)x}}{1+i\xi}\Big]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi}\Big) \\
&= \frac{1}{1+\xi^2}
\end{aligned}
$$

Par la formule d'inversion, on a $\hat{(\rho)}(\xi) = \frac{1}{2}e^{-|\xi|}$, qui est hermetienne positive. Le théorème de Bochner nous montre que $\rho(r)$ définit bien un noyau positif.

Exo 2.6

On veut montrer que chaque fonction $f \in H$ est continue si K est continue.

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)|^2 &= |\,\langle f, K(x,\cdot) - K(x_0,\cdot)\rangle\,|^2 \\
&\leq \|f\|^2\big[K(x,x) - 2K(x,x_0) + K(x_0,x_0)\big] \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)}
\end{aligned}
$$

Quand $x \to x_0$, la terme $\big[K(x,x) - 2K(x,x_0) + K(x_0,x_0)\big] \to 0$, donc $|f(x) - f(x_0)|^2 \to 0$, ce qui nous montre que f est continue sur H. $K\sigma_x^\alpha \in H$ donc $g(x) : x \to K\sigma_x^\alpha$ est continue.

On considère maintenant la fonction $g(x)$. Sachant que $\mathcal{X}$ est séparable, $g(x) = K(x,\alpha)$ est continue, on a $G = \{g(x)|x \in \mathcal{X}\}$ est séparable. Le span engendré par nombres rationnels est dense dans G. Donc $H = \overline{G}$ est séparable.

Exo 2.7 (1)

Pour toute famille de points x_I dans $\mathbb{R}^d$ et toute famille c_I de scalaires, on a:

$$\sum_{i,j\in I} \rho(x_i - x_j)c_ic_j = \sum_{i,j\in I} c_ic_j \int \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\, e^{i\langle \xi, x_i\rangle} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\, e^{-i\langle \xi, x_j\rangle} \hat{\rho}(\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \Big| \sum_{j\in I} c_j\ e^{-i\langle \xi, x_j\rangle} \Big|^2 \hat{\rho}(\xi)d\xi$$

Exo 2.7 (2)

Sachant que $\hat{\rho}(\epsilon)$ est réelle et positive, pour chaque vecteur $c \in \mathbb{R}^d$ $(c \neq 0)$, on a:

$$c^T K c = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \Big| \sum_{j\in I} c_j\ e^{-i\langle \xi, x_j\rangle} \Big|^2 \hat{\rho}(\xi)d\xi > 0$$

Donc K est definis potisive. On en déduit que K est inversible.

Au cas gaussien, $\rho(x-y) = e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2\sigma^2}}$, sa transformée de fourier $\hat{\rho}(\epsilon) = e^{-\frac{\sigma^2\epsilon^2}{2}}$ est réelle et strictement positive. On en déduit alors le noyau gaussien est inversible.

Exo 2.8

On pose u sous la forme $\sum_{i\in I} K(x,x_i)\alpha_i$ et on réecrit la fonction $J(u)$ en fonction de α. Alors on a:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^T \mathbb{K}\alpha + \frac{\gamma^2}{2} \sum_{i\in I} |\sum_{j\in I} K(x_i, x_j)\alpha_j - a_i|^2$$

La différentielle de f en α est donc

$$Df_\alpha(h) = \alpha^T \mathbb{K} h - \gamma^2 a_I^T \mathbb{K} h + \gamma^2 \alpha^T \mathbb{K}^T \mathbb{K} h$$

Ainsi $Df_\alpha(h) = 0$, si et seulement si $\alpha^T\big(\mathbb{K} + \frac{Id}{\gamma^2}\big) = a_I^T$, donc on a:

$$\alpha_I = (\mathbb{K} + \frac{Id}{\gamma^2})^{-1} a_I$$

Alors on a:

$$\begin{aligned}
J(u^*) &= \frac{1}{2}\alpha_I^T \mathbb{K}\alpha_I + \frac{\gamma^2}{2}\big(\mathbb{K}\alpha_I - a_I\big)^T\big(\mathbb{K}\alpha_I - a_I\big) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_I^T \mathbb{K}\alpha_I + \frac{\gamma^2}{2}\Big(\mathbb{K}\alpha_I - (\mathbb{K} + \frac{Id}{\gamma^2})\alpha_I\Big)^T\Big(\mathbb{K}\alpha_I - (\mathbb{K} + \frac{Id}{\gamma^2})\alpha_I\Big) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_I^T \mathbb{K}\alpha_I + \frac{1}{2\gamma^2}\alpha_I^T \alpha \\
&= \frac{1}{2}\alpha_I^T \Big(\mathbb{K} + \frac{Id}{\gamma^2}\Big)\alpha_I
\end{aligned}$$

Quand $\gamma \to \infty$, on retrouve l'appariement exact.