TP 4 - Décomposition Periodic et Smooth

Imagerie sous-pixellique

Tong ZHAO (tong.zhao@eleves.enpc.fr)

1 Exercice 11

(1) Le but de la fonction *perdecomp* est de décomposer une image en deux composante: la composante périodique et la composante lisse en utilisant la formule suivante:

$$\hat{s}(u)(q,r) = \frac{\hat{v}(q,r)}{4 - 2\cos\frac{2\pi q}{M} - 2\cos\frac{2\pi r}{N}}$$

Les premiers huit lignes construisent la matrix v, les quatre suivantes calculent s par la transformée de fourier et la dernière calcule p par la relation $p = u - s$ dans le domaine temporel.

(2) On visualise maintenant p et s sur l'image *lena.pgm*

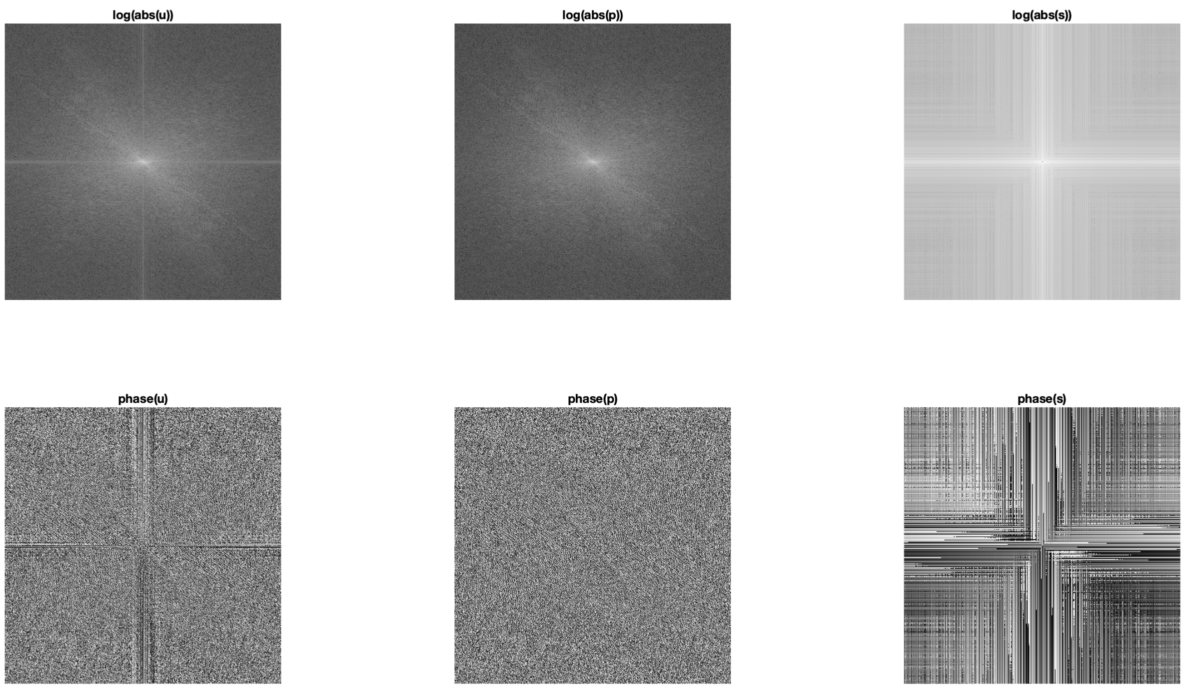
On note que le paramètre *[]* est obligatoire dans la fonction *imshow* parce que l'intervalle de p est plus grande que celle de s.

Après on vérifie que $p + s$ retrouve bien l'image originale u. Les figures suivantes montrent repectivement u, $p + s$ et $u - p - s$.

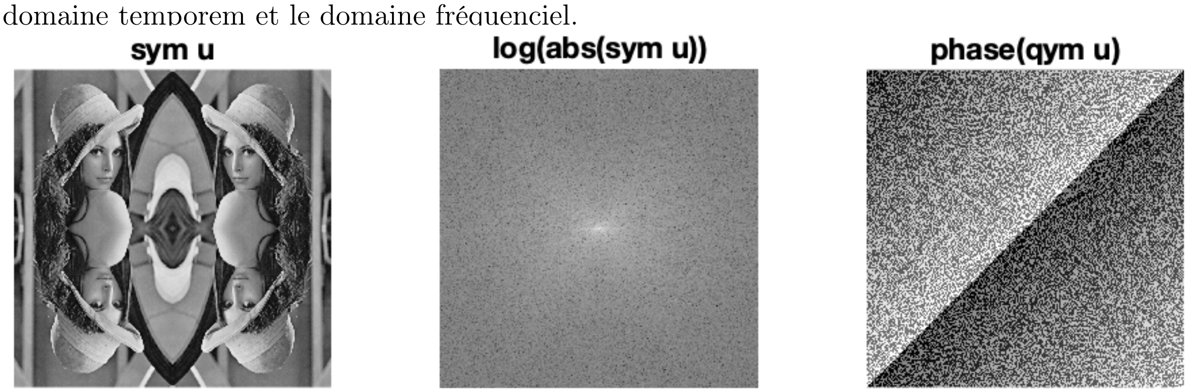
On visualise ensuite des versions périodisées pour visualiser les transitions des images u, p et s au bord du domaine.

On voit bien que l'image p et continue sur le bord, néanmoins celle de u est discontinue, parce que les paires de pixel sur s aux bords en face ont les valeurs inverses.

On Visualisez enfin le log module et la phase de la transformée de Fourier des images u, p, s. On voit bien que s contient tous les informations de la phase de u.



Les figures suivantes nous montrent la transformée de Fourier de e la symétrisée de l'image u dans le domaine temporem et le domaine fréquenciel.



Quand on compare u et p dans le domaine temporel, on voit que la différent se trouve plutôt autour du bord. Le bord de u est discontinu. Dans le domaine fréquenciel, p perte l'information de la phase et une partie de l'information de module. Le module de u a des fréquences très fortes sur l'axes. Donc en pratique, cette opération atténue les artifactes causées par ces fréquences.

Par rapport à la symmétrisation, cette opération n'élargit pas la domaine de $\hat{p}$, en même temps il garde les informations de la transformée de fourier.

2 Exercice 12

(1) On calcule tout d'abord la transformée de Fourier de $u - per(u)$:

$$\hat{u}(q,r) - p\hat{e}r(u)(q,r) = \frac{\hat{v}(q,r)}{4 - 2\cos\frac{2\pi q}{M} - 2\cos\frac{2\pi r}{N}}$$

où $v = v_1 + v_2$ et:

$$v_1(a,b) = \begin{cases} u(a,b) - u(M-1-a,b), & \text{si } a \in \{0, M-1\} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$v_2(a,b) = \begin{cases} u(a,b) - u(a,N-1-b), & \text{si } b \in \{0, N-1\} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Sachant que v ne dépend que de la restriction de u à $\partial\Omega$, $u - per(u)$ ne dépend que de la restriction de u à $\partial\Omega$.

(2) On calcule le laplacian de $u - per(u)$:

$$\Delta(u - per(u))(z) = \Delta s(z) = v(z) = \sum_{y \in W(z)} u(z) - u(y)$$

Quand $z \in \mathring{\Omega}$, $W(z) = \phi$, donc $\Delta s(z) = 0$, qui signifie que $u - per(u)$ est harmonique sur $\mathring{\Omega}$.

(3) On sait que:

$$F(p) = p^T Q_1 p + (u-p)^T Q_2 (u-p)$$

On calcule ensuite son gradient et le met en 0:

$$\nabla F(p) = 2(Q_1 + Q_2)p - 2Q_2 u = 0$$

Donc $p = (Q_1 + Q_2)^{-1} Q_2 u$. Sachant que $u \in \mathbb{R}^\Omega$ et Q_2 est inversible, per est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^\Omega$.

(4) A partir de la dernière question, on a $(Q_1 + Q_2)p = Q_2 u$. On suppose que $\lambda \in \mathbb{C}$ est un valeur propre de p et v est le vecteur associé avec λ.

$$(Q_1 + Q_2)\lambda u = Q_2 u$$

Soit $u^\star$ la transconjugate de u,

$$\lambda u^\star (Q_1 + Q_2) u = u^\star Q_2 u$$

Q_1 est symmétrique posotive et Q_2 est symmétrique définie positive. Donc on a λ est réelle et:

$$\lambda = \frac{u^\star Q_2 u}{u^\star Q_1 u + u^\star Q_2 u} \in (0,1)$$

(5) A partie des équations suivantes:

$$\begin{aligned}
F(p,s) &= p^T Q_1 p + s^T Q_2 s \\
F(p,s) &= E(p,s) + \frac{1}{|\Omega|^2}(\sum_{x\in\Omega} s(x))^2 \\
s^T Q_2 s &= \sum_{x,y\in\Omega,|x-y|=1} (s(x)-s(y))^2 + \frac{1}{|\Omega|^2}(\sum_{x\in\Omega} s(x))^2 \\
E(p,s) &= \sum_{x\in\Omega,y\in\mathbb{Z}^2/\Omega,|x-y|=1} (p(x)-p(\dot{y}))^2 + \sum_{x,y\in\Omega,|x-y|=1} (s(x)-s(y))^2
\end{aligned}$$

on déduit que:

$$p^T Q_1 p = \sum_{x\in\Omega,y\in\mathbb{Z}^2/\Omega,|x-y|=1} (p(x)-p(\dot{y}))^2 = \sum_{x\in\partial\Omega}\sum_{y\in W(x)} (p(x)-p(y))^2$$

Quand $u \in \mathcal{P} = \{u : \Omega \to \mathbb{R}, \forall x \in \partial\Omega, \forall y \in X(x), u(y) = u(x)\}$, $u \in Ker(Q_1)$.

On a $p(u) - u = ((Q_1+Q_2)^{-1}Q_2 - I)u = -(Q_1+Q_2)^{-1}Q_1 u$, cela signifie que $p(u)-u$ et Q_1 ont le même noyaux. On en déduit que l'ensemble des points fixes de p est P.

(6) $Q_1 + Q_2$ est symmétrique posotive et Q_2 est symmétrique définie positive. Selon le théorème, il y a une matrix P inversible telle que $P^T(Q_1+Q_2)P = D$ où D est une matrice diagonale et $P^T Q_2 P = I$.

Supposons que A soit la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^\Omega$, on a $(Q_1+Q_2)A = Q_2$. Alors:

$$P^{-1}AP = P^T(Q_1+Q_2)PP^{-1}AP = P^T(Q_1+Q_2)AP = P^T Q_2 P = D$$

cela signifie que p est diagonalisable.

(7) En utilisant la conclusion de la question (5), on peut toujours projeter p dans une base P où

$$A = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Sachant que les valeurs propres de p sont dans l'intervalle $(0, 1)$, $D^\infty \to 0$. Donc

$$A^\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

dans la base P. Les vecteurs associés à I forme une base de $ker(p-I)$, donc p^∞ est une projection sur $\mathcal{P}$.

Fiche 1: main.m

```
        %%% Exercise 11

%% Q2

u = double(imread('images/lena.pgm')) / 255.;
[p,s] = perdecomp(u);

% plot p and s
figure(1);
subplot(1, 3, 1);
imshow(u, []);
title('u');
subplot(1, 3, 2);
imshow(p, []);
title('p');
subplot(1, 3, 3);
imshow(s, []);
title('s');

% Verify p + s = u
figure(2);
subplot(1, 3, 1);
imshow(u);
title('u');
subplot(1, 3, 2);
imshow(p + s);
title('p+s');
subplot(1, 3, 3);
imshow(p+s-u);
title('diff');

figure(3);
subplot(1, 3, 1);
imshow(kron(ones(2,2),u),[ ]);
title('u');
subplot(1, 3, 2);
imshow(kron(ones(2,2),p),[ ]);
title('p');
subplot(1, 3, 3);
```

```
imshow(kron(ones(2,2),s),[ ]);
title('s');

fu = fft2(u);
fp = fft2(p);
fs = fft2(s);

figure(4);
subplot(2, 3, 1);
imshow(fftshift(log(abs(fu))),[]);
title('log(abs(u))');
subplot(2, 3, 4);
imshow(fftshift(angle(fu)),[]);
title('phase(u)');
subplot(2, 3, 2);
imshow(fftshift(log(abs(fp))),[]);
title('log(abs(p))');
subplot(2, 3, 5);
imshow(fftshift(angle(fp)),[]);
title('phase(p)');
subplot(2, 3, 3);
imshow(fftshift(log(abs(fs))),[]);
title('log(abs(s))');
subplot(2, 3, 6);
imshow(fftshift(angle(fs)),[]);
title('phase(s)');

% symmetrie de u
symu = fsym2(u);
fsymu = fft2(symu);

figure(5);
subplot(1, 3, 1);
imshow(symu,[]);
title('sym u');
subplot(1, 3, 2);
imshow(fftshift(log(abs(fsymu))),[]);
title('log(abs(sym u))');
subplot(1, 3, 3);
imshow(fftshift(angle(fsymu)),[]);
title('phase(qym u)');
```