ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

OPTIMISATION ET CONTRÔLE

Projet sur les reseaux de distribution d'eau

Author:

Matthieu TOULEMENT

Tong ZHAO

April 23, 2017

École des Ponts

ParisTech

1 Présentation du problème

On se concentre sur le problème de la résolution des équations décrivant l'état d'équilibre d'un réseau de distribution d'eau potable au cours de ce projet.

2 Modélisation du problème

3 Séance de TP No 1

Dans cette partie, on s'intéresse au problème primal d'optimisation sans contrainte.

$$min_{q_C \in \mathbb{R}^{n-m_d}} \frac{1}{3} \left\langle q^{(0)} + Bq_c, r \cdot (q^{(0)} + Bq_c) \cdot |q^{(0)} + Bq_c| \right\rangle + \left\langle p_r, A_r(q^{(0)} + Bq_c) \right\rangle \tag{1}$$

3.1 Le calcul du gradient

D'abord, on calcule le gradient du premier terme.

$$f_1(q_c) = \left\langle q^{(0)} + Bq_c, r \cdot (q^{(0)} + Bq_c) \cdot |q^{(0)} + Bq_c| \right\rangle \tag{2}$$

On pose $q = q^{(0)} + Bq_c$ et on calcule

$$\frac{\partial f_1}{\partial q} = \frac{\partial \langle q, r \cdot q \cdot |q| \rangle}{\partial q} = \frac{\partial (r \cdot q \cdot q \cdot |q|)}{\partial q} = 3sign(q) \cdot r \cdot q \cdot q = 3r \cdot q \cdot |q| \tag{3}$$

Ensuite, on calcule le gradient du second terme.

$$f_2(q_c) = \left\langle p_r, A_r(q^{(0)} + Bq_c) \right\rangle \tag{4}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q} = \frac{\partial (p_r \cdot A_r q)}{\partial q} = A_r^T p_r \tag{5}$$

Sachant que $\frac{\partial q}{\partial q_c} = B^T$, on calcule le gradient de la fonction F.

$$G(q_c) = \frac{\partial F}{\partial q_c} = \frac{\partial (3f_1 + f_2)}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial q_c} = B^T (r \cdot q \cdot |q| + A_r^T p_r) \tag{6}$$

3.2 Le calcul du hessien

On veut calculer:

$$H(q_c) = \frac{\partial G}{\partial q_c} = \frac{\partial(B^T(r \cdot q \cdot |q| + A_r^T p_r))}{\partial q_c} \tag{7}$$

On pose $d = r \cdot q \cdot |q|$, alors

$$H(q_c) = \frac{\partial(B^T d)}{\partial d}\frac{\partial d}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial q_c} \tag{8}$$

Sachant que:

$$\frac{\partial d}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial d_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial d_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial d_n}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial d_i}{\partial q_j} = \begin{cases} 2r_i|q_i|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

On a:

$$\frac{\partial d}{\partial q} = diag((2r_i|q_i|)_{i=1\cdots n}) \tag{9}$$

On en déduit que:

$$H(q_c) = 2B^T diag((2r_i|q_i|)_{i=1\cdots n})B \tag{10}$$