

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

OPTIMISATION ET CONTRÔLE

---

## Projet sur les reseaux de distribution d'eau

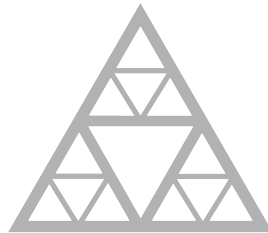
---

Author:

*Matthieu TOULEMENT*

*Tong ZHAO*

April 23, 2017



**École des Ponts**

ParisTech

# 1 Présentation du problème

On se concentre sur le problème de la résolution des équations décrivant l'état d'équilibre d'un réseau de distribution d'eau potable au cours de ce projet.

## 2 Modélisation du problème

### 3 Séance de TP No 1

Dans cette partie, on s'intéresse au problème primal d'optimisation sans contrainte.

$$\min_{q_C \in \mathbb{R}^{n-m_d}} \frac{1}{3} \left\langle q^{(0)} + Bq_C, r \cdot (q^{(0)} + Bq_C) \cdot |q^{(0)} + Bq_C| \right\rangle + \left\langle p_r, A_r(q^{(0)} + Bq_C) \right\rangle \quad (1)$$

#### 3.1 Le calcul du gradient

D'abord, on calcule le gradient du premier terme.

$$f_1(q_C) = \left\langle q^{(0)} + Bq_C, r \cdot (q^{(0)} + Bq_C) \cdot |q^{(0)} + Bq_C| \right\rangle \quad (2)$$

On pose  $q = q^{(0)} + Bq_C$  et on calcule

$$\frac{\partial f_1}{\partial q} = \frac{\partial \langle q, r \cdot q \cdot |q| \rangle}{\partial q} = \frac{\partial (r \cdot q \cdot q \cdot |q|)}{\partial q} = 3 \text{sign}(q) \cdot r \cdot q \cdot q = 3r \cdot q \cdot |q| \quad (3)$$

Ensuite, on calcule le gradient du second terme.

$$f_2(q_C) = \left\langle p_r, A_r(q^{(0)} + Bq_C) \right\rangle \quad (4)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q} = \frac{\partial (p_r \cdot A_r q)}{\partial q} = A_r^T p_r \quad (5)$$

Sachant que  $\frac{\partial q}{\partial q_C} = B^T$ , on calcule le gradient de la fonction  $F$ .

$$G(q_C) = \frac{\partial F}{\partial q_C} = \frac{\partial (3f_1 + f_2)}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial q_C} = B^T (r \cdot q \cdot |q| + A_r^T p_r) \quad (6)$$

### 3.2 Le calcul du hessien

On veut calculer:

$$H(q_c) = \frac{\partial G}{\partial q_c} = \frac{\partial(B^T(r \cdot q \cdot |q| + A_r^T p_r))}{\partial q_c} \quad (7)$$

On pose  $d = r \cdot q \cdot |q|$ , alors

$$H(q_c) = \frac{\partial(B^T d)}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial q_c} \quad (8)$$

Sachant que:

$$\frac{\partial d}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial d_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial d_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial d_n}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial d_i}{\partial q_j} = \begin{cases} 2r_i |q_i|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

On a:

$$\frac{\partial d}{\partial q} = \text{diag}((2r_i |q_i|)_{i=1 \dots n}) \quad (9)$$

On en déduit que:

$$H(q_c) = 2B^T \text{diag}((2r_i |q_i|)_{i=1 \dots n}) B \quad (10)$$