Binary Max Heap

Binary Heap Height: If we have a Binary Heap of N elements, its height will not be taller than $O(log\ N)$.
-> 判断一个最大堆是否合法的条件为，判断一个内部节点的是否大于其所有（一个或者两个）子节点
-> 向最大堆中插入元素时，将元素插入到堆的末尾（即索引的最后一位），随后向上修复最大堆属性
-> Maximum number of **comparisons** between heap elements required to construct a max heap of N elements using the **O(n)** Build Heap:

$$N_{need\_compare} = \lfloor N/2 \rfloor$$

接着对于每个节点的子节点进行递归比较，比较的次数取决于其子层数的数量，得到以下：

N=9, C=14; N=11, C=16; N=12, C=18

-> Minimum number of **comparisons** between heap elements required to construct a max heap of N elements using the **O(n)** Build Heap:

$$N_{need\_compare} = \lfloor N/2 \rfloor$$

接着，每个需要对比的节点与其拥有的一个或两个子节点比较，不需要递归地比较。得到以下：

N=9, C=8; N=10, C=9; N=11, C=10; N=12, C=11

-> **Maximum** number of **swaps** to construct max heap of N elements using $O(N)$ Build Heap:

$$N_{need\_compare} = \lfloor N/2 \rfloor$$

接着对于每个节点和其每层的子节点进行递归交换，交换的次数取决于其子层数的数量，得到以下：

N=9, S=7; N=10, S=8; N=11, S=8; N=12, S=10

- An array A of n distinct integers that are sorted in descending order forms a valid Binary Max Heap. Assume that A[0] is not used and the array values occupy index [1:n].
- Given a Binary Max Heap, calling ShiftDown(i) ∀i > heapsize/2 will **never** change anything in the Binary Max Heap.

HashMap

Load Factor: 是一个衡量哈希表满度的指标

$$\alpha = \frac{n}{m}$$

-> n 是已经插入哈希表的元素数量。
-> m 是哈希表中槽位的总数。

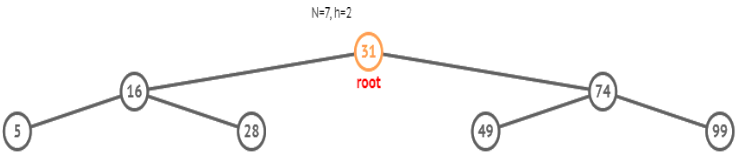
Open Addressing (Linear Probing):
-> 当发生哈希冲突时，向后寻找下一个空/已删除的槽位
-> 如果到达槽位末尾，则下一个寻找的目标为第一个槽位
-> 删除操作时，将该槽位设置为 DEL，以防止在搜索时失去哈希冲突之连续性

Primary Clustering: 主簇是指连续的已占用槽位形成的一组，大的主簇会显著增加 Hashmap 操作的时间复杂度

Closed Addressing (Separate Chaining): 当发生碰撞时，即两个键散列到相同的索引时，冲突会通过将值存储到表外来解决(对于 Separate Chaining 为 DLL)。

Binary Search Tree

-> BST(二分搜索树)中，某个节点的左侧子树中的每个节点必须小于该节点值，而右侧子树中的每个节点则必须大于该定点值
Leaf Vertex：没有子节点的节点。
Internal Vertex：有子节点的节点（root 节点除外）
Insert, Search, Remove 操作都从 root 节点开始遍历，判断要插入/搜索/删除的值大于或小于当前节点
Successor：下一个比目标节点大的值。从左往右看 BST，为目标节点的右边一个节点（无论上下）
Predecessor: 上一个比目标节点小的值。从左往右看 BST，为目标节点的左边一个节点（无论上下）
Traversal：分为三种方式, Inorder, Preorder, Postorder



Inorder:
1. 优先遍历 root 节点的左侧子树，在节点没有左侧和右侧字数的情况下访问该节点(5)
2. 返回**并访问**至上一个节点(16)
3. 遍历右侧的子节点，访问最底部节点(28)
4. 循环执行步骤 2，3
5. 返回至 root 节点并访问(31)
6. 遍历 root 节点的右侧子树，同时优先遍历右侧中的左侧子树
7. 循环执行步骤 2，3

- 访问顺序: 5 -> 16 -> 28 -> 31 -> 49 -> 74 -> 99

Preorder:
- 遍历顺序与 inorder 一致
- 但是在遍历时就访问该节点，例如从 root 节点开始，故 root 节点被第一个访问
- 访问顺序: 31 -> 16 -> 5 -> 28 -> 74 -> 49 -> 99

Postorder:
- 遍历顺序与 inorder 一致
- 但是在遍历时，只有在**当前节点没有子节点，或所有子节点都被访问过之后，才访问该节点**
- 访问顺序: 5 -> 28 -> 16 -> 49 -> 99 -> 74 -> 31
- How many structurally different BSTs can you form with **n distinct** elements?

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! \times n!}$$

- What is the value of the element with **rank n** in this BST?
  - 从左往右看 BST，为从左往右数的第 N 个节点（无论上下）
- What is the **minimum** possible height of a **BST** with **N** elements?

$$\lfloor log_2 N \rfloor$$

Sort

Bubble Sort: $O(n^2)$

1. 比较相邻的元素。如果第一个比第二个大（升序排序），就交换它们。

Selection Sort: $O(n^2)$

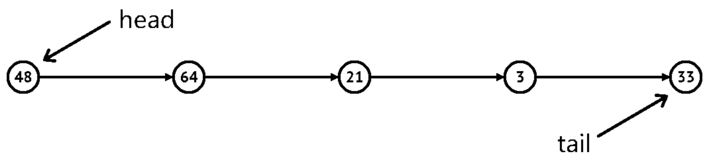
1. 首先在未排序序列中找到最小（大）元素，存放到排序序列的起始位置。
2. 以此类推，直到所有元素均排序完毕。

Insertion Sort: $O(n^2)$

1. 从第二个元素开始向前对比，如果前一个元素比其大，则交换，对比直到第一个元素
2. 需要对比的目标指针向后移动，即第三个元素向前对比，重复第一个步骤

Quick Sort: $O(n\ log\ n)$, 最坏情况为$O(n^2)$

分区操作： 所有比基准值小的元素摆放在基准前面，所有比基准值大的元素摆在基准的后面（相同数可在任一边）。



Linked List

`get(i)`: $O(n)$
`search(v)`: $O(n)$
`insert(i, v)`: 插入元素至头部，尾部，空链表的运行时间均为$O(1)$。插入到链表中为$O(N)$
`remove(i)`: 从头部删除元素所需运行时间为$O(1)$。其余操作为$O(N)$

Stack

LIFO, `push()`, `pop()` are both $O(1)$
`push()`: 添加新元素至栈顶(`head`)
`pop()`: 从栈顶移除元素(`head`)

Queue

FIFO, `push()`, `pop()` are both $O(1)$
`push()`: 添加新元素至末尾(`tail`)
`pop()`: 从顶部移除元素(`head`)

Postfix expression

- push operand to stack, pop first 2 operand if an operator pushed in
- 4 1 2 9 3 / * + 5 * +
  - (9/3 * 2 + 1) * 5 + 4 = 39

Prefix expression

- 运算符在操作数之前，即 9/3 = /93, 9/3*2 = */932
- 先算排列在操作数前的最后一个运算符
- (9/3 * 2 + 1) * 5 + 4 **->** + * + * / 9 3 2 1 5 4

Binary Max Heap Operations

Insert(v)
-> 将新项 v 插入到最大二叉堆中只能在最后一个索引 N 加 1 处完成 (N+1)，以保持紧凑数组 = 完整二叉树属性。
-> 然而，最大堆属性仍然可能被违反。因此需要从插入点向上修复最大堆属性。
->-> 向上修复最大堆属性被称为 `ShiftUp`, `BubbleUp` 或 `IncreaseKey`
-> 时间复杂度=$O(log\ N)$

create(A) ($O(N\ log\ N)$)
将输入数组的所有 N 个整数一一插入（即通过调用 Insert(v) 操作）到最初为空的最大二叉堆中

create(A) ($O(N)$)
从数组长度的一半位置(`len(A)/2`)开始修复最大堆属性，递减直到第一个索引

ExtractMax()
-> 取出最大堆中最大的数值，对于一个合法的最大堆，为 root 节点。
-> 将索引最后一位元素提升至 root 节点，并向下修复最大堆属性
-> 被称为 `ShiftDown`, `BubbleDown` 或 `Heapify`，具体操作如下：

1. 将索引最后一位元素提升至 root 节点
2. 将 root 节点和其两个子节点中**较大的值**作比较，如果符合条件则替换
3. 重复第二步骤，逐步向下修复最大堆属性

-> 时间复杂度为$O(log\ N)$

UpdateKey(i, newv)
-> 如果值的索引 `i` 已知，则可以直接更新 `A[i]=newv`
-> 然后向上和向下修复最大堆属性
-> 在知道索引的情况下，时间复杂度为$O(log/N)$

Delete(i)

1. 将该索引的值提升至 root 节点的值+1，使其成为最大堆中最大的数
2. 向上修复最大堆属性 `ShiftUp`
3. 进行 `ExtractMax()`操作

-> 时间复杂度为$O(log\ N)$