Draft

TongYi Math

2018 年 4 月 21 日

目录

前言

2017.09.08—

网站

Under Construction

数学符号

数和数组

a	标量 (整数或实数)
$\boldsymbol{a}$	向量
$\boldsymbol{A}$	矩阵
$\mathsf{\mathbf{A}}$	张量
$\boldsymbol{I}_n$	n 行 n 列的单位矩阵
$\boldsymbol{I}$	维度蕴含于上下文的单位矩阵
$\boldsymbol{e}^{(i)}$	标准基向量 $[0,\dots,0,1,0,\dots,0]$, 其中索引 i 处值为 1
$\mathrm{diag}(\boldsymbol{a})$	对角方阵，其中对角元素由 $\boldsymbol{a}$ 给定
a	标量随机变量
$\mathbf{a}$	向量随机变量
$\mathbf{A}$	矩阵随机变量

集合和图

$\mathbb{A}$	集合
$\mathbb{R}$	实数集
$\{0,1\}$	包含 0 和 1 的集合
$\{0,1,\dots,n\}$	包含 0 和 n 之间所有整数的集合
$[a,b]$	包含 a 和 b 的实数区间
$(a,b]$	不包含 a 但包含 b 的实数区间
$\mathbb{A}\backslash\mathbb{B}$	差集，即其元素包含于 $\mathbb{A}$ 但不包含于 $\mathbb{B}$
$\mathcal{G}$	图
$Pa_{\mathcal{G}}(\mathrm{x}_i)$	图 $\mathcal{G}$ 中 x_i 的父节点

索引

a_i	向量 $\boldsymbol{a}$ 的第 i 个元素，其中索引从 1 开始
a_{-i}	除了第 i 个元素，$\boldsymbol{a}$ 的所有元素
$A_{i,j}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 i,j 元素
$\boldsymbol{A}_{i,:}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行
$\boldsymbol{A}_{:,i}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列
$\mathsf{A}_{i,j,k}$	3 维张量 $\textsf{\textbf{A}}$ 的 (i,j,k) 元素
$\textsf{\textbf{A}}_{:,:,i}$	3 维张量的 2 维切片
a_i	随机向量 $\mathbf{a}$ 的第 i 个元素

线性代数中的操作

$\boldsymbol{A}^\top$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^+$	$\boldsymbol{A}$ 的Moore-Penrose 伪逆
$\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的逐元素乘积（Hadamard 乘积）
$\det(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}$ 的行列式

微积分

$\dfrac{dy}{dx}$	y 关于 x 的导数
$\dfrac{\partial y}{\partial x}$	y 关于 x 的偏导
$\nabla_{\boldsymbol{x}} y$	y 关于 $\boldsymbol{x}$ 的梯度
$\nabla_{\boldsymbol{X}} y$	y 关于 $\boldsymbol{X}$ 的矩阵导数
$\nabla_{\mathsf{\mathbf{X}}} y$	y 关于 $\mathsf{\mathbf{X}}$ 求导后的张量
$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}$	$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 的Jacobian矩阵 $\boldsymbol{J}\in\mathbb{R}^{m\times n}$
$\nabla_{\boldsymbol{x}}^2 f(\boldsymbol{x})$ or $\boldsymbol{H}(f)(\boldsymbol{x})$	f 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的Hessian矩阵
$\int f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}$ 整个域上的定积分
$\int_{\mathbb{S}} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$	集合 $\mathbb{S}$ 上关于 $\boldsymbol{x}$ 的定积分

概率和信息论

$\mathrm{a}\bot\mathrm{b}$	a 和 b 相互独立的随机变量
$\mathrm{a}\bot\mathrm{b} \mid \mathrm{c}$	给定 c 后条件独立
$P(\mathrm{a})$	离散变量上的概率分布
$p(\mathrm{a})$	连续变量（或变量类型未指定时）上的概率分布
$\mathrm{a} \sim P$	具有分布 P 的随机变量 a
$\mathbb{E}_{\mathrm{x}\sim P}[f(x)]$ or $\mathbb{E}f(x)$	$f(x)$ 关于 $P(\mathrm{x})$ 的期望
$\mathrm{Var}(f(x))$	$f(x)$ 在分布 $P(\mathrm{x})$ 下的方差
$\mathrm{Cov}(f(x), g(x))$	$f(x)$ 和 $g(x)$ 在分布 $P(\mathrm{x})$ 下的协方差
$H(\mathrm{x})$	随机变量 x 的香农熵
$D_{\mathrm{KL}}(P\Vert Q)$	P 和 Q 的KL 散度
$\mathcal{N}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$	均值为 $\boldsymbol{\mu}$ 协方差为 $\boldsymbol{\Sigma}$，$\boldsymbol{x}$ 上的高斯分布

函数

$f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$	定义域为 $\mathbb{A}$ 值域为 $\mathbb{B}$ 的函数 f
$f \circ g$	f 和 g 的组合
$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})$	由 $\boldsymbol{\theta}$ 参数化，关于 $\boldsymbol{x}$ 的函数（有时为简化表示，我们忽略 $\boldsymbol{\theta}$ 记为 $f(\boldsymbol{x})$ ）
$\log x$	x 的自然对数
$\sigma(x)$	Logistic sigmoid, $\dfrac{1}{1+\exp(-x)}$
$\zeta(x)$	Softplus, $\log(1+\exp(x))$
$\|\|\boldsymbol{x}\|\|_p$	$\boldsymbol{x}$ 的 L^p 范数
$\|\|\boldsymbol{x}\|\|$	$\boldsymbol{x}$ 的 L^2 范数
x^+	x 的正数部分, 即 $\max(0, x)$
$\mathbf{1}_{\text{condition}}$	如果条件为真则为 1，否则为 0

有时候我们使用函数 f，它的参数是一个标量，但应用到一个向量、矩阵或张量: $f(\boldsymbol{x})$, $f(\boldsymbol{X})$, or $f(\mathsf{X})$ 。这表示逐元素地将 f 应用于数组。例如，$\mathsf{C} = \sigma(\mathsf{X})$，则对于所有合法的 i、j 和 k，$\mathsf{C}_{i,j,k} = \sigma(\mathsf{X}_{i,j,k})$。

数据集和分布

p_{data}	数据生成分布
$\hat{p}_{\text{train}}$	由训练集定义的经验分布
$\mathbb{X}$	训练样本的集合
$\boldsymbol{x}^{(i)}$	数据集的第 i 个样本（输入）
$y^{(i)}$ or $\boldsymbol{y}^{(i)}$	监督学习中与 $\boldsymbol{x}^{(i)}$ 关联的目标
$\boldsymbol{X}$	$m \times n$ 的矩阵，其中行 $\boldsymbol{X}_{i,:}$ 为输入样本 $\boldsymbol{x}^{(i)}$

第一部分

Beginner

Example: 奥数教材一年级，第一讲

Example: 一条直线上有 n 个点，则共有多少条线段？

Hints:

- 记线段条数为 $f(n)$, 计算 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$
- 根据上面的数据，猜测 $f(k)$ 与 $f(k+1)$ 的关系，根据关系给出逻辑推理
- 根据 $f(k), f(k+1)$ 之间的关系求出 $f(n)$ 的表达式
- 利用所得 $f(n)$ 表达式，检验 $f(1), \cdots, f(5)$ 的值，并计算 $f(100)$

从一个点出发做 n 条射线，其中任意两条射线的夹角为锐角, 求共有多少锐角?

从一个点出发做 n 条射线，求共有多少角?

Example: 马拉松全长 42 千米又 195 米，某人声称他与朋友一起参见马拉松赛，比赛过程中每一个 1000 米，他所花的时间都比他朋友多，但比赛结果他比他朋友先到达终点，这可能吗?

Hints:

- 理解每一个 1000 米

第二部分

Elementary

Example: 求解三阶幻方

Hints:

- 求解行和
- 求解中心值
- 若将绕中心旋转和镜像对称的看成是同一个解，数字 1 的位置有几种可能?

求证如果 n 是偶数，则 $1, 2, \cdots, n^2$ 能够排成这样的 $n \times n$ 方阵，使得方阵中每一列里的所有数之和相等

在 3×3 的正方形表格中，填上九个不同的自然数，使得每行三数相乘，每列三数相乘，所得的六个乘积彼此相等 (用 p 表示该乘积).

- 证明这种填数法是可以实现的
- p 能取 1990-1995 这六个数中的哪些数
- 求 p 的最小值

Example: 对任意闭凸曲线 l 及其内部区域中的任一点 P, 闭凸曲线 l 上存在两个点 A, B, 使得 A, B 把 l 分成等长的两段，且 A, B, P 三点共线。

Hints:

-
-
-

Example: 计算 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

- 能否将 $\frac{1}{k(k+1)}$ 表示成 $\frac{1}{A(k)} - \frac{1}{B(k)}$, 使得 $A(k), B(k)$ 是关于 k 的一次多项式

计算 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

计算 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$

计算 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$

计算 $\sum_{k=2}^{n} \frac{k+2}{(k-1)k(k+1)}$

计算 $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3\times5\times7\times\cdots(2k+1)}$

计算 $\sum_{k=1}^{n} arctan(\frac{2k}{2+k^2+k^4})$

Example: 计算 $\sum_{i=1}^{n} i^k, k = 1, 2, 3, 4, 5$

Hints:

- 待定系数求 $f(n)$ 表达式，数学归纳法证明
- 裂项求和

Example: 已知 $abc = 1$, 求 $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+c+1} + \frac{c}{ca+c+1}$

Hints:

- 将某个 1 替换成 abc 试着计算看看

将上面的情形推广到 $abcd = 1$

Example: 已知 $a+b+c=abc$, 求证 $a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-a^2)(1-c^2)+c(1-a^2)(1-b^2)=4abc$

Hints:

- a+b=abc-c
- 三角函数背景

Example: 证明 $((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)^2 = 2((a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4)$

Hints:

- if $a+b+c=0$, $(a^2+b^2+c^2)^2 = 2(a^4+b^4+c^4)$

Example: $a+b+c=0$, 证明: $2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2)$, $5(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)=6(a^5+b^5+c^5)$, $10(a^7+b^7+c^7)=7(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)$

Hints:

-

Example: Given $(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C) = \cos A \cos B \cos C$, simplify $(1-\sin A)(1-\sin B)(1-\sin C)$

Hints:

-

Example: 已知 $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$, 求 $\frac{x}{y+z}$

- $\frac{x}{y+z} = k$

Example: 因式分解 $a^n - b^n$

Hints:

- 等比数列求和 $\sum_{i=0}^{n} q^i$
- 令 $n = 2, 3$ 得到平方差和立方差公式

$a^3 + b^3$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, prove if $a, b, c > 0$, then $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$

Example: 求函数 $f(x) = |x+1| + |x-1| + |x-3| + |x-5| + |x-7| + |x-11|$ 的最小值

Hints:

- 几何意义

求函数 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |a_i x + b_i|$ 的最小值

Example: m, n 为正整数，$m \neq n$, 求证:$m^4 + 4n^4$ 可以表示为四个正整数的平方和

Hints:

- $(m^4 + n^2 - 2m^2n^2) + 2n^2(m^2 + n^2) + n^4$

Example: 求证任意整数可以表示为五个整数的立方和的形式

Hints:

- $6x = (x-1)^3 + (x+1)^3 + (-x)^3 + (-x)^3$
- $n^3 - n = 6x$
- 或者分别考虑 $6x \pm 1, 6x+2, 6x+3, 6x+4$

Example: 求证存在无穷多个整数，他们不能写成三个整数的立方和的形式

Hints:

- mod9

Example: 是否每个整数都可以写成四个整数的立方和的形式

Hints:

- 未解决

Example: 证明两个整数的平方和乘以另外两个整数的平方和可以表示为某两个整数的平方和

Hints:

- $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (ax-by)^2 + (ay+bx)^2$
- 由此推出柯西不等式在 $n=2$ 时候的特例，尝试证明柯西不等式
- 推广命题到四个整数的情形

$(3a+3b)^k + (2a+4b)^k + a^k + b^k = (3a+4b)^k + (a+3b)^k + (2a+b)^k$, at $k = 1, 2, 3$

if $x+y+z=0$, $(ix-ky)^n + (iy-kz)^n + (iz-kx)^n = (iy-kx)^n + (iz-ky)^n + ix - kz^n$, at $n = 0, 1, 2, 4$

$x^n + (x+3)^n + (x+5)^n + (x+6)^n + (x+9)^n + (x+10)^n + (x+12)^n + (x+15)^n = (x+1)^n + (x+2)^n + (x+4)^n + (x+7)^n + (x+8)^n + (x+11)^n + (x+13)^n + (x+14)^n$, at $n = 0, 1, 2, 3$

Example: 展开 $(a+b)^9, (a+b+c)^9, (a+b+c+d)^9$

Hints:

- 组合数

第三部分

Intermediate

Example: ΔABC 中, 求证 $\sqrt{tan\frac{A}{2}+5}+\sqrt{tan\frac{B}{2}+5}+\sqrt{tan\frac{C}{2}+5}\leq 4\sqrt{3}$

Hints:

- $\sum tan\frac{A}{2}tan\frac{B}{2} = 1$

Example: $\frac{1}{sin^2A} + \frac{1}{cos^2Asin^2Bcos^2B} \geq 9$

Example: P 是 ΔABC 内一点,D, E, F 分别是 P 到 BC, AC, AB 各边引垂线做的垂足，求证 $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF} \geq \frac{2p^2}{S}$, 其中 p 为半周长,S 为面积

Hints:

- $\sum \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{(\sum a_i)^2}{\sum a_i b_i}$

$a, b, c > 0$, $\sum \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$

Hints:

- 两边同时加 3
- 同上一题

$a, b, c > 0, abc = 1, \sum \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2}$

Hints:

- $\sum \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum a_i)^2}{\sum b_i}$

$a, b, c > 0, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1, \ (a+b)^n - a^n - b^n \geq 2^{2n} - 2^{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

- $a, b, c > 0$, $(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)$, 证明 a, b, c 是某三角形的三条边长
- $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0, n > 3$, $(\sum a_i^2)^2 > (n-1)(\sum a_i^4)$, 证明任意三个 a_i, a_j, a_k 是某三角形的三条边长

Hints:

- 带参数的柯西

Example: $a, b, c > 0$, prove $\sum \frac{a^2}{(a+b)(a+c)} \geq \frac{3}{4}$

Example: $xyz \geq 1$, prove $\sum \frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geq 0$

Hints:

- $deg(x^5) - deg(x^2, y^2, z^2) = deg(xyz)$

Example: Consider the expression: $S = f(a,b,c) = S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2$, where S_a, S_b, S_c are functions of a, b, c:

- if $S_a, S_b, S_c \geq 0$, then $S \geq 0$
- if $a \geq b \geq c$ and $S_b, S_b + S_a, S_b + S_c \geq 0$, then $S \geq 0$
- if $a \geq b \geq c$ and $S_a, S_c, S_a + 2S_b, S_c + 2S_b \geq 0$, then $S \geq 0$
- if $a \geq b \geq c$ and $S_a, S_c, a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0$, then $S \geq 0$
- if $a \geq b \geq c$ and $(a-c)S_b + (a-b)S_c, (a-c)S_b + (b-c)S_a \geq 0$, then $S \geq 0$
- if $a \geq b \geq c$ and $S_b, S_c, (a-c)S_b + (b-c)S_a \geq 0$, then $S \geq 0$
- if $S_a + S_b + S_c \geq 0$ and $S_a S_b + S_a S_c + S_b S_c \geq 0$, then $S \geq 0$

Hints:

- Given an expression, we can transform it to basic sos form, if it is sysmetric or ayclic function $f(a, b, c)$ satisfy $f(a, a, a) = 0$

Example: $a, b, c > 0$, then $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$

Example: $x, y, z > 0$, then $\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} \geq \frac{9}{4(xy+yz+xz)}$

第四部分

Advanced

本书这一部分将

第五部分

Proficient

本书这一部分将

参考文献

术语

高斯分布 Gaussian distribution ix

Hadamard 乘积 Hadamard product viii

Hessian Hessian viii

单位矩阵 identity matrix vi

Jacobian Jacobian viii

KL 散度 Kullback-Leibler (KL) divergence ix

Moore-Penrose 伪逆 Moore-Penrose pseudoinverse viii

香农熵 Shannon entropy ix

监督学习 supervised learning x