

## 《统计信号处理基础》大作业

信号的频率、幅度和初始相位是信号的重要特征，可以提供关于信号性质和传输特性多方面的信息。在通信、雷达、地震学等多个领域，所处理的信号大多可以用以下模型进行描述：

$$y(t) = x(t) + w(t)$$

其中  $x(t) = \sum_{k=1}^N a_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$ ，代表无噪声情况下的信号。 $\{a_k\}, \{f_k\}, \{\varphi_k\}$  分别代表幅度、频率和初始相位。观测噪声  $w(t) \sim N(0, \sigma^2)$ ，为高斯白噪声。

假设我们现在接收到了一个多频信号，可以建模为以上信号模型，我们需要对信号的幅度、频率、初始相位等信息进行估计。

1. 假设对于接收到的信号，我们已知的信息只有观测噪声方差  $\sigma^2$ 。各频率分量的幅度、频率、相位未知。

a) 采用最大似然估计方法，分析并推导待估计参数  $\{a_k\}, \{f_k\}, \{\varphi_k\}$  的最大似然估计量。

b) 分析并推导待估计参数  $\{a_k\}, \{f_k\}, \{\varphi_k\}$  的克拉美罗界。

2. 假设对于接收到的信号，我们已知的信息有：观测噪声方差  $\sigma^2$ ，且信号只包含一个频率分量，即  $N=1$ 。此外，已知信号幅度随时间变化，即  $x(t) = a(t) \cos(2\pi f t + \varphi)$ 。请选用课程中学习的某种参数估计方法，分析并推导如何估计信号包络  $a(t)$ 、信号频率  $f$ 、相位  $\varphi$ 。

(注：此题不用给出具体的闭式解，但需要介绍求解的思路与流程。)

3. 假设对于接收到的信号，我们已知的信息在 2 的基础上，还知道此信号是一个 BPSK 调制的信号，即  $a(t) = A D(t)$ 。此外，信号所传输的数据  $D(t)$  是速率为 10Hz 的  $\{1, -1\}$  二进制比特串。但信号幅度  $A$ 、数据  $D(t)$ 、信号频率  $f$ 、相位  $\varphi$  均是未知的。考虑接收机在加性高斯白噪声信道下接收到此信号，以 10kHz 速率对信号进行采样。在信号采集过程中受到了一些未知频率的单频干扰，此时采集所得数据文件如附件 sig1.mat 所示。此外，由于信源与接收端信号传输时延的不确定性，收到的电文数据其实是从某个未知时刻开始的，即采样信号的起始时刻并非数据比特的翻转时刻。

请利用数据文件 data1.mat 完成以下工作：

a) 估计信号幅度  $A$ 、载波频率  $f$  和载波相位  $\varphi$ 。

b) 解调出这段信号传输的电文数据  $D(t)$ 。

4. 在 2 和 3 中，我们考虑了信号幅度随时间变化的情况，现在考虑频率变化的情况。假

设对于接收到的信号，我们已知其频率变化，时域函数可以表达为：

$x(t) = A \cos[2\pi(f_0 t + 0.5\alpha t^2)]$ ，即接收到的是一个线性调频信号。对于这个线性调频信号，

$f_0$  称为起始频率， $\alpha$  称为调频斜率。假定  $A$  为确定性未知常量，观测噪声是方差为  $\sigma^2$  的高斯白噪声。

a) 为了便于推导，考虑复信号  $x(t) = A \exp[j2\pi(f_0 t + 0.5\alpha t^2)]$ 。请分析并推导如何获得  $f_0$  和  $\alpha$  的 MLE。

b) 数据文件 data2.mat 是以 10kHz 速率对加性高斯白噪声信道下接收到的单个线性调频复信号进行采样得到的数据。采样点从  $t = 0$  开始。请根据在 a) 中的推导，估计出该信号的起始频率  $f_0$  和调频斜率  $\alpha$ 。

作业说明：

1. 请在作业中给出详细的信号建模、数学推导和分析过程。理论推导可以参考各种资料，但不要直接照搬结论。
2. 参数的估计应当体现统计信号处理的思想，请不要直接将信号的 FFT 结果作为频率的估计值，请不要直接调用其他已有的参数估计函数。
3. 源代码请随作业报告一起提交。代码需有必要且详细的注释。