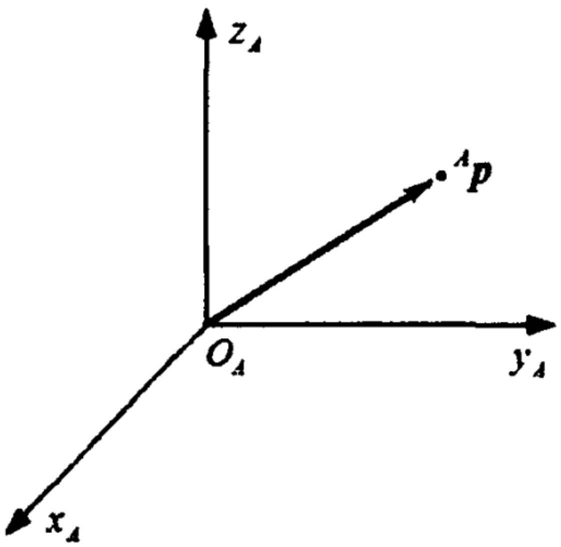
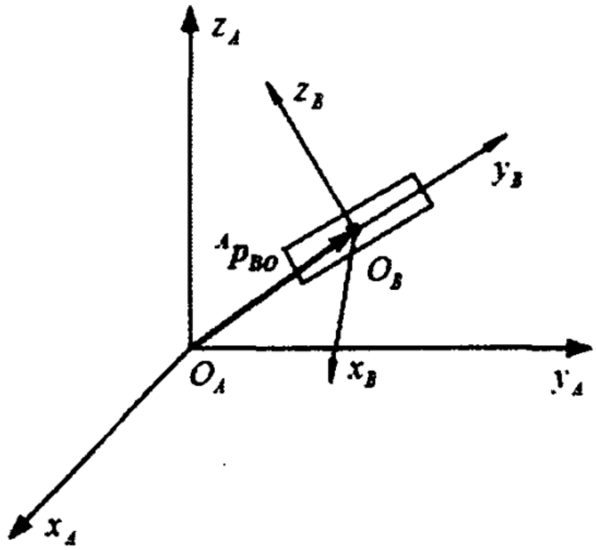
刚体位姿



三维空间点的位置



三维空间物体的位姿

位置

位置描述

三维空间任意一点 P 在直角坐标系 $\{A\}$ 中的位置可用位置矢量表示：

$${}^A\vec{P} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T$$

式中， p_x p_y p_z 是点 P 在坐标系 $\{A\}$ 中的三个坐标分量。

单次位置变换

现已知点 P 在坐标系 $\{A\}$ 中的位置描述为 ${}^A\vec{P}$ ，若坐标系 $\{A\}$ 的原点在坐标系 $\{B\}$ 中的位置矢量为 ${}^B_A\vec{P}$ ，则点 P 在坐标系 $\{B\}$ 中的位置描述为：

$${}^B\vec{P} = {}^A\vec{P} + {}^B_A\vec{P}$$

连续位置变换

现已知点 P 在坐标系 $\{A\}$ 中的位置描述为 ${}^A\vec{P}$ ，若坐标系 $\{A\}$ 的原点在坐标系 $\{B\}$ 中的位置矢量为 ${}^B_A\vec{P}$ ，坐标系 $\{B\}$ 的原点在坐标系 $\{C\}$ 中的位置矢量为 ${}^C_B\vec{P}$ ，则点 P 在坐标系 $\{C\}$ 中的位置描述为：

$${}^C\vec{P} = {}^B\vec{P} + {}^C_B\vec{P} = {}^A\vec{P} + {}^B_A\vec{P} + {}^C_B\vec{P}$$

点 P 本身没有移动，只是参考坐标系不同，其坐标表示也不同。

姿态

姿态描述

为描述三维空间中某刚体 P 的姿态，建立与该物体固连的直角坐标系 $\{P\}$ ，坐标系 $\{P\}$ 的三个单位主矢量 $\vec{x_P}$ 、 $\vec{y_P}$ 、 $\vec{z_P}$ 相对于参考坐标系 $\{A\}$ 的方向余弦构成旋转矩阵，用于描述刚体 P 相对于坐标系 $\{A\}$ 的姿态：

$${}^A_P R = \begin{bmatrix} {}^A_P x & {}^A_P y & {}^A_P z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x}_P \cdot \vec{x}_A & \vec{y}_P \cdot \vec{x}_A & \vec{z}_P \cdot \vec{x}_A \\ \vec{x}_P \cdot \vec{y}_A & \vec{y}_P \cdot \vec{y}_A & \vec{z}_P \cdot \vec{y}_A \\ \vec{x}_P \cdot \vec{z}_A & \vec{y}_P \cdot \vec{z}_A & \vec{z}_P \cdot \vec{z}_A \end{bmatrix}$$

- 旋转矩阵是正交矩阵，${}^A_PR^T = {}^A_P R^{-1} = {}^P_A R$
- 旋转矩阵的行列式为1，$\left|{}^A_PR\right| = 1$
- $(m \times m)$ 旋转矩阵属于特殊正交群 $SO(m)$

单次姿态变换

现已知向量 P 在坐标系 $\{A\}$ 中的位置描述为 ${}^A\vec{P}$ ，若坐标系 $\{A\}$ 在坐标系 $\{B\}$ 中的姿态描述为 ${}^B_AR$ ，则向量 P 在坐标系 $\{B\}$ 中的位置描述为：

$$
{}^B\vec{P} = {}^B_A R {}^A\vec{P}
$$

连续姿态变换

现已知向量 P 在坐标系 $\{A\}$ 中的位置描述为 ${}^A\vec{P}$ ，若坐标系 $\{A\}$ 在坐标系 $\{B\}$ 中的姿态描述为 ${}^B_AR$ ，坐标系 $\{B\}$ 在坐标系 $\{C\}$ 中的姿态描述为 ${}^C_BR$ ，则向量 P 在坐标系 $\{C\}$ 中的位置描述为：

$$
{}^C\vec{P} = {}^C_B R {}^B\vec{P} = {}^C_B R {}^B_A R {}^A\vec{P}
$$

姿态变换次序

- 绕固定坐标系变换
  若坐标系 $\{A\}$ 固定不动，坐标系 $\{B\}$ 与坐标系 $\{A\}$ 的姿态重合。坐标系 $\{B\}$ 先绕坐标系 $\{A\}$ 的 x 轴旋转 α ，到位后再绕坐标系 $\{A\}$ 的 y 轴旋转 β ，到位后再绕坐标系 $\{A\}$ 的 z 轴旋转 γ ，则旋转变换为单个旋转矩阵的依次左乘

$$
{}^B_AR = {}^B_A R_{z,\gamma} \cdot {}^B_A R_{y,\beta} \cdot {}^B_A R_{x,\alpha}
$$

- 绕运动坐标系变换
  若坐标系 $\{A\}$ 固定不动，坐标系 $\{B\}$ 与坐标系 $\{A\}$ 的姿态重合。坐标系 $\{B\}$ 先绕当前自身的 x 轴旋转 α ，到位后再绕当前自身的 y 轴旋转 β ，到位后再绕当前自身的 z 轴旋转 γ ，则旋转变换为单个旋转矩阵的依次右乘

$$
{}^B_AR = {}^B_A R_{x,\alpha} \cdot {}^B_A R_{y,\beta} \cdot {}^B_A R_{z,\gamma}
$$

位姿

为完全描述刚体 P 在空间的位姿，将坐标系 $\{P\}$ 的原点 O 取在刚体特征点上，用矢量 ${}^A_P\vec{P}$ 描述坐标系 $\{P\}$ 的原点在参考坐标系 $\{A\}$ 中的位置，用旋转矩阵 ${}^A_PR$ 描述坐标系 $\{P\}$ 在参考坐标系 $\{A\}$ 中的姿态，刚体 P 的位姿可描述为 $\begin{bmatrix} {}^A_PR & {}^A_P\vec{P} \end{bmatrix}$ 。

- 仅表示位置时，有 ${}^A_PR = I$ ；
- 仅表示方位时，有 ${}^A_P\vec{P} = 0$ 。

为方便后续数学运算，将上述位姿描述扩充为齐次矩阵形式：

$$
{}^A_PT = \begin{bmatrix} {}^A_PR & {}^A_P\vec{P} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

单次位姿变换

已知向量 P 在坐标系 $\{A\}$ 中的位置矢量为 ${}^A\vec{P}$ ，若坐标系 $\{A\}$ 在坐标系 $\{B\}$ 中的姿态表示为 ${}^B_AT$ ，则向量P在坐标系 $\{B\}$ 中的描述为

$$
{}^B\vec{P} = {}^B_A T {}^A\vec{P}
$$

连续位姿变换

已知向量 P 在坐标系 $\{A\}$ 中的位置矢量为 ${}^A\vec{P}$ ，若坐标系 $\{A\}$ 在坐标系 $\{B\}$ 中的姿态表示为 ${}^B_AT$ ，坐标系 $\{B\}$ 在坐标系 $\{C\}$ 中的姿态表示为 ${}^C_BT$ ，则向量 P 在坐标系 $\{C\}$ 中的描述为

$$
{}^C\vec{P} = {}^C_B T {}^B\vec{P} = {}^C_B T {}^B_A T {}^A\vec{P}
$$

位姿逆变换

$$
{}^P_AT = \begin{bmatrix} {}^P_AR & {}^P_A\vec{P} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_PR^T & -{}^A_PR^T {}^A_P\vec{P} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

补充

向量乘法

已知两向量， $\vec{a}=[x_a,y_a,z_a]$ ， $\vec{b}=[x_b,y_b,z_b]$

向量点乘:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b$$

- 点乘又称内积，其结果是一个标量
- 点乘具有交换性 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
- 点乘可计算两向量的夹角或某向量在另一向量方向上的投影长度 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

向量叉乘:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}=(y_az_b-y_bz_a)i-(x_az_b-x_bz_a)j+(x_ay_b-x_by_a)k$$

- 叉乘又称外积，其结果是一个向量
- 叉乘具有反称性 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
- 叉乘具有线性 $(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\times\vec{c}=\lambda(\vec{a}\times\vec{c})+\mu(\vec{b}\times\vec{c})$
- 叉乘可计算两向量所在平面的法向量，法向量方向遵循右手法则 $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

等效旋转

欧拉角

使用三个分离的旋转角，把一个旋转分解成绕三个正交轴的旋转，默认采用右手坐标系。
合法旋转顺序： xzx 、 xyx 、 yxy 、 yzy 、 zyz 、 zxz 、 xzy 、 xyz 、 yxz 、 yzx 、 zyx 、 zxy
外旋，绕固定参考坐标系的旋转，旋转矩阵应左乘。举例来说，按 zyx 顺序外旋 $\alpha\beta\gamma$ ， $R=R_x(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha)$ 。
内旋，绕自身当前坐标系的旋转，旋转矩阵应右乘。举例来说，按 zyx 顺序内旋 $\alpha\beta\gamma$ ， $R=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$ 。
同序同角度做正旋和外旋得到的姿态不同。举例来说，按 zyx 顺序正旋 $\alpha\beta\gamma$ 不等价于按 zyx 顺序逆旋 $\alpha\beta\gamma$ 。
内旋正序和外旋逆序同角度得到的姿态相同。举例来说，按 zyx 顺序正旋 $\alpha\beta\gamma$ 等价于按 xyz 顺序逆旋 $\gamma\beta\alpha$ 。
特殊的，机器人行业中惯用 zyx 顺序，也称为rpy角。
欧拉角存在万向锁问题。

绕 x 轴旋转 α 角， $R_x(\alpha)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$
绕 y 轴旋转 β 角， $R_y(\beta)=\begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$
绕 z 轴旋转 γ 角， $R_z(\gamma)=\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

> 记忆规律:
>
> - 若绕 x 轴旋转， $r_{11}=1$ ，同行同列其他元素均是0
> - 若绕 y 轴旋转， $r_{22}=1$ ，同行同列其他元素均是0
> - 若绕 z 轴旋转， $r_{33}=1$ ，同行同列其他元素均是0
> - 剩余4个元素，主对角线都填充sin，副对角线都填充cos
> - 元素1所在的（循环）前一列的sin要加负号

- 已知欧拉角，求旋转矩阵

Proper Euler angles	Tait–Bryan angles
$X_\alpha Z_\beta X_\gamma = \begin{bmatrix} c_\beta & -c_\gamma s_\beta & s_\beta s_\gamma \\ c_\alpha s_\beta & c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\gamma s_\alpha - c_\alpha c_\beta s_\gamma \\ s_\alpha s_\beta & c_\alpha s_\gamma + c_\beta c_\gamma s_\alpha & c_\alpha c_\gamma - c_\beta s_\alpha s_\gamma \end{bmatrix}$	$X_\alpha Z_\beta Y_\gamma = \begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -s_\beta & c_\beta s_\gamma \\ s_\alpha s_\gamma + c_\alpha c_\gamma s_\beta & c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - c_\gamma s_\alpha \\ c_\gamma s_\alpha s_\beta - c_\alpha s_\gamma & c_\beta s_\alpha & c_\alpha c_\gamma + s_\alpha s_\beta s_\gamma \end{bmatrix}$
$X_\alpha Y_\beta X_\gamma = \begin{bmatrix} c_\beta & s_\beta s_\gamma & c_\gamma s_\beta \\ s_\alpha s_\beta & c_\alpha c_\gamma - c_\beta s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha s_\gamma - c_\beta c_\gamma s_\alpha \\ -c_\alpha s_\beta & c_\gamma s_\alpha + c_\alpha c_\beta s_\gamma & c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma \end{bmatrix}$	$X_\alpha Y_\beta Z_\gamma = \begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma & s_\beta \\ c_\alpha s_\gamma + c_\gamma s_\alpha s_\beta & c_\alpha c_\gamma - s_\alpha s_\beta s_\gamma & -c_\beta s_\alpha \\ s_\alpha s_\gamma - c_\alpha c_\gamma s_\beta & c_\gamma s_\alpha + c_\alpha s_\beta s_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix}$
$Y_\alpha X_\beta Y_\gamma = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\gamma - c_\beta s_\alpha s_\gamma & s_\alpha s_\beta & c_\alpha s_\gamma + c_\beta c_\gamma s_\alpha \\ s_\beta s_\gamma & c_\beta & -c_\gamma s_\beta \\ -c_\gamma s_\alpha - c_\alpha c_\beta s_\gamma & c_\alpha s_\beta & c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma \end{bmatrix}$	$Y_\alpha X_\beta Z_\gamma = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\gamma + s_\alpha s_\beta s_\gamma & c_\gamma s_\alpha s_\beta - c_\alpha s_\gamma & c_\beta s_\alpha \\ c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma & -s_\beta \\ c_\alpha s_\beta s_\gamma - c_\gamma s_\alpha & c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix}$
$Y_\alpha Z_\beta Y_\gamma = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha s_\beta & c_\gamma s_\alpha + c_\alpha c_\beta s_\gamma \\ c_\gamma s_\beta & c_\beta & s_\beta s_\gamma \\ -c_\alpha s_\gamma - c_\beta c_\gamma s_\alpha & s_\alpha s_\beta & c_\alpha c_\gamma - c_\beta s_\alpha s_\gamma \end{bmatrix}$	$Y_\alpha Z_\beta X_\gamma = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\gamma - c_\alpha c_\gamma s_\beta & c_\gamma s_\alpha + c_\alpha s_\beta s_\gamma \\ s_\beta & c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma \\ -c_\beta s_\alpha & c_\alpha s_\gamma + c_\gamma s_\alpha s_\beta & c_\alpha c_\gamma - s_\alpha s_\beta s_\gamma \end{bmatrix}$
$Z_\alpha Y_\beta Z_\gamma = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\gamma s_\alpha - c_\alpha c_\beta s_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ c_\alpha s_\gamma + c_\beta c_\gamma s_\alpha & c_\alpha c_\gamma - c_\beta s_\alpha s_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -c_\gamma s_\beta & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix}$	$Z_\alpha Y_\beta X_\gamma = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - c_\gamma s_\alpha & s_\alpha s_\gamma + c_\alpha c_\gamma s_\beta \\ c_\beta s_\alpha & c_\alpha c_\gamma + s_\alpha s_\beta s_\gamma & c_\gamma s_\alpha s_\beta - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix}$
$Z_\alpha X_\beta Z_\gamma = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\gamma - c_\beta s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha s_\gamma - c_\beta c_\gamma s_\alpha & s_\alpha s_\beta \\ c_\gamma s_\alpha + c_\alpha c_\beta s_\gamma & c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha s_\beta \\ s_\beta s_\gamma & c_\gamma s_\beta & c_\beta \end{bmatrix}$	$Z_\alpha X_\beta Y_\gamma = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\gamma - s_\alpha s_\beta s_\gamma & -c_\beta s_\alpha & c_\alpha s_\gamma + c_\gamma s_\alpha s_\beta \\ c_\gamma s_\alpha + c_\alpha s_\beta s_\gamma & c_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\gamma - c_\alpha c_\gamma s_\beta \\ -c_\beta s_\gamma & s_\beta & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix}$

- 已知旋转矩阵，求欧拉角

Proper Euler angles		Tait–Bryan angles	
$X_\alpha Z_\beta X_\gamma$	$\alpha = \arctan\left(\frac{R_{31}}{R_{21}}\right)$ $\beta = \arccos(R_{11})$ $\gamma = \arctan\left(\frac{R_{13}}{-R_{12}}\right)$	$X_\alpha Z_\beta Y_\gamma$	$\alpha = \arctan\left(\frac{R_{32}}{R_{22}}\right)$ $\beta = \arcsin(-R_{12})$ $\gamma = \arctan\left(\frac{R_{13}}{R_{11}}\right)$
$X_\alpha Y_\beta X_\gamma$	$\alpha = \arctan\left(\frac{R_{21}}{-R_{31}}\right)$ $\beta = \arccos(R_{11})$ $\gamma = \arctan\left(\frac{R_{12}}{R_{13}}\right)$	$X_\alpha Y_\beta Z_\gamma$	$\alpha = \arctan\left(\frac{-R_{23}}{R_{33}}\right)$ $\beta = \arcsin(R_{13})$ $\gamma = \arctan\left(\frac{-R_{12}}{R_{11}}\right)$
$Y_\alpha X_\beta Y_\gamma$	$\alpha = \arctan\left(\frac{R_{12}}{R_{32}}\right)$ $\beta = \arccos(R_{22})$ $\gamma = \arctan\left(\frac{R_{21}}{-R_{23}}\right)$	$Y_\alpha X_\beta Z_\gamma$	$\alpha = \arctan\left(\frac{R_{13}}{R_{33}}\right)$ $\beta = \arcsin(-R_{23})$ $\gamma = \arctan\left(\frac{R_{21}}{R_{22}}\right)$
$Y_\alpha Z_\beta Y_\gamma$	$\alpha = \arctan\left(\frac{R_{32}}{-R_{12}}\right)$ $\beta = \arccos(R_{22})$ $\gamma = \arctan\left(\frac{R_{23}}{R_{21}}\right)$	$Y_\alpha Z_\beta X_\gamma$	$\alpha = \arctan\left(\frac{-R_{31}}{R_{11}}\right)$ $\beta = \arcsin(R_{21})$ $\gamma = \arctan\left(\frac{-R_{23}}{R_{22}}\right)$
$Z_\alpha Y_\beta Z_\gamma$	$\alpha = \arctan\left(\frac{R_{23}}{R_{13}}\right)$ $\beta = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-R_{33}^2}}{R_{33}}\right)$ $\gamma = \arctan\left(\frac{R_{32}}{-R_{31}}\right)$	$Z_\alpha Y_\beta X_\gamma$	$\alpha = \arctan\left(\frac{R_{21}}{R_{11}}\right)$ $\beta = \arcsin(-R_{31})$ $\gamma = \arctan\left(\frac{R_{32}}{R_{33}}\right)$
$Z_\alpha X_\beta Z_\gamma$	$\alpha = \arctan\left(\frac{R_{13}}{-R_{23}}\right)$ $\beta = \arccos(R_{33})$ $\gamma = \arctan\left(\frac{R_{31}}{R_{32}}\right)$	$Z_\alpha X_\beta Y_\gamma$	$\alpha = \arctan\left(\frac{-R_{12}}{R_{22}}\right)$ $\beta = \arcsin(R_{32})$ $\gamma = \arctan\left(\frac{-R_{31}}{R_{33}}\right)$

轴角/旋转向量

任何姿态都可以通过绕某一个轴旋转特定的角度得到。
轴角使用四个元素表达旋转，前三个元素构成单位向量 n 描述旋转轴，最后一个元素描述旋转角

$$r=[x,y,z,\theta]$$

旋转向量使用三个元素表达旋转，向量方向与旋转轴一致，向量长度等于旋转角

$$\vec{r_v}=[x*\theta,y*\theta,z*\theta]$$

从旋转向量到旋转矩阵的转换过程由罗德里格斯公式表明

$$R=\cos\theta I+(1-\cos\theta)nn^T+\sin\theta\hat{n}$$

- 已知轴角，求旋转矩阵

$$r=[x,y,z,\theta]\Rightarrow R=\begin{bmatrix}x^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & xy(1-\cos\theta)-z\sin\theta & xz(1-\cos\theta)+y\sin\theta\\ xy(1-\cos\theta)+z\sin\theta & y^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & yz(1-\cos\theta)-x\sin\theta\\ xz(1-\cos\theta)-y\sin\theta & yz(1-\cos\theta)+x\sin\theta & z^2(1-\cos\theta)+\cos\theta\end{bmatrix}$$

- 已知旋转矩阵，求轴角

$$R=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{11} & r_{12} & r_{13}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2\sin\theta}(r_{32}-r_{23})\\ y=\frac{1}{2\sin\theta}(r_{13}-r_{31})\\ z=\frac{1}{2\sin\theta}(r_{21}-r_{12})\\ \theta=\arccos(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2})\end{cases}$$

四元数

使用四维超复数表示旋转。一个四元数由一个实部 $s=q_0\in\Re$ 和三个虚部 $\nu=[q_1,q_2,q_3]^T\in\Re^3$ 构成

$$q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k=[s,\nu]^T$$
$$\begin{cases}i^2=j^2=k^2=1\\ ij=k,\ ji=-k\\ jk=i,\ kj=-i\\ ki=j,\ ik=-j\end{cases}$$

四元数常用运算

$$\begin{cases}q_a=w_a+x_ai+y_aj+z_ak=[w_a,\nu_a]^T\\ q_b=w_b+x_bi+y_bj+z_bk=[w_b,\nu_b]^T\end{cases}$$

- 加减法

$$q_a\pm q_b=(w_a\pm w_b)+(x_a\pm x_b)i+(y_a\pm y_b)j+(z_a\pm z_b)k$$

- 乘法

$$\begin{aligned}q_aq_b&=[w_aw_b-{\nu_a}^T\nu_b,w_a\nu_b+w_b\nu_a+\nu_a\times\nu_b]^T\\ &=(w_aw_b-x_ax_b-y_ay_b-z_az_b)+\\ &(w_ax_b+x_aw_b+y_az_b-z_ay_b)i+\\ &(w_ay_b-x_az_b+y_aw_b+z_ax_b)j+\\ &(w_az_b+x_ay_b-y_ax_b+z_aw_b)k\end{aligned}$$

- 模长

$$|q_a|=\sqrt{w_a^2+x_a^2+y_a^2+z_a^2}$$
$$|q_aq_b|=|q_a||q_b|$$

- 共轭

$$q_a^*=[w_a,-\nu_a]^T=w_a-x_ai-y_aj-z_ak$$
$$q_a^*q_a=q_aq_a^*=[w_a^2+\nu_a^T\nu_a,0]^T$$

- 逆

$$q_a^{-1}=\frac{q_a^*}{|q_a|^2}$$
$$q_aq_a^{-1}=q_a^{-1}q_a=1$$

特别的，单位四元数的逆等于其共轭，且其乘积的逆具有如下性质

$$(q_aq_b)^{-1}=q_b^{-1}q_a^{-1}$$

- 数乘

$$\lambda q_a = [\lambda w_a, \lambda \nu]^T = \lambda w_a + \lambda x_a i + \lambda y_a j + \lambda z_a k$$

- 旋转
  三维点 $p = [x, y, z] \in \Re^3$ ，经过 q_a 指定的旋转变换后，得到 p'
  取虚四元数来描述三维点 $p = [0, x, y, z]^T$

$$p' = q_a p q_a^{-1}$$

- 已知四元数，求旋转矩阵

$$q = w + xi + yj + zk \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2(xy-wz) & 2(xz+wy) \\ 2(xy+wz) & 1-2(x^2+z^2) & 2(yz-wx) \\ 2(xz-wy) & 2(yz+wx) & 1-2(x^2+y^2) \end{bmatrix}$$

- 已知旋转矩阵，求四元数

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{11} & r_{12} & r_{13} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1} \\ x = \frac{1}{4w}(r_{32}-r_{23}) \\ y = \frac{1}{4w}(r_{13}-r_{31}) \\ z = \frac{1}{4w}(r_{21}-r_{12}) \end{cases}$$

TODO

上述转换仅提供了一个引子，其中存在一些取值范围或临界结果等多种情况还需分类讨论，有待补充

旋转描述对比

类型	有无先后顺序	两个元素之间是否可使用线性插值	是否可直接使用元素进行运算	优缺点
欧拉角	有（有很多顺序组合，常用例如 RPY,ZYZ…）	可以（类比直线线性插值）	可以，直接当作欧式空间向量计算	**优点：**简单便于直观理解 **缺点：**多解需要进行多圈转换；路径不是最优，也无法指定角速度插值；β角为±90时，无法求解即万向节锁死；
旋转矩阵	无（直接表示了动系各轴在参考系各轴上的方向余弦）	不可以（矩阵元素都是三角函数）	可以，旋转矩阵乘法	**优点：**解唯一朴素 **缺点：**无法直接进行线性插值
固定轴角	无（旋转运动矢量）	可以（轴固定，角度线性插值）	不可以，旋转矢量[θ·x，θ·y，θ·z]不能直接做加法乘法等运算，不具备变换意义	**优点：**相对直观，可做指定角速度线性插值 **缺点：**无法使用元素直接做运算，需要借助旋转矩阵计算；0 度位置无法指定轴
四元数	无（采用高维超复数表示三维旋转的形式，与轴角存在转换形式）	可以，使用 Slerp 插值，具有三角函数形式和指数形式，本质和轴角线性插值过程是对应的	可以，每个四元数可以表示状态也可以表示过程，且存在一套变换运算定律	**优点：**可指定角速度插值，可直接运算，弥补了轴角的缺点 **缺点：**理解及运算相对复杂，要对四元数基础运算有一定要求