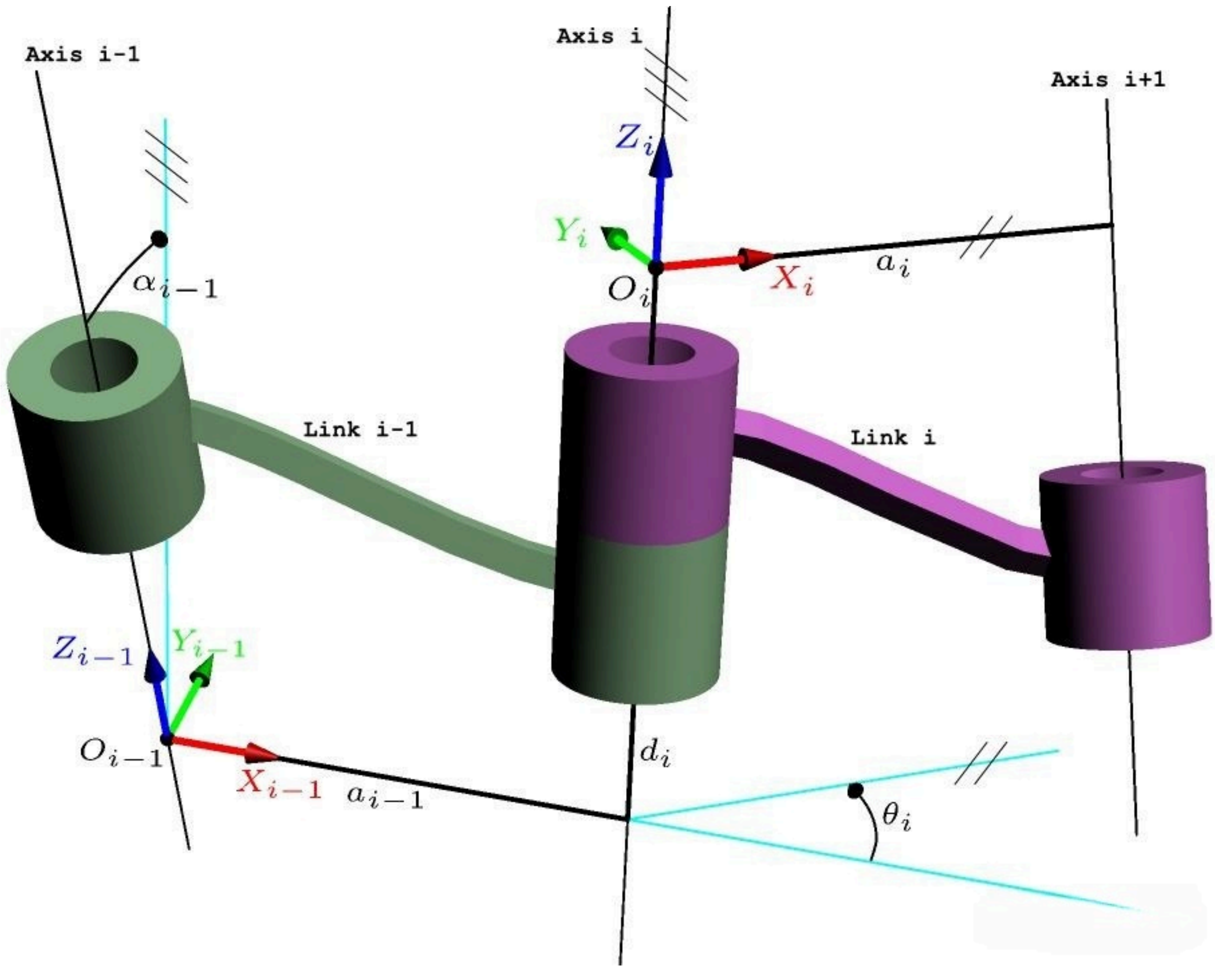
运动学建模

背景知识

- 对于具有i个关节的串联机器人，其i个关节变量可形成一个 $i*1$ 的关节矢量。所有关节矢量构成的空间成为关节空间。关节空间中的每一个关节矢量都确定了机器人的一个位形。
- 笛卡尔空间中的每一个元素可以确定刚体的一个位姿，刚体位置在执教参考系中度量，刚体姿态按照旋转矩阵、欧拉角、等效轴角、单位四元数或其他合适的描述方式度量。

MDH建模

建模步骤



> 确定初始位置，并给连杆和关节标号。取基座为0号杆件，第一个运动刚体为1号杆件，0号杆件和1号杆件的连接点即为1号关节，依次类推。机器人作业工具，如焊枪、喷枪、刀具等，通常与最后一个杆件相连。

- 确定 Z_i 轴， Z_i 轴沿关节 i 的轴线
- 确定 O_i 点， O_i 在 Z_i 和 Z_{i+1} 轴的交点，或 Z_i 和 Z_{i+1} 的公垂线与 Z_i 轴的交点
- 确定 X_i 轴， X_i 轴沿从 Z_i 轴指向 Z_{i+1} 轴的公垂线方向，若 Z_i 与 Z_{i+1} 相交，则X_i 轴垂直于 Z_i 轴和 Z_{i+1} 轴所在平面
- 确定 Y_i 轴，右手定则 $Y_i = Z_i \times X_i$

几何参数

- a_{i-1}： 杆件长度，沿 X_{i-1} 轴，从 Z_{i-1} 移动到 Z_i 的距离
- α_{i-1}： 杆件扭角，绕 X_{i-1} 轴，从 Z_{i-1} 旋转到 Z_i 的角度
- d_i： 关节距离，沿 Z_i 轴，从 X_{i-1} 移动到 X_i 的距离
- θ_i： 关节转角，绕 Z_i 轴，从 X_{i-1} 旋转到 X_i 的角度

> 关节i是旋转关节时，关节变量为 θ_i
> 关节i是平移关节时，关节变量为 d_i

变换过程

从坐标系 $i-1$ 变换到坐标系 i，在固连坐标系基础上进行变换：

- 绕 X 轴旋转 α_{i-1}，变换矩阵 $Rot(X_{i-1},\alpha_{i-1})$
- 绕 X 轴平移 α_{i-1}，变换矩阵 $Trans(X_{i-1},a_{i-1})$
- 绕 Z 轴旋转 θ_i，变换矩阵 $Rot(Z_{i-1},\theta_i)$
- 绕 Z 轴平移 d_i，变换矩阵 $Trans(Z_{i-1},d_i)$

$$
\begin{aligned}
{}_{i}^{i-1}T &= Rot(X,\alpha_{i-1}) * Trans(X,a_{i-1}) * Rot(Z,\theta_i) * Trans(Z,d_i) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i\cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -d_i\sin\alpha_{i-1} \\ \sin\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & d_i\cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

正运动学

> 关节空间中的关节变量 -> 笛卡尔空间中的TCP

正运动学就是给定机器人各关节变量，计算各连杆上任意点的位置和姿态。根据MDH建模得到的相邻关节坐标系之间的齐次变换矩阵，可求出以基座坐标系作为参考系，第i个关节连杆坐标系的齐次变换为

$$
{}_{i}^{0}T = {}_{1}^{0}T\, {}_{2}^{1}T \cdots {}_{i-1}^{i-2}T\, {}_{i}^{i-1}T
$$

机器人连杆坐标系 i 上的任意一点 ${}^{i}p=[p_x,p_y,p_z]$，在另一连杆坐标系 $j(j<i)$ 中的位姿可以描述为

$$
{}^{0}p = {}_{j+1}^{j}T\, {}_{j+2}^{j+1}T \cdots {}_{i-1}^{i-2}T\, {}_{i}^{i-1}T\, {}^{i}p
$$

逆运动学

> 笛卡尔空间中的TCP -> 关节空间中的关节变量

解的存在性

逆解是否存在取决于期望位姿是否在机器人的工作空间内。

- 工作空间：机器人末端所能到达的区域
- 可达工作空间：机器人末端能够以至少一种位形到达的区域
- 灵巧工作空间：机器人末端能够以多种位形（多解）到达的区域

> 灵巧工作空间是可达工作空间的子集
> 当机器人少于6DoF时，它在笛卡尔空间内不能达到全部位姿

多解选取

逆解的个数取决于机器人的关节数量，也和连杆参数和关节活动范围有关，一般来说，机器人的关节数量越多，达到某一特定位姿的方式也越多，即逆解数量越多。
在面对i个关节的串联机器人时，逆解计算通常是在求解非线性超越方程组，i个未知数i个方程式不代表具有唯一解。
若同一位姿有多解，机器人只能取一个解，比较合理的选择方法是“最短行程解”。计算最短行程时可以加权，倾向于选择移动小连杆而不是移动大连杆，从而节省运动能量和时间。

求解方法

- 数值解：具有迭代性质，求解速度较慢，可细分为牛顿拉夫森解法、循环坐标下降解法、前向后向到达解法等。在多解情况下该算法不能求出全部的解。
- 封闭解：基于解析形式的算法，可细分为代数解法和几何解法等。几何解法在低维低自由度结构上更实用一些。

> 封闭解存在的充分条件（Pieper准则）：
> ① 三个连续的转动关节的轴线可交于一点
> ② 三个连续的转动关节的轴线平行

代数法的整体思想是，在 ${}_{i}^{0}T$ 矩阵的基础上，用未知的连杆逆变换同时左乘等式的两边，根据两边矩阵各元分别相等的原则来列写等式，可以逐步把关节变量分离出来，从而求解。不同构型，不同参数的模型，没有统一的求解步骤。

$$
{}^{0}_{i}T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{0}_{1}T(q_1)\,{}^{1}_{2}T(q_2)\ \dots\ {}^{i-2}_{i-1}T(q_{i-1})\,{}^{i-1}_{i}T(q_i)
$$

$$
{}^{0}_{1}T(q_1)^{-1}\,{}^{0}_{i}T = {}^{1}_{2}T(q_2)\ \dots\ {}^{i-2}_{i-1}T(q_{i-1})\,{}^{i-1}_{i}T(q_i)
$$

$$
{}^{0}_{1}T(q_1)^{-1}\,{}^{0}_{i}T\,{}^{i-1}_{i}T(q_i)^{-1} = {}^{1}_{2}T(q_2)\ \dots\ {}^{i-2}_{i-1}T(q_{i-1})
$$

$$
\dots
$$

补充

TODO

- SDH法建模
- 旋量法建模
- 逆解中奇异位形判断、处理
- 机器人位置标定、校准、补偿

常用三角函数

α 角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
α 弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
正弦 sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
余弦 cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
正切 tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0
余切 cotα	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	不存在	0	不存在

同角基本关系式		
倒数关系	商的关系	平方关系
$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$ $\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$ $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$	$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=\frac{\sec\alpha}{\csc\alpha}$ $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha=\frac{\csc\alpha}{\sec\alpha}$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

诱导公式			
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$ $\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$ $\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$ $\cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$	$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha$ (其中 k∈Z)
$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$ $\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$ $\cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$	$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\cot(2\pi=\alpha)=\cot\alpha$

两角和与差的三角函数公式	万能公式
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$ $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$	$\sin\alpha=\frac{2\tan(\alpha/2)}{1+\tan 2(\alpha/2)}$ $\cos\alpha=\frac{1-\tan 2(\alpha/2)}{1+\tan 2(\alpha/2)}$ $\tan\alpha=\frac{2\tan(\alpha/2)}{1-\tan 2(\alpha/2)}$

半角的正弦、余弦和正切公式	三角函数的降幂公式

$\sin(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\cos(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ $\tan(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$	$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

二倍角的正弦、余弦和正切公式	三倍角的正弦、余弦和正切公式
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha=\cos 2\alpha-\sin 2\alpha=2\cos 2\alpha-1=1-2\sin 2\alpha$ $\tan 2\alpha=-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan 2\alpha}$	$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin 3\alpha$ $\cos 3\alpha=4\cos 3\alpha-3\cos\alpha.$ $\tan 3\alpha=-\frac{3\tan\alpha-\tan 3\alpha}{1-3\tan 2\alpha}$

三角函数的和差化积公式	三角函数的积化和差公式
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ $\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

化 asinα ±bcosα 为一个角的一个三角函数的形式（辅助角的三角函数的公式）
$a\sin x\pm b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x\pm\phi)$ 其中 ϕ 角所在的象限由 a 、b 的符号确定，ϕ 角的值由 $\tan\phi=\frac{b}{a}$ 确定

六边形记忆法：图形结构“上弦中切下割，左正右余中间1”；记忆方法“对角线上两个函数的积为 1；阴影三角形上两顶点的三角函数值的平方和等于下顶点的三角函数值的平方；任意一顶点的三角函数值等于相邻两个顶点的三角函数值的乘积。”