

动力学建模

概述

- 正动力学：已知各关节的作用力或力矩，求运动轨迹点的关节位移、速度和加速度，是进行机器人计算机仿真的基础
- 逆动力学：已知运动轨迹点的关节位移、速度和加速度，求出关节的驱动力矩，是实现机器人基于动力学模型控制的基础

常用的机器人动力学分析方法：牛顿-欧拉方程、拉格朗日方程、旋量对偶法、凯恩法等

动力学设计流程：建立逆动力学参数方程->利用力矩模型对动力参数的线性关系建立观测矩阵->获取最小参数集->生成激励轨迹->运行激励轨迹收集数据->数据滤波去噪->最小二乘辨识求解力学参数

转动惯量

定义

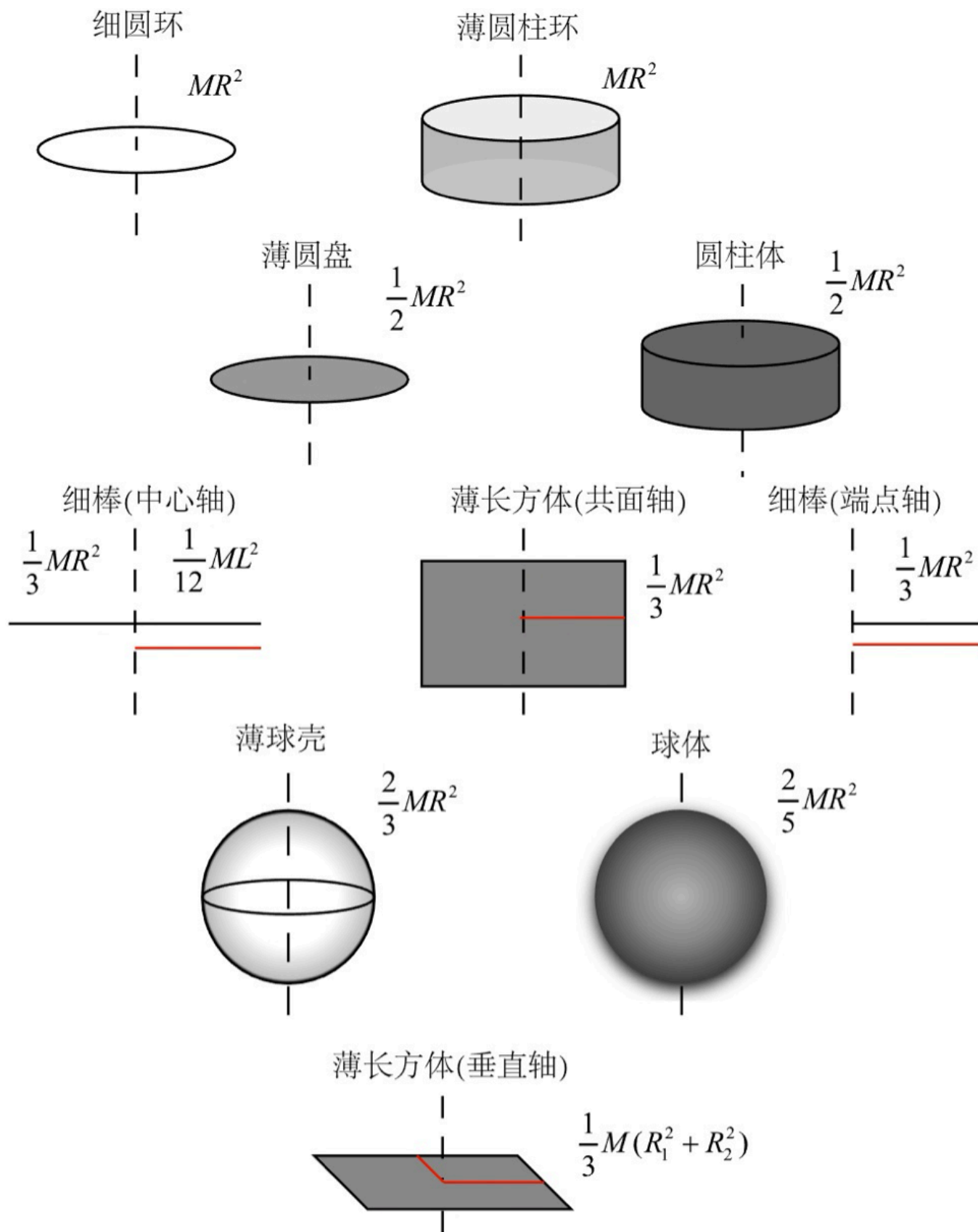
- 惯性是物体保持其原有运动状态不变的性质，物体能做惯性运动的本质就在于物体具有惯性。转动惯量是刚体转动时对惯性的量度描述，默认单位 $kg \cdot m^2$ 。

计算公式

- 离散刚体 $J = \sum_i \triangle m_i r_i^2$
- 连续刚体 $J = \int_m r^2 dm$

结论

- 对于定轴而言，刚体的转动惯量是一个常数
- 形状大小相同的刚体，质量大的转动惯量大
- 质量相同的刚体，转轴离质心越远，转动惯量越大



惯性张量

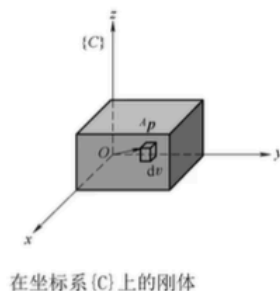
thanks 零基础机器人学导论

刚体在做定点转动时，刚体中有一点始终保持不变。惯性张量是描述刚体做定点转动时的转动惯性的一组惯性量。因为有不同方向的分量，把它们合在一起用一个张量就可以表示，这个张量就是惯性张量。
定轴转动是定点转动的特例，转动惯量包含在惯性张量中。

设刚体相对于固定在构件上的坐标系{C}的惯性张量：

惯性张量是一个对称矩阵，其元素是三个转动惯量和三个惯量积的负值。

$${}^C I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$



$$\text{其中: } I_{xx} = \iiint_m (y^2 + z^2) dm = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho dv$$

$$I_{yy} = \iiint_m (x^2 + z^2) dm = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho dv$$

$$I_{zz} = \iiint_m (x^2 + y^2) dm = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dv$$

$$I_{xy} = \iiint_m xy dm = \iiint_V xy \rho dv$$

$$I_{xz} = \iiint_m xz dm = \iiint_V xz \rho dv$$

$$I_{yz} = \iiint_m yz dm = \iiint_V yz \rho dv$$

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} : 对 x, y, z 轴的转动惯量，惯量矩；

$I_{xy}=I_{yx}, I_{yz}=I_{zy}, I_{zx}=I_{xz}$: 惯量积

如果以质心为坐标系原点，计算后惯量积的值会为0。此时的坐标系轴称为主轴，相应的惯量称为主惯量。主惯量是惯量矩阵的三个特征值。

平行轴定理： 对于一个以质心为原点的坐标系的惯性张量，转换至另外一个平行的坐标系。

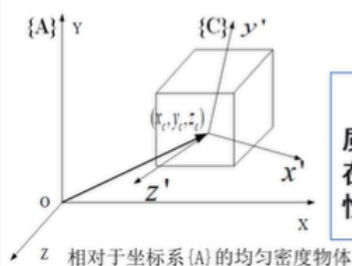
已知相对于某一原点位于物体质心坐标系{C}的惯量张量，{A}为参考坐标系，则有：

$${}^A I_{xx} = {}^C I_{xx} + m(y_c^2 + z_c^2), \quad {}^A I_{xy} = {}^C I_{xy} + mx_c y_c$$

$${}^A I_{yy} = {}^C I_{yy} + m(x_c^2 + z_c^2), \quad {}^A I_{yz} = {}^C I_{yz} + my_c z_c$$

$${}^A I_{zz} = {}^C I_{zz} + m(x_c^2 + y_c^2), \quad {}^A I_{xz} = {}^C I_{xz} + mx_c z_c$$

式中， x_c, y_c, z_c 为质心在{A}中的位置。



该定理表示在质心处的坐标系的惯性张量在另一个参考坐标系中的惯性张量之间的关系。

加了一个刚体整体的惯量

牛顿-欧拉方程

thanks PhilFan's_NoteBook

• 牛顿方程

刚体以质心为中心做平移，质量为 m ，质心处的线速度 v ，线加速度 \dot{v} ，则作用在质心处的力为

$$F = m\dot{v}$$

• 欧拉方程

刚体绕质心转动，以质心为刚体坐标系原点的惯性张量为 I ，角速度 ω ，角加速度 $\dot{\omega}$ ，则作用在质心处的力矩为

$$N = I\dot{\omega} + \omega \times I\omega$$

• 推广到串联机器人

$$\begin{cases} \vec{F}_i = m_i \vec{v}_i \\ \vec{N}_i = I_i \vec{\omega}_i + \vec{\omega}_i \times (I_i \vec{\omega}_i) \end{cases}$$

式中， \vec{F}_i 表示连杆 i 的合外力， m_i 表示连杆 i 的质量， \vec{v}_i 表示连杆 i 的线加速度， \vec{N}_i 表示连杆 i 质心的合力矩， I_i 表示连杆 i 绕质心的惯性张量， $\vec{\omega}_i$ 表示连杆 i 的角加速度。

正向递推

又称外推，从连杆0到连杆n-1，向外迭代计算连杆的速度和加速度

若第 $i + 1$ 关节为旋转关节：

- 角速度

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\omega_{i+1} &= {}^iR \cdot {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \\ {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} &= [0, 0, 1]^T \end{aligned}$$

- 角加速度

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^iR \cdot {}^i\dot{\omega}_i + {}^iR \cdot {}^i\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

- 原点线加速度

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^iR \left[{}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times \left({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1} \right) + {}^i\dot{v}_i \right]$$

- 质心线加速度

$${}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} = {}^iR \dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \left({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} \right) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1}$$

- 力

$${}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1} \cdot {}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}}$$

- 力矩

$${}^{i+1}N_{i+1} = {}^{C_{i+1}}I_{i+1} \cdot {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{C_{i+1}}I_{i+1} \cdot {}^{i+1}\omega_{i+1}$$

若第 $i + 1$ 关节为移动关节：

- 角速度

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^iR \cdot {}^i\omega_i$$

- 角加速度

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^iR \cdot {}^i\dot{\omega}_i$$

- 原点线加速度

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^iR \left[{}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times \left({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1} \right) + {}^i\dot{v}_i \right] + 2 \cdot {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

- 质心线加速度

$${}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} = {}^iR \dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \left({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} \right) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1}$$

- 力

$${}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1} \cdot {}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}}$$

- 力矩

$${}^{i+1}N_{i+1} = {}^{C_{i+1}}I_{i+1} \cdot {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{C_{i+1}}I_{i+1} \cdot {}^{i+1}\omega_{i+1}$$

角速度初始值 ${}^0\omega_0 = (0, 0, 0)^T$
角加速度初始值 ${}^0\dot{\omega}_0 = (0, 0, 0)^T$
加速度初始值（含重力） ${}^0v_0 = (0, g, 0)^T$

反向递推

又称内推，从连杆n到连杆1，向内迭代计算连杆间的相互作用力/力矩以及关节驱动力矩

- 力平衡

$${}^if_i = {}^iR \cdot {}^{i+1}f_{i+1} + {}^iF_i$$

- 力矩平衡

$${}^i n_i = {}^i N_i + {}^i_{i+1} R \cdot {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{C_i} \times {}^i F_i + {}^i P_{i+1} \times {}^i_{i+1} R \cdot {}^{i+1} f_{i+1}$$

两个相邻连杆的相互作用力矩在z轴方向的分量求得关节驱动力矩

转动关节 $\tau_i = {}^i n_i^T \cdot {}^i \hat{Z}_i$

移动关节 $\tau_i = {}^i f_i^T \cdot {}^i \hat{Z}_i$

拉格朗日方程

thanks Yuan_Lingzhi's_NoteBook

➤ 操作臂的动能表达式:

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^T v_{C_i} + \frac{1}{2} {}^i \omega_i^T {}^{C_i} I_i {}^i \omega_i$$

➤ 其中 $v_{C_i} = J_i(\Theta) \dot{\Theta}$, ${}^i \omega_i = {}^i_0 R(\Theta) \omega_i$, $\omega_i = J_i(\Theta) \dot{\Theta}$

➤ $k_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\Theta}^T J_i^T(\Theta) J_i(\Theta) \dot{\Theta} + \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T J_i^T(\Theta) {}^i_0 R^T(\Theta) {}^{C_i} I_i {}^i_0 R(\Theta) J_i(\Theta) \dot{\Theta}$

➤ $k_i = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T \{ m_i J_i^T(\Theta) J_i(\Theta) + J_i^T(\Theta) {}^i_0 R^T(\Theta) {}^{C_i} I_i {}^i_0 R(\Theta) J_i(\Theta) \} \dot{\Theta}$

$$k = \sum_i^n k_i = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T M(\Theta) \dot{\Theta}$$

$$\begin{aligned} M(\Theta) &= \sum_i^n \{ m_i J_i^T(\Theta) J_i(\Theta) + J_i^T(\Theta) {}^i_0 R^T(\Theta) {}^{C_i} I_i {}^i_0 R(\Theta) J_i(\Theta) \} \\ &= \sum_i^n \{ m_i \mathbf{J}_i^T \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_i^T {}^i_0 \mathbf{R}^T {}^{C_i} I_i {}^i_0 \mathbf{R} \mathbf{J}_i \} \end{aligned}$$

➤ 连杆*i*的势能可表示为:

$$u_i = -m_i {}^0 g^T {}^0 P_{C_i} + u_{ref_i}$$

➤ ${}^0 g$ 是 3×1 的重力矢量, ${}^0 P_{C_i}$ 是连杆*i*的质心的位置, u_{ref_i} 是使 u_i 的最小值为零的常数

➤ 操作臂的总势能

$$u = \sum_{i=1}^n u_i$$

➤ 操作臂的总势能 $u(\Theta)$ 可描述为关节位置的标量函数

拉格朗日函数:

$$L(\Theta, \dot{\Theta}) = k(\Theta, \dot{\Theta}) - u(\Theta)$$

操作臂运动方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = \tau$$

τ 是 $n \times 1$ 的驱动力矩矢量

对于操作臂而言

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial k}{\partial \Theta} + \frac{\partial u}{\partial \Theta} = \tau$$

示例: [机器人动力学拉格朗日法详细推导\(二连杆机械臂\)](#)