轨迹规划

定义辨析

- 任务规划：对机器人的操作顺序、行动步骤和作业进程的规划。
- 路径规划：在给定机械臂末端初始位姿和目标位姿，在无碰撞、结构无奇异等约束条件下，按照某一性能指标（如距离、时间、能量等）搜索出一条最优或次优的路径。路径只包含空间位置点信息。
- 轨迹规划：对所规划的路径上各点的位姿、速度和加速度给出一组显式约束（如连续性和光滑程度等），从一类包含时间变量的函数中（如多项式等）选取参数化轨迹，对各点进行插值并满足约束条件。换句话说，研究的是包含时间、位置、速度、加速度等信息的轨迹生成策略。

规划指标：

- 时间：速度快、效率高
- 能耗：节能降本、电源供应受限制环境
- 平滑：运动平稳、避免结构磨损、减小振动、提高轨迹跟踪精度

关节空间轨迹规划

运算量小、效率高，不会发生机构的奇异性问题，但末端执行器的路径形状不可预测

线性插值

位置连续，速度恒定，加速度在始末点为 $\pm\infty$ ，其余处为0
数学描述由1个一阶多项式构成

$$\begin{cases} q(t) &= a_0 + a_1 t \\ \dot{q}(t) &= a_1 \\ \ddot{q}(t) &= 0 \end{cases}$$

利用位置边界条件

$$\begin{cases} q(t_0) &= q_0 \\ q(t_f) &= q_f \end{cases}$$

求解出2个未知数

$$\begin{cases} a_0 &= q_0 \\ a_1 &= \frac{1}{t_f}(q_f - q_0) \end{cases}$$

抛物线插值

位置连续，速度连续，加速度段内恒定，段间不连续
数学描述由2个二阶多项式分段构成

$$\begin{cases} q_a(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2, & t \in [t_0, t_b] \\ \dot{q}_a(t) &= a_1 + 2a_2 t, & t \in [t_0, t_b] \\ \ddot{q}_a(t) &= 2a_2, & t \in [t_0, t_b] \\ q_b(t) &= a_3 + a_4(t-t_b) + a_5(t-t_b)^2, & t \in [t_b, t_f] \\ \dot{q}_b(t) &= a_4 + 2a_5(t-t_b), & t \in [t_b, t_f] \\ \ddot{q}_b(t) &= 2a_5, & t \in [t_b, t_f] \end{cases}$$

利用位置和速度边界条件，以及衔接位置速度连续条件

$$\begin{cases} q_a(t_0) &= a_0 &= q_0 \\ \dot{q}_a(t_0) &= a_1 &= \dot{q}_0 \\ q_b(t_f) &= a_3 + a_4(t_f-t_b) + a_5(t_f-t_b)^2 &= q_f \\ \dot{q}_b(t_f) &= a_4 + 2a_5(t_f-t_b) &= \dot{q}_f \\ q_a(t_b) &= a_0 + a_1 t_b + a_2 t_b^2 &= a_3 &= q_b(t_b) \\ \dot{q}_a(t_b) &= a_1 + 2a_2 t_b &= a_4 &= \dot{q}_b(t_b) \end{cases}$$

求解出6个未知数

$$\begin{cases} a_0 &= & q_0 \\ a_1 &= & \dot{q}_0 \\ a_2 &= & \frac{2(q_f-q_0)-\dot{q}_0(t_f+t_b)-\dot{q}_f(t_f-t_b)}{2t_f(t_f-t_b)} \\ a_3 &= & \frac{2q_f t_b+(t_f-t_b)(2q_0+t_b(\dot{q}_0-\dot{q}_f))}{2t_f} \\ a_4 &= & \frac{2(q_f-q_0)-\dot{q}_0 t_b-\dot{q}_f(t_f-t_b)}{t_f} \\ a_5 &= & \frac{-2(q_f-q_0)+\dot{q}_0 t_b+\dot{q}_f(2t_f-t_b)}{2t_f(t_f-t_b)} \end{cases}$$

三次多项式插值

位置连续，速度连续，加速度线性，加加速度恒定，多点路径的过渡点加加速度不连续
数学描述由1个三阶多项式构成

$$\begin{cases} q(t) &= & a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3 \\ \dot{q}(t) &= & a_1+2a_2t+3a_3t^2 \end{cases}$$

利用位置和速度边界条件

$$\begin{cases} q(t_0) &= & a_0 &= & q_0 \\ \dot{q}(t_0) &= & a_1 &= & \dot{q}_0 \\ q(t_f) &= & a_0+a_1t_f+a_2t_f^2+a_3t_f^3 &= & q_f \\ \dot{q}(t_f) &= & a_1+2a_2t_f+3a_3t_f^2 &= & \dot{q}_f \end{cases}$$

求解出4个未知数

$$\begin{cases} a_0 &= & q_0 \\ a_1 &= & \dot{q}_0 \\ a_2 &= & \frac{3}{t_f^2}(q_f-q_0)-\frac{2}{t_f}\dot{q}_0-\frac{1}{t_f}\dot{q}_f \\ a_3 &= & \frac{1}{t_f^2}(\dot{q}_f+\dot{q}_0)-\frac{2}{t_f^3}(q_f-q_0) \end{cases}$$

五次多项式插值

位置连续，速度连续，加速度连续
数学描述由1个五阶多项式构成

$$\begin{cases} q(t) &= & a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+a_5t^5 \\ \dot{q}(t) &= & a_1+2a_2t+3a_3t^2+4a_4t^3+5a_5t^4 \\ \ddot{q}(t) &= & 2a_2+6a_3t+12a_4t^2+20a_5t^3 \end{cases}$$

利用位置、速度和加速度边界条件

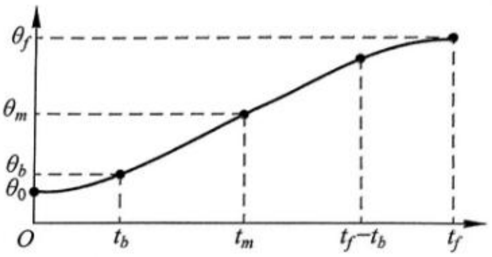
$$\begin{cases} q(t_0) &= & a_0 &= & q_0 \\ \dot{q}(t_0) &= & a_1 &= & \dot{q}_0 \\ \ddot{q}(t_0) &= & 2a_2 &= & \ddot{q}_0 \\ q(t_f) &= & a_0+a_1t_f+a_2t_f^2+a_3t_f^3+a_4t_f^4+a_5t_f^5 &= & q_f \\ \dot{q}(t_f) &= & a_1+2a_2t_f+3a_3t_f^2+4a_4t_f^3+5a_5t_f^4 &= & \dot{q}_f \\ \ddot{q}(t_f) &= & 2a_2+6a_3t_f+12a_4t_f^2+20a_5t_f^3 &= & \ddot{q}_f \end{cases}$$

求解出6个未知数

$$\begin{cases} a_0 &= & q_0 \\ a_1 &= & \dot{q}_0 \\ a_2 &= & 0.5\ddot{q}_0 \\ a_3 &= & \frac{1}{2t_f^3}(20(q_f-q_0)-(8\dot{q}_f+12\dot{q}_0)t_f+(\ddot{q}_f-3\ddot{q}_0)t_f^2) \\ a_4 &= & \frac{1}{2t_f^4}(30(q_0-q_f)+(14\dot{q}_f+16\dot{q}_0)t_f-(2\ddot{q}_f-3\ddot{q}_0)t_f^2) \\ a_5 &= & \frac{1}{2t_f^5}(12(q_f-q_0)-6(\dot{q}_f+\dot{q}_0)t_f+(\ddot{q}_f-\ddot{q}_0)t_f^2) \end{cases}$$

T型速度曲线

thanks 浅谈机器人中的轨迹规划
位置连续，速度连续，加速度在变速段恒定，匀速段为0，全程不连续，属于时间最优的规划算法
数学描述由1个一阶多项式和2个二阶多项式分段构成，匀加速->匀速->匀减速



（与蔡自兴老师《机器人学》定义基本一致，但此处推导增加边界速度非零的约束）
假定加速段和减速段对称，加速段结束时刻对应物理量的下标均为 b，全程中间时刻对应物理量的下表均为 m
由加速段与匀速段的衔接点物理量相等可得

$$\begin{cases} q_b &= q_0 + \dot{q}_0 t_b + \frac{1}{2}\ddot{q}_b t_b^2 \\ \dot{q}_b &= \qquad \dot{q}_0 + \ddot{q}_b t_b & = & \frac{q_m - q_b}{t_m - t_b} \end{cases}$$

根据轨迹对称性，可知中点处

$$\begin{cases} q_m = \frac{1}{2}(q_0 + q_f) \\ t_m = \frac{1}{2} t_f \end{cases}$$

代入化简，求得单个变速段耗时

$$t_b = \frac{t_f}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{q}_b^2 t_f^2 + 4\ddot{q}_b(\dot{q}_0 t_f + q_0 - q_f)}}{2\ddot{q}_b}$$

由此引出加速度的合法取值范围

$$\ddot{q}_b \geq \frac{4(q_f - q_0 - \dot{q}_0 t_f)}{t_f^2}$$

上式取等号时，退化成仅含加速段和减速段的三角形速度曲线；加速度无穷大时，退化成仅含匀速段的线性插值。
综上，轨迹的数学描述为

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \dot{q}_0 t + 0.5\ddot{q}_b t^2, & t \in [0, t_b] \\ q_0 - \dot{q}_0 t + \ddot{q}_b t_b (t - 0.5 t_b), & t \in [t_b, t_f - t_b] \\ q_f - \dot{q}_0 (t_f - t) - 0.5\ddot{q}_b (t_f - t)^2, & t \in [t_f - t_b, t_f] \end{cases}$$

实际应用中，往往无法预知全程耗时，因此常采用最大速度和最大加速度约束，求解各段耗时

- 若能达到最大速度，包含匀速段

$$\begin{cases} t_b &= \frac{\dot{q}_b - \dot{q}_0}{\ddot{q}_b} \\ t_f &= \frac{q_f - q_0}{\dot{q}_b} + \frac{\dot{q}_b - \dot{q}_0}{\dot{q}_b \ddot{q}_b}, \quad t_f \geq 2t_c \end{cases}$$

- 若未达到最大速度，不含匀速段

$$\begin{cases} t_b &= \sqrt{\frac{q_f - q_0}{\ddot{q}_b}} \\ t_f &= 2t_c \end{cases}$$

指数型速度曲线

（todo）

S型速度曲线

位置连续，速度连续，加速度连续，加加速度不连续
数学描述由1个一阶多项式、2个二阶多项式和4个三阶多项式分段构成，加加速->匀加速->减加速->匀速->加减速->匀减速->减减速

thanks <<六自由度机器人轨迹规划算法研究>> chapter3

设最大加加速度 J_{max} ，最大加速度为 A_{max} ，最大速度为 V_{max} ，构造函数如下

$$J(t)=\begin{cases}J_{max}, & t\in[0,t_1)\\ 0, & t\in[t_1,t_2)\\ -J_{max}, & t\in[t_2,t_3)\\ 0, & t\in[t_3,t_4)\\ -J_{max}, & t\in[t_4,t_5)\\ 0, & t\in[t_5,t_6)\\ J_{max}, & t\in[t_6,t_7]\end{cases}$$

$$A(t)=\begin{cases}J_{max}t, & t\in[0,t_1)\\ A_{max}, & t\in[t_1,t_2)\\ A_{max}-J_{max}(t-t_2), & t\in[t_2,t_3)\\ 0, & t\in[t_3,t_4)\\ -J_{max}(t-t_4), & t\in[t_4,t_5)\\ -A_{max}, & t\in[t_5,t_6)\\ -A_{max}+J_{max}(t-t_6), & t\in[t_6,t_7]\end{cases}$$

$$V(t)=\begin{cases}V_0+0.5J_{max}t^2, & t\in[0,t_1),\ \ V(t_1)=V_1\\ V_1+A_{max}(t-t_1), & t\in[t_1,t_2),\ V(t_2)=V_2\\ V_2+A_{max}(t-t_2)-0.5J_{max}(t-t_2)^2, & t\in[t_2,t_3),\ V(t_3)=V_3\\ V_3, & t\in[t_3,t_4),\ V(t_4)=V_4\\ V_4-0.5J_{max}(t-t_4)^2, & t\in[t_4,t_5),\ V(t_5)=V_5\\ V_5-A_{max}(t-t_5), & t\in[t_5,t_6),\ V(t_6)=V_6\\ V_6-A_{max}(t-t_6)+0.5J_{max}(t-t_6)^2, & t\in[t_6,t_7],\ V(t_7)=V_7\end{cases}$$

$$S(t)=\begin{cases}V_0t+\frac{1}{6}J_{max}t^3, & t\in[0,t_1),\ \ S(t_1)=S_1\\ S_1+V_1(t-t_1)+0.5A_{max}(t-t_1)^2, & t\in[t_1,t_2),\ S(t_2)=S_2\\ S_2+V_2(t-t_2)+0.5A_{max}(t-t_2)^2-\frac{1}{6}J_{max}(t-t_2)^3, & t\in[t_2,t_3),\ S(t_3)=S_3\\ S_3+V_3(t-t_3), & t\in[t_3,t_4),\ S(t_4)=S_4\\ S_4+V_4(t-t_4)-\frac{1}{6}J_{max}(t-t_4)^3, & t\in[t_4,t_5),\ S(t_5)=S_5\\ S_5+V_5(t-t_5)-0.5A_{max}(t-t_5)^2, & t\in[t_5,t_6),\ S(t_6)=S_6\\ S_6+V_6(t-t_6)-0.5A_{max}(t-t_6)^2+\frac{1}{6}J_{max}(t-t_6)^3, & t\in[t_6,t_7],\ S(t_7)=S_7\end{cases}$$

- 六段规划，无匀速段
  当位移距离满足 $(\sum_1^7 S_i-S_4)<S<\sum_1^7 S_i$ 时，由于存在匀加速段而没有匀速段，则可以达到最大加速度 A_{max} ，但达不到最大速度 V_{max} ，设修正最大速度 V_{nm} 为

  $$V_{nm}=\frac{1}{2}(\sqrt{(\frac{A_{max}^2}{J_{max}})^2+4A_{max}S}-\frac{A_{max}^2}{J_{max}})$$

  需要调整的时间为 $t_4-t_3=0$
- 五段规划，无匀加速与匀减速阶段
  当位移距离满足 $S>2V_{max}\sqrt{\frac{V_{max}}{J_{max}}}$ & $V_{max}\le A_{max}^2/J_{max}$ 时，则可以达到 V_{max} ，由于没有匀加速阶段，所以达不到最大加速度 A_{max} ，设修正的最大加速度 A_{nm} 为

  $$A_{nm}=\sqrt{V_{max}J_{max}}$$

  需要调整的时间为 $t_2-t_1=t_6-t_5=0$

  $$t_4-t_3=\frac{S}{V_{max}}-2\sqrt{\frac{V_{max}}{J_{max}}}$$

- 四段规划，无匀加速、匀减速阶段和匀速阶段
  当位移距离满足 $S>S_1+S_3+S_5+S_7$ 时，由于既没有匀速阶段，又没有匀加速阶段，所以达不到最大速度 V_{max} ，也达不到最大加速度 A_{max} ，设修正的最大加速度 A_{nm} 为

  $$A_{nm}=\sqrt[3]{\frac{SJ_{max}^2}{2}}$$

修正后最大速度 V_{nm} 为

$$V_{nm} = J_{max} t_1^2$$

需要调整的时间为 $t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = t_6 - t_5 = 0$

若边界速度非零，可参考《全类型非对称七段式S型曲线加减速控制算法研究》

正余弦速度曲线

位置连续，速度连续，加速度连续，加加速度不连续
数学描述由1个一阶多项式和2个正余弦多项式分段构成，变加速->匀速->变减速

thanks 《一种新型柔性加减速算法》
定义 S 为期望总位移，V_{max} 为期望最大速度约束，A_{max} 为期望最大加速度约束，V_s 为起始速度约束，V_e 为终止速度约束，S_1 为加速段的总位移，S_3 为减速段的总位移。
考虑到正余弦函数具有无限次连续可导的特性，令变速段速度与时间的余弦成正比，加速度与时间的正弦成正比，加加速度连续有界，也即构造 $1 - cos(t)$ 作为速度的数学表达式，$1 - cos(t)$ 的导数 $sin(t)$ 作为加速度的数学表达式。此处直接给出构造结果

- 加速段
  - 总耗时：$T_1 = \frac{V_{max} - V_s}{2A_{max}}$
  - 加加速度：$j(t) = \frac{A_{max} * \pi}{T_1} \cos(\frac{t}{T_1}\pi)$
  - 加速度：$a(t) = A_{max} \sin(\frac{t}{T_1}\pi)$
  - 速度：$v(t) = A_{max} T_1 (1 - \cos(\frac{t}{T_1}\pi)) + V_s$
  - 位移：$s(t) = A_{max} T_1 (t - \frac{T_1}{\pi} \sin(\frac{t}{T_1}\pi)) + V_s t$
- 匀速段
  - 总耗时：$T_2 = \frac{S - S_1 - S_3}{V_{max}}$
  - 加加速度：$j(t) = 0$
  - 加速度：$a(t) = 0$
  - 速度：$v(t) = V_{max}$
  - 位移：$s(t) = V_{max} t$
- 减速段
  - 总耗时：$T_3 = \frac{V_{max} - V_e}{2A_{max}}$
  - 加加速度：$j(t) = -\frac{A_{max} * \pi}{T_3} \cos(\frac{t}{T_3}\pi)$
  - 加速度：$a(t) = -A_{max} \sin(\frac{t}{T_3}\pi)$
  - 速度：$v(t) = -A_{max} T_3 (1 - \cos(\frac{t}{T_3}\pi)) + V_{max}$
  - 位移：$s(t) = -A_{max} T_3 (t - \frac{T_3}{\pi} \sin(\frac{t}{T_3}\pi)) + V_{max} t$

thanks 《基于函数逼近的三角函数加减速方法》
在算力有限的平台，可使用切比雪夫多项式逼近 sin 或 cos 函数

- 加速段
  - 总耗时：$T_1 = \frac{3(V_{max} - V_s)}{2A_{max}}$
  - 加加速度：$j(t) = 4A_{max}(\frac{1}{T_1} - \frac{2t}{T_1^2})$
  - 加速度：$a(t) = 4A_{max}(\frac{t}{T_1} - (\frac{t}{T_1})^2)$
  - 速度：$v(t) = 4A_{max}(\frac{t^2}{2T_1} - \frac{t^3}{3T_1^2}) + V_s$
  - 位移：$s(t) = 2A_{max}(\frac{t^3}{3T_1} - \frac{t^4}{6T_1^2}) + V_s t$
- 匀速段
  - 总耗时：$T_2 = \frac{S - S_1 - S_3}{V_{max}}$
  - 加加速度：$j(t) = 0$
  - 加速度：$a(t) = 0$
  - 速度：$v(t) = V_{max}$
  - 位移：$s(t) = V_{max} t$
- 减速段
  - 总耗时：$T_3 = \frac{3(V_{max} - V_e)}{2A_{max}}$
  - 加加速度：$j(t) = -4A_{max}(\frac{1}{T_3} - \frac{2t}{T_3^2})$
  - 加速度：$a(t) = -4A_{max}(\frac{t}{T_3} - (\frac{t}{T_3})^2)$
  - 速度：$v(t) = -4A_{max}(\frac{t^2}{2T_3} - \frac{t^3}{3T_3^2}) + V_{max}$
  - 位移：$s(t) = -2A_{max}(\frac{t^3}{3T_3} - \frac{t^4}{6T_3^2}) + V_{max} t$

笛卡尔空间轨迹规划

计算量大、效率低，会遇到机构的奇异性问题，末端路径可预测

直线规划

- 计算起点和终点间位置的欧式距离
- 计算起点和终点间姿态的四元数或轴角向量
- 计算起点和终点间各附加轴线位移或角位移
- 根据机器人最大线速度、最大角速度约束，初步估算运动耗时最长的轴组
- 将耗时最长轴组的运动参数归一化，作为参考虚轴
- 对参考虚轴执行速度规划算法，求解相关参数，确定规划函数的数学表达
- 每个插补周期实时计算虚轴的位置、速度、加速度的进给比例 $\lambda \in [0,1]$
- 各轴组根据虚轴的进给比例，对坐标进行等比例线性插值，得到当前周期的位姿

$$p_i = p_0 + \lambda(p_f - p_0)$$

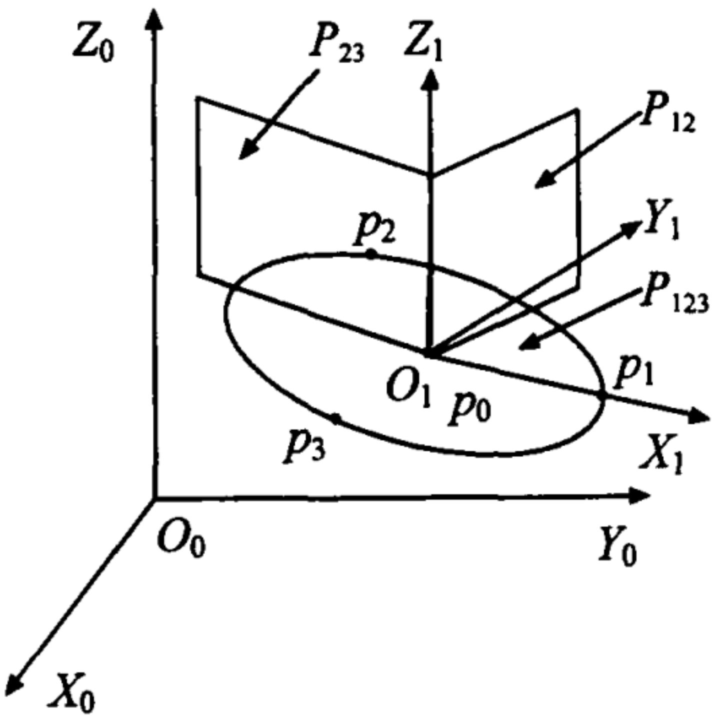
- 实轴位姿描述转换：进给线位移分解到xyz，进给轴角姿态或四元数姿态等效到旋转矩阵或rpy角
- 通过运动学逆解，将得到的笛卡尔空间位姿转换为关节空间坐标
- 将关节坐标通过各自齿轮比或脉冲当量映射到电机空间，下发给电机执行

圆弧规划

步骤与直线规划大体相同，只需将直线规划中的位移替换成圆弧规划中的圆心角。每个插补周期到来时，在圆弧所在二维空间平面，通过速度规划算法控制圆心角的进给，再将二维圆弧的插补点转换回三维基坐标系的机器人位姿，最终形成圆弧轨迹。
比直线规划多的内容，主要是依据给定条件，确定圆弧描述方程，计算出圆心、半径和圆心角。

thanks 《六自由度串联机器人运动优化与轨迹跟踪控制研究》

已知弧上三点坐标



弧上三点 p_1 p_2 p_3 确定一个平面 P_{123} ，设外接圆方程为

$$k_{11}x + k_{12}y + k_{13}z + k_{14} = 0$$

$$\begin{cases} k_{11} = (y_1 - y_3)(z_2 - z_3) - (y_2 - y_3)(z_1 - z_3) \\ k_{12} = (z_1 - z_3)(x_2 - x_3) - (z_2 - z_3)(x_1 - x_3) \\ k_{13} = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3) \\ k_{14} = -(k_{11}x_3 + k_{12}y_3 + k_{13}z_3) \end{cases}$$

p_1 p_2 的中垂面 P_{12} 方程为

$$k_{21}x+k_{22}y+k_{23}z+k_{24}=0$$
$$\begin{cases} k_{21}=x-2-x_1 \\ k_{22}=y_2-y_1 \\ k_{23}=z_2-z_1 \\ k_{24}=-0.5((x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)+(z_2^2-z_1^2)) \end{cases}$$

p_2 p_3 的中垂面 P_{23} 方程为

$$k_{31}x+k_{32}y+k_{33}z+k_{34}=0$$
$$\begin{cases} k_{31}=x-3-x_2 \\ k_{32}=y_3-y_2 \\ k_{33}=z_3-z_2 \\ k_{34}=-0.5((x_3^2-x_2^2)+(y_3^2-y_2^2)+(z_3^2-z_2^2)) \end{cases}$$

圆心 $p_0=[x_0,y_0,z_0]^T$ 为上述三平面的交点

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{14} \\ -k_{24} \\ -k_{34} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -k_{14} \\ -k_{24} \\ -k_{34} \end{bmatrix}$$

外接圆的半径

$$r=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}$$

以圆心 p_0 为原点 O_1 ，建立新坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$，其中 O_1X_1 、 O_1Y_1 、 O_1Z_1 为两两正交的坐标轴。

O_1X_1 方向与 O_1p_1 方向一致，因此 O_1X_1 在基坐标系中的方向余弦为

$$\vec{n_1}=\frac{[x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0]^T}{r}$$

O_1Z_1 方向与平面 P_{123} 法向量 $[k_{11},k_{12},k_{13}]^T$ 一致，因此 O_1Z_1 在基坐标系中的方向余弦为

$$\vec{a_1}=\frac{[k_{11},k_{12},k_{13}]^T}{|\sqrt{k_{11}^2+k_{12}^2+k_{13}^2}|}$$

O_1Y_1 根据右手定则确定，在基坐标系中的方向余弦为

$$\vec{o_1}=\vec{a_1}\times\vec{n_1}$$

此时可得 $O_1X_1Y_1Z_1$ 到 $O_0X_0Y_0Z_0$ 的齐次变换矩阵

$$^0_1T=\begin{bmatrix} n_1 & o_1 & a_1 & p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将三维圆弧降维到 $O_1X_1Y_1Z_1$ 坐标系的 $X_1O_1Y_1$ 面。利用坐标变换矩阵，将已知条件中基坐标系的圆弧路径点投影到新坐标系

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0_1T^{-1} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

根据 p_1 p_2 p_3 的顺序确定进给方向，并计算夹角

$$\begin{cases} \angle p_1O_1p_2=\arctan 2(v_{21y},u_{21x})+\lambda_1\times 2\pi \\ \angle p_1O_1p_3=\arctan 2(v_{31y},u_{31x})+\lambda_2\times 2\pi \end{cases}$$

当 $\arctan 2(v_{21y},u_{21x})<0$ 时，$\lambda_1=0$, 否则 $\lambda_1=1$ ；当 $\arctan 2(v_{31y},u_{31x})<0$ 时，$\lambda_2=0$, 否则 $\lambda_2=1$ 。若 $\angle p_1O_1p_2<\angle p_1O_1p_3$ ，则为逆时针运动，圆心角 $\Omega=\angle p_1O_1p_3$ ；否则为顺时针运动，圆心角 $\Omega=2\pi-\angle p_1O_1p_3$ 。

此时已获得圆弧在 $O_1X_1Y_1Z_1$ 坐标系中的路径点、圆心、半径、方向和圆心角，可进行速度规划插补。插值点坐标

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(s_{dir}\omega t_i) \\ r\sin(s_{dir}\omega t_i) \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中，s_{dir} 为方向系数，逆时针 $s_{dir}=1$，顺时针 $s_{dir}=-1$。ω 为角速度，$t_i \in [0,t]$ 为当前插补时间，$t=\frac{\Omega}{\omega}$ 为运动总耗时。

最后将插值点转换回基坐标系

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0_1T \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

已知弧上两点和圆心坐标

复杂公式略（可参考已知弧上三点情况的公式），步骤如下：

- 圆心与两点分别连线，得两个向量
- 计算任一向量模长，得半径
- 用余弦定理算两向量夹角，得圆心角
- 确定圆弧方向
- 三点确定平面，以圆心为原点构建新坐标系
- 起点连线为x轴，向量叉乘为z轴，右手定则得y轴
- 通过速度规划算法，以圆心角为总路程做周期插补，计算插补点坐标
- 坐标转换回基坐标系

已知弧上两点和圆弧半径

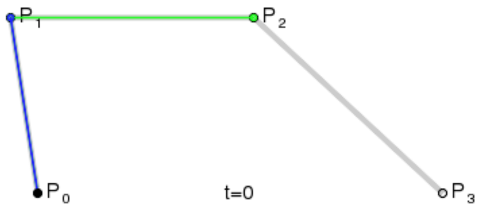
复杂公式略（可参考已知弧上三点情况的公式），步骤如下：

- 两点连线，得弦向量a
- 计算向量a模长，得弦长
- 计算弦中点坐标
- 圆心和弦中点连线，利用勾股定理，根据半径和弦长，算垂线h
- 构造垂直于向量a的单位向量b
- 圆心在弦中垂线上，用弦中点和向量b，算圆心坐标
- 圆心与两点分别连线，得两个向量
- 用余弦定理算两向量夹角，得圆心角
- 确定圆弧方向
- 三点确定平面，以圆心为原点构建新坐标系
- 起点连线为x轴，向量叉乘为z轴，右手定则得y轴
- 通过速度规划算法，以圆心角为总路程做周期插补，计算插补点坐标
- 坐标转换回基坐标系

贝塞尔曲线规划

已知控制点

已知型值点



NURBS曲线规划

已知控制点

已知型值点

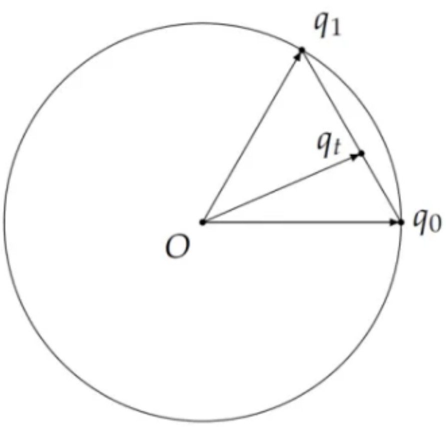
关于姿态插补

先将起点到终点的姿态转为两个单位四元数描述再插值

- 四元数线性插值Lerp

$$q_i = Lerp(q_0, q_1, \frac{t_i}{t}) = (1 - \frac{t_i}{t})q_0 + \frac{t_i}{t}q_1$$

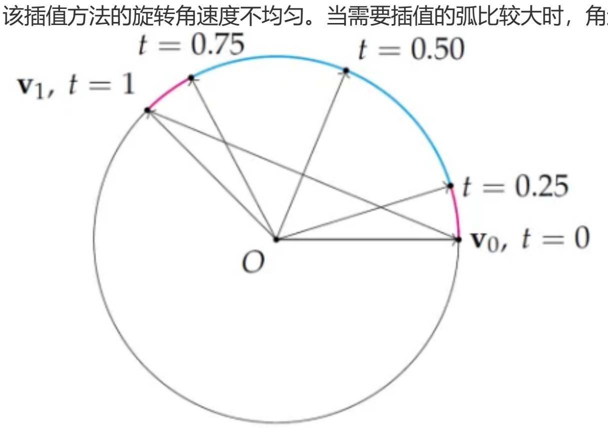
由于是沿着圆（超球面）上的弦进行插值，这样插值的结果不是单位四元数，不满足要求



- 四元数归一化线性插值Nlerp
  对两个单位四元数先进行线性插值，再除以模长进行归一化

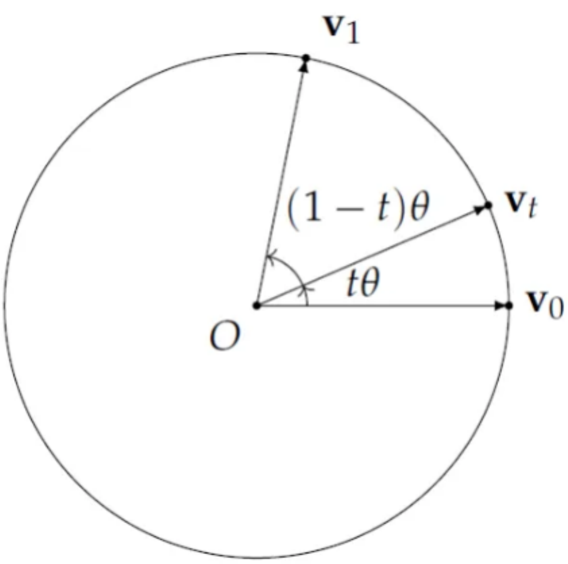
$$q_i = Nlerp(q_0, q_1, \frac{t_i}{t}) = \frac{(1 - \frac{t_i}{t})q_0 + \frac{t_i}{t}q_1}{|(1 - \frac{t_i}{t})q_0 + \frac{t_i}{t}q_1|}$$

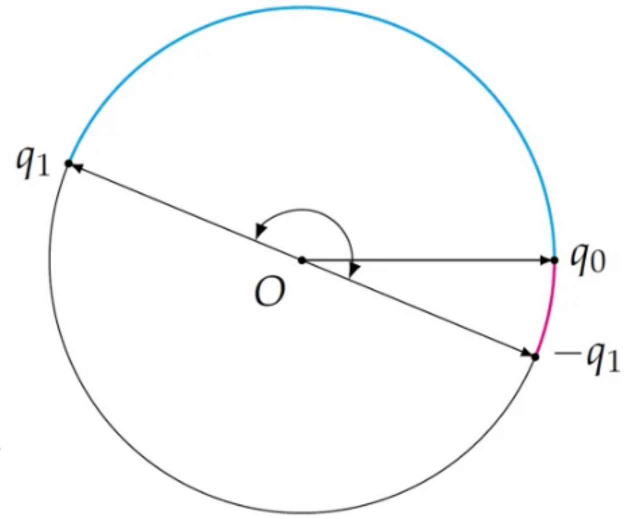
该插值方法的旋转角速度不均匀。当需要插值的弧比较大时，角速度会有显著的变化。



- 四元数球面线性插值Slerp
  对两个单位四元数的夹角 θ 进行线性插值，确保旋转角速度的均匀性

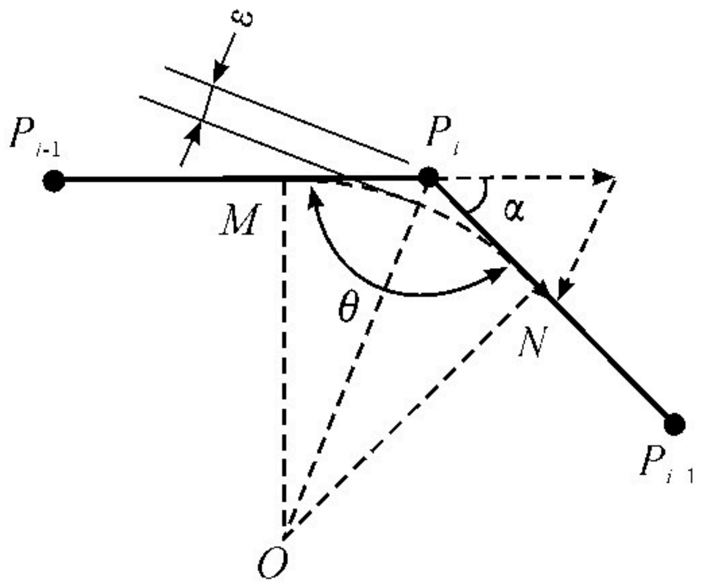
$$\begin{cases} \theta = \arccos(q_0 \cdot q_1) \\ q_i = Slerp(q_0, q_1, \frac{t_i}{t}) = \frac{sin((1-\frac{t_i}{t})\theta)}{\sin\theta}q_0 + \frac{sin(\frac{t_i}{t}\theta)}{\sin\theta}q_1 \end{cases}$$



> tips：单位四元数 q 和 $-q$ 对应的是同一个旋转，对向量变换的最终结果是完全形同的，但作为向量相差 π 弧度
>
> $$v^{'} = qvq^* = qvq^{-1}$$
>
> 两个单位四元数 q_0 和 q_1 进行插值之前，需先通过检测点乘结果判断夹角是否为钝角。若 $q_1 \cdot q_1 < 0$，说明夹角大于180°，应将 q_1 改为 $-q_1$，使用新夹角进行插值，保证插值的路径最短。
>
> 
>

轨迹前瞻

单段前瞻



根据两条线段 $P_{i-1}P_i \quad P_iP_{i+1}$，获知三点坐标

$$\begin{cases} P_{i-1} = [x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}] \\ P_i = [x_i, y_i, z_i] \\ P_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}] \end{cases}$$

计算两个单位向量

$$\begin{cases} \vec{a} = \frac{\vec{P_{i-1}P_i}}{|\vec{P_{i-1}P_i}|} = \frac{[x_i - x_{i-1},\, y_i - y_{i-1},\, z_i - z_{i-1}]}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}} \\ \vec{b} = \frac{\vec{P_iP_{i+1}}}{|\vec{P_iP_{i+1}}|} = \frac{[x_{i+1} - x_i,\, y_{i+1} - y_i,\, z_{i+1} - z_i]}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}} \end{cases}$$

根据余弦定理，计算出两个单位向量的夹角

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

注意两个向量的方向，考虑是否需要更新为夹角的补角

$$\cos\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

构造虚拟内切圆，r 为内切圆半径，ε 为轮廓误差，根据几何关系可知

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{r}{r+\varepsilon}$$

计算圆弧半径

$$r = \frac{\varepsilon\ \sin\frac{\theta}{2}}{1-\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\varepsilon\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}{1-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}$$

注意修正圆弧切点到线段拐点的距离 MP_i 或 NP_i，不可超过任一线段半长

$$s_c = min(\frac{|P_{i-1}\vec{P}_i|}{2}, \frac{|P_i\vec{P}_{i+1}|}{2}, \frac{r}{\tan\frac{\theta}{2}})$$

$$r = s_c\tan\frac{\theta}{2} = s_c\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

根据圆弧切向速度和向心加速度公式，分别代入两线段的加速度值，计算切向速度

$$\begin{cases} v_c = \omega r = \frac{2\pi r}{T} \\ a_c = \omega^2 r \end{cases} \Rightarrow v_c = \sqrt{a_c r}$$

根据其他运动约束，如线段首尾速度限制等，挑选出最小速度作为最终安全的拐角速度

> 若涉及圆弧曲线或样条曲线等非直线路径的衔接，应先计算曲线在衔接处的切线，使用等效切线段参与前瞻规划
> 连续多类型曲线段进给速度前瞻规划

多段前瞻

双向前瞻

《基于双向扫描算法的小线段速度规划》

补充

- bezier曲线和NURBS曲线
- 前瞻

> 机械臂笛卡尔空间规划