动力学建模

概述

- 正动力学：已知各关节的作用力或力矩，求运动轨迹点的关节位移、速度和加速度，是进行机器人计算机仿真的基础
- 逆动力学：已知运动轨迹点的关节位移、速度和加速度，求出关节的驱动力矩，是实现机器人基于动力学模型控制的基础

常用的机器人动力学分析方法：牛顿-欧拉方程、拉格朗日方程、旋量对偶法、凯恩法等

动力学设计流程：建立逆动力学参数方程->利用力矩模型对动力参数的线性关系建立观测矩阵->获取最小参数集->生成激励轨迹->运行激励轨迹收集数据->数据滤波去噪->最小二乘辨识求解力学参数

转动惯量

定义

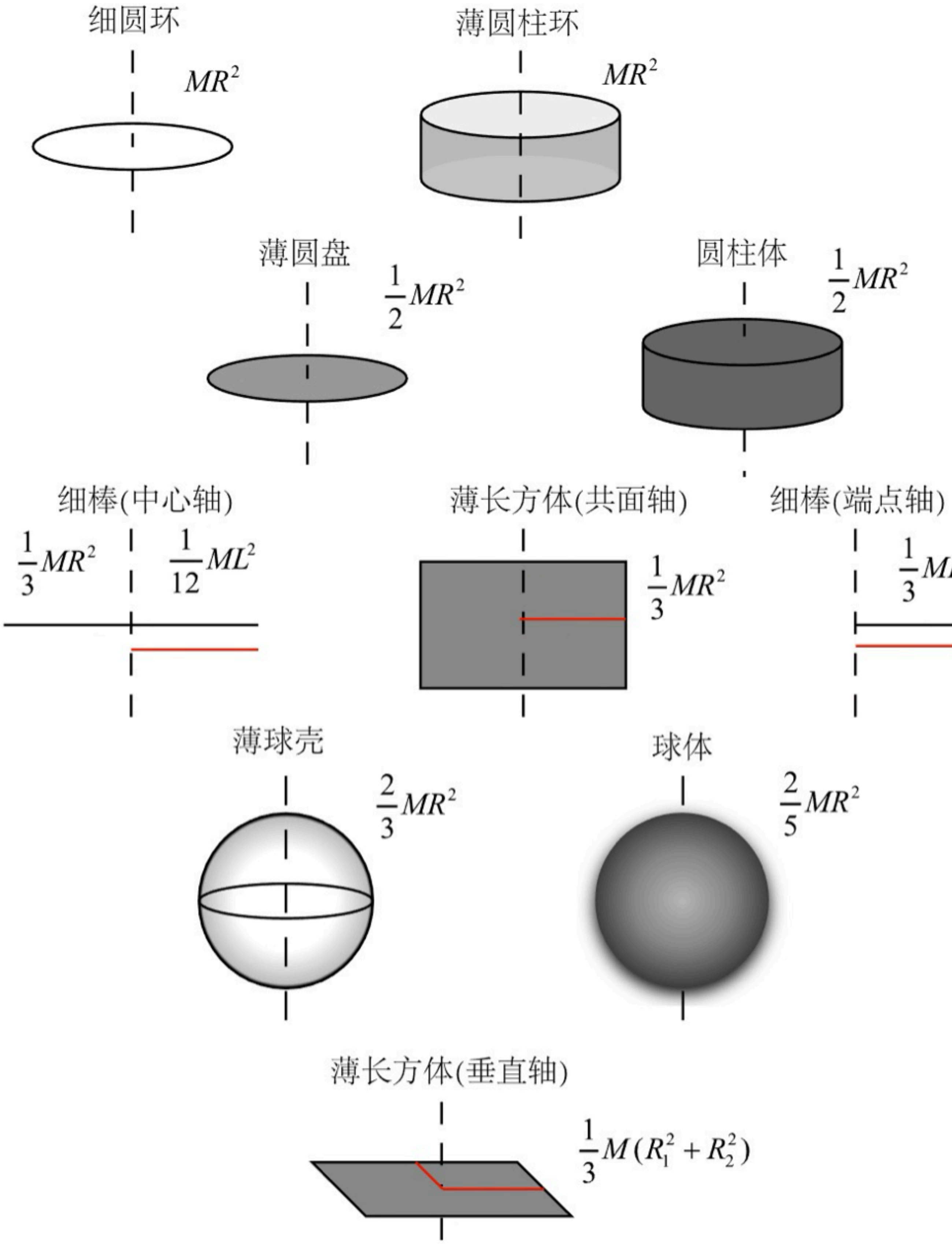
- 惯性是物体保持其原有运动状态不变的性质，物体能做惯性运动的本质就在于物体具有惯性。转动惯量是刚体转动时对惯性的量度描述，默认单位 $kg \cdot m^2$ 。

计算公式

- 离散刚体 $J = \sum_i \triangle m_i r_i^2$
- 连续刚体 $J = \int_m r^2 dm$

结论

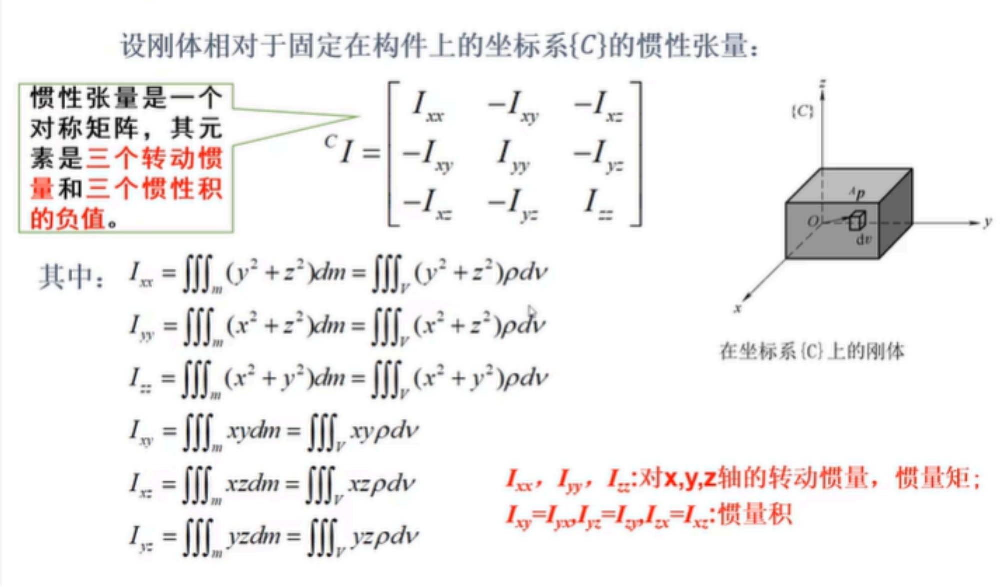
- 对于定轴而言，刚体的转动惯量是一个常数
- 形状大小相同的刚体，质量大的转动惯量大
- 质量相同的刚体，转轴离质心越远，转动惯量越大



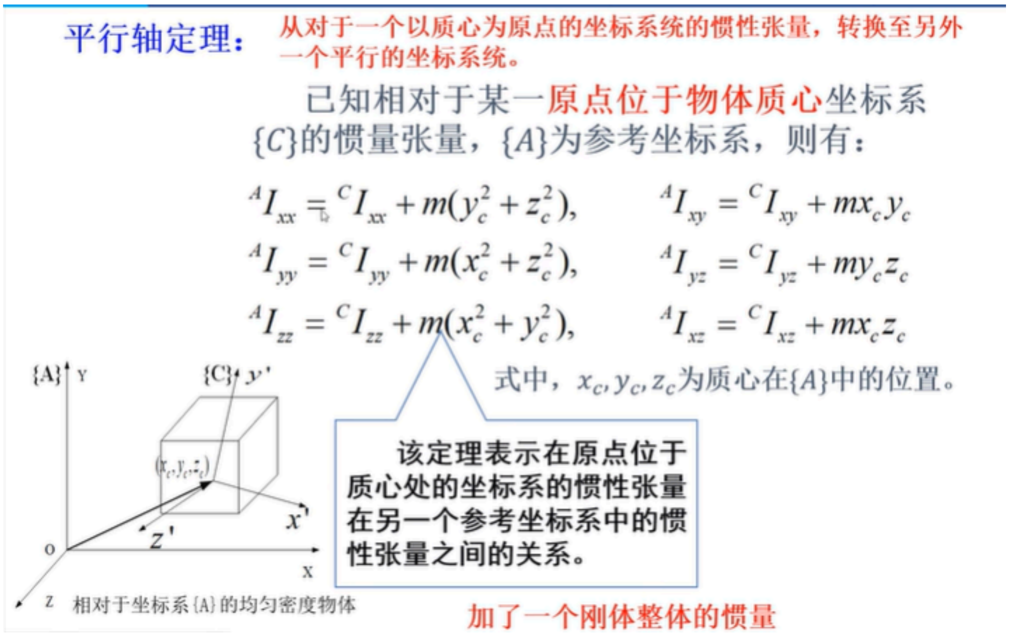
惯性张量

thanks 零基础机器人学导论

刚体在做定点转动时，刚体中有一点始终保持不变。惯性张量是描述刚体做定点转动时的转动惯性的一组惯性量。因为有不同方向的分量，把它们合在一起用一个张量就可以表示，这个张量就是惯性张量。
定轴转动是定点转动的特例，转动惯量包含在惯性张量中。



如果以质心为坐标系原点，计算后惯量积的值会为0。此时的坐标系轴称为主轴，相应的惯量称为主惯量。主惯量是惯量矩阵的三个特征值。



牛顿-欧拉方程

thanks PhilFan's_NoteBook

> - 牛顿方程
>   刚体以质心为中心做平移，质量为 m ，质心处的线速度 v ，线加速度 $\dot{v}$ ，则作用在质心处的力为
> $$F=m\dot{v}$$
> - 欧拉方程
>   刚体绕质心转动，以质心为刚体坐标系原点的惯性张量为 I ，角速度 ω ，角加速度 $\dot{\omega}$ ，则作用在质心处的力矩为
> $$N=I\dot{\omega}+\omega\times I\omega$$
> - 推广到串联机器人
> $$\begin{cases} \vec{F}_i=m_i\dot{\vec{v}}_i \\ \vec{N}_i=I_i\dot{\vec{\omega}}_i+\vec{\omega}_i\times(I_i\vec{\omega}_i) \end{cases}$$
>
>   式中，$\vec{F}_i$ 表示连杆 i 的合外力，m_i 表示连杆 i 的质量，$\dot{\vec{v}}_i$ 表示连杆 i 的线加速度，$\vec{N}_i$ 表示连杆 i 质心的合力矩，I_i 表示连杆 i 绕质心的惯性张量，$\dot{\vec{\omega}}_i$ 表示连杆 i 的角加速度。

正向递推

又称外推，从连杆0到连杆n-1，向外迭代计算连杆的速度和加速度

若第 $i+1$ 关节为旋转关节：

- 角速度

$$
{}^{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i}^{i+1}R \cdot {}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}
$$
$$
{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = [0,0,1]^T
$$

- 角加速度

$$
{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}_{i}^{i+1}R \cdot {}^{i}\dot{\omega}_i + {}_{i}^{i+1}R \cdot {}^{i}\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}
$$

- 原点线加速度

$$
{}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}_{i}^{i+1}R \left[{}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times \left({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1} \right) + {}^{i}\dot{v}_i \right]
$$

- 质心线加速度

$$
{}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} = {}_{i}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \left({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} \right) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1}
$$

- 力

$$
{}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1} \cdot {}_{i}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}}
$$

- 力矩

$$
{}^{i+1}N_{i+1} = {}^{C_{i+1}}I_{i+1} \cdot {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{C_{i+1}}I_{i+1} \cdot {}^{i+1}\omega_{i+1}
$$

若第 $i+1$ 关节为移动关节：

- 角速度

$$
{}^{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i}^{i+1}R \cdot {}^{i}\omega_i
$$

- 角加速度

$$
{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}_{i}^{i+1}R \cdot {}^{i}\dot{\omega}_i
$$

- 原点线加速度

$$
{}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}_{i}^{i+1}R \left[{}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times \left({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1} \right) + {}^{i}\dot{v}_i \right] + 2 \cdot {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \ + \ \ddot{d}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}
$$

- 质心线加速度

$$
{}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} = {}_{i}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \left({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} \right) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1}
$$

- 力

$$
{}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1} \cdot {}_{i}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}}
$$

- 力矩

$$
{}^{i+1}N_{i+1} = {}^{C_{i+1}}I_{i+1} \cdot {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{C_{i+1}}I_{i+1} \cdot {}^{i+1}\omega_{i+1}
$$

> 角速度初始值 ${}^{0}\omega_0 = (0,0,0)^T$
> 角加速度初始值 ${}^{0}\dot{\omega}_0 = (0,0,0)^T$
> 加速度初始值（含重力） ${}^{0}v_0 = (0,g,0)^T$

反向递推

又称内推，从连杆n到连杆1，向内迭代计算连杆间的相互作用力/力矩以及关节驱动力矩

- 力平衡

$$
{}^{i}f_i = {}_{i+1}^{i}R \cdot {}^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_i
$$

- 力矩平衡

$$ {}^{i}n_i = {}^{i}N_i + {}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}f_{i+1} $$

两个相邻连杆的相互作用力矩在z轴方向的分量求得关节驱动力矩
转动关节 $\tau_i = {}^{i}n_i^T \cdot {}^{i}\hat{Z}_i$
移动关节 $\tau_i = {}^{i}f_i^T \cdot {}^{i}\hat{Z}_i$

拉格朗日方程

thanks Yuan_Lingzhi's_NoteBook

➢ 操作臂的动能表达式:

$$ k_i = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^{\mathrm{T}} v_{C_i} + \frac{1}{2}\ {}^{i}\omega_i^{\mathrm{T}}\,{}^{C_i}I_i\ {}^{i}\omega_i $$

➢ 其中$v_{C_i} = J_i(\Theta)\dot{\Theta}$，${}^{i}\omega_i = {}^{i}_{0}R(\Theta)\omega_i$，$\omega_i = \mathcal{J}_i(\Theta)\dot{\Theta}$

➢ $k_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\Theta}^T J_i^T(\Theta) J_i(\Theta)\dot{\Theta} + \frac{1}{2}\dot{\Theta}^T \mathcal{J}_i^T(\Theta)\,{}^{i}_{0}R^T(\Theta)\,{}^{C_i}I_i\,{}^{i}_{0}R(\Theta)\mathcal{J}_i(\Theta)\dot{\Theta}$

➢ $k_i = \frac{1}{2}\dot{\Theta}^T\{m_i J_i^T(\Theta)J_i(\Theta) + \mathcal{J}_i^T(\Theta)\,{}^{i}_{0}R^T(\Theta)\,{}^{C_i}I_i\,{}^{i}_{0}R(\Theta)\mathcal{J}_i(\Theta)\}\dot{\Theta}$

$$ k = \sum_{i}^{n} k_i = \frac{1}{2}\dot{\Theta}^T M(\Theta)\dot{\Theta} $$

$$ M(\Theta) = \sum_{i}^{n}\{m_i J_i^T(\Theta)J_i(\Theta) + \mathcal{J}_i^T(\Theta)\,{}^{i}_{0}R^T(\Theta)\,{}^{C_i}I_i\,{}^{i}_{0}R(\Theta)\mathcal{J}_i(\Theta)\} $$

$$ = \sum_{i}^{n}\{m_i J_i^T J_i + \mathcal{J}_i^T\,{}^{i}_{0}R^T\,{}^{C_i}I_i\,{}^{i}_{0}R\mathcal{J}_i\} $$

➢ 连杆i的势能可表示为:

$$ u_i = -m_i\ {}^{0}g^T\ {}^{0}P_{C_i} + u_{ref_i} $$

➢ ${}^{0}g$ 是 3×1 的重力矢量，${}^{0}P_{C_i}$ 是连杆i的质心的位置，u_{ref_i} 是使u_i的最小值为零的常数

➢ 操作臂的总势能

$$ u = \sum_{i=1}^{n} u_i $$

➢ 操作臂的总势能$u(\Theta)$可描述为关节位置的标量函数

拉格朗日函数:

$$L(\Theta,\dot{\Theta}) = k(\Theta,\dot{\Theta}) - u(\Theta)$$

操作臂运动方程:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = \tau$$

τ 是 n × 1 的驱动力矩矢量

对于操作臂而言

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial k}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial k}{\partial \Theta} + \frac{\partial u}{\partial \Theta} = \tau$$

示例：机器人动力学拉格朗日法详细推导(二连杆机械臂)