微分运动学

微分运动

正如字面意思，微分运动，也就是研究位姿的微小变化。
定义 $\vec{d}=[dx,dy,dz]$ ，表示沿 x 、 y 、 z 轴的微小平移位移。
定义 $\vec{\delta}=[\delta x,\delta y,\delta z]$ ，表示绕 x 、 y、 z 轴的微小旋转弧度角。
微分运动中，旋转矩阵的乘积顺序可以不在意。

相对基坐标系

微分平移运动， $T_{new}=T_{old}+dT_{old}=Trans(\vec{d})*T_{old}$
微分旋转运动， $T_{new}=T_{old}+dT_{old}=Rot(\vec{f},d\theta)*T_{old}$
微分复合运动， $T_{new}=T_{old}+dT_{old}=Trans(\vec{d})*Rot(\vec{f},d\theta)*T_{old}$
忽略旋转矩阵带来的高阶微分，取微分算子

$$\triangle=Trans(\vec{d})*Rot(\vec{f},d\theta)-I=\begin{bmatrix}0&-\delta z&\delta y&dx\\ \delta z&0&-\delta x&dy\\ -\delta y&\delta x&0&dz\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}$$

移项可得 $dT_{old}=\triangle T_{old}$

相对指定坐标系

微分平移运动， $T_{new}=T_{old}+dT_{old}=T_{old}*Trans(\vec{d})$
微分旋转运动， $T_{new}=T_{old}+dT_{old}=T_{old}*Rot(\vec{f},d\theta)$
微分复合运动， $T_{new}=T_{old}+dT_{old}=T_{old}*Trans(\vec{d})*Rot(\vec{f},d\theta)$
忽略旋转矩阵带来的高阶微分，取微分算子

$${}^{T}\triangle=Trans(\vec{d})*Rot(\vec{f},d\theta)-I=\begin{bmatrix}0&-{}^{T}\delta z&T^{\delta}y&{}^{T}dx\\ {}^{T}\delta z&0&-{}^{T}\delta x&{}^{T}dy\\ -{}^{T}\delta y&{}^{T}\delta x&0&{}^{T}dz\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}$$

移项可得 $dT_{old}=T_{old}({}^{T}\triangle)$

坐标系等价变换

把一个坐标系内的微分运动描述，映射为另一个坐标系内的等效表达。
两坐标系等价时，存在等式

$$\because dT=\triangle T=T({}^{T}\triangle)$$

$$\begin{cases}{}^{T}\triangle=T^{-1}\triangle T\\ \triangle=T^{T}\triangle T^{-1}=(T^{-1})^{-1T}\triangle(T^{-1})\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}{}^{T}d_x=\vec{n}\cdot((\vec{\delta}\times\vec{p}+\vec{d}))\\ {}^{T}d_y=\vec{o}\cdot((\vec{\delta}\times\vec{p}+\vec{d}))\\ {}^{T}d_z=\vec{a}\cdot((\vec{\delta}\times\vec{p}+\vec{d}))\\ {}^{T}\delta_x=\vec{n}\cdot\vec{\delta}\\ {}^{T}\delta_y=\vec{o}\cdot\vec{\delta}\\ {}^{T}\delta_z=\vec{a}\cdot\vec{\delta}\end{cases}$$

对基坐标系的微分变化->对指定坐标系的等效变化：

$$\begin{bmatrix}{}^{T}\vec{d}\\ {}^{T}\vec{\delta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R^{T}&-R^{T}S(\vec{p})\\ 0&R^{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{d}\\ \vec{\delta}\end{bmatrix}$$

三维位置矢量 $\vec{p}=[p_x,p_y,p_z]$ 的反对称矩阵 $S(\vec{p})$ 定义为

$$S(\vec{p})=\begin{bmatrix}0 & -p_z & p_y\\ p_z & 0 & -p_x\\ -p_y & p_x & 0\end{bmatrix}$$

雅可比矩阵

定义

对于广义运动方程

$$\vec{x}=T(\vec{q})\vec{q}$$

$$\dot{\vec{x}}=J(\vec{q})\dot{\vec{q}}=\begin{bmatrix}\vec{v}\\ \vec{w}\end{bmatrix}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{1}{\triangle t}\begin{bmatrix}\vec{d}\\ \vec{\delta}\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}\vec{d}\\ \vec{\delta}\end{bmatrix}=\lim_{\triangle t\to 0}\triangle t\begin{bmatrix}\vec{v}\\ \vec{w}\end{bmatrix}=\lim_{\triangle t\to 0}\dot{\vec{x}}\triangle t=\lim_{\triangle t\to 0}J(\vec{q})\dot{\vec{q}}\triangle t=J(\vec{q})\lim_{\triangle t\to 0}\dot{\vec{q}}\triangle t=J(\vec{q})d\vec{q}$$

雅可比矩阵 $J(\vec{q})$，作为位姿变换矩阵的导数，描述了从关节速度 $\dot{\vec{q}}$ 向操作速度 $\dot{\vec{x}}$ 映射的线性变换。
n 关节的机器人在三维环境下，操作空间坐标的广义描述 $\vec{x}=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6]^T$，关节空间坐标的广义描述 $\vec{q}=[q_1,q_2,\cdots,q_n]^T$，雅可比矩阵 $J(\vec{q})$ 的维度为 $6\times n$，第 i 行第 j 列元素的物理意义是当第 j 个关节运动时，操作空间的第 i 个自由度运动的线性比例，其数学描述为：

$$J=\begin{bmatrix}\frac{dx_1}{dq_1} & \cdots & \frac{dx_1}{dq_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{dx_6}{dq_1} & \cdots & \frac{dx_6}{dq_n}\end{bmatrix}$$

计算

- 矢量积法
  - 移动关节 i：

$$\begin{bmatrix}\vec{v}\\ \vec{w}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{z_i}\\ 0\end{bmatrix}\dot{\vec{q}}=J_i\dot{\vec{q}}$$

  - 转动关节 i：

$$\begin{bmatrix}\vec{v}\\ \vec{w}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{z_i}\times(\vec{p_n}-\vec{p_i})\\ \vec{z_i}\end{bmatrix}\dot{\vec{q}}=J_i\dot{\vec{q}}$$

> $\vec{p_n}-\vec{p_i}$ 为末端坐标原点相对于坐标系i的位置矢量，在基坐标系中的表示
> z_i 是坐标系 i 的 z 轴单位向量，在基坐标系中的表示

- 微分变换法
  ① 计算各连杆变换 ${}^1_0T,{}^2_1T,\cdots,{}^{n-1}_nT$
  ② 计算各连杆至末端连杆的变换

$$\begin{cases}{}^{n-1}_nT={}^{n-1}_nT\\ {}^{n-2}_nT={}^{n-2}_{n-1}T*{}^{n-1}_nT\\ \cdots\\ {}^{i-1}_nT={}^{i-1}_iT*{}^i_nT\\ \cdots\\ {}^0_nT={}^0_1T*{}^1_nT\end{cases}$$

  ③ 根据关节类型，计算列向量
  - 移动关节 i

$${}^TJ_i=\begin{bmatrix}n_z\\ o_z\\ a_z\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

  - 转动关节 i

$$
{}^{T}J_i = \begin{bmatrix} (\vec{p}\times\vec{n})_z \\ (\vec{p}\times\vec{o})_z \\ (\vec{p}\times\vec{a})_z \\ n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix}
$$

④ 进行列向量合并， $J = [J_1, \cdots, J_i, \cdots, J_n]$

应用

姿态更新（？？？）

① 若已知关节空间的微分运动向量 $\vec{q}$ 和雅可比矩阵 $J(\vec{q})$

$$
\vec{x} = T(\vec{q})\vec{q} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = J(\vec{q}) \begin{bmatrix} dq_1 \\ \vdots \\ dq_i \\ \vdots \\ dq_n \end{bmatrix}
$$

② 代入可求出向量 D ，取 D 的元素代入求取微分算子

$$
\triangle = Trans(\vec{d}) * Rot(\vec{f}, d\theta) - I = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

③ 代入微分算子和位姿变换矩阵，求取笛卡尔空间的微分增量

$$
dT_{old} = \triangle T_{old}
$$

④ 代入笛卡尔空间微分增量和位姿变换矩阵，可更新末端执行器的位姿状态

$$
T_{new} = T_{old} + dT_{old}
$$

静力传递（基于虚功原理）

关节空间各轴对外输出的力/扭矩 $\vec{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n]^T$
关节空间各轴速度 $\dot{\vec{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n]^T$
关节空间输出功率 $P = \vec{\tau}^T \cdot \dot{\vec{q}}$
笛卡尔空间末端对外输出的力/扭矩 $\vec{F} = [f_x, f_y, f_z, n_x, n_y, n_z]^T$
笛卡尔空间末端速度 $\dot{\vec{x}} = [v_x, v_y, v_z, w_x, w_y, w_z]^T$
笛卡尔空间末端所受外力对系统功率 $P = \vec{F}^T \cdot \dot{\vec{x}}$
基于能量守恒 $P = \vec{\tau}^T \cdot \dot{\vec{q}} = \vec{F}^T \cdot \dot{\vec{x}}$
由于雅可比矩阵的性质 $\dot{\vec{x}} = J(\vec{q})\dot{\vec{q}}$
代入可得

$$
\vec{\tau} = J(\vec{q})^T \vec{F}
$$

力雅可比矩阵是速度雅可比矩阵的转置。关节空间的各轴扭矩向量，可以由力雅可比矩阵乘以操作空间末端的力向量获得。

奇异性

- 奇异表现
  机械臂处在特定的关节位置组合（奇异位形）时，末端执行器会丢失某方向的自由度。此时不管关节速度如何，操作速度在某方向总为0，雅可比矩阵存在降秩现象。奇异位形由机器人的构型决定，是机器人的固有特征。当接近奇异位形时，操作速度的微小变化会导致关节速度的过大变化。
- 奇异判断
  对于n关节的一般机器人：
  无冗余($n = 6$)： $\vec{q}$ 使得 J 不满秩或不可逆，即 $rank(J(\vec{q})) < 6$
  冗余($n > 6$)： $\vec{q}$ 使得 J 不能行满秩，即 $rank(J(\vec{q})) < 6$
  欠驱动($n < 6$)： $\vec{q}$ 使得 J 不能列满秩，即 $rank(J(\vec{q})) < n$
- 奇异类别
  边界奇异：出现在机器人完全展开或者收回，使得末端执行器处于或非常接近工作空间边界的情况。
  内部奇异：出现在远离工作空间的边界，通常是由于两个或两个以上的关节轴线共线引起。

- 可操作度*
  Thanks PhilFan's_NoteBook
  （前置理论：二次型与椭圆）
  假设机器人有 N 个关节，末端速度空间的维数为 m，要求 $N \geq m$，则 $m \times N$ 维雅可比矩阵 J 的奇异值分解为：

$$J = U\Sigma V^T$$

其中，Σ 是 $m \times N$ 维矩阵，其主对角线外的元素均为零，主对角线上的每个元素为 J 的奇异值 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(JJ^T)}(i = 1, \cdots, m)$，且 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_m \geq 0$； U 和 V 分别为 m 维和 N 维正交矩阵，且 U 由矩阵 JJ^T 的特征向量 $u_i(i = 1, \cdots, m)$ 张成，V 由矩阵 J^TJ 的特征向量 $v_i(i = 1, \cdots, N)$ 张成。由此得到：

$$v_e^T(JJ^T)^{-1}v_e = (U^Tv_e)^T\Sigma^{-2}(U^Tv_e)$$

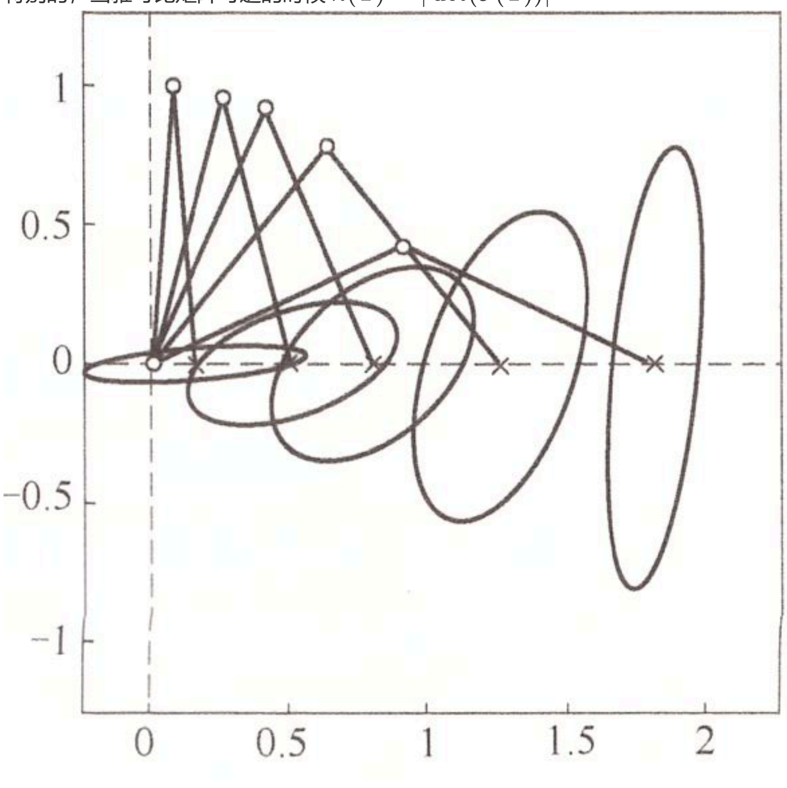
此时， $\Sigma^{-2} = \mathrm{diag}(\sigma_1^{-2}, \sigma_2^{-2}, \cdots, \sigma_m^{-2})$ 为 m 维对角矩阵。记 $\alpha = U^Tv_e$

$$v_e^T(JJ^T)^{-1}v_e - \alpha^T\Sigma^{-2}\alpha = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i^2}{\sigma_i^2} \leq 1$$

上式是一个标准的椭球体方程，表明机器人此位形的可操作椭球体的轴由向量 $\sigma_i u_i$ 给出。
机器人关节速度取单位速度时，可操作椭球体轴的长度越大，在该轴方向上，所得到的末端速度可以越大，表明在该方向上运动能力越强；反之，轴的长度越小，在该轴方向上，所得到的末端速度被限制得越小，表明在该方向上运动能力越弱。因此，机器人位形的可操作椭球体描述了机器人改变末端位姿的能力。
定义可操作度，用来衡量机器人位形与奇异位形之间的距离

$$\kappa(\Phi) = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m = \sqrt{\det(J(\Phi)J^T(\Phi))}$$

特别的，当雅可比矩阵可逆的时候 $\kappa(\Phi) = |\det(J(\Phi))|$



冗余

“矮胖”矩阵：关节自由度特别多的时候，雅可比矩阵行数少于列数。
这意味着，可以实现关节空间运动，而不影响笛卡尔空间的末端位姿，即：

$$\exists \dot{\vec{q}} \neq 0, \quad J(\vec{q})\dot{\vec{q}} = 0$$

若雅可比矩阵为方阵，则 $J(\vec{q})\dot{\vec{q}} = 0$ 有非零解的充分必要条件是：$J(\vec{q})$ 是一个奇异矩阵。

也即，对于6关节的三维串联机器人，其关节在运动，而末端不动的状况，仅在它处于奇异位形时才会出现。
若雅可比矩阵是一个"冗余"矩阵，则 $J(\vec{q})\dot{\vec{q}} = 0$ 将存在无数个非零解，这些解构成的集合被称为"零空间"（nullspace）。

补充

TODO

- 基本雅可比矩阵、几何雅可比矩阵、分析雅可比矩阵的概念说明与对比
- 雅可比矩阵的逆/伪逆矩阵
- 奇异性的解决方法：最小二乘阻尼等

二次型与椭圆

二次型对应椭球体。 椭球的轴沿着 A 的特征向量，半长轴长度是 A 特征值倒数的开方。
椭圆的标准方程： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。其中，椭圆的长轴长度为 $2a$ ，短轴长度为 $2b$ 。
矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^T A x = 1$$

特征值与特征向量：
矩阵 A 的特征值为： $\lambda_1 = \frac{1}{a^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{b^2}$ ，特征值则表示了半长轴和半短轴长度平方的倒数。
对应的归一化特征向量为： $\mu_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，表示了椭圆的长轴和短轴的方向。