<u>ТЕМА 11 МАТЕМАТИЧЕСКИ ОСНОВИЕ НА ПРОГРАМИРАНИЕТО</u>

Дидактически материали: Компютър с инсталирана програма MATLAB

1

1.1 Посочва бройни системи – 2т

Бройните системи са начин за представяне (записване) на числата, чрез краен набор от графични знаци наречени цифри. Всяка бройна система има и **основа**. Основата е число, равно на броя различни цифри, използвани от системата за записване на числата в нея.

Арабската бройна система е десетична, защото има 10 цифри. За основа се избере произволно число, чиято абсолютна стойност трябва да бъде различна от 0 и 1.

Бройните системи се наричат **позиционни** (**positional**), тогава, когато мястото (позицията) на цифрите има значение за стойността на числото.

Освен позиционни, съществуват и непозиционни бройни системи.

Римска бройна система

Римска цифра	**Десетична равностойност**
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

1.2 Преобразува числа от една бройна система в друга - 4т

Числата представени в **десетична бройна система** (**decimal numeral system**), се задават в първичен вид, Числата записани в нея са подредени по степените на числото 10.

Младшият разряд (първият отдясно на ляво) на десетичните числа се използва за представяне на единиците (100=1), следващият за десетиците (101=10), следващият за стотиците (102=100) и т.н.

95031 = (**9**×104) + (**5**×103) + (**0**×102) + (**3**×101) + (**1**×100)

Двоични числа

Числата представени в двоична бройна система, се задават във вторичен вид, т.е. вид удобен за възприемане от изчислителната машина. За представянето на двоичните числа, се използва двоичната бройна система, която има за основа числото 2. Числата записани в нея са подредени по степените на двойката. За тяхното представяне, се използват само цифрите 0 и 1.

Когато едно число се записва в бройна система, различна от десетичната, във вид на индекс в долната му част да се отразява, коя бройна система е използвана за представянето му. Например със записа **1110(2)** означаваме число в двоична бройна система. Ако не бъде указана изрично, бройната система се приема, че е десетична.

Числото се произнася, като се прочетат последователно неговите цифри, започвайки от ляво на дясно (т.е. прочитаме го от старшия към младшия разряд "бит").

Както и при десетичните числа, гледано от дясно наляво, всяко двоично число изразява степените на числото 2 в съответната последователност.

Двоична	**Осмична**	**Десетична**	**Шестнадесетична**
0000	0	0	0
0001	1	1	1
0010	2	2	2
0011	3	3	3
0100	4	4	4
0101	5	5	5
0110	6	6	6
0111	7	7	7
1000	10	8	8
1001	11	9	9
1010	12	10	A
1011	13	11	B
1100	14	12	C
1101	15	13	D
1110	16	14	E
1111	17	15	F

Да вземем десетичното число **148**. То е съставено от три цифри: **1**, **4** и **8**, и съответства на следното двоично число:

10010100(2)

148 = (**1**×27) + (**1**×24) + (**1**×22)

Преминаване от двоична в десетична бройна система

Всяко число може да се преобразува от една бройна система в друга, като за целта се извършат последователност от действия, които са възможни и в двете бройни системи.

Да вземем за пример числото **11001(2)**. Преобразуването му в десетично се извършва чрез пресмятането на следната сума:

11001(2) **=** **1**×24 + **1**×23 + **0**×22 + **0**×21 + **1**×20 =

= **16**(10) + **8**(10) + **1**(10) = **25**(10)

От това следва, че **11001**(2) = **25**(10)

Всяка една двоична цифра се умножава по 2 на степен, позицията, на която се намира(в двоичното число). Накрая се извършва събиране на числата, получени за всяка от двоичните цифри, за да се получи десетичната равностойност на двоичното число.

Преминаване от десетична към двоична бройна система

При преминаване от десетична в двоична бройна система, се извършва преобразуване на десетичното число в двоично. За целите на преобразуването се извършва делене на две с остатък. Така се получават частно и остатък, който се отделя. Отново ще вземем за пример числото 148. То се дели целочислено на основата, към която ще преобразуваме (в примера тя е 2). След това, от остатъците получени при делението (те са само нули и единици), се записва преобразуваното число. Делението продължава, докато получим частно нула. Ето пример:

148:2=74 имаме остатък 0;
74:2=37 имаме остатък 0;
37:2=18 имаме остатък 1;
18:2=9 имаме остатък 0;

9:2=4 имаме остатък 1;
4:2=2 имаме остатък 0;
2:2=1 имаме остатък 0;
1:2=0 имаме остатък 1;

След като вече семе извършили делението, записваме стойностите на остатъците в ред, обратен на тяхното получаване, както следва:

10010100

т.е. 148(10) = 10010100 (2)

1.3 Изчислява изрази с числа в различна бройна система - 6 т

За преминаване от система с основа 2,4,8,16 се използвана следната **таблица:**

0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	3
0	1	0	0	4
0	1	0	1	5
0	1	1	0	6
0	1	1	1	7
1	0	0	0	8
1	0	0	1	9
1	0	1	0	A
1	0	1	1	B
1	1	0	0	C
1	1	0	1	D
1	1	1	0	E
1	1	1	1	F

Примери:

$1001101_2 = 115_8$

$12345_8 = 14E5_{16}$

$F14A_{16} = 33011022_4$

2

2.1 Дефинира понятия от статистиката – генерална съвкупност и извадка, средна стойност, мода и медиана – 6т

Статистика е наука за събиране, систематизиране и анализ на съвкупностни данни.

• Обем на съвкупността – броят на включените в нея статистически единици.

• Генерална съвкупност – съвкупността от всички единици, в които е възможно да се проявява наблюдаваното явление.

• Извадка (извадкова съвкупност) – част от генералната съвкупност.

***Средна стойност* -** средната стойност (средната) се дефинира като средно аритметично на всички измервания на разглежданата променлива: може да се пресметне и по формулата като:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Мода

Модата ***М*** е най-елементарният показател на централната тенденция. Тя се определя като стойността с най-голяма честота в разпределението и се намира непосредствено чрез броене. При групирани данни за мода се приема средата на класа с най-голяма честота.

Когато две несъседни стойности (или два несъседни класа при групирани данни) се наблюдават по-често от останалите стойности (или класове), то разпределението се нарича бимодално:

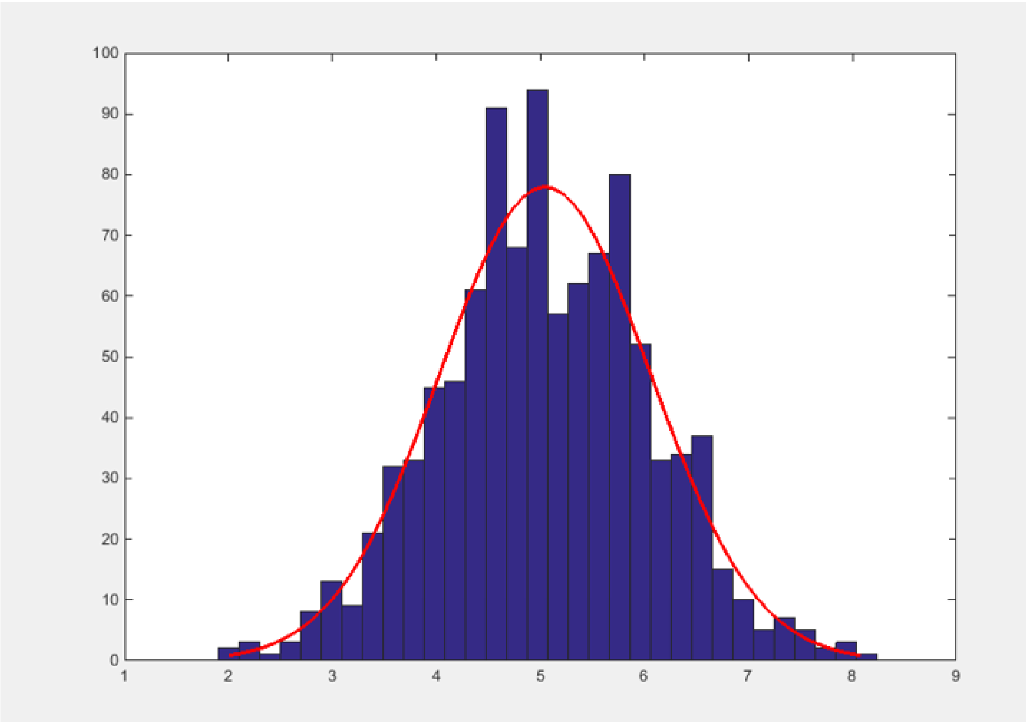
Съществуват и многомодални разпределения, а също и разпределения без мода. Например, ако вариационният ред на случайна променлива е 1, 2, 3, 4, 5, 6, то тази променлива няма мода. Ако две или повече съседни стойности се срещат еднакво често, с честота, по-голяма от тази на останалите, то модата е средното аритметично на тези стойности.

Медиана

Медианата е стойността,която се намира в средата на статистическия ред, т.е. тя е онази стойност, за която половината от измерванията са по-малки от нея, а другата половина са по-големи от нея.

2.2 Представя графично статистически данни – 6 т

```
n2 = normrnd(5, 1, [1 1000]);
figure;
histogram(n2);
ylabel('Frequency');
xlabel('Number of miles walked');
figure;
histfit(n2);
b2 = betarnd(10, 1, [1 1000]);
hisfit(b2,5, 'beta')
b3 = betarnd(1, 10, [1 1000]);
figure;
hisfit(b3, 5, 'beta');
hisfit(b3, 10, 'beta')
b4 = betarnd(2, 5, [1 1000]);
histfit(b4, 10, 'beta');
histfit(b4, 10, 'kernel')
```



3

3.1 Демонстрира решаването на системи линейни уравнения с повече неизвестни с помощта на компютър – 6 т

На всяка система линейни уравнения от вида се съпоставят две матрици: матрицата A = (aij) от коефициентите на системата, която се нарича основна матрица, и матрицата A1, състояща от основната матрица и стълба със свободните членове, която се нарича разширена матрица на

Удобен и универсален метод за решаване на СЛУ е **методът на Гаус-Джордан** (известен още като метод на последователното изключване на неизвестните). По този метод се работи с разширената матрица на системата и я привеждаме в трапецовидна форма чрез извършване на трите елементарни преобразувания по нейните редове или стълбове.

Метода на Крамер се състои в намирането на 4 детерминанти на основната матрица, както и детерминант x y z.

Тогава единственото решение на крамеровата система се получава по формулите

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

които се наричат ***формули на Крамер.***

Пример:

3x - 2y + z = 5

2x + 5y - 3z = 4

3x + 3y -2 z = 5

```
A = [3 -2 1;2 5 -3;3 3 -2]
determina = det(A)
display DA
 b = [5;4;5]
c = A;
c(1,1)=b(1,1);c(2,1)=b(2,1);c(3,1)=b(3,1)
n = det(c)
display n
d = A;
d(1,2)=b(1,1);d(2,2)=b(2,1);d(3,2)=b(3, 1)
det(d)
f = A;
f(1,3)=b(1,1);f(2,3)=b(2,1);f(3,3)=b(3,1)
det(f)
x=det(c)/det(A);
display(x);
y=det(d)/det(A);
display(y);
z=det(f)/det(A);
display(z)
```

Ефикасен метод за намиране на обратната матрица на дадена матрица е метода адюнгираните количества. По този метод, формула за обратната матрица е:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(\mathbf{C}_{ij})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(\mathbf{C}_{ji}) = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{21} & \cdots & \mathbf{C}_{j1} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{j2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1i} & \mathbf{C}_{2i} & \cdots & \mathbf{C}_{ji} \end{pmatrix}$$

Където $\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$, а $\det \mathbf{A}_{ij}$ е детерминантата на матрицата $\mathbf{A}$, от която са махнати реда i и колоната j.

4

4.1 Дефинира понятието функция – 2т

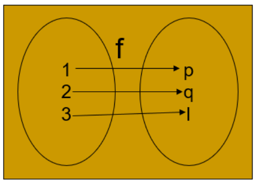
В контекста на програмирането, **функция** (метод) се нарича **група от инструкции**, които изпълняват дадена операция (функционалност). Тази група от инструкции е логически отделена и именувана, така че изпълнението на инструкциите в групата може да бъде стартирано чрез извикване на нейното име в хода на изпълнението на програмата. Стартирането на изпълнението на инструкциите във функцията се нарича **извикване на функцията** (на английски function call или invoking a function).Една функция може да бъде извикана толкова пъти, колкото ние преценим, че ни е нужно за решаване на даден проблем. Това ни **спестява** повторението на един и същи код няколко пъти както и намалява възможността да пропуснем грешка при евентуална корекция на въпросния код.

4.2 Посочва свойства на функциите – 2т

1. Функцията f:A→B се нарича ***инективна (инекция)*** тогава и само тогава, когато за всяка двойка елементи x_1,x_2, от A, за които $f(x_1)=f(x_2)$, следва, че $x_1=x_2$.

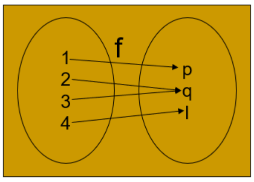
Пример: f: R→R и f(x)=5x+3;

Графично представяне на инективна функция



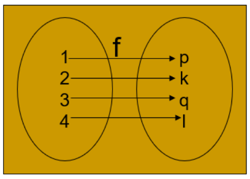
2. Функцията f:A→B се нарича ***сюрективна (сюрекция)*** тогава и само тогава, когато за всеки елемент y, y∈B, съществува елемент x, x∈A за които y=f(x), т.е. f(A)=B.

Пример: f: $\mathcal{Z}\rightarrow\mathcal{Z}$ и $f(x)=x^2$ (не е сюрективна);
Графично представяне на сюрективна функция:



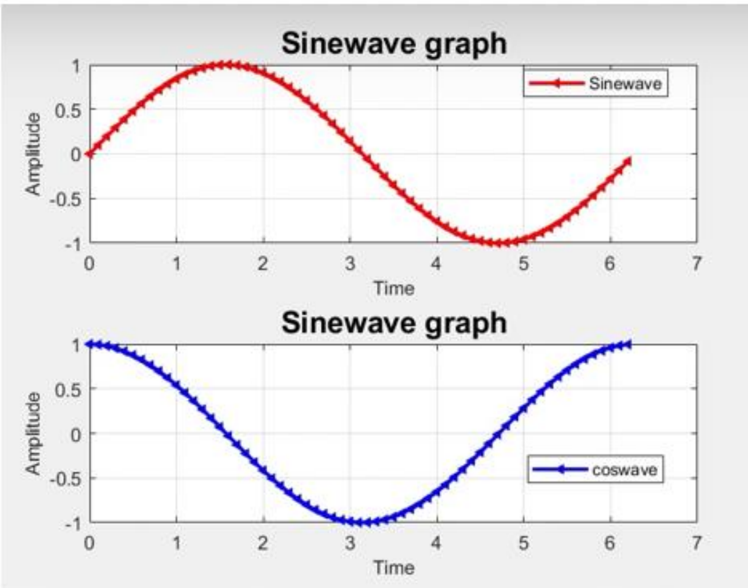
3. Функцията f:A→B се нарича ***биективна (биекция)*** тогава и само тогава, когато тя едновременно е инективна и сюреактивна.

Пример: f: $\mathcal{N}\rightarrow\mathcal{N}$ и f(x)=x;
Графично представяне на биективна функция:



4.3 Демонстрира изчертаване на графики на математически функции с помощта на компютър – 4т

```
t=0:0.1:2*pi;
a=sin(t);
b=cos(t);
%hold on
subplot(2,1,1)
plot(t,a, 'r<-', 'MarkerSize', 2, 'LineWidth', 2)
grid on
xlabel('Time', 'FontSize',10)
ylabel('Amplitude', 'FontSize',10)
title('Sinewave graph', 'FontSize',16)
legend('Sinewave','Location','Best')
subplot(2,1,2)
plot(t,b, 'b<-', 'MarkerSize', 2, 'LineWidth', 2)
grid on
xlabel('Time', 'FontSize',10)
ylabel('Amplitude', 'FontSize',10)
title('Sinewave graph', 'FontSize',16)
legend('coswave','Location','Best')
```



5

5.1 Дефинира понятието вектор – 2т.

Вектор, в програмирането, е тип масив, който е едноизмерен. Векторите са логичен елемент в програмните езици, които се използват за съхранение на данни. Векторите са подобни на масиви, но действителното им изпълнение и работа се различава.

Векторът е структура от данни съдържаща краен брой елементи, т.е. при необходимост неговият размер може да се променя по време на изпълнение на програмата. Елементите са разположени последователно в една област от паметта. Има пряк достъп до елементите на вектора чрез оператора за индексиране.

5.2 ***Посочва свойства на векторите – 2т***

1) $\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}}=\bar{\mathbf{b}}+\bar{\mathbf{a}}$ комутативност
2) $(\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}})+\bar{\mathbf{c}}=\bar{\mathbf{a}}+(\bar{\mathbf{b}}+\bar{\mathbf{c}})$ асоциативност
3) $\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{0}}=\bar{\mathbf{a}}$;
4) $\bar{\mathbf{a}}+(-\bar{\mathbf{a}})=\bar{\mathbf{0}}$;
5) $\alpha(\beta\bar{\mathbf{a}})=(\alpha\beta)\bar{\mathbf{a}}$ (асоциативност относително умножение на число);
6) $(\alpha+\beta)\bar{\mathbf{a}}=\alpha\bar{\mathbf{a}}+\beta\bar{\mathbf{a}}$ дистрибутивност
7) $\alpha(\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}})=\alpha\bar{\mathbf{a}}+\alpha\bar{\mathbf{b}}$ дистрибутивност
8) $1\bar{\mathbf{a}}=\bar{\mathbf{a}}$.

5.3 Обяснява връзката между векторите и масивите в програмирането – 4т

Масивите са неизменна част от повечето езици за програмиране. Те представляват съвкупности от променливи, които наричаме **елементи**:

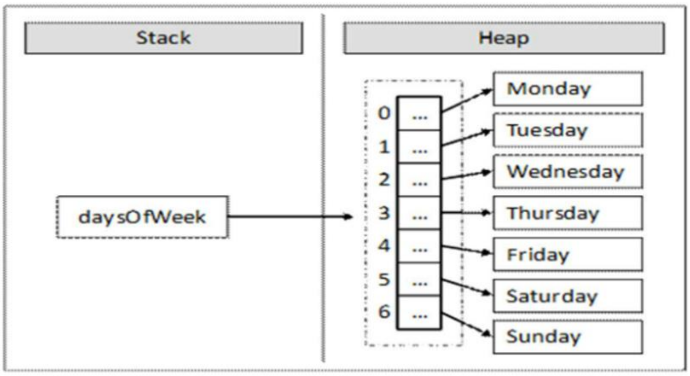
Елементите на масивите в са номерирани с числата 0, 1, 2, ... N-1. Тези номера на елементи се наричат **индекси**. Броят елементи в даден масив се нарича **дължина на масива**.

Всички елементи на даден масив са от един и същи тип, независимо дали е примитивен или референтен. Това ни помага да представим група от еднородни елементи като подредена свързана последователност и да ги обработваме като едно цяло.

Масивите могат да бъдат от различни размерности, като най-често използвани са **едномерните** и **двумерните** масиви. ***Едномерните масиви се наричат още вектори, а двумерните – матрици.***

В случая масивът се заделя със 7 елемента от тип **string**. Типът **string** е референтен тип (обект) и неговите стойности се пазят в динамичната памет. В стека се заделя променливата **daysOfWeek**, която сочи към участък в динамичната памет, който съдържа елементите на масива. Всеки от тези 7 елемента е обект от тип символен низ (**string**), който сам по себе си сочи към друга област от динамичната памет, в която се пази стойността му.

Ето как е разположен масивът в паметта:



6

6.1 Дефинира понятието множество – 2т

Множеството представлява съвкупност от обекти. Обектите на едно множество се наричат негови елементи и се казва, че принадлежат на множеството. Обикновено множествата се бележат с главни латински букви, а елементите им с малки латински букви. Например, числото 1 е елемент на множеството на естествените числа (естествени числа - това са числата, с които броим - 1, 2, 3, ...; множеството на естествените числа се означава N).

6.2 Посочва операции с множества – 2т

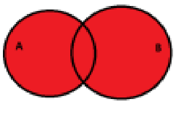
Обединение(събиране) на множества Обединение на 2 множества A и B наричаме такова множество C, което се състои от елементите на множеството A или множеството B.

Сечение на множества Сечение на 2 множества A и B наричаме такова множество C, което се състои от елементите принадлежащи едновременно на множеството A и множеството B.

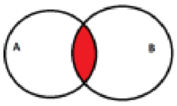
Разлика на множества Разлика на множеството A с множеството B наричаме такова множество C, което съдържа всички елементи от A, които в същото време не са елементи от B.

Симетрична разлика на множества Симетричната разлика на множеството A с множеството B наричаме такова множество C, което съдържа всички елементи от A, които в същото време не са елементи от B, и едновременно всички елементи от B, които в същото време не се елементи от A.

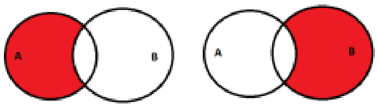
6.3 Представя графично операции с множества – 8т



Обединение(събиране) на множества Обединение на 2 множества A и B наричаме такова множество C, което се състои от елементите на множеството A или множеството B. Не трябва да оставяме повтарящи се елементи, т.е. ако нещо се среща и в двете множества, го пишем веднъж. Съкратено се записва като $A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$ За примера:$A \cup B = A$, $A \cup C = A$, $B \cup C = A$.

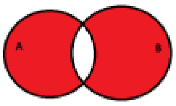


Сечение на множества Сечение на 2 множества A и B наричаме такова множество C, което се състои от елементите принадлежащи едновременно на множеството A и множеството B. Съкратено се записва като A ∩ B = {x|x ∈ A и x ∈ B}. За примера:A ∩ B = B, A ∩ C = C, B ∩ C = ∅



Разлика на множества Разлика на множеството A с множеството B наричаме такова множество C, което съдържа всички елементи от A, които в същото време не са елементи от B. Съкратено се записва като

A \ B = {x|x ∈ A и x /∈ B} Аналогично B \ A = {x|x /∈ A и x ∈ B}



Симетрична разлика на множества Симетричната разлика на множеството A с множеството B наричаме такова множество C, което съдържа всички елементи от A, които в същото време не са елементи от B, и едновременно всички елементи от B, които в същото време не се елементи от A. Съкратено се записва като:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

7

7.1 Посочва видовете комбинаторни конфигурации – 2т

Комбинаториката е дял от математиката, която изучава методите за образуване нагрупи наричани съединения или комбинаторна конфигурации от елементи на крайни множества.

В този смисъл тя може да се разглежда като дял от теорията на множествата.

- Пермутации $P_n = n!$
- Вариации $V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
- Комбинации $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

7.2 Различава пермутации, комбинации и вариации – 4т

Пермутации на N–елемента

Определение

Пермутации от N–елемента се наричат такива съединения, във всяко от които влизат всички дадени елементи и се различават само по реда на елементите. Броят на всички възможни начини на подреждане на N–елементи се означава с Pn.

Формула за броя на пермутациите

Pn = 1.2.3.4....(n - 1)n Произведението 1.2.3....(n - 1).n е прието да се означава с n!

Pn = n!

0! = 1

Вариации от N–елемента k-ти клас

Определение

Вариациите без повторение на n елемента от k-ти клас (k < n) се наричат такива съединения всяко от които съдържа по k различни елемента от дадените n и се различават едно от друго или по елементите или по реда на елементите. Разликата между вариациите и пермутациите на елементите на някакво множество е единствено в това, че в една вариация не е задължително да участват всички елементи на множеството

Броят на различните вариации от елемента от к-ти клас се означава с

$$V_n^k.\ V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

с е броят на вариациите без повторение от елемента от к -ти клас

Комбинации от n-елемента k-ти клас

Определение

Комбинации без повторение от n-елемента от k-ти клас се наричат такива съединения
всяко от които съдържа по k различни елемента от дадените n и се различават едно от друго с поне 1 елемент.

Броят на комбинациите без повторение на *n* елемента от *k*-ти клас се означава с *C(n,k)* и е равен на:

$$\mathbf{C}_n^k = \mathbf{C}(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Комбинациите на *k* елемента от множество с *n* елемента се отнасят до броя на всички възможни различни групи от по *k* елемента които могат да бъдат получени при произволно избиране без повторение.

7.3 Демонстрира алгоритми за генериране на комбинаторни конфигурации – 6т.

Пример 1 : По дадено естествено число n да се намерят всички възможни ненаредени представяния (разбивания) на n като сума от естествени числа (не непременно различни). Така например, числото 5 може да се разбие по следните 7 начина:

5 = 5

5 = 4 + 1

5 = 3 + 2

5 = 3 + 1 + 1

5 = 2 + 2 + 1

5 = 2 + 1 + 1 + 1

5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Алгоритъмът, по който се реализира разлагането, е рекурсивен: разбиване(0) = {} разбиване(n) = {k} + разбиване(n–k), k = n, n–1,…,1.

Пример 2: По колко различни начина могат да паркират 4 автомобила на паркинг?
Решение**:** P = 4! = 1.2.3.4 = 24
Компютерно генериране на пермутации

Всеки от елементите поставяме на първа позиция в подреждането , след което на останалите n-1позиционни места разполагаме всички възможни пермутации на останалите n-1 елемента:

	1	2	3	4
1	1234	2134	3124	4123
2	1243	2143	3142	4132
3	1324	2314	3241	4213
4	1342	2341	3213	4231
5	1423	2413	3412	4312
6	1432	2431	3421	4321

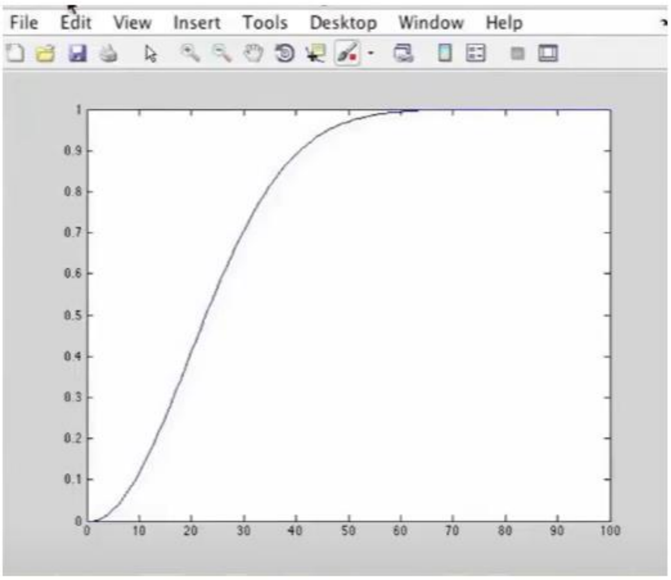
8. Демонстрира пресмятане на вероятности с помощта на компютър – 6т.

Да се разработи алгоритъм, пресметне вероятноста в група от 100 човека да има двама с една и съща рожденна дата , да се начертае графика на вероятността от количеството хора в групата:

```
function [ A ] = birthday( n )

A = ones(n, 1);
p = 1;
for i=1:n
    A(i) = 1 - p;
    p = p * (365 - i)/365;
end

end
```



9. *Анализира фрагмент/и от код* и идентифицира и поправя правилно грешките в написания програмен код, така че да реши поставената задача. Допълва кода, ако и когато това е необходимо.