Доказательства подчинённости матричных, соответствующих векторной норме

1 Свойства подчинённой нормы:

1. $||A|| \geq 0, ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = O$

2. $||\alpha A|| = |\alpha| \cdot ||A||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

3. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$

4. $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||, \forall x \in \mathbf{V}$

5. $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

6. $||A^k|| \leq ||A||^k$

7. $||E|| = 1$

8. Если A - диагональная, то $||A|| = \max\limits_{i} |a_{ii}|$

2 $||A||_1$:

$$||A||_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2.1 $||A||_1 \ge 0, ||A||_1 = 0 \Leftrightarrow A = O$

$$|a_{ij}| \ge 0, \forall i,j \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \ge 0, \forall i \Rightarrow \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = ||A||_1 \ge 0$$

$$||A||_1 = 0 \Leftrightarrow \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = 0, \forall j \Leftrightarrow |a_{ij}| = 0, \forall i,j \Leftrightarrow$$

$$A = O$$

2.2 $||\alpha A|| = |\alpha| \cdot ||A||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$||\alpha A||_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |\alpha a_{ij}| = |\alpha| \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = |\alpha| \cdot ||A||_1$$

2.3 $||A + B|| \le ||A|| + ||B||$

$$||A+B||_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}+b_{ij}| \le \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} (|a_{ij}|+|b_{ij}|) = \max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| + \sum_{i=1}^{m} |b_{ij}| \right) \le$$

$$\max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| + \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |b_{ij}| = ||A||_1 + ||B||_1$$

2.4 $||Ax|| \le ||A|| \cdot ||x||, \forall x \in \mathbf{V}$

$$||Ax||_1 = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}||x_j| =$$

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \le \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \sum_{j=1}^{n} |x_j| = ||A||_1 \cdot ||x||_1$$

2.5 $||AB|| \le ||A|| \cdot ||B||$

$A - m \times n,\ B - n \times k,\ AB - m \times k$

$||AB||_1 = \max\limits_{1 \le l \le k} \sum\limits_{i=1}^{m} \left| \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} \right| \le \max\limits_{1 \le l \le k} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij} b_{jl}| = \max\limits_{1 \le l \le k} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}||b_{jl}| =$

$\max\limits_{1 \le l \le k} \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}||b_{jl}| = \max\limits_{1 \le l \le k} \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{jl}| \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}| \le \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}| \cdot \max\limits_{1 \le l \le k} \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{jl}| =$

$||A||_1 \cdot ||B||_1$

2.6 $||A^k|| \le ||A||^k$

$||A^k||_1 = ||AA^{k-1}||_1 \le ||A||_1 \cdot ||A^{k-1}||_1 = ||A||_1 \cdot ||AA^{k-2}||_1 \le ||A||_1^2 \cdot$

$||A^{k-2}||_1 \le \ldots \le ||A||_1^k$

2.7 $||E|| = 1$

$||E||_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}| = \max\limits_{1 \le j \le n} 1 = 1$

2.8   Если A - диагональная, то $||A|| = \max\limits_{i} |a_{ii}|$

$||A||_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}| = \max\limits_{1 \le j \le n} |a_{jj}|$

3 $||A||_\infty$

$$||A||_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$
$$||x||_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

3.1 $||A|| \ge 0, ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = O$

$$|a_{ij}| \ge 0, \forall i, j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ge 0, \forall j \Rightarrow \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = ||A||_\infty \ge 0$$

$$||A||_\infty = 0 \Leftrightarrow \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 0, \forall i \Leftrightarrow |a_{ij}| = 0, \forall i, j \Leftrightarrow$$
$$A = O$$

3.2 $||\alpha A|| = |\alpha| \cdot ||A||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$||\alpha A||_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |\alpha a_{ij}| = |\alpha| \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = |\alpha| \cdot ||A||_\infty$$

3.3 $||A + B|| \le ||A|| + ||B||$

$$||A + B||_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \le \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} (|a_{ij}| + |b_{ij}|) =$$

$$\max_{1 \le i \le m} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \right) \le \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = ||A||_\infty +$$
$$||B||_\infty$$

3.4 $||Ax|| \le ||A|| \cdot ||x||, \forall x \in \mathbf{V}$

$$||Ax||_\infty = \max_{1 \le i \le m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} x_j| = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \le \max_{1 \le j \le n} |x_j| \cdot$$

$$\max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = ||x||_\infty \cdot ||A||_\infty$$

3.5 $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

$A - m \times n,\ B - n \times k,\ AB - m \times k$

$$||AB||_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{l=1}^{k} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jl} \right| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}b_{jl}| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||b_{jl}| =$$

$$\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} |a_{ij}||b_{jl}| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \sum_{l=1}^{k} |b_{jl}| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{l=1}^{k} |b_{jl}| =$$

$$||A||_\infty \cdot ||B||_\infty$$

3.6 $||A^k|| \leq ||A||^k$

$$||A^k||_\infty = ||AA^{k-1}||_\infty \leq ||A||_\infty \cdot ||A^{k-1}||_\infty = ||A||_\infty \cdot ||AA^{k-2}||_\infty \leq ||A||_\infty^2 \cdot$$

$$||A^{k-2}||_\infty \leq \ldots \leq ||A||_\infty^k$$

3.7 $||E|| = 1$

$$||E||_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq m} 1 = 1$$

3.8 Если A - диагональная, то $||A|| = \max_i |a_{ii}|$

$$||A||_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq m} |a_{ii}|$$

4 $||A||_2$

$$||A||_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^T A)} = \max_i \sigma_i(A)$$
$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

4.1 $||A|| \geq 0, ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = O$

$$\sigma \geq 0 \Rightarrow \max_i \sigma_i(A) = ||A||_2 \geq 0$$
$$||A||_2 = \max_i \sigma_i(A) = 0 \Leftrightarrow \sigma_i = 0, \forall i \Leftrightarrow A = O$$

4.2 $||\alpha A|| = |\alpha| \cdot ||A||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$||\alpha A||_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(\alpha A^T \alpha A)} = \sqrt{\max_i \lambda_i(\alpha^2 A^T A)} = \sqrt{\alpha^2 \max_i \lambda_i(A^T A)} =$$
$$|\alpha| \sqrt{\max_i \lambda_i(A^T A)} = |\alpha| \cdot ||A||_2$$

4.3 $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$

$$||A+B||_2 = \max_i \sigma_i(A+B) = \max_i \sigma_i(U_A \Sigma_A V_A^T + U_B \Sigma_B V_B^T) = \max_i \sigma_i(\Sigma_A +$$
$$\Sigma_B) \leq \max_i \sigma_i(\Sigma_A) + \max_i \sigma_i(\Sigma_B) = \max_i \sigma_i(A) + \max_i \sigma_i(B) = ||A||_2 + ||B||_2$$

4.4 $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||, \forall x \in \mathbf{V}$

$$||x||_2^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$$
$$x^T x = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = ||x||_2^2$$
$$||Ax||_2 = (Ax)^T Ax = x^T A^T Ax \ominus$$

$\sqsupset \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n-$ собственные значения матрицы $A^T A$

$v_1, v_2, \ldots, v_n-$ собственные векторы матрицы $A^T A$, соответствующие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \Rightarrow A^T A v_i = \lambda_i v_i, \forall i$

$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i, \ c_i \in \mathbb{R}, \forall i$

$\stackrel{\ominus}{=} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j v_j \right)^T A^T A \left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_j c_i v_j^T A^T A v_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_j c_i v_j^T \lambda_i v_i \stackrel{\ominus}{=}$

$v_i^T v_j \neq \theta \Leftrightarrow i = j$, так как система $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}-$ ортонормированный

базис, $\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\stackrel{\ominus}{=} \sum_{j=1}^{n} c_j c_j \lambda_j v_j^T v_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (c_j v_j)^T (c_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j ||c_j v_j||_2^2 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \lambda_j \sum_{j=1}^{n} ||c_j v_j||_2^2$

$||Ax||_2 \leq \sqrt{\max_{1 \leq j \leq n} \lambda_j \sum_{j=1}^{n} ||c_j v_j||_2^2} = \sqrt{\max_{1 \leq j \leq n} \lambda_j} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} ||c_j v_j||_2^2} = ||A||_2 \sqrt{\sum_{j=1}^{n} ||c_j v_j||_2^2} \leq$

$||A||_2 \sum_{j=1}^{n} \sqrt{||c_j v_j||_2^2} = ||A||_2 \sum_{j=1}^{n} ||c_j v_j||_2 = ||A||_2 \cdot ||x||_2$

4.5 $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

$||AB||_2 = \max_i \sigma_i(AB) = \max_i \sigma_i((U_A \Sigma_A V_A^T)(U_B \Sigma_B V_B^T)) = \max_i \sigma_i(\Sigma_A \Sigma_B) \leq$

$\max_i \sigma_i(\Sigma_A) \max_i \sigma_i(\Sigma_B) = \max_i \sigma_i(A) \max_i \sigma_i(B) = ||A||_2 \cdot ||B||_2$

4.6 $||A^k|| \leq ||A||^k$

$||A^k||_2 = ||AA^{k-1}||_2 \leq ||A||_2 \cdot ||A^{k-1}||_2 = ||A||_2 \cdot ||AA^{k-2}||_2 \leq ||A||_2^2 \cdot$

$||A^{k-2}||_2 \leq \ldots \leq ||A||_2^k$

4.7 $||E|| = 1$

$$||E||_2 = \max_i \sigma_i(E) = \max_i \sigma_i(U\Sigma V^T) = \max_i \sigma_i(EEE) = \max_i 1 = 1$$

4.8   Если A - диагональная, то $||A|| = \max_i |a_{ii}|$

$$||A||_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^T A)} = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^2)} = \sqrt{\max_i a_{ii}^2} = \max_i |a_{ii}|$$