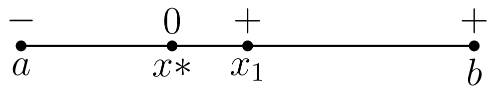
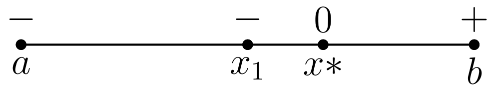
При применении метода бисекции мы делим отрезок $[a;b]$ по полам, считаем значения на краях и в середине и смотрим знаки. Затем выбираем тот отрезок, где у краевой точки и у срединной точки разные знаки. Так мы продолжаем до тех пор, пока не дойдём до отрезка, длина которого меньше заданного ϵ.

Так, если к примеру у $f(a)$ знак будет отрицательный, а у $f(b)$ – положительный, то, если у $f(x_1)$ будет положительный знак, это значит, что корень $x*$ лежит на отрезке $[a;x_1]$.



Если у $f(x_1)$ знак будет отрицательный, то $x*$ лежит на отрезке $[x_1;b]$.



Аналогично будет, если у $f(a)$ знак будет положительный, а у $f(b)$ – отрицательный.

Так мы продолжаем вычислять срединные значения $f(x_i), i = \overline{1,n}$ на выбранных отрезках, пока не будет выполнено условие $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$.

Таким образом рассмотрим длины отрезков. Длина изначального отрезка $[a;b]$ будет равны $L_0^{bi} = b - a$. Тогда на первой итерации длина выбранного отрезка будет равна $L_1^{bi} = \dfrac{L_0^{bi}}{2}$. Продолжая так до n-ой итерации, получим $L_n^{bi} = \dfrac{L_{n-1}^{bi}}{2} = \dfrac{L_{n-2}^{bi}}{2^2} = \ldots = \dfrac{L_0^{bi}}{2^n} < \epsilon$.

Решая неравенство, выразим n:

$\dfrac{L_0^{bi}}{2^n} < \epsilon$

$\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{\epsilon}{L_0^{bi}}$

$2^n > \dfrac{L_0^{bi}}{\epsilon}$

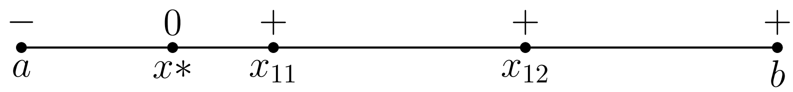
$n > \log_2 \dfrac{L_0^{bi}}{\epsilon}$

У нас для решения задачи выполняются вычисления значений функций в точках и сравнения знаков. По условию задачи, операция сравнения выполняется мгновенно, поэтому его можно не рассматривать. А вот вычисление значения функции выполняется за O(1). Таким образом скорость выполнения метода будет зависеть от числа операций вычисления функции.

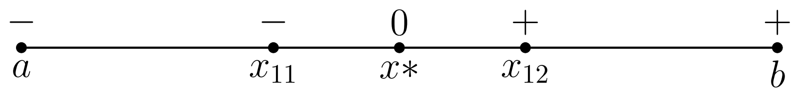
В начале необходимо посчитать значения на концах отрезка: $f(a)$ и $f(b)$. После этого на каждой итерации необходимо вычислить значение функции в срединной точке $f(x_i)$. Тогда число операций вычисления функций будет равно $S_{bi} = n + 2$.

Теперь рассмотрим аналогичный метод, только теперь при делении отрезка на 3 равные части. В таком методе у нас будет 3 случая: корень расположен между точками a и x_{11}, расположен между x_{11} и x_{12} и расположен между x_{12} и b.

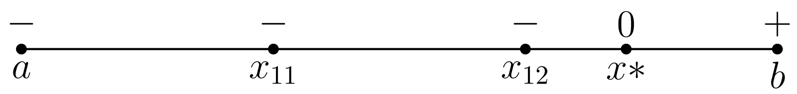
1 случай:



2 случай:



3 случай:



Аналогично будет, если у $f(a)$ знак будет положительный, а у $f(b)$ – отрицательный.

Так мы продолжаем значения $f(x_i), i = \overline{1, m}$ на выбранных отрезках, пока не будет выполнено условие $|x_m - x_{m-1}| < \epsilon$, где x_i может быть x_{i1} или x_{i2} в зависимости от случая.

Таким образом рассмотрим длины отрезков. Длина изначального отрезка $[a; b]$ будет равны $L_0^{tri} = b - a$. Тогда на первой итерации длина выбранного отрезка будет равна $L_1^{tri} = \dfrac{L_0^{tri}}{3}$. Продолжая так до m-ой итерации, получим $L_m^{tri} = \dfrac{L_{m-1}^{tri}}{3} = \dfrac{L_{m-2}^{tri}}{3^2} = \ldots = \dfrac{L_0^{tri}}{3^m} < \epsilon$.

Решая неравенство, выразим m:

$$\frac{L_0^{tri}}{3^m} < \epsilon$$

$$\frac{1}{3^m} < \frac{\epsilon}{L_0^{tri}}$$

$$3^m > \frac{L_0^{tri}}{\epsilon}$$

$$m > \log_3 \frac{L_0^{tri}}{\epsilon}$$

У нас для решения задачи выполняются вычисления значений функций в точках и сравнения знаков. По условию задачи, операция сравнения выполняется мгновенно, поэтому его можно не рассматривать. А вот вычисление значения функции выполняется за O(1). Таким образом скорость выполнения метода будет зависеть от числа операций вычисления функции.

В начале необходимо посчитать значения на концах отрезка: $f(a)$ и $f(b)$. После этого на каждой итерации необходимо вычислить значение функции на первой и второй третьих отрезка $f(x_{i1})$ и $f(x_{i2})$. Тогда число операций вычисления функций будет равно $S_{tri} = 2m + 2$.

Чтобы понять, какой метод будет быстрее сходиться, необходимо сравнить число операций:

$$\begin{array}{ccc}
S_{bi} & ? & S_{tri} \\
n+2 & ? & 2m+2 \\
n & ? & 2m \\
\log_2 \dfrac{L_0^{bi}}{\epsilon} & ? & 2\log_3 \dfrac{L_0^{tri}}{\epsilon} \\
\log_2 \dfrac{b-a}{\epsilon} & ? & 2\log_3 \dfrac{b-a}{\epsilon} \\
\dfrac{\ln \dfrac{b-a}{\epsilon}}{\ln 2} & ? & 2\dfrac{\ln \dfrac{b-a}{\epsilon}}{\ln 3} \\
\dfrac{1}{\ln 2} & ? & 2\dfrac{1}{\ln 3} \\
\dfrac{1}{2\ln 2} & ? & \dfrac{1}{\ln 3} \\
\dfrac{1}{ln 2^2} & ? & \dfrac{1}{\ln 3} \\
\dfrac{1}{\ln 4} & < & \dfrac{1}{\ln 3} \Rightarrow S_{bi} < S_{tri}
\end{array} \quad , \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, c \neq 1$$

Таким образом получаем, что метод бисекции быстрее, чем метод трёх отрезков.