МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра математического и компьютерного моделирования

Кулахсзян Сергей Грайрович

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ВАРИАНТ 7

Направление подготовки 02.03.01сцт Сквозные цифровые технологии,
бакалавриатская программа «Математика и компьютерные науки»
Очной (заочной) формы обучения

Студент группы Б9123-02.03.01сцт2
____________________ С. Г. Кулахсзян

Руководитель проекта
____________________ Е. В. Амосова

Владивосток
2025

Содержание

1 Найти собственные функции оператора, отвечающего дифференциальному уравнению

$$\begin{cases} y'' - 5y = \lambda y, \; x \in (0; 0,9) \\ y(0) = 0 \\ y'(0,9) = 0 \end{cases}$$

$k^2 - 5 - \lambda = 0$
$k^2 = 5 + \lambda$
$k^2 = -(\lambda - 5)$
$k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda - 5}i$
$y_1(x) = \cos(\sqrt{-\lambda - 5}x)$
$y_2(x) = \sin(\sqrt{-\lambda - 5}x)$
$y = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda - 5}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda - 5}x)$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y'(0,9) = c_2\sqrt{-\lambda - 5}\cos(\sqrt{-\lambda - 5} * 0,9) = 0 \end{cases}$$

$\sqsupset c_2 \neq 0 :$
$\cos(\sqrt{-\lambda - 5} * 0,9) = 0$
$\sqrt{-\lambda_k - 5} * 0,9 = \frac{\pi}{2} + \pi k$
$\sqrt{-\lambda_k - 5} = \frac{5\pi + 10\pi k}{9}$
$y_k = c_2 \sin\left(\frac{5\pi + 10\pi k}{9}x\right)$
$\sqsubset c_2 = 1 :$
$y_k = \sin\left(\frac{5\pi + 10\pi k}{9}x\right)$

2 Разложить функцию $f(x) = \left(x\cos\left(\frac{\pi x}{1,8}\right)\right)^2$ в ряд Фурье по собственным функциям $y_k, k = 0, 1, \ldots$. Построить графики функций и ряда Фурье, записанного для пяти гармоник

$$f(x) = \left(x\cos\left(\frac{\pi x}{1,8}\right)\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{5\pi + 10\pi k}{9}x\right) =$$

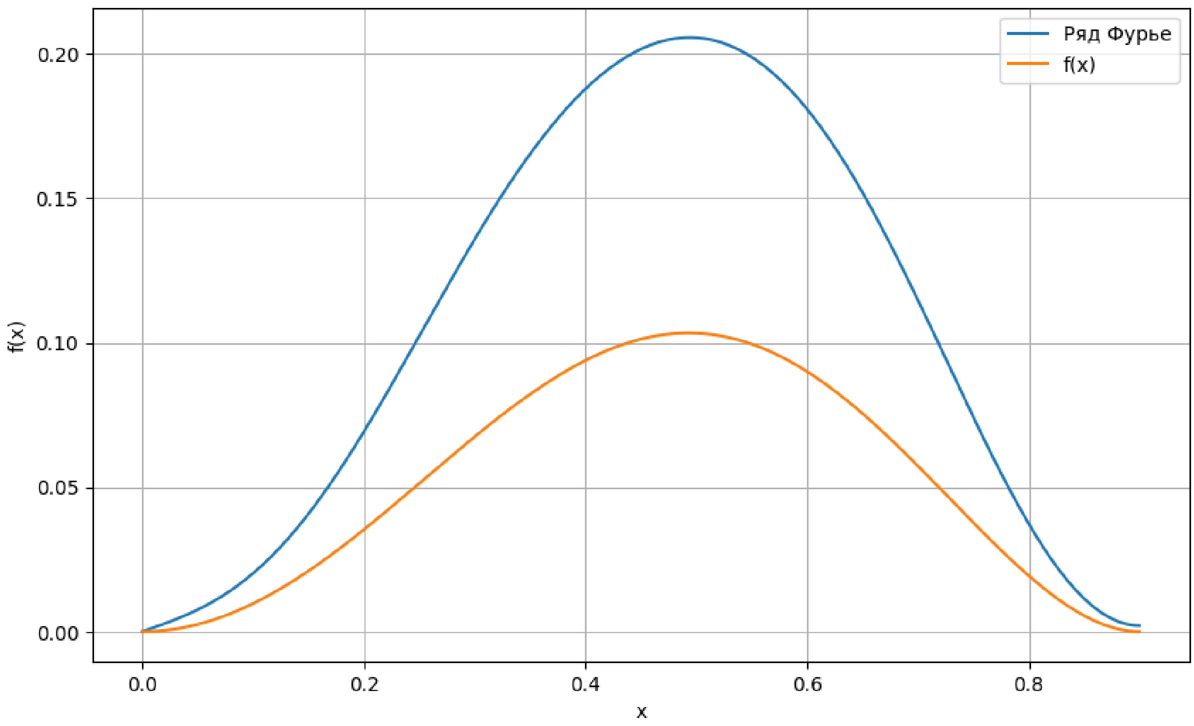
$$c_k = \frac{\int_0^{0,9}\left(x\cos\left(\frac{\pi x}{1,8}\right)\right)^2 \sin\left(\frac{5\pi + 10\pi k}{9}x\right)\,dx}{\int_0^{0,9}\sin^2\left(\frac{5\pi + 10\pi k}{9}x\right)\,dx} =$$

$$\int_0^{0,9}\left(x\cos\left(\frac{\pi x}{1,8}\right)\right)^2 \sin\left(\frac{5\pi + 10\pi k}{9}x\right)\,dx = \frac{729}{4}\left(\frac{4}{(5\pi + 10\pi k)^2}\left((-1)^k * 0,1 - \frac{1}{5\pi + 10\pi k}\right) + \frac{2}{(15\pi + 10\pi k)^2}\left((-1)^{k+1} * 0,1 - \frac{1}{15\pi + 10\pi k}\right) + \frac{2}{(10\pi k - 5\pi)^2}\left((-1)^{k+1} * 0,1 - \frac{1}{10\pi k - 5\pi}\right)\right)$$

$$\int_0^{0,9}\sin^2\left(\frac{5\pi + 10\pi k}{9}x\right)\,dx = \frac{9}{20}$$

$$= 810\left(\frac{4}{(5\pi + 10\pi k)^2}\left((-1)^k * 0,1 - \frac{1}{5\pi + 10\pi k}\right) + \frac{2}{(15\pi + 10\pi k)^2}\left((-1)^{k+1} * 0,1 - \frac{1}{15\pi + 10\pi k}\right) + \frac{2}{(10\pi k - 5\pi)^2}\left((-1)^{k+1} * 0,1 - \frac{1}{10\pi k - 5\pi}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 810\left(\frac{4}{(5\pi + 10\pi k)^2}\left((-1)^k * 0,1 - \frac{1}{5\pi + 10\pi k}\right) + \frac{2}{(15\pi + 10\pi k)^2}\left((-1)^{k+1} * 0,1 - \frac{1}{15\pi + 10\pi k}\right) + \frac{2}{(10\pi k - 5\pi)^2}\left((-1)^{k+1} * 0,1 - \frac{1}{10\pi k - 5\pi}\right)\right)\sin\left(\frac{5\pi + 10\pi k}{9}x\right)$$



3 Проверить точность выполнения равенства Парсеваля для ряда Фурье, построенного в п.2. с точностью до 10^{-3}.

$$\int_0^{0,9} f^2(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$$

$$\int_0^{0,9} f^2(x)\,dx = \int_0^{0,9} \left(x\cos\left(\frac{\pi x}{1,8}\right)\right)^4 dx = \frac{354294\pi^4 - 8857350\pi^2 + 558013305}{8000000\pi^4} \approx 0,003714$$

$c_0^2 \approx 0,005636$

$c_1^2 \approx 0,001791$

$c_2^2 \approx 0,000818$

$c_3^2 \approx 4,5587 * 10^{-10}$

$c_4^2 \approx 8,64785 * 10^{-9}$

$c_5^2 \approx 1,97964 * 10^{-11}$

$$\sum_{k=0}^{5} c_k^2 \approx 0,005636 + 0,001791 + 0,000818 + 4,5587 * 10^{-10} + 8,64785 * 10^{-9} +$$

$1,97964 * 10^{-11} \approx 0,00824801$

$$\left| \int_0^{0,9} f^2(x)\, dx - \sum_{k=0}^{5} c_k^2 \right| > 10^{-3}$$