Übung 6
SPFT

Tobias Petsch

6.1

Wir betrachen die Vorbedingung und die Zuweisung $x := y - 5$
aus $y \geq 0$ wird mit der Zuweisung die neue Nachbedingung $P : y \geq 0 \wedge x := y - 5$
Nach der IF Regel erhalten wir 2 Faelle.

Fall 1:
$y \geq 0 \wedge x := y - 5 \wedge x < 0$

daraus folgt das $y \geq 0 \wedge y < 5$ und nach der Ausfuehrung $x := y - 2$ ist.

Wir sollen zeigen dass nach der Ausfuehrung $x + 2 \geq 0$ gilt.

Das ist gegeben da fuer $y = 0$ nun $x := 0 - 2 = -2$ ist und die Nachbedingung so trotzdem erfuellt ist.

Fall2:
$y \geq 0 \wedge x := y - 5 \wedge \neg(x < 0)$

$y \geq 0 \wedge x := y - 5 \wedge (x \geq 0)$

da $x \geq 0$ und $x + 2$ immernoch groesser 0 ist. Ist hier auch die Nachbedingung erfuellt und die partielle Korrektheit ist bewiesen.

6.2

Herleitung: Gegeben ist die Vorbedingung $x \cdot x = y + 1$. Der `then`-Zweig mit Bedingung $x \cdot x = y$ kann nicht eintreten, da dies im Widerspruch zur Vorbedingung steht. Es wird also stets der `else`-Zweig ausgeführt: $y := y \cdot y$, gefolgt von $x := x - 1$. Da $y = (x^2 - 1)^2$ und x um 1 reduziert wird, gilt nach Ausführung $x \leq y$ und es existiert ein $q = x^2 - 1$ mit $q \cdot q = y$. Somit ist die Nachbedingung $x \leq y \wedge \exists q.\ q \cdot q = y$ erfüllt.

6.3

Herleitung: Die Vorbedingung ist `true`, da keine Einschränkung vorliegt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Falls $a > b$, wird $c := a$ gesetzt. Dann gilt: $c = a$, also $c \geq a$ und $c \geq b$ (wegen $a > b$), sowie $c = a \vee c = b$.

- Falls $a \leq b$, wird $c := b$ gesetzt. Dann gilt: $c = b$, also $c \geq a$ und $c \geq b$, sowie $c = a \vee c = b$ (falls $a = b$).

In beiden Fällen erfüllt c die Bedingung $c = \max(a, b)$ nach Definition. Da das Programm terminiert (keine Schleifen), ist auch totale Korrektheit gegeben.

6.4

Herleitung: Ziel ist es zu zeigen, dass nach Ausführung gilt: $\exists k.\ k \cdot m + r = n \wedge r < m$. Als Schleifeninvariante wählen wir $I \equiv \exists k.\ k \cdot m + r = n \wedge r \geq 0$. Zu Beginn ist $r := n$, also gilt $1 \cdot m + (n - m) = n$ mit $k = 0$. Die Invariante ist erfüllt.
In jedem Schleifendurchlauf wird $r := r - m$ ausgeführt. Wenn vorher $k \cdot m + r = n$, dann gilt danach $(k + 1) \cdot m + (r - m) = n$, also ist die Invariante erhalten. Die Schleife läuft, solange $m \leq r$. Sobald sie endet, gilt $r < m$. Zusammen mit der Invariante folgt dann die Nachbedingung $\exists k.\ k \cdot m + r = n \wedge r < m$.
Da wir nur natürliche Zahlen subtrahieren und r bei n beginnt, wird die Schleife irgendwann abbrechen (terminiert). Damit ist die partielle Korrektheit gezeigt.

6.5

Herleitung: Gegeben ist die Vorbedingung $n = n_0$. Daraus folgt A, denn $n = 1 \cdot n_0 \Rightarrow \exists k.\ n = k \cdot n_0$ und $n \leq 5 \cdot n_0$.
Wir zeigen die totale Korrektheit von

$$\{n = n_0\}\ \texttt{while}\ B\ \{n := n + n_0\}\ \{n = 5 \cdot n_0\}$$

mit Invariante A und Terminierungsmaß $t = 5 \cdot n_0 - n$.

- **(I)** Invariante A ist vor der Schleife erfüllt.

- **(II)** Erhaltung: Wenn $A \wedge B$ vor dem Schleifendurchlauf gilt, dann bleibt A nach $n := n + n_0$ erhalten, da n um n_0 erhöht wird, also $n = (k + 1) \cdot n_0$.

- **(III)** Terminierung: t ist in $\mathbb{N}_0$ und sinkt strikt bei jeder Iteration, da n wächst $(t' = t - n_0)$.

- **(IV)** Schleife terminiert, wenn B falsch, also $n \geq 5 \cdot n_0$. In Kombination mit $A : n \leq 5 \cdot n_0$ ergibt sich $n = 5 \cdot n_0$.

Damit ist totale Korrektheit gezeigt.