

# Algoritmi e strutture dati

Giacomo Fantoni

Telegram: @GiacomoFantoni

Github: <https://github.com/giacThePhantom/AlgoritmiStruttureDati>

**11 marzo 2020**



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
1.1	Descrizione di un algoritmo . . . . .	7
1.1.1	Pseudo-codice . . . . .	7
1.2	Valutazione degli algoritmi . . . . .	8
1.2.1	Efficienza . . . . .	8
1.2.2	Correttezza . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Analisi di algoritmi</b>	<b>11</b>
2.1	Modelli di calcolo . . . . .	11
2.1.1	Macchina di Turing . . . . .	12
2.1.2	Random Access Machine (RAM) . . . . .	12
2.2	Funzioni di costo, analisi asintotica . . . . .	12
2.2.1	Notazione $\mathbf{O}$ . . . . .	12
2.2.2	Notazione $\mathbf{\Omega}$ . . . . .	13
2.2.3	Notazione $\mathbf{\Theta}$ . . . . .	13
2.2.4	Proprietà della notazione asintotica . . . . .	13
2.2.5	Notazioni $\mathbf{o}$ , $\omega$ . . . . .	16
2.2.6	Classificazione delle funzioni . . . . .	17
2.3	Ricorrenze . . . . .	17
2.3.1	Analisi per livelli . . . . .	17
2.3.2	Metodo della sostituzione . . . . .	17
2.3.3	Metodo delle ricorrenze comuni . . . . .	17
2.4	Relazione tra complessità di un problema e di un algoritmo . . . . .	18
2.4.1	Complessità in tempo di un algoritmo . . . . .	19
2.4.2	Complessità in tempo di un problema computazionale . . . . .	19
2.5	Valutare algoritmi in base alla tipologia di input . . . . .	19
2.5.1	Tipologie di analisi . . . . .	19
2.5.2	Algoritmi di ordinamento . . . . .	19
2.6	Analisi ammortizzata . . . . .	22
2.6.1	Metodi per l'analisi ammortizzata . . . . .	22

<b>3</b>	<b>Strutture dati</b>	<b>25</b>
3.1	Sequenza . . . . .	25
3.2	Insiemi . . . . .	26
3.3	Dizionari . . . . .	28
3.4	Alberi e grafi . . . . .	28
3.4.1	Alberi ordinati . . . . .	28
3.4.2	Grafi . . . . .	28
3.4.3	Operazioni . . . . .	28
3.5	Lista . . . . .	29
3.6	Pila . . . . .	30
3.7	Coda . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Alberi</b>	<b>33</b>
4.1	Alberi radicati . . . . .	33
4.1.1	Definizioni . . . . .	33
4.1.2	Terminologia . . . . .	33
4.2	Visite di alberi . . . . .	34
4.2.1	Visita in profondità . . . . .	34
4.2.2	Visita in ampiezza . . . . .	34
4.3	Albero binario . . . . .	34
4.3.1	Specifica . . . . .	35
4.3.2	Memorizzazione e implementazione . . . . .	35
4.3.3	Visita in profondità . . . . .	36
4.4	Alberi generici . . . . .	36
4.4.1	Specifica . . . . .	36
4.4.2	Memorizzazione . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Alberi di ricerca</b>	<b>39</b>
5.1	Specifica . . . . .	39
5.1.1	Ricerca . . . . .	40
5.1.2	Minimo e massimo . . . . .	40
5.1.3	Successore e predecessore . . . . .	41
5.1.4	Inserimento . . . . .	41
5.1.5	Cancellazione . . . . .	42
5.2	Costo computazionale . . . . .	43
5.3	Alberi di ricerca bilanciati . . . . .	44
5.3.1	Alberi red-black . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Hashing</b>	<b>51</b>
6.0.1	Definizioni . . . . .	51
6.1	Funzioni hash . . . . .	52
6.1.1	Come realizzare una funzione hash . . . . .	52
6.2	Le collisioni . . . . .	53
6.2.1	Liste o vettori di trabocco (Concatenamento o chaining) . . . . .	53
6.2.2	Indirizzamento aperto . . . . .	54
6.3	Complessità . . . . .	57

<b>7</b>	<b>Insiemi e dizionari</b>	<b>59</b>
7.1	Insiemi . . . . .	60
7.1.1	Insiemi realizzati con vettori booleani . . . . .	60
7.1.2	Insiemi realizzati con liste . . . . .	61
7.1.3	Strutture dati complesse . . . . .	62
7.2	Bloom filters . . . . .	62
7.2.1	Specifica . . . . .	62
7.2.2	Applicazioni . . . . .	62
7.2.3	Implementazione . . . . .	63
7.2.4	Caratterizzazione matematica . . . . .	63
<b>8</b>	<b>Grafi</b>	<b>65</b>
8.0.1	Definizioni . . . . .	65
8.0.2	Specifica . . . . .	66
8.1	Memorizzare grafi . . . . .	67
8.1.1	Matrice di adiacenza . . . . .	67
8.1.2	Liste di adiacenza . . . . .	67
8.1.3	Iterazioni su nodi e archi . . . . .	68
8.2	Visite dei grafi . . . . .	68
8.2.1	Visita in ampiezza o breadth-first search . . . . .	69
8.2.2	Visita in profondità o depth-first search . . . . .	70
<b>9</b>	<b>Strutture dati speciali</b>	<b>79</b>
9.1	Code con priorità . . . . .	79
9.1.1	Specifica . . . . .	79
9.1.2	Implementazioni . . . . .	80
9.1.3	Heap . . . . .	80
9.1.4	Implementazione di code con priorità . . . . .	83
9.2	Insiemi disgiunti - Merge-find set . . . . .	85
9.2.1	Specifica . . . . .	86
9.2.2	Componenti connesse dinamiche . . . . .	86
9.2.3	Implementazione con insieme di liste . . . . .	86
9.2.4	Implementazione con insieme di alberi . . . . .	86
9.2.5	Tecniche euristiche . . . . .	87
<b>10</b>	<b>Scelta</b>	<b>89</b>
10.1	Il problema dei cammini minimi . . . . .	89
10.1.1	Varianti del problema . . . . .	89
10.1.2	Sottostruttura ottima . . . . .	90
10.2	Teorema di Bellman . . . . .	91
10.2.1	Implementazioni . . . . .	91
10.3	Algoritmo di Dijkstra . . . . .	92
10.3.1	Funzionamento . . . . .	92
10.3.2	Correttezza per pesi positivi . . . . .	93

<b>11 Risoluzione problemi</b>	<b>95</b>
11.1 Classificazione dei problemi . . . . .	95
11.2 Definizione matematica del problema . . . . .	96
11.3 Tecniche di soluzione problemi . . . . .	96
<b>12 Divide-et-impera</b>	<b>97</b>
12.1 Le torri di Hanoi . . . . .	97
12.2 Quicksort . . . . .	98
12.2.1 Caratterizzazione . . . . .	98
12.2.2 Complessità computazionale . . . . .	99
12.3 Conclusioni . . . . .	99
<b>13 Programmazione dinamica</b>	<b>101</b>
13.1 Approccio generale . . . . .	101
13.1.1 Evitare di risolvere i problemi più di una volta . . . . .	101
13.1.2 Ricostruire la soluzione . . . . .	102
13.2 Memoization . . . . .	102
13.3 Problemi . . . . .	102
13.3.1 Domino lineare . . . . .	102
13.3.2 Hateville . . . . .	104
13.3.3 Knapsack . . . . .	106
13.3.4 Knapsack senza limiti . . . . .	108
13.3.5 Sottosequenza comune massimale . . . . .	110
13.3.6 String matching approssimato . . . . .	113
13.3.7 Prodotto di catena di matrici . . . . .	115
13.3.8 Insieme indipendente di intervalli pesati . . . . .	119

# Capitolo 1

## Introduzione

### Problema computazionale

Dati un dominio di input e uno di output, un problema computazionale è rappresentato dalla funzione matematica che associa un elemento del dominio di output ad ogni elemento del dominio di input.

### Algoritmo

Dato un problema computazionale, un algoritmo è un procedimento effettivo espresso tramite una funzione di passi elementari ben specificati in un sistema formale di calcolo che risolve il problema in tempo finito.

## 1.1 Descrizione di un algoritmo

Per descrivere un algoritmo si rende necessario utilizzare un linguaggio formale ben definito detto pseudo-codice, indipendente dall'implementazione effettiva ma con dettaglio sufficiente a descrivere i passaggi necessari alla descrizione dell'algoritmo.

### 1.1.1 Pseudo-codice

- $a = b$ .
- $a \leftrightarrow b \equiv tmp = a; a = b; b = tmp$ .
- $T[A = \mathbf{new} \ T[1 \dots n]]$ .
- $T[[A = \mathbf{new} \ T[1 \dots n]][1 \dots m]]$ .
- Tipi in grassetto.
- **and**, **or**, **not**.

- $=, \neq, \geq, \leq$ .
- $+, -, \cdot, /, \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil, \log, x^2, \dots$ .
- *if*(condizione,  $v_1, v_2$ ).
- **if** *condizione* **then** *istruzione*.
- **if** *condizione* **then** *istruzione*<sub>1</sub> **else then** *istruzione*<sub>2</sub>.
- **while** *condizione* **do** *istruzione*.
- **foreach** *elemento*  $\in$  *insieme* **do** *istruzione*.
- **return**
- % commento.

## 1.2 Valutazione degli algoritmi

### 1.2.1 Efficienza

Si definisce complessità di un algoritmo l'analisi delle risorse necessarie per la sua risoluzione, in funzione di tipologia e dimensione di input. Le risorse si distinguono in tempo, memoria e banda (per gli algoritmi distribuiti).

#### Tempo

Il numero di secondi necessari alla risoluzione dell'algoritmo dipende da troppi fattori, si utilizzano pertanto tecniche di analisi che prendono in considerazione il numero di operazioni rilevanti, quelle che caratterizzano lo scopo dell'algoritmo.

### 1.2.2 Correttezza

Per valutare la correttezza di algoritmi si devono considerare le invarianti:

- Invariante: una condizione che deve rimanere vera sempre in un certo punto del programma.
- Invariante di ciclo: una condizione che deve rimanere vera all'inizio dell'iterazione di un ciclo.
- Invariante di classe: una condizione sempre vera al termine dell'esecuzione di un metodo di una classe.



### **Invariante di ciclo e algoritmi iterativi**

L'invariante di ciclo permette di dimostrare la correttezza degli algoritmi iterativi attraverso il principio di induzione:

- Inizializzazione (caso base): l'invariante è vera prima della prima iterazione.
- Conservazione (passo induttivo): se la condizione è vera prima di un'iterazione allora rimane vera al suo termine.
- Conclusione: quando il ciclo termina l'invariante deve rappresentare la correttezza dell'algoritmo.



## Capitolo 2

# Analisi di algoritmi

Per definire la complessità di un algoritmo occorre definire una funzione che ha come dominio la dimensione dell'input e come insieme immagine il tempo.

### Dimensione dell'input

La dimensione dell'input può essere definita secondo due criteri:

- Criterio di costo logaritmico: la taglia dell'input è il numero di bit necessari a rappresentarlo.
- Criterio di costo uniforme: la taglia dell'input è il numero di elementi di cui è costituito.

In molti casi si può assumere che gli elementi siano costituiti da un numero costante di bit, e in tal caso le due misure coincidono a meno di una costante moltiplicativa.

### Definizione di tempo

Si definisce il tempo come il numero di istruzioni elementari necessarie al completamento dell'algoritmo. Si definisce elementare una funzione che può essere svolta in tempo costante dal processore.

## 2.1 Modelli di calcolo

Un modello di calcolo è una rappresentazione astratta del calcolatore. L'astrazione permette di nascondere dei dettagli, il suo realismo permette di riflettere con un certo grado di precisione una situazione reale e la potenza matematica di trarre conclusioni formali sul costo.

### 2.1.1 Macchina di Turing

Una macchina di Turing è una macchina ideale che manipola i dati contenuti su un nastro di lunghezza infinita secondo un insieme prefissato di regole. Ad ogni passo la macchina di Turing:

- Legge il simbolo sotto la testina.
- Modifica il proprio stato interno.
- Scrive un nuovo simbolo nella cella.
- Muove la testina a destra o a sinistra.

Questo modello è fondamentale per lo studio della calcolabilità ma è troppo dettagliato per l'analisi.

### 2.1.2 Random Access Machine (RAM)

#### Memoria

La memoria è costituita da un numero infinito di celle di dimensione finita a cui si accede, indipendentemente dalla posizione, in tempo costante.

#### Processore (singolo)

Un insieme di istruzioni simili a quelle reali: algebriche, logiche e di salto.

#### Costo delle istruzioni elementari

Uniforme e ininfluente ai fini dell'analisi.

## 2.2 Funzioni di costo, analisi asintotica

Per studiare la complessità di un algoritmo si analizza il suo comportamento asintotico, ovvero quando la dimensione del suo input tende a infinito.

### 2.2.1 Notazione O

Sia  $g(n)$  una funzione di costo, si indica con  $O(g(n))$  l'insieme delle funzioni  $f(n)$  tali per cui:

$$\exists c > 0, \exists m \geq 0 : f(n) \leq cg(n), \forall n \geq m$$

$g(n)$  si dice limite asintotico superiore di  $f(n)$ , ovvero  $f(n)$  cresce al più come  $g(n)$ .

**2.2.2 Notazione  $\Omega$** 

Sia  $g(n)$  una funzione di costo, si indica con  $\Omega(g(n))$  l'insieme delle funzioni  $f(n)$  tali per cui:

$$\exists c > 0, \exists m \geq 0 : f(n) \geq cg(n), \forall n \geq m$$

$g(n)$  si dice limite asintotico inferiore di  $f(n)$ , ovvero  $f(n)$  cresce almeno quanto  $g(n)$ .

**2.2.3 Notazione  $\Theta$** 

Sia  $g(n)$  una funzione di costo, si indica con  $\Theta(g(n))$  l'insieme delle funzioni  $f(n)$  tali per cui:

$$\exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \exists m \geq 0 : c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq m$$

$f(n)$  cresce esattamente come  $g(n)$  e  $f(n) = \Theta(g(n))$  se e solo se  $f(n) = O(g(n))$  e  $f(n) = \Omega(g(n))$ .

**2.2.4 Proprietà della notazione asintotica****Espressioni polinomiali****Enunciato**

$$f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0, a_k > 0 \Rightarrow f(n) = \Theta(n^k)$$

**Limite superiore**

$$\exists c > 0, \exists m \geq 0 : f(n) \leq cn^k, \forall n \geq m$$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned} f(n) &= a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 \\ &\leq a_k n^k + |a_{k-1}| n^{k-1} + \dots + |a_1| n + |a_0| \\ &\leq a_k n^k + |a_{k-1}| n^k + \dots + |a_1| n^k + |a_0| n^k \quad \forall n \geq 1 \\ &= (a_k + |a_{k-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|) n^k \\ &\stackrel{?}{\leq} cn^k \end{aligned}$$

Vera per  $c \geq (a_k + |a_{k-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|)$  e per  $m = 1$ .

**Limite inferiore**

$$\exists d > 0, \exists m \geq 0 : f(n) \geq dn^k, \forall n \geq m$$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned}
 f(n) &= a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 \\
 &\geq a_k n^k - |a_{k-1}| n^{k-1} - \dots - |a_1| n - |a_0| \\
 &\geq a_k n^k - |a_{k-1}| n^{k-1} - \dots - |a_1| n^{k-1} - |a_0| n^{k-1} \quad \forall n \geq 1 \\
 &= (a_k + |a_{k-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|) n^k \\
 &\stackrel{?}{\geq} d n^k
 \end{aligned}$$

$$\text{Vera per } d \leq a_k - \frac{|a_{k-1}|}{n} - \frac{|a_{k-2}|}{n} - \dots - \frac{|a_1|}{n} - \frac{|a_0|}{n} > 0 \Leftrightarrow n > \frac{|a_{k-1}| + \dots + |a_0|}{a_k}.$$

**Dualità**

**Enunciato**

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned}
 f(n) = O(g(n)) &\Leftrightarrow f(n) \leq c g(n), \forall n \geq m \\
 &\Leftrightarrow g(n) \geq \frac{1}{c} f(n), \forall n \geq m \\
 &\Leftrightarrow g(n) \geq c' = \frac{1}{c} f(n), \forall n \geq m, c' = \frac{1}{c} \\
 &\Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))
 \end{aligned}$$

**Eliminazione delle costanti**

**Enunciato**

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow a f(n) = O(g(n)), \forall a > 0 \quad (2.1)$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow a f(n) = \Omega(g(n)), \forall a > 0 \quad (2.2)$$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned}
 f(n) = O(g(n)) &\Leftrightarrow f(n) \leq c g(n), \forall n \geq m \\
 &\Leftrightarrow a f(n) \leq a c g(n), \forall n \geq m, \forall a \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow a f(n) \leq c' g(n), \forall n \geq m, c' = a c > 0 \\
 &\Leftrightarrow a f(n) = O(g(n))
 \end{aligned}$$

La dimostrazione è analoga per il limite inferiore.

**Sommatoria**

**Enunciato**

$$f_1(n) = O(g_1(n)), f_2(n) = O(g_2(n)) \Rightarrow f_1(n) + f_2(n) = O(\max(g_1(n), g_2(n)))$$

$$f_1(n) = \Omega(g_1(n)), f_2(n) = \Omega(g_2(n)) \Rightarrow f_1(n) + f_2(n) = \Omega(\min(g_1(n), g_2(n)))$$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned}
 f_1(n) = O(g_1(n)) \wedge f_2(n) = O(g_2(n)) &\Rightarrow \\
 f_1(n) \leq c_1 g_1(n) \wedge f_2(n) \leq c_2 g_2(n) &\Rightarrow \\
 f_1(n) + f_2(n) \leq c_1 g_1(n) + c_2 g_2(n) &\Rightarrow \\
 f_1(n) + f_2(n) \leq \max(c_1, c_2)(2 \max(g_1(n), g_2(n))) &\Rightarrow \\
 f_1(n) + f_2(n) = O(\max(g_1(n), g_2(n))) &
 \end{aligned}$$

La dimostrazione è analoga per il limite inferiore.

**Prodotto**

$$\begin{aligned}
 f_1(n) = O(g_1(n)), f_2(n) = O(g_2(n)) &\Rightarrow f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n)) \\
 f_1(n) = \Omega(g_1(n)), f_2(n) = \Omega(g_2(n)) &\Rightarrow f_1(n) \cdot f_2(n) = \Omega(g_1(n) \cdot g_2(n))
 \end{aligned}$$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned}
 f_1(n) = O(g_1(n)) \wedge f_2(n) = O(g_2(n)) &\Rightarrow \\
 f_1(n) \leq c_1 g_1(n) \wedge f_2(n) \leq c_2 g_2(n) &\Rightarrow \\
 f_1(n) \cdot f_2(n) \leq c_1 c_2 g_1(n) g_2(n) &\Rightarrow \\
 f_1(n) f_2(n) = O(g_1(n) g_2(n)) &
 \end{aligned}$$

**Simmetria**

**Enunciato**

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$$

**Dimostrazione** Grazie alla proprietà di dualità:

$$\begin{aligned}
 f(n) = \Theta(g(n)) &\Rightarrow & f(n) = O(g(n)) &\Rightarrow & g(n) = \Omega(f(n)) \\
 f(n) = \Theta(g(n)) &\Rightarrow & f(n) = \Omega(g(n)) &\Rightarrow & g(n) = O(f(n))
 \end{aligned}$$

**Transitività**

**Enunciato**

$$f(n) = O(g(n)), g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned}
 f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = O(h(n)) &\Rightarrow \\
 f(n) \leq c_1 g(n) \wedge g(n) \leq c_2 h(n) &\Rightarrow \\
 f(n) \leq c_1 c_2 h(n) &\Rightarrow \\
 f(n) = O(h(n)) &
 \end{aligned}$$

### Logaritmi

**Enunciato** Si vuole provare che  $\log n = O(n)$ . Si dimostri pertanto per induzione che:

$$\exists c > 0, \exists m \geq 0 : \log n \leq cn, \forall n \geq m$$

### Dimostrazione

- Caso base,  $n = 1$ :  $\log 1 = 0 \leq cn = c1 \Leftrightarrow c \geq 0$ .
- Ipotesi induttiva: sia  $\log k \leq ck, \forall k \leq n$ .
- Passo induttivo: si dimostri la proprietà per  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} \log(n+1) &\leq \log(n+n) = \log 2n && \forall n \geq 1 \\ &= \log 2 + \log n && \log ab = \log a + \log b \\ &= 1 + \log n && \log 2 = 1 \\ &\leq 1 + cn && \text{per induzione} \\ &\stackrel{?}{\leq} c(n+1) && \text{obiettivo} \end{aligned}$$

$$1 + cn \leq c(n+1) \Leftrightarrow c \geq 1$$

### 2.2.5 Notazioni $o$ , $\omega$

#### Notazione $o$

Sia  $g(n)$  una funzione di costo, si indica con  $o(g(n))$  l'insieme delle funzioni  $f(n)$  tali per cui:

$$\forall c, \exists m : f(n) < cg(n), \forall n \geq m$$

#### Notazione $\omega$

Sia  $g(n)$  una funzione di costo, si indica con  $\omega(g(n))$  l'insieme delle funzioni  $f(n)$  tali per cui:

$$\forall c, \exists m : f(n) > cg(n), \forall n \geq m$$

### Significato

Utilizzando il concetto di limite si noti come:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n) = o(g(n))$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0 \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow f(n) = \omega(g(n))$ .
- $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$ .
- $f(n) = \omega(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$ .



### 2.2.6 Classificazione delle funzioni

Espandendo le relazioni dimostrate è possibile ottenere un ordinamento delle principali espressioni. Si consideri per ogni  $r < s$ ,  $h < k$ ,  $a < b$ :

$$\begin{aligned} O(1) &\subset O(\log^r n) \subset O(\log^s n) \subset O(n^h) \subset O(n^h \log^r n) \\ &\subset O(n^h \log^s n) \subset O(n^k) \subset O(a^n) \subset O(b^n) \end{aligned}$$

## 2.3 Ricorrenze

### Definizioni

- Equazione di ricorrenza: calcolare la complessità di un algoritmo ricorsivo richiede la creazione di un'equazione di ricorrenza, una formula matematica definita in maniera ricorsiva.
- Forma chiusa: l'obiettivo è partire dall'equazione di ricorrenza e trasformarla in una forma chiusa in modo da comprendere la classe di complessità dell'algoritmo.

### 2.3.1 Analisi per livelli

Questo metodo di risoluzione delle equazioni ricorsive detto anche metodo dell'albero di ricorsione consiste nell'espandere la ricorrenza in un albero i cui nodi rappresentano i costi ai vari livelli della ricorsione considerando poi il livello più basso in cui tutte le chiamate sono state ricondotte al caso base. Si otterrà pertanto una sommatoria da cui si potrà derivare la forma chiusa e la classe di complessità.

### 2.3.2 Metodo della sostituzione

Questo metodo di risoluzione delle equazioni ricorsive, detto anche metodo per tentativi, consiste nel cercare di indovinare una soluzione in base alla propria esperienza e di tentare di dimostrare tale soluzione per induzione.

### 2.3.3 Metodo delle ricorrenze comuni

Questo metodo di risoluzione delle equazioni ricorsive, detto anche metodo dell'esperto, mette a disposizione dei teoremi che permettono di risolvere facilmente ampie classi di equazioni di ricorrenza.

### Ricorrenze lineari con partizione bilanciata

**Teorema** Siano  $a$  e  $b$  costanti intere tali che  $a \geq 1$  e  $b \geq 2$  e  $c$  e  $\beta$  costanti reali tali che  $c > 0$  e  $\beta \geq 0$ . Sia  $T(n)$  l'equazione di ricorrenza nella forma:

$$T(n) = \begin{cases} aT(\frac{n}{b}) + cn^\beta & n > 1 \\ d & n \leq 1 \end{cases}$$

#### 2.4. RELAZIONE TRA COMPLESSITÀ DI UN PROBLEMA E DI UN ALGORITMO

---

Posto  $\alpha = \frac{\log a}{\log b} = \log_b a$  allora:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^\alpha) & \alpha > \beta \\ \Theta(n^\alpha \log n) & \alpha = \beta \\ \Theta(n^\beta) & \alpha < \beta \end{cases}$$

##### Estensione delle ricorrenze lineari con partizione bilanciata

Sia  $a \geq 1$ ,  $b > 1$  e  $f(n)$  asintoticamente positiva e sia

$$T(n) = \begin{cases} aT(\frac{n}{b}) + f(n) & n > 1 \\ d & n \leq 1 \end{cases}$$

Sono dati tre casi.

- $\exists \varepsilon > 0 : f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ .
- $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \Rightarrow T(n) = \Theta(f(n) \log n)$ .
- $\exists \varepsilon > 0 : f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \wedge \exists c : 0 < c < 1, \exists m > 0 : af(\frac{n}{b}) \leq cf(n), \forall n \geq m \Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$ .

##### Ricorrenze lineari di ordine costante

Siano  $a_1, \dots, a_n$  costanti intere non negative, con  $h$  costante positiva,  $c > 0$  e  $\beta \geq 0$  costanti reali e  $T(n)$  una relazione di ricorrenza nella forma:

$$T(n) = \begin{cases} \sum_{1 \leq i \leq h} a_i T(n-i) + cn^\beta & n > m \\ \Theta(1) & n \leq m \leq h \end{cases}$$

Posto  $a = \sum_{1 \leq i \leq h} a_i$  allora:

- $T(n) = \Theta(n^{\beta+1})$  se  $a = 1$ .
- $T(n) = \Theta(a^n n^\beta)$  se  $a \geq 2$ .

## 2.4 Relazione tra complessità di un problema e di un algoritmo

Un problema ha complessità  $O(f(n))$  se esiste un algoritmo che lo risolve con complessità  $O(f(n))$ . Un problema ha complessità  $\Omega(f(n))$  se tutti gli algoritmi che lo risolvono hanno complessità  $\Omega(f(n))$ .

### 2.4.1 Complessità in tempo di un algoritmo

La quantità di tempo richiesta per input di dimensione  $n$ :

- $O(f(n))$ : per tutti gli input l'algoritmo costa al più  $f(n)$ .
- $\Omega(f(n))$ : per tutti gli input l'algoritmo costa almeno  $f(n)$ .
- $\Theta(f(n))$ : per tutti gli input l'algoritmo richiede  $f(n)$ .

### 2.4.2 Complessità in tempo di un problema computazionale

La quantità di tempo richiesta per input di dimensione  $n$ :

- $O(f(n))$ : complessità del miglior algoritmo che risolve il problema.
- $\Omega(f(n))$ : dimostrare che nessun algoritmo può risolvere il problema in un tempo inferiore a  $\Omega(f(n))$ .
- $\Theta(f(n))$ : algoritmo ottimo.

## 2.5 Valutare algoritmi in base alla tipologia di input

In alcuni casi gli algoritmi si comportano in maniera diversa in base a caratteristiche dell'input. Conoscerle in anticipo permette di scegliere il miglior algoritmo per la situazione.

### 2.5.1 Tipologie di analisi

- Analisi del caso pessimo: il tempo di esecuzione è il limite superiore al tempo di esecuzione per un qualsiasi input.
- Analisi del caso medio: molto difficile in quanto si deve trovare una distribuzione uniforme degli input.
- Analisi del caso ottimo: ha senso se si conoscono caratteristiche dell'input.

### 2.5.2 Algoritmi di ordinamento

Il problema di ordinamento è rappresentato da una sequenza  $A = a_1, \dots, a_n$  di valori in input e dà in output una sequenza  $B = b_1, \dots, b_n$  permutazione di  $A$  tale per cui  $\forall 0 < i < n - 1, b_i \leq b_{i+1}$ .

#### Selection sort

Cerco il minimo e lo metto nella posizione corretta, riducendo il problema ai restanti  $n - 1$  valori.

## 2.5. VALUTARE ALGORITMI IN BASE ALLA TIPOLOGIA DI INPUT

---

```
: selectionSort(item // A, int n)
```

---

```
  for  $i = 1$  to  $n-1$  do
    int min = min(A,  $i$ , n)
    A[i]  $\leftrightarrow$  A[min]
```

---

---

```
: min(item // A, int i, int n)
```

---

```
  %Posizione del minimo parziale
  int min = i
  for  $j = i + 1$  to n do
    if A[j]  $\leq$  A[min] then
      %Nuovo minimo parziale
      min = j
  return min
```

---

### Complessità

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - \frac{n}{2} = O(n^2)$$

### InsertionSort

Algoritmo efficiente per ordinare piccoli insiemi. In cui si prende l'i-esimo elemento e lo si mette nella posizione corretta rispetto agli elementi precedenti, proseguendo fino alla fine.

---

```
: insertionSort(item // A, int n)
```

---

```
  for  $i = 2$  to n do
    item temp = A[i]
    int j = i
    while  $j > 1$  and A[j-1]  $>$  temp do
      A[j] = A[j - 1]
      j -= 1
    A[j] = temp
```

---

### Correttezza e complessità DA COMPLETARE

### MergeSort

Il mergeSort si basa sulla tecnica di divide-et-impera in quanto divide il vettore di  $n$  elementi in due sottovettori di  $\frac{n}{2}$  elementi, chiama il mergeSort ricorsiva-

mente su quei due elementi e unisce (merge) le due sequenze ordinate. Si sfrutta il fatto che i due sottovettori sono già ordinati per ordinare più velocemente.

---

```
: merge(item [] A, int first, int last, int mid)
```

---

```

int i, j, k , h
i = first
j = mid + 1
k = first
while  $i \leq mid$  and  $j \leq last$  do
    if  $A[i] \leq A[j]$  then
        B[k] = A[i]
        i += 1
    else
        B[k] = A[j]
        j += 1
    k += 1
j = last
for  $h = mid$  down to  $i$  do
    A[j] = A[h]
    j -= 1
for  $j = first$  to  $k-1$  do
    A[j] = B[j]
```

---

*merge()*

**Costo computazionale**  $O(n)$

*mergeSort()*

---

```
: mergeSort(item [] A, int first, int last)
```

---

```

if  $first < last$  then
    int mid =  $\lfloor \frac{first + last}{2} \rfloor$ 
    mergeSort(A, first, mid)
    mergeSort(A, mid + 1, last)
    merge(A, first, last, mid)
```

---

**Costo computazionale** Si assuma per semplificare che  $n = 2^k$  in modo che  $k = \log n$  e tutti i sottovettori hanno dimensioni di potenze esatte di due.

## 2.6. ANALISI AMMORTIZZATA

---

Si ottiene così l'equazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} c & n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + dn & n > 1 \end{cases}$$

Si noti come ad ogni chiamata ricorsiva si svolga un'operazione di merge di costo  $O(1)$  e  $k$  vari tra 0 e  $\log n$ . Si ottiene pertanto  $O(\sum_{i=0}^k s^i \frac{n}{2^i}) = O(\sum_{i=0}^k n) = O(kn) \Leftrightarrow O(n \log n)$ .

## 2.6 Analisi ammortizzata

Si intende per analisi ammortizzata una tecnica di analisi di complessità che valuta il tempo per eseguire nel caso pessimo una sequenza di operazioni su una struttura dati. Esistono operazioni più o meno costose e se le operazioni costose sono meno frequenti allora il loro costo può essere ammortizzato da quelle meno costose. A differenza dell'analisi del caso medio è deterministica su operazioni multiple e verifica il caso pessimo.

### 2.6.1 Metodi per l'analisi ammortizzata

#### Metodo dell'aggregazione

In questo metodo si calcola la complessità  $T(n)$  per eseguire  $n$  operazioni in sequenza nel caso pessimo. Grazie alla sequenza si considera l'evoluzione della struttura dati data una sequenza di operazioni, considerando la sequenza pessima e sommando insieme tutte le complessità individuali. Successivamente questo  $T(n)$  viene diviso per il numero di operazioni in modo da verificare la complessità ammortizzata di un'operazione nella sequenza.

#### Metodo degli accantonamenti

Alle operazioni vengono assegnati costi ammortizzati che possono essere minori o maggiori del loro costo effettivo. Questa differenza è dovuta al fatto che le operazioni meno costose vengono caricate di un costo aggiuntivo detto credito:  $\text{costo ammortizzato} = \text{costo effettivo} + \text{credito prodotto}$ . Questo credito accumulato viene speso dalle operazioni più costose:  $\text{costo ammortizzato} = \text{costo effettivo} - \text{credito consumato}$ . Si deve dimostrare che la somma dei costi ammortizzati  $a_i$  è un limite superiore alla somma dei costi effettivi:  $\sum_{i=1}^n c_i \leq \sum_{i=1}^n a_i$  e che il valore così ottenuto è "poco costoso". Considerando il caso pessimo, la dimostrazione deve valere per tutte le sequenze e il credito dopo la  $t$ -esima operazione deve essere sempre positivo:  $\sum_{i=1}^t a_i \leq \sum_{i=1}^t c_i \geq 0$ .

### Metodo del potenziale

Lo stato del sistema viene descritto attraverso una funzione di potenziale  $\Phi(D)$ . Le operazioni meno costose devono incrementare  $\Phi(D)$  e quelle più costose decrementarlo. Il costo ammortizzato è pari al costo effettivo sommato alla differenza di potenziale:  $a_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$ . Per una sequenza di operazioni di lunghezza  $n$ , se  $\Phi(D_n) - \Phi(D_0) \geq 0$  il costo ammortizzato  $A$  è un limite superiore al costo reale.





## Capitolo 3

# Strutture dati

Si intende per dato in un linguaggio di programmazione un valore che una variabile può assumere. Un tipo di dato astratto è una collezione di valori e un insieme di operazioni ammesse su quei valori. Si dicono primitivi i tipi di dati forniti direttamente dal linguaggio di programmazione. La definizione di un tipo di dato astratto si divide nella specifica, una descrizione di alto livello di come può essere utilizzata e nell'implementazione, la realizzazione vera e propria di basso livello. Le strutture dati sono collezioni di dati, caratterizzate dall'organizzazione della collezione stessa più che dal tipo di dati contenuti. Le strutture dati sono caratterizzate da un insieme di operatori che permettono di manipolarne la struttura e un modo sistematico per organizzare l'insieme di dati. Le strutture dati si dividono in:

- Lineari o non lineari rispetto alla presenza o meno di una sequenza.
- Statiche o dinamiche se la dimensione della struttura può variare o meno.
- Omogenee o disomogenee se possono contenere uno o diversi tipi di dati.

### 3.1 Sequenza

Una sequenza è una struttura dati dinamica, lineare che rappresenta una sequenza ordinata di valori, dove un valore può comparire più di una volta. È importante l'ordine all'interno della sequenza.

#### Operazioni ammesse

- Data una posizione è possibile aggiungere o eliminare un elemento in quella posizione. Si considerano anche per comodità le posizioni  $pos_0$  e  $pos_{n+1}$ .
- È possibile accedere direttamente alla testa e alla coda della sequenza.
- È possibile accedere sequenzialmente a tutti gli altri elementi.

### 3.2. INSIEMI

---

#### Specifica

---

##### : Sequence

---

%Restituisce True se la sequenza è vuota

**boolean isEmpty()**

%Restituisce True se  $p$  è uguale a  $pos_0$  o a  $pos_{n+1}$

**boolean finished(Pos  $p$ )**

%Restituisce la posizione del primo elemento

**Pos head()**

%Restituisce la posizione dell'ultimo elemento

**Pos tail()**

%Restituisce la posizione dell'elemento che segue  $p$

**Pos next(Pos  $p$ )**

%Restituisce la posizione dell'elemento che precede  $p$

**Pos prev(Pos  $p$ )**

%Inserisce l'elemento  $v$  di tipo Item nella posizione  $p$

%Restituisce la posizione del nuovo elemento che diventa predecessore di  
 $p$

**Pos insert(Pos  $p$ , Item  $v$ )**

%Rimuove l'elemento alla posizione  $p$

%Restituisce la posizione del successore di  $p$

%Che diventa il successore del predecessore di  $p$

**Pos remove(Pos  $p$ )**

%Legge l'elemento di tipo Item contenuto nella posizione  $p$

**Item read(Pos  $p$ )**

%Scrive l'elemento  $v$  di tipo Item nella posizione  $p$

**write(Pos  $p$ , Item  $v$ )**

---

## 3.2 Insiemi

Per insieme si intende una struttura dati dinamica, non lineare che memorizza una collezione non ordinata di elementi senza valori ripetuti. L'ordinamento tra i valori sarà dato dall'eventuale relazione d'ordine definita sul tipo di elementi stessi.

### Operazioni ammesse

- Operazioni base:
  - Inserimento.
  - Cancellazione.
  - Verifica contenimento.
- Operazioni di ordinamento:
  - Massimo.
  - Minimo.
- Operazioni insiemistiche:
  - Unione.
  - Intersezione.
  - Differenza.
- Iteratori.
  - **foreach**  $x \in S$  **do**.

### Specifica

---

#### : Set

---

```
%Restituisce la cardinalità dell'insieme
int size()
%Restituisce True se  $x$  è contenuto nell'insieme
boolean contains(Item  $x$ )
%Inserisce  $x$  nell'insieme se non è già presente
insert(Item  $x$ )
%Rimuove  $x$  dall'insieme se è presente
remove(Item  $x$ )
%Restituisce un nuovo insieme che è l'unione di  $A$  e  $B$ 
Set union(Set  $A$ , Set  $B$ )
%Restituisce un nuovo insieme che è l'intersezione di  $A$  e  $B$ 
Set intersection(Set  $A$ , Set  $B$ )
%Restituisce un nuovo insieme che è la differenza tra  $A$  e  $B$ 
Set Difference(Set  $A$ , Set  $B$ )
```

---

## 3.3 Dizionari

Un dizionario è una struttura dati che rappresenta il concetto matematico di relazione univoca  $R : D \rightarrow C$  o associazione chiave-valore. L'insieme  $D$  è il dominio ed è costituito dalle chiavi, l'insieme  $C$  è il codominio ed è costituito dai valori.

### Operazioni ammesse

- Ottenere il valore associato ad una particolare chiave se presente altrimenti **nil**.
- Inserire una nuova associazione chiave-valore cancellando eventualmente associazioni precedenti per la stessa chiave.
- Rimuovere un'associazione chiave-valore esistente.

### Specifica

---

#### : Dictionary

---

```
%Restituisce il valore associato alla chiave  $k$  se presente, nil  
altrimenti  
Item lookup(Item  $k$ )  
%Associa il valore  $v$  alla chiave  $k$   
insert(Item  $k$ , Item  $v$ )  
%Rimuove l'associazione della chiave  $k$   
remove(Item  $k$ )
```

---

## 3.4 Alberi e grafi

### 3.4.1 Alberi ordinati

Un albero ordinato è dato da un insieme finito di elementi detti nodi, uno dei quali è designato come radice e i rimanenti, se esistono sono partizionati in insiemi ordinati e disgiunti, anch'essi alberi ordinati.

### 3.4.2 Grafi

La struttura di un grafo è composta da un insieme di elementi detti nodi o vertici e un insieme di coppie (ordinate o no) di nodi detti archi.

### 3.4.3 Operazioni

Tutte le operazioni su grafi e alberi ruotano intorno alla possibilità di effettuare visite su di essi.

## 3.5 Lista

Una lista o linked list è una struttura dati contenente una sequenza di nodi contenente dati arbitrari, 1 – 2 puntatori all'elemento successivo e/o a quello precedente. La contiguità nella lista è diversa dalla contiguità in memoria e tutte le operazioni su una lista hanno costo  $O(1)$ .

### Possibili implementazioni

Bidirezionale o monodirezionale: in base al numero di puntatori e se puntano a quello successivo e/o a quello precedente. Con sentinella o senza sentinella: in base alla presenza di una sentinella, una struttura che punta sempre al primo elemento della lista. Circolare o non circolare: si dice circolare se il puntatore dell'ultimo elemento punta al primo invece di essere **nil**.

### Lista bidirezionale con sentinella

---

<b>: List</b>	
List pred %Predecessore	<b>boolean finished(Pos p)</b>
List succ %Successore	<b>return</b> (p = <b>this</b> )
Item value %Valore	Item read(Pos p)
List List()	<b>return</b> p.value
List t=new List	Item write(Pos p, Item v)
t.pred = t	p.value = v
t.succ = t	Pos insert(Pos p, Item v)
<b>return</b> t	List t = List()
<b>boolean isEmpty()</b>	t.value = v
<b>return</b> pred = succ = <b>this</b>	t.pred = p.pred
Pos head()	p.pred.succ = t
<b>return</b> succ	t.succ = p
Pos tail()	p.pred = t
<b>return</b> pred	<b>return</b> t
Pos next(Pos p)	Pos remove(Pos p)
<b>return</b> p.succ	p.pred.succ = p.succ
Pos prev(Pos p)	p.succ.pred = p.pred
<b>return</b> p.pred	List t = p.succ
	<b>delete</b> p
	<b>return</b> t

---

## 3.6 Pila

Una pila o stack è una struttura dati lineare e dinamica in cui l'elemento rimosso dall'operazione di cancellazione è determinato, ovvero quello che per meno tempo è rimasto nell'insieme (LIFO: last-in, first-out). Possibili implementazioni sono una lista bidirezionale con un puntatore all'elemento top o tramite vettore, con dimensione limitata ma overhead più basso.

### Specifica

---

**: Stack**

---

```
%Restituisce True se la pila è vuota
boolean isEmpty()
%Inserisce v in cima alla pila
push(Item v)
%Estrae l'elemento in cima alla pila e lo restituisce
Item pop()
%Legge l'elemento in cima alla pila
Item top()
```

---

### Lista basata su vettore

---

**: Stack**

---

<pre>Item [] A %Elementi <b>int n</b> %Cursore <b>int m</b> %Dimensione massima <b>Stack Stack(int dim)</b>     <b>Stack t = new Stack</b>     <b>t.A = new int [1...dim]</b>     <b>t.m = dim</b>     <b>t.n = 0</b>     <b>return t</b> <b>Item top()</b>     <b>precondition: <math>n &gt; 0</math></b>     <b>return A[n]</b></pre>	<pre><b>boolean isEmpty()</b>     <b>return n=0</b> <b>Item pop()</b>     <b>precondition: <math>n &gt; 0</math></b>     <b>Item t = A[n]</b>     <b>n = n - 1</b>     <b>return t</b> <b>push(Item v)</b>     <b>precondition: <math>n &lt; m</math></b>     <b>n = n + 1</b>     <b>A[n] = v</b></pre>
---	--

---

## 3.7 Coda

Una coda è una struttura dati lineare e dinamica in cui l'elemento rimosso dall'operazione di cancellazione è determinato, ovvero quello che per più tempo

è rimasto nell'insieme (FIFO: first-in, first-out, questo tipo di politica si dice fair). Si può implementare attraverso liste monodirezionali con il puntatore head per l'estrazione e il puntatore tail per l'inserimento o tramite array circolari, con dimensione limitata ma overhead più basso. Per i secondi la circolarità è ottenuta attraverso l'operazione modulo e si deve prestare attenzione ai problemi di overflow.

### Specifica

---

<b>: Queue</b>	
<i>%Restituisce True se la coda è vuota</i>	
<b>boolean isEmpty()</b>	
<i>%Inserisce v in fondo alla coda</i>	
<b>enqueue(Item v)</b>	
<i>%Estrae l'elemento in testa alla coda e lo restituisce</i>	
<b>Item dequeue()</b>	
<i>%Legge l'elemento in testa alla coda</i>	
<b>Item top()</b>	

---

### Coda basata su vettore circolare

---

<b>: Queue</b>	
<b>Item [] A</b> <i>%Elementi</i>	<b>boolean isEmpty()</b>
<b>int n</b> <i>%Dimensione attuale</i>	<b>return</b> n==0
<b>int testa</b> <i>%Testa</i>	<b>Item dequeue()</b>
<b>int m</b> <i>%Dimensione massima</i>	<b>precondition:</b> $n > 0$
<b>Queue Queue(int dim)</b>	<b>Item</b> t = A[testa]
<b>Queue</b> t = <b>new Queue</b>	testa = (testa + 1) mod m
t.A = <b>new int</b> [1...dim - 1]	n = n - 1
t.m = dim	<b>return</b> t
t.testa = 0	<b>enqueue(Item v)</b>
t.n = 0	<b>precondition:</b> $n < m$
<b>return</b> t	A[(testa + n) mod m] = v
<b>Item top()</b>	n = n + 1
<b>precondition:</b> $n > 0$	
<b>return</b> A[testa]	

---





# Capitolo 4

## Alberi

### 4.1 Alberi radicati

Un albero radicato può essere definito in due modi.

#### 4.1.1 Definizioni

##### **Definizione chiusa**

Un albero radicato consiste in una serie di nodi e un insieme di archi orientati che connettono coppie di nodi con le seguenti proprietà:

- Un nodo dell'albero è designato come radice.
- Ogni nodo  $n$ , a parte la radice ha esattamente un arco entrante.
- Esiste un cammino unico dalla radice ad ogni nodo.
- L'albero è connesso.

##### **Definizione ricorsiva**

Un albero radicato è dato da:

- Un insieme vuoto.
- Un nodo radice e zero o più sottoalberi ognuno dei quali è un albero, la radice è connessa alla radice di ogni sottoalbero con un arco orientato.

#### 4.1.2 Terminologia

- Il nodo senza archi entranti è detto radice (root).
- Per generare i sottoalberi (subtrees) da un albero si elimina la radice e tutti i suoi archi uscenti.

- Nodi con lo stesso genitore sono detti fratelli (siblings).
- Considerando un arco, il nodo da cui parte è detto genitore (parent) del nodo in cui arriva, detto figlio (child).
- I nodi senza archi uscenti sono detti foglie (leaves).
- I nodi nè foglie nè radice sono detti interni (internal nodes).
- La lunghezza del cammino semplice dalla radice ad un nodo, misurato nel numero di archi è detto profondità (depth) del nodo.
- I nodi alla stessa profondità formano un insieme chiamato livello (level).
- La profondità massima dell'albero si dice altezza (height).

## 4.2 Visite di alberi

La visita di un albero o ricerca è una strategia per visitare tutti i nodi di un albero. Il costo computazionale di una visita su un albero su  $n$  nodi è  $\Theta(n)$  in quanto ogni nodo viene visitato un'unica volta.

### 4.2.1 Visita in profondità

La visita in profondità o depth-first-search (dfs) si compie visitando ricorsivamente tutti i sottoalberi dell'albero, richiede uno stack ed esiste in tre varianti: pre, in e post order.

### 4.2.2 Visita in ampiezza

La visita in ampiezza o breadth-first-search (bfs) visita completamente ogni livello prima di passare al successivo partendo dalla radice. Richiede una queue.

## 4.3 Albero binario

Un albero binario è un albero radicato in cui ogni nodo ha al massimo due figli, indicati con figlio destro e sinistro. Due alberi binari differiscono anche se uno stesso nodo è designato come figlio sinistro invece che destro o viceversa.

### 4.3.1 Specifica

---

**: Tree**

---

```
%Costruisce un nuovo nodo contenente v senza figli o genitori
Tree(Item v)
%Legge il valore memorizzato nel nodo
Item read()
%Modifica il valore memorizzato nel nodo
write(Item v)
%Restituisce il padre o nil se è il nodo radice
Tree Parent()
%Restituisce il figlio sinistro (destro) di questo nodo o nil se assente
Tree left()
Tree right()
%Inserisce il sottoalbero radicato in t come figlio sinistro (destro) di
  questo nodo
insertLeft(Tree t)
insertRight(Tree t)
%Distrukge ricorsivamente il figlio sinistro (destro) di questo nodo
deleteLeft()
deleteRight()
```

---

### 4.3.2 Memorizzazione e implementazione

Ogni nodo deve memorizzare oltre al proprio valore la reference al nodo padre (parent), la reference ai figli sinistro (left) e destro (right).

#### Implementazione

---

**: Binary tree**

---

<pre>Tree(Item <i>v</i>)     Tree t = new Tree     t.parent = nil     t.left = t.right = nil     t.value = <i>v</i>     return t insertLeft(Tree <i>T</i>)     if <i>left</i> == nil then         T.parent = this         left = T insertRight(Tree <i>T</i>)     if <i>right</i> == nil then         T.parent = this         right = T</pre>	<pre>deleteLeft()     if <i>left</i> ≠ nil then         left.deleteLeft()         left.deleteRight()         left = nil deleteRight()     if <i>right</i> ≠ nil then         right.deleteLeft()         right.deleteRight()         right = nil</pre>
---	---

---

#### 4.4. ALBERI GENERICI

---

### 4.3.3 Visita in profondità

---

```
: dfs(Tree t)
  if t ≠ nil then
    %visita in pre-ordine
    print t
    dfs(t.left)
    %visita in in-ordine
    print t
    dfs(t.right)
    %visita in post-ordine
    print t
```

---

## 4.4 Alberi generici

### 4.4.1 Specifica

---

```
: Tree
  %Costruisce un nuovo nodo contenente v senza figli o genitori
  Tree(Item v)
  %Legge il valore memorizzato nel nodo
  Item read()
  %Modifica il valore memorizzato nel nodo
  write(Item v)
  %Restituisce il padre o nil se è il nodo radice
  Tree Parent()
  %Restituisce il primo figlio o nil se è un nodo foglia
  Tree leftmostchild()
  %Restituisce il prossimo fratello o nil se assente
  Tree rightSibling()
  %Inserisce il sottoalbero t come primo figlio di questo nodo
  insertChild(Tree t)
  %Inserisce il sottoalbero t come prossimo fratello di questo nodo
  insertSibling(Tree t)
  %Distrugge l'albero radicato nel primo figlio
  deleteChild()
  %Distrugge l'albero radicato nel prossimo fratello
  deleteSibling()
```

---

### Depth-first search

---

```
: dfs(Tree t)
  if t ≠ nil then
    %visita in pre-ordine
    print t
    Tree u = t.leftMostChild()
    while u ≠ nil do
      dfs(u)
      u = u.rightSibling()
    %visita in post-ordine
    print t
```

---

### Breadth-first search

---

```
: bfs (Tree t)
  Queue Q = Queue()
  Q.enqueue(t)
  while not Q.isEmpty() do
    Tree u = Q.dequeue()
    %Visita per livelli nodo u
    print u
    u = u.leftMostChild()
    while u ≠ nil do
      Q.enqueue(u)
      u = u.rightSibling()
```

---

#### 4.4.2 Memorizzazione

Esistono vari modi per salvare un albero, scelti in base al numero massimo e medio dei figli presenti.

##### Vettore dei figli

Nel nodo viene memorizzato il genitore e un vettore contenente i figli, che a seconda del loro numero può portare a uno spreco dello spazio.

### Primo figlio, prossimo fratello

---

<b>: Tree</b>	
Tree parent %Reference al padre	deleteChild()
Tree child %Reference al primo figlio	Tree newChild =
Tree sibling %Reference al prossimo fratello	child.rightSibling()
Item value %Valore memorizzato nel nodo	delete(child)
Tree(Item v)	child = newChild
Tree t = new Tree	deleteSibling()
t.value = v	Tree newBrother =
t.parent = t.child = t.sibling = nil	sibling.rightSibling()
return t	delete(sibling)
insertChild(Tree t)	sibling = newBrother
t.parent = self	delete(Tree t)
t.sibling = child	Tree u = t.leftMostChild()
child = t	while u ≠ nil do
insertSibling(Tree t)	Tree next = u.rightSibling()
t.parent = parent	delete(u)
t.sibling = sibling	u = next
sibling = t	

---

### Vettore dei padri

L'albero è rappresentato da un vettore i cui elementi contengono il valore associato al nodo e l'indice della posizione del padre nel vettore.

## Capitolo 5

# Alberi di ricerca

Si vuole portare la ricerca binaria negli alberi in modo da implementare un dizionario.

- Le associazioni chiave-valore vengono memorizzate in un albero binario.
- Ogni nodo  $u$  contiene la coppia  $u.key$  e  $u.value$ .
- Le chiavi devono appartenere ad un insieme totalmente ordinato.

Le chiavi contenute nel sottoalbero sinistro di  $u$  sono minori di  $u.key$  e quelle contenute nel sottoalbero destro maggiori. In questo modo è possibile realizzare un algoritmo di ricerca dicotomica.

### 5.1 Specifica

: Search Binary Tree	
Tree parent	remove(Item $k$ )
Tree left	%Ordinamento
Tree right	Tree successorNode(Tree $t$ )
Item value	Tree predecessorNode(Tree $t$ )
Item key	Tree min()
%Getters	Tree max()
Item key()	%Funzioni interne
Item value()	private: Tree lookupNode(Tree $t$ , Item $k$ )
Tree parent()	private: Tree insertNode(Tree $t$ , Item $k$ , Item $v$ )
Tree right()	private: Tree removeNode(Tree $t$ , Item $k$ )
Tree left()	
%Dizionario	
Item lookup(Item $k$ )	
insert(Item $k$ , Item $v$ )	

### 5.1. SPECIFICA

<b>:</b> Dictionary
Tree tree
Dictionary()
tree = <b>nil</b>

#### 5.1.1 Ricerca

La funzione *lookUpNode(Tree t, Item k)* restituisce il nodo dell'albero *t* che contiene la chiave *k* o **nil** se non presente.

#### Implementazione nel dizionario

<b>:</b> Item lookup(Item <i>k</i> )
Tree <i>t</i> = lookupNode( <i>tree</i> , <i>k</i> )
<b>if</b> <i>t</i> ≠ <b>nil</b> <b>then</b>
return <i>t</i> .value
<b>else</b>
return <b>nil</b>

#### Implementazione

Iterativa	Ricorsiva
<b>:</b> Tree lookupNode (Tree <i>t</i> , Item <i>k</i> )	<b>:</b> Tree lookupNode (Tree <i>t</i> , Item <i>k</i> )
Tree <i>u</i> = <i>t</i>	<b>if</b> <i>t</i> == <b>nil</b> or <i>t</i> .key == <i>k</i>
<b>while</b> <i>u</i> ≠ <b>nil</b> and <i>u</i> .key ≠ <i>k</i>	<b>then</b>
<b>do</b>	return <i>t</i>
<b>if</b> <i>k</i> < <i>u</i> .key <b>then</b>	<b>else if</b> <i>k</i> < <i>t</i> .key <b>then</b>
<i>u</i> = <i>u</i> .left	return
<b>else</b>	lookupNode( <i>t</i> .left, <i>k</i> )
<i>u</i> = <i>u</i> .right	<b>else</b>
return <i>u</i>	return
	lookupNode( <i>t</i> .right, <i>k</i> )

#### 5.1.2 Minimo e massimo

#### Implementazione



: Tree min (Tree t)	: Tree max (Tree t)
<pre> Tree u = t while u.left() ≠ nil do     u = u.left return u </pre>	<pre> Tree u = t while u.right ≠ nil do     u = u.right return u </pre>

### 5.1.3 Successore e predecessore

Si definisce successore di un nodo  $u$  il più piccolo nodo maggiore di  $u$ .

#### Implementazione

: successorNode(Tree t)	: predecessorNode(Tree t)
<pre> if t = nil then     return t if t.left ≠ nil then     return max(t.left) else     Tree p = t.parent()     while p ≠ nil and t =         p.left do             t = p             p = p.parent     return p </pre>	<pre> if t = nil then     return t if t.right() ≠ nil then     return min(t.right) else     Tree p = t.Parent     while p ≠ nil and t =         p.right do             t = p             p = p.Parent     return p </pre>

### 5.1.4 Inserimento

L'operazione *insertNode(Tree t, Item k, Item v)* inserisce un'associazione chiave-valore  $(k, v)$  nell'albero  $t$ . Se la chiave è già presente sostituisce il valore associato, altrimenti viene inserita una nuova associazione. Se  $T = \mathbf{nil}$  restituisce il primo nodo dell'albero, altrimenti restituisce  $t$  inalterato.

#### Implementazione dizionario

: insert(Item k, Item v)
<pre> tree = insertNode(tree, k, v) </pre>

### 5.1. SPECIFICA

---

#### Implementazione

---

```
: Tree insertNode(Tree t, Item k, Item v)
```

---

```
Tree p = nil
Tree u = t
while u ≠ nil and u.key ≠ k do
    p = u
    if k < u.key then
        u = u.left
    else
        u = u.right
if u ≠ nil and u.key == k then
    u.value = v
else
    Tree new = Tree(k, v)
    link(p, new, k)
    if p = nil then
        t = new
    return t
```

---

---

```
: link(Tree p, Tree u, Item k)
```

---

```
if u ≠ nil then
    u.parent = p
if p ≠ nil then
    if k < p.key then
        p.left = u
    else
        p.right = u
```

---

#### 5.1.5 Cancellazione

L'operazione *Tree removeNode(Tree t, Item k)* rimuove il nodo contenente la chiave *k* dall'albero *t* e restituisce la radice dell'albero possibilmente cambiata.

#### Implementazione dizionario

---

```
: remove(Item k)
```

---

```
tree = removeNode(tree, k)
```

---

**Implementazione**

---

```
: Tree removeNode(Tree T, Item k)
Tree t
Tree u = lookupNode(T, k)
if u ≠ nil then
    if u.left == nil and u.right == nil then
        link(u.parent, nil, k)
        delete u
    else if u.left ≠ nil and u.right ≠ nil then
        Tree s = successorNode()
        link(s.parent, s.right, s.key)
        u.key() = s.key()
        u.value() = s.value()
        delete s
    else if u.left ≠ nil and u.right == nil then
        link(u.parent, s.left, k)
        if u.parent = nil then
            T = u.left
    else
        link(u.parent, s.right, k)
        if u.parent = nil then
            T = u.right
return T
```

---

**Dimostrazione correttezza**

- Caso 1: Eliminare foglie non cambia l'ordine dei nodi rimanenti.
- Caso 2: Se  $u$  è il figlio destro (sinistro) di  $p$ , tutti i valori nel sottoalbero di  $f$  sono maggiori (minori) di  $p$ , pertanto  $f$  può essere attaccato come figlio destro (sinistro) di  $p$  al posto di  $u$ .
- Caso 3: il successore  $s$  è sicuramente  $\geq$  dei nodi del sottoalbero sinistro di  $u$  e sicuramente  $\leq$  dei nodi del sottoalbero destro di  $u$ , pertanto può essere sostituito a  $u$  e a quel punto si ricade nel caso 2.

**5.2 Costo computazionale**

Tutte le operazioni sono confinate ai nodi posizionati lungo un cammino semplice dalla radice ad una foglia, pertanto detta  $h$  altezza di un albero, avranno complessità  $O(h)$ . Il caso pessimo si ha nel caso in cui l'altezza  $h$  sia uguale a  $n$  ( $O(n)$ ), il caso ottimo quando  $h = \log n$  ( $O(\log n)$ ).

## 5.3 Alberi di ricerca bilanciati

Per mantenere un grado di complessità il più vicino possibile a  $O(\log n)$  si utilizzano tecniche di bilanciamento per tenere sotto controllo l'altezza di un albero. Si introduce un fattore di bilanciamento  $\beta(v)$ , ovvero la massima differenza di altezza fra i sottoalberi di  $v$ .

- Alberi AVL:  $\beta(v) \leq 1$  per ogni nodo  $v$ , bilanciamento ottenuto tramite rotazioni.
- B-Alberi:  $\beta(v) = 0$  per ogni nodo  $v$ , specializzati per strutture in memoria secondaria.
- Alberi 2-3:  $\beta(v) = 0$  per ogni nodo  $v$ , bilanciamento ottenuto tramite merge/split, grado variabile.

### Rotazioni

**Rotazione sinistra** Si prende un nodo di un albero, si fa diventare suo figlio destro il figlio sinistro del figlio destro, successivamente si pone il nodo iniziale come figlio sinistro del vecchio nodo destro e il vecchio genitore del nodo iniziale diventa il genitore del vecchio nodo destro.

**Rotazione destra** Si prende un nodo di un albero, si fa diventare suo figlio sinistro il figlio destro del suo figlio sinistro, successivamente si pone il nodo iniziale come figlio destro del vecchio nodo sinistro e il vecchio genitore del nodo iniziale diventa il genitore del vecchio nodo sinistro.

<hr/> : Tree rotateLeft(Tree x) <hr/>	<hr/> : Tree rotateRight(Tree x) <hr/>
Tree y $\leftarrow$ x.right Tree p $\leftarrow$ x.parent x.right $\leftarrow$ y.left <b>if</b> y.left $\neq$ nil <b>then</b>   y.left.parent $\leftarrow$ x y.left $\leftarrow$ x x.parent $\leftarrow$ y y.parent $\leftarrow$ p <b>if</b> p $\neq$ nil <b>then</b>   <b>if</b> p.left == x <b>then</b>   p.left $\leftarrow$ y   <b>else</b>   p.right $\leftarrow$ y <b>return</b> y <hr/>	Tree y $\leftarrow$ x.left Tree p $\leftarrow$ x.parent x.right $\leftarrow$ y.right <b>if</b> y.right $\neq$ nil <b>then</b>   y.right.parent $\leftarrow$ x y.right $\leftarrow$ x x.parent $\leftarrow$ y y.parent $\leftarrow$ p <b>if</b> p $\neq$ nil <b>then</b>   <b>if</b> p.left == x <b>then</b>   p.left $\leftarrow$ y   <b>else</b>   p.right $\leftarrow$ y <b>return</b> y <hr/>

### 5.3.1 Alberi red-black

Un albero red-black è un albero binario di ricerca in cui ogni nodo è colorato di rosso o nero, le chiavi vengono salvate solo nei nodi interni all'albero e le foglie sono costituiti da nodi speciali **Nil**. Un albero red-black è costruito in modo che rispetti questi vincoli:

- La radice è nera.
- Tutte le foglie sono nere.
- Entrambi i figli di un nodo rosso sono neri.
- Tutti i cammini semplici da un nodo  $u$  a una delle foglie contenute nel sottoalbero radicato in  $u$  hanno lo stesso numero di nodi neri.

#### Memorizzazione

<b>:</b> Tree
Tree parent;
Tree left;
Tree right;
<b>int</b> color;
Item key;
Item value;

I nodi **Nil** sono nodi sentinella il cui scopo è evitare di trattare diversamente i puntatori ai nodi dai puntatori **nil**. Al posto di un puntatore **nil** si utilizza un puntatore ad un nodo speciale **Nil**. Ne esiste solo uno per risparmiare memoria e un nodo con figli **Nil** corrisponde ad una foglia nell'albero binario di ricerca.

#### Altezza nera

L'altezza nera  $b(v)$  di un nodo  $v$  è il numero di nodi neri lungo ogni percorso da  $v$  escluso ad ogni foglia inclusa del sottoalbero. L'altezza nera di un albero red-black è pari all'altezza nera della sua radice. Quando esistono più colorazioni che rispettano i limiti possono esistere diverse altezze nere per lo stesso albero.

#### Inserimento

Quando si vuole inserire un nodo in un albero red-black si ricerca la posizione usando la stessa procedura per gli alberi di ricerca e si colora il nuovo nodo di rosso. Si possono pertanto violare dei vincoli in questo modo e si rende necessario aggiungere nella funzione *insertNode*(Tree  $T$ , Item  $k$ , Item  $v$ ) un processo di bilanciamento (eseguito successivamente alla chiamata della funzione *link*). Il principio generale per il bilanciamento consiste nel spostarsi verso l'alto lungo il percorso di inserimento, ripristinare il vincolo dei figli neri di un nodo rosso spostando le violazioni verso l'alto mantenendo l'altezza nera dell'albero e colorando la radice di nero alla fine. Queste operazioni sono necessarie unicamente quando due nodi consecutivi sono rossi.

***balanceInsert(Tree t)*** I nodi coinvolti sono il nodo inserito  $t$ , suo padre  $p$ , suo nonno  $n$  e suo zio  $z$ . E si possono verificare sette casi diversi in cui avviene una violazione.

- Caso 1: il nuovo nodo  $t$  non ha padre: è il primo nodo ad essere inserito o si è risaliti fino alla radice, si colora  $t$  di nero.
- Caso 2: il padre  $p$  di  $t$  è nero: non si viola nessun vincolo.
- Caso 3:  $t$  rosso,  $p$  rosso,  $z$  rosso: se  $z$  è rosso si possono colorare di nero  $p$ ,  $z$  e di rosso  $n$ . Poichè tutti i cammini che passano per  $z$  e  $p$  passano per  $n$  l'altezza nera non è cambiata. Il problema ora potrebbe sussistere sul nonno, si pone pertanto  $t = n$  e il ciclo continua.
- Caso 4a (4b):  $t$  rosso,  $p$  rosso,  $z$  nero: si assuma che  $t$  sia figlio destro (sinistro) di  $p$  e  $p$  figlio sinistro (destro) di  $n$ . Una rotazione a sinistra (destra) a partire dal nodo  $p$  scambia i ruoli di  $t$  e  $p$  ottenendo il caso 5a (5b) essendo entrambi i nodi coinvolti nel cambiamento rossi, l'altezza nera non cambia.
- Caso 5a (5b):  $t$  rosso,  $p$  rosso,  $z$  nero: si assuma che  $t$  sia figlio sinistro (destro) di  $p$  e  $p$  figlio sinistro (destro) di  $n$ . Una rotazione a destra su  $n$  porta ad una situazione in cui  $t$  e  $n$  sono figli di  $p$ . Colorando  $n$  di rosso e  $p$  di nero ci si ritrova in una situazione in cui tutti i vincoli sono rispettati.

---

**: balancedInsert(Tree t)**

---

```
t.color() ← RED
while t ≠ nil do
  Tree p ← t.parent %padre
  Tree n %nonno
  Tree z %zio
  if p ≠ nil then
    | n ← p.parent
  else
    | n ← nil
  if n == nil then
    | z ← nil
  else
    | if n.left == p then
    |   | z ← p.right
    | else
    |   | z ← p.left
  if p == nil then
    | %Caso 1
    | t.color ← BLACK
    | t ← nil
  else if p.color == BLACK then
    | %Caso 2
    | t ← nil
  else if z.color == RED then
    | %Caso 3
    | p.color ← z.color ← BLACK
    | n.color ← RED
    | t ← n
  else
    | if t == p.right and p == n.left then
    |   | %Caso 4a
    |   | rotateLeft(p)
    |   | t ← p
    | else if t == p.left and p == n.right then
    |   | %Caso 4b
    |   | rotateRight(p)
    |   | t ← p
    | else
    |   | if t == p.left and p == n.left then
    |   |   | %Caso 5a
    |   |   | rotateRight(n)
    |   | else if t == p.right and p == n.right then
    |   |   | %Caso 5b
    |   |   | rotateLeft(n)
    |   | p.color ← BLACK
    |   | n.color ← RED
    |   | t ← nil
```

**Complessità** La complessità totale per un inserimento è  $O(\log n)$ , con tre passaggi:  $O(\log n)$  per scendere fino al punto di inserimento,  $O(1)$  per effettuare l'inserimento e  $O(\log n)$  per risalire e sistemare le violazioni. È possibile implementare un inserimento top-down che aggiusta l'albero mano a mano che scende fino al punto di inserimento.

#### Altezza albero red-black

**Teorema** In un albero red-black un sottoalbero di radice  $u$  contiene almeno  $n \geq 2^{bh(u)} - 1$  nodi interni.

**Dimostrazione** Si dimostra per induzione sull'altezza (non sull'altezza nera).

- Caso base  $h = 0$ :  $u$  è una foglia **nil** e il sottoalbero con radice in  $u$  contiene  $n \geq 2^{bh(u)} - 1 = 2^0 - 1 = 0$  nodi interni.
- Passo induttivo  $h > 1$ : allora  $u$  è un nodo interno con due figli tali che ogni figlio  $v$  ha un'altezza nera  $bh(v)$  pari a  $bh(u)$  se rosso o a  $bh(u) - 1$  se nero. Per ipotesi induttiva ogni figlio ha almeno  $2^{bh(u)} - 1$  nodi interni. Pertanto il sottoalbero con radice in  $u$  ha almeno  $n \geq 2^{bh(u)-1} - 1 + 2^{bh(u)-1} - 1 + 1 = 2^{bh(u)-1} - 1$  nodi.

**Teorema** In un albero red-black almeno la metà dei nodi dalla radice ad una foglia deve essere nera.

**Dimostrazione** Per il secondo vincolo se un nodo è rosso, entrambi i suoi figli devono essere neri, pertanto la situazione in cui sono presenti il maggior numero di nodi rossi è il caso in cui rossi e neri sono alternati, dimostrando il teorema.

**Teorema** In un albero red-black nessun percorso da un nodo  $v$  ad una foglia è lungo più del doppio del percorso da  $v$  ad un'altra foglia.

**Dimostrazione** Per definizione ogni percorso da un nodo ad una qualsiasi foglia contiene lo stesso numero di nodi neri. Dal lemma precedente almeno la metà di questi nodi sono neri, pertanto al limite uno dei due percorsi è costituito da soli nodi neri mentre l'altro è costituito da nodi neri e rossi alternati.

**Teorema** L'altezza massima di un albero red-black contenente  $n$  nodi interni è al più  $2 \log(n + 1)$ .



**Dimostrazione**

$$\begin{aligned}n \geq 2^{bh(r)} - 1 &\Leftrightarrow n \geq 2^{\frac{h}{2}} - 1 \\&\Leftrightarrow n + 1 \geq 2^{\frac{h}{2}} \\&\Leftrightarrow \log n + 1 \geq \frac{h}{2} \\&\Leftrightarrow h \leq 2 \log(n + 1)\end{aligned}$$

**Cancellazione**

L'algoritmo di cancellazione per gli alberi red-black è costruito su quello di cancellazione per gli alberi generici. Dopo la cancellazione è necessario decidere se ribilanciare o meno. Le operazioni di ripristino sono necessarie solo dopo la cancellazione di un nodo nero in quanto se il nodo cancellato è rosso l'altezza nera rimane invariata, non sono creati nodi rossi consecutivi e la radice resta nera. Se il nodo cancellato è nero si possono rompere i vincoli uno, tre e quattro. L'algoritmo seguente ripristina i vincoli con rotazioni e cambiamenti di colore. Ci sono quattro casi possibili con i corrispettivi simmetrici.

**Complessità** La cancellazione è concettualmente complicata ma efficiente in quanto dal caso 1 si passa al 2, 3 o 4, dal caso 2 si passa agli altri risalendo l'albero, dal caso 3 si passa al caso 4 e al caso 4 termina. È possibile visitare un massimo di  $O(\log n)$  di casi, ognuno dei quali risolti in  $O(1)$ .

---

```
: balancedDelete(Tree T, Tree t)
while T ≠ t and t.color == BLACK do
    Tree p = t.parent %Padre
    if t == p.left then
        Tree f = p.right %Fratello
        Tree ns = f.left %Nipote sinistro
        Tree nd = f.right %Nipote destro
        if f.color == RED then
            %Caso 1a
            p.color = RED
            f.color = BLACK
            rotateLeft(p)
            %t viene lasciato inalterato,
            %pertanto si ricade nei casi 2,
            %3 o 4
        else
            if ns.color == nd.color ==
                BLACK then
                %Caso 2a
                f.color = RED
                t = p
            else if ns.color == RED and
                nd.color == BLACK then
                %Caso 3a
                ns.color = BLACK
                f.color = RED
                rotateRight(f)
                %t viene lasciato
                %inalterato, pertanto si
                %ricade nel caso 4
            else if nd.color == RED
                then
                %Caso 4a
                f.color = p.color()
                p.color = BLACK
                nd.color = BLACK
                rotateLeft(p)
                t = T
    else
        Tree f = p.left %Fratello
        Tree ns = f.left %Nipote sinistro
        Tree nd = f.right %Nipote destro
        if f.color == RED then
            %Caso 1b
            p.color = RED
            f.color = BLACK
            rotateRight(p)
            %t viene lasciato inalterato,
            %pertanto si ricade nei casi 2,
            %3 o 4
        else
            if ns.color == nd.color ==
                BLACK then
                %Caso 2b
                f.color = RED
                t = p
            else if nd.color == RED and
                ns.color == BLACK then
                %Caso 3b
                nd.color = BLACK
                f.color = RED
                rotateLeft(f)
                %t viene lasciato
                %inalterato, pertanto si
                %ricade nel caso 4
            else if ns.color == RED
                then
                %Caso 4a
                f.color = p.color()
                p.color = BLACK
                ns.color = BLACK
                rotateRight(p)
                t = T
```

---

## Capitolo 6

# Hashing

Le tabelle hash sono l'implementazione ideale per dizionari, insiemi dinamici di coppie chiave-valore indicizzati sulla chiave. Si sceglie una funzione hash  $H$  che mappa ogni chiave  $k \in \mathcal{U}$  in un intero  $H(k)$ . La coppia chiave-valore viene memorizzata in un vettore nella posizione  $H(k)$  che viene detto tabella hash.

### 6.0.1 Definizioni

- L'insieme delle possibili chiavi è rappresentato dall'insieme universo  $\mathcal{U}$  di dimensione  $u$ .
- Il vettore  $T[0 \dots m - 1]$  ha dimensione  $m$ .
- Una funzione hash è definita:  $H : \mathcal{U} \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}$ .
- Quando due o più chiavi nel dizionario hanno lo stesso valore di hash avviene una collisione, idealmente non dovrebbero avvenire.

#### Tabelle ad accesso diretto

Si utilizzano le tabelle ad accesso diretto nel caso particolare in cui  $\mathcal{U} \subset \mathbb{Z}^+$ . Si utilizza come funzione hash l'identità  $H(k) = k$  e  $m = |\mathcal{U}|$ . Presenta dei problemi quando  $u$  è molto grande e uno spreco di memoria quando  $u$  non è grande ma il numero di chiavi effettivamente registrate in memoria è molto minore di  $m$ .

#### Funzioni hash perfette

Una funzione hash si dice perfetta se è iniettiva, ovvero  $\forall k_1, k_2 \in \mathcal{U}, k_1 \neq k_2 \Rightarrow H(k_1) \neq H(k_2)$ . Ci sono dei problemi in quanto lo spazio delle chiavi è spesso grande, sparso e non conosciuto ed è pertanto spesso impraticabile ottenere una funzione di hash perfetta.

## 6.1 Funzioni hash

Se non è possibile eliminare le collisioni si cerca per lo meno di minimizzare il loro numero, cercando funzioni che distribuiscano le chiavi uniformemente negli indici  $[0, \dots, m-1]$  della tabella hash.

### Uniformità semplice

Sia  $P(k)$  la probabilità che una chiave sia inserita nella tabella. Sia  $Q(i)$  la probabilità che una chiave finisca nella cella  $i$ :  $Q(i) = \sum_{k \in \mathcal{U}: h(k)=i} P(k)$ . Una funzione hash gode dell'uniformità semplice se:  $\forall i \in [0, \dots, m-1] : Q(i) = \frac{1}{m}$ .

#### 6.1.1 Come realizzare una funzione hash

Per realizzare una funzione hash con uniformità semplice è necessario che la distribuzione  $P$  sia nota, cosa non completamente possibile nella realtà. Si utilizzano pertanto tecniche euristiche. Pertanto si assuma che ogni chiave può essere tradotta in numeri interi non negativi anche interpretando la loro rappresentazione in memoria come un numero. Si intenda pertanto con  $bin(k)$  la rappresentazione binaria della chiave.

### Estrazione

Si consideri  $m = 2^p$  e  $H(k) = int(b)$ , dove  $b$  è un sottoinsieme di  $p$  bit presi da  $bin(k)$ . Presenta dei problemi in quanto selezionare bit presi dal suffisso della chiave può generare collisioni con alta probabilità (o anche in generale).

### XOR

Si consideri  $m = 2^p$  e  $H(k) = int(b)$  dove  $b$  è dato dalla somma modulo 2 effettuata bit a bit di sottoinsiemi di  $p$  bit di  $bin(k)$ . Presenta dei problemi in quanto le permutazioni possono generare lo stesso valore di hash.

### Metodo della divisione

Si consideri  $m$  numero dispari, meglio se primo.  $H(k) = int(k) \bmod m$ . Non vanno bene  $m = 2^p$  in quanto considera unicamente i  $p$  bit meno significativi e  $m = 2^p - 1$  in quanto permutazioni con set di elementi con dimensione  $2^p$  hanno lo stesso valore di hash. Si devono pertanto scegliere numeri primi distanti da potenza di 2 e 10.

### Metodo della moltiplicazione

Si consideri un  $m$  qualsiasi, meglio se potenza di 2,  $C \in ]0; 1[$  una costante reale e  $i = int(k)$ .  $H(k) = \lfloor m(C \cdot i - \lfloor C \cdot i \rfloor) \rfloor$ .

**Implementazione** Si scelga un valore  $m = 2^p$ , sia  $w$  la dimensione della parola in memoria:  $i, m \leq 2^w$ . Sia  $s = \lfloor C \cdot 2^w \rfloor$ .  $i \cdot s$  può essere riscritto come  $r_1 \cdot 2^w + r_0$ , dove  $r_1$  contiene la parte intera di  $iC$  e  $r_0$  la parte frazionaria. Si restituiscando i  $p$  bit più significativi di  $r_0$ .

### Reality check

Il metodo della moltiplicazione non fornisce hashing uniforme. Esistono test per valutare la bontà di una funzione hash: Avalanche effect che se si cambia un bit nella chiave, deve cambiare almeno la metà dei bit del valore hash e test statistici con il chi-quadro. Si devono implementare inoltre funzioni hash crittografiche.

## 6.2 Le collisioni

Per gestire le collisioni si rende necessario trovare posizioni alternative per le chiavi e se la chiave non si trova nella posizione attesa la si deve cercare nelle posizioni alternative. Questa ricerca deve essere  $O(1)$  nel caso medio e  $O(n)$  nel caso pessimo. Presentano problemi in quanto sono strutture dati complesse vista la presenza di liste e puntatori.

### 6.2.1 Liste o vettori di trabocco (Concatenamento o chaining)

Le chiavi con lo stesso valore di hash vengono memorizzate in una lista monodirezionale o vettore dinamico. Si memorizza un puntatore alla testa della lista nello slot  $H(k)$ -esimo della tabella hash. Le operazioni sono di inserimento in testa *insert*, di ricerca *lookup* o rimozione *remove* che implicano una scansione della tabella per cercare la chiave.

### Analisi complessità

Si considerino i seguenti valori:

$n$	Numero di chiavi memorizzate nella tabella hash
$m$	Capacità della tabella hash
$\alpha = \frac{n}{m}$	fattore di carico
$I(\alpha)$	Ricerca con insuccesso o numero medio di accessi alla tabella per una chiave non presente
$S(\alpha)$	Ricerca con successo o numero medio di accessi alla tabella per una chiave presente

**Caso pessimo** Tutte le chiavi sono collocate in un'unica lista: *insert*  $\Theta(1)$ , *lookup()*, *remove()*  $\Theta(n)$ .

**Analisi del caso medio** Il caso medio dipende dalla distribuzione delle chiavi, si assuma pertanto hashing uniforme semplice e costo di calcolo della funzione di hashing  $\Theta(1)$ . Il valore atteso della lunghezza della lista è di  $\alpha = \frac{n}{m}$ . Una ricerca senza successo visita tutte le chiavi nella lista corrispondente, pertanto ha costo atteso  $\Theta(1) + \alpha$ , mentre una ricerca con successo visita in media la metà delle chiavi nella lista corrispondente, pertanto  $\Theta(1) + \frac{\alpha}{2}$ . Il fattore di carico influenza il costo computazionale delle operazioni sulla tabella hash e se  $n = O(m)$ ,  $\alpha = O(1)$ , pertanto tutte le operazioni sono  $O(1)$ .

### 6.2.2 Indirizzamento aperto

Nell'indirizzamento aperto tutte le chiavi vengono memorizzate nella tabella stessa e ogni slot contiene una chiave oppure un valore **nil**. Nell'inserimento se uno slot è utilizzato se ne cerca uno alternativo. Nella ricerca si cerca nello slot prescelto e poi negli slot alternativi fino a che si trova la chiave oppure un nodo **nil**.

#### Definizioni

- Un'ispezione è l'esame di uno slot durante la ricerca.
- La funzione di hash viene estesa:  $H : \mathcal{U} \times [0, \dots, m-1] \rightarrow [0, \dots, m-1]$ , dove il secondo insieme del dominio rappresenta il numero di ispezione mentre il codominio l'indice del vettore.
- Sequenza di ispezione: una sequenza di ispezione  $[H(k, 0), H(k, 1), \dots, H(k, m-1)]$  è una permutazione degli indici corrispondente all'ordine in cui vengono visitati gli slot. Non si vogliono visitare gli slot più di una volta e potrebbe rendersi necessario visitare tutti gli slot della tabella.

**Fattore di carico** Il fattore di carico è compreso tra 0 e 1 e la tabella può andare in overflow.

#### Tecniche di ispezione

**Hashing uniforme** La situazione ideale prende il nome di hashing uniforme, in cui ogni chiave ha la stessa probabilità di avere come sequenza di ispezione una delle qualisiasi  $m!$  permutazioni degli indici.

**Ispezione lineare** La funzione di  $H(k, i) = (H_1(k) + h \cdot i) \bmod n$ . La sequenza di ispezione è determinata dal primo elemento. Al massimo  $m$  sequenze di ispezione diverse sono possibili.

**Agglomerazione primaria** Causa lunghe sotto-sequenze occupate che tendono a diventare più lunghe: uno slot vuoto preceduto da  $i$  slot pieni viene riempito con probabilità  $\frac{i+1}{m}$ . I tempi medi di inserimento e cancellazione crescono.

**Ispezione quadratica** La funzione di  $H(k, i) = (H_1(k) + h \cdot i^2) \bmod n$ . Dopo il primo elemento  $H_1(k, 0)$ , le ispezioni successive hanno un offset che dipende da una funzione quadratica nel numero di ispezione  $i$ . La sequenza risultante non è una permutazione, al massimo  $m$  sequenze di ispezioni distinte sono possibili.

**Agglomerazione secondaria** Se due chiavi hanno la stessa ispezione iniziale le loro sequenze sono identiche.

**Doppio hashing** Funzione:  $H(k, i) = (H_1(k) + iH_2(k)) \bmod n$ . Esistono pertanto due funzioni ausiliare,  $H_1$  fornisce la prima ispezione,  $H_2$  fornisce l'offset rispetto alla prima ispezione. Sono possibili al massimo  $m^2$  sequenze di ispezione. Per garantire una permutazione completa  $H_2(k)$  e  $m$  devono essere primi tra loro. Pertanto se si sceglie  $m = 2^p$   $H_2(k)$  deve restituire numeri dispari. Se si sceglie  $m$  primo,  $H_2(k)$  deve restituire numeri minori di  $m$ .

### Cancellazione

Non si possono sostituire le chiavi da eliminare con **nil** in quanto potrebbe introdurre errori nella ricerca che terminerebbe troppo presto. Si utilizza pertanto un valore speciale **deleted** che vengono trattati come slot vuoti dall'inserimento e come slot pieni dalla ricerca. Il tempo di ricerca non dipende più da  $\alpha$  ma il concatenamento diventa più comune.

Implementazione dell'hashing doppio

---

```
: Hash
Item [] K %Tabella delle chiavi
Item [] V %Tabella dei valori
int m %Dimensione della tabella
Hash Hash(int dim)
    Hash t = new Hash
    t.m = dim
    t.K = new Item [0, ..., dim - 1] t.V = new Item [0, ..., dim - 1]
    for i = 0 to dim-1 do
        t.K[i] = nil
    return t
int scan(Item k, boolean insert)
    int c = m
    int i = 0
    int j = H(k)
    while K[j] ≠ k and K[j] ≠ nil and i < m do
        if K[j] == deleted and c == m then
            c = j
            j = (j + H'(k)) mod n
            i += 1
        if insert and K[j] ≠ k and c < m then
            j = c
    return j
Item lookup(Item k)
    int i = scan(k, false)
    if K[i] == k then
        return V[i]
    else
        return nil
insert(Item k, Item v)
    int i = scan(k, true)
    if K[i] == nil or K[i] == deleted or K[i] == k then
        K[i] = k
        V[i] = v
    else
        %Errore, tabella hash piena
remove(Item k)
    int i = scan(k, false)
    if K[i] == k then
        K[i] = deleted
```

---



### 6.3 Complessità

Metodo	$\alpha$	$I(\alpha)$	$S(\alpha)$
Lineare	$0 \leq \alpha < 1$	$\frac{(1-\alpha)^2 + 1}{2(1-\alpha)^2}$	$\frac{1 - \frac{\alpha}{2}}{1 - \alpha}$
Hashing doppio	$0 \leq \alpha < 1$	$\frac{1}{1 - \alpha}$	$-\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \alpha)$
Liste di trabocco	$\alpha \geq 0$	$1 + \alpha$	$1 + \frac{\alpha}{2}$

Si noti come la complessità aumenti con l'aumentare di  $\alpha$ . Pertanto sopra una soglia prefissata  $t_\alpha$ , solitamente tra 0.5 e 0.75 si alloca una nuova dimensione  $2m$  e si reinseriscono tutte le chiavi presenti nella tabella. Si dimezza pertanto il fattore di carico e si eliminano tutti gli elementi **deleted**. Nel caso pessimo c'è un costo di  $O(m)$  per la ristrutturazione nel caso pessimo con costo ammortizzato costante.





## Capitolo 7

# Insiemi e dizionari

### 7.1 Insiemi

#### 7.1.1 Insiemi realizzati con vettori booleani

##### Implementazione

---

: Set (vettore booleano)

---

```
boolean [] V
int size
int dim
Set Set(int m)
    Set t = new Set
    t.size = 0
    t.dim = m
    t.V = [false] * m
    return t
boolean contains(int x)
    if 1 ≤ x ≤ dim then
        return V[x]
    else
        return false
int size()
    return size
insert(int x)
    if 1 ≤ x ≤ dim then
        if not V[x] then
            size += 1
            V[x] = true
remove(int x)
    if 1 ≤ x ≤ dim then
        if V[x] then
            size -= 1
            V[x] = false
```

```
Set union(Set A, Set B)
    Set C = Set(max(A.dim, B.dim))
    for i = 1 to A.dim do
        if A.contains(i) then
            C.insert(i)
    for i = 1 to B.dim do
        if B.contains(i) then
            C.insert(i)
    return C
Set intersection(Set A, Set B)
    Set C = Set(min(A.dim, B.dim))
    for i = 1 to min(A.dim, B.dim) do
        if A.contains(i) and
           B.contains(i) then
            C.insert(i)
    return C
Set difference(Set A, Set B)
    Set C = Set(A.dim)
    for i = 1 to A.dim do
        if A.contains(i) and not
           B.contains(i) then
            C.insert(i)
    return C
```

### Caratteristiche

Gli insiemi possono essere memorizzati come un vettore di  $m$  elementi, se si vogliono salvare gli interi da 1 a  $m$ . Questo tipo di implementazione è molto semplice ed è efficiente verificare se un elemento appartiene ad un insieme. Come svantaggi presenta lo spreco di memoria, in quanto la memoria occupata è sempre  $O(m)$  indipendentemente dagli elementi salvati. E alcune operazioni sono inefficienti in  $O(m)$ .

### 7.1.2 Insiemi realizzati con liste

#### Liste non ordinate

Operazioni di ricerca, inserimento e cancellazione  $O(n)$ , operazioni di inserimento assumendo assenza  $O(1)$ . Operazioni di unione intersezione, differenza  $O(nm)$ .

---

```

: Set difference(Set A, Set B)
Set C = Set()
foreach  $s \in A$  do
    if not B.contains( $s$ ) then
        C.insert( $s$ )
    return C

```

---

#### Liste ordinate

Ricerca  $O(n)$  per liste e  $O(\log n)$  per i vettori, inserimento e cancellazione  $O(n)$ , unione, intersezione e differenza  $O(n)$ .

---

```

: List intersection(List A, List B)
List C = List()
Pos p = A.head()
Pos q = B.head()
while not A.finished( $p$ ) and not B.finished( $q$ ) do
    if A.read( $p$ ) = B.read( $q$ ) then
        C.insert(C.tail(), A.read( $p$ ))
        p = A.next( $p$ )
        q = B.next( $q$ )
    else if A.read( $p$ ) < B.read( $q$ ) then
        p = A.next( $p$ )
    else
        q = B.next( $q$ )
return C

```

---

### 7.1.3 Strutture dati complesse

#### Alberi bilanciati

Si ottengono insiemi con ordinamento, con ricerca, inserimento, cancellazione  $O(\log n)$ , iterazione  $O(n)$ .

#### Tabelle hash

Si ottengono insiemi senza ordinamento, con ricerca, inserimento, cancellazione  $O(1)$ , iterazione  $O(m)$ .

## 7.2 Bloom filters

I bloom filters sono una via di mezzo tra gli insiemi realizzati con i vettori booleani e le tabelle hash, sono una struttura dati dinamica con bassa occupazione di memoria che non offre la possibilità di cancellazioni, nessuna memorizzazione e dà risposte probabilistiche.

### 7.2.1 Specifica

L'operazione di *insert*( $x$ ) inserisce l'elemento  $x$  nel bloom filter. *booleans contains*( $x$ ) se restituisce **false** l'elemento non sicuramente è presente, ma è possibile che ci siano dei falsi positivi. Si deve fare un trade-off tra occupazione di memoria e probabilità di un falso positivo. Indicata con  $\varepsilon$  la probabilità di un falso positivo, i bloom filters richiedono  $1.44 \log_2(\frac{1}{\varepsilon})$  bit per elemento inserito.

### 7.2.2 Applicazioni

In chrome vengono utilizzati per indicare i siti con possibile malware, o in generale vengono utilizzati quando una verifica locale permette di evitare operazioni di I/O più costose. I falsi positivi inoltre possono essere utilizzati per mascherare un messaggio e garantire così un certo livello di privacy.

### 7.2.3 Implementazione

Vengono implementati attraverso un vettore booleano  $A$  di  $m$  bit inizializzato a **false** e  $k$  funzioni di hash  $H_1, \dots, H_k : U \rightarrow [0, \dots, m-1]$ .

<b>: insert(<math>x</math>)</b>	<b>: boolean contains(<math>x</math>)</b>
<b>for</b> $i = 1$ <b>to</b> $k$ <b>do</b> $A[H_i(x)] = \mathbf{true}$	<b>for</b> $i = 1$ <b>to</b> $k$ <b>do</b> <b>if</b> $A[H_i(x)] == \mathbf{false}$ <b>then</b> <b>return</b> $\mathbf{false}$ <b>return true</b>

### 7.2.4 Caratterizzazione matematica

Dati  $n$  oggetti,  $m$  bit e  $k$  funzioni hash, la probabilità di un falso positivo è:

$$\varepsilon = (1 - e^{-k \frac{n}{m}})^k$$

Dati  $n$  oggetti e  $m$  bit il valore ottimale per  $k$  è:

$$k = \frac{m}{n} \ln 2$$

Dati  $n$  oggetti e una probabilità di falsi positivi  $\varepsilon$  il numero di bit  $m$  richiesti è pari a:

$$m = \frac{n \ln \varepsilon}{(\ln 2)^2}$$





# Capitolo 8

## Grafi

### 8.0.1 Definizioni

**Grafo orientato** Si dice grafo orientato la coppia  $G = (V, E)$ , dove  $V$  è l'insieme di nodi o vertici ed  $E$  è l'insieme di coppie ordinate  $(u, v)$  di nodi dette anche archi.

**Grafo non orientato** Si dice grafo non orientato la coppia  $G = (V, E)$ , dove  $V$  è l'insieme di nodi o vertici ed  $E$  è l'insieme di coppie non ordinate  $(u, v)$  di nodi dette anche archi.

- Un vertice  $v$  è detto adiacente a  $u$  se esiste un arco  $(v, u)$ .
- Un arco  $(v, u)$  è detto incidente a  $v$  e  $u$ .
- In un grafo non orientato la relazione di adiacenza è simmetrica.
- $n = |V|$  numero di nodi.
- $m = |E|$  numero di archi.
- In un grafo non orientato  $m \leq \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$ .
- In un grafo orientato  $m \leq n^2 - n = O(n^2)$ .
- La complessità di algoritmi sui grafi deve essere espressa sia in termini di  $n$  che di  $m$ .
- Un grafo con un arco tra tutte le coppie di nodi è detto completo.
- Un grafo si dice sparso se ha "pochi archi", ovvero con  $m = O(n)$  o  $m = O(n \log n)$ .
- Un grafo si dice denso se ha "molti archi", ovvero con  $m = \Omega(n^2)$ .
- Un albero libero è un grafo connesso con  $m = n - 1$ .

- 
- Un albero radicato è un albero libero sul quale è stata scelta una radice.
  - Un insieme di alberi è un grafo detto foresta.
  - Il grado di un nodo è il numero di archi incidenti su di esso.
  - Nei grafi orientati si divide il grado in grado entrante per gli archi che incidono su di esso e in grado uscente per gli archi che incidono da esso.
  - Si dice cammino  $C$  di lunghezza  $k$  in un grafo  $G = (V, E)$  una sequenza di nodi  $u_0, \dots, u_k$  tali che  $(u_i, u_{i+1}) \in E$  per  $0 \leq i \leq k-1$ .
  - Si dice semplice un cammino i cui nodi sono tutti distinti.
  - Si dice peso di un arco un valore associato all'arco dato da una funzione di peso  $w : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ .
  - Un nodo  $v$  si dice raggiungibile da un nodo  $u$  se esiste almeno un cammino da  $u$  a  $v$ .
  - Un grafo non orientato  $G = (V, E)$  è connesso se e solo se ogni suo nodo è raggiungibile da ogni altro nodo.
  - $G'$  è detto sottografo di  $G$   $G' \subseteq G$  se e solo se  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$ .
  - $G'$  è sottografo massimale di  $G$  se e solo se non esiste un altro sottografo  $G''$  tale che  $G''$  è connesso e più grande di  $G'$ .
  - Un grafo  $G' = (V', E')$  è una componente connessa di  $G$  se e solo se è un sottografo connesso e massimale di  $G$ .
  - In un grafo non orientato  $G = (V, E)$  un ciclo  $C$  di lunghezza  $k > 2$  è una sequenza di nodi  $u_0, \dots, u_k$  tale che  $(u_i, u_{i+1}) \in E$  per ogni  $0 \leq i \leq k-1$  e  $u_0 = u_k$ . Un ciclo è detto semplice se tutti i suoi nodi sono distinti.
  - Un grafo è detto aciclico se non contiene cicli. Se orientato è detto DAG (directed acyclic graph).
  - Dato un DAG, un suo ordinamento topologico è un ordinamento lineare dei suoi nodi tale che se  $(u, v) \in E$ , allora  $u$  appare prima di  $v$  nell'ordinamento.
  - Un grafo orientato  $G = (V, E)$  si dice fortemente connesso se e solo se ogni suo nodo è raggiungibile da ogni altro suo nodo.
  - Un grafo  $G' = (V', E')$  è una componente fortemente connessa di  $G$  se e solo se è un sottografo connesso e massimale di  $G$ .

## 8.0.2 Specifica

In alcuni casi il grafo è dinamico ma sono possibili solo inserimenti e non è necessaria la parte di eliminazione (grafo caricato all'inizio).

---

**: Graph**

---

```
Graph() %Crea un nuovo grafo
Set V() %Restituisce l'insieme di tutti i nodi
int size() %Restituisce il numero di nodi
Set adj(Node u) %Restituisce i nodi adiacenti al nodo u
insertNode(Node u) %Inserisce il nodo u nel grafo
insertEdge(Node u, Node v) %Inserisce l'arco tra u e v nel grafo
deleteNode(Node u) %Elimina il nodo u dal grafo
deleteEdge(Node u, Node v) %Elimina l'arco tra i nodi u e v dal
    grafo
```

---

## 8.1 Memorizzare grafi

### 8.1.1 Matrice di adiacenza

Le matrici di adiacenza sono ideali per i grafi densi. Un grafo orientato viene salvato in una matrice di dimensione  $n \times n$  bit tale che:

$$m_{uv} = \begin{cases} 1 & (u, v) \in E \\ 0 & (u, v) \notin E \end{cases}$$

Per il grafo non orientato basta salvare la matrice sopra la diagonale principale esclusa in modo da occupare solamente  $\frac{n(n-1)}{2}$  bit.

**Grafi pesati** Per i grafi pesati la matrice di booleani diventa una matrice di reali tale che:

$$m_{uv} = \begin{cases} peso & (u, v) \in E \\ +\infty & (u, v) \notin E \end{cases}$$

#### Analisi complessità

- Spazio richiesto  $O(n^2)$ .
- Verificare se  $u$  è adiacente a  $v$  richiede  $O(1)$ .
- Iterare su tutti gli archi richiede  $O(n^2)$

### 8.1.2 Liste di adiacenza

Le liste di adiacenza sono ideali per i grafi sparsi. Viene creato un vettore di dimensione  $n$  tale che in posizione  $u$  si trovi un insieme tale che contenga gli adiacenti. Occupa  $an + bm$  bit. Dove  $a$  è la dimensione del puntatore al nodo adiacente e  $b$  è la dimensione dell'adiacente. Per il grafo non orientato viene salvato anche l'arco inverso e occupa  $an + 2bm$ .

## 8.2. VISITE DEI GRAFI

---

**Grafi pesati** Gli elementi della lista puntata sono coppie nodo di arrivo-peso.

### Analisi complessità

- Spazio richiesto  $O(n + m)$ .
- Verificare se  $u$  è adiacente a  $v$  richiede  $O(n)$ .
- Iterare su tutti gli archi richiede  $O(n + m)$

### 8.1.3 Iterazioni su nodi e archi

<hr/>	<hr/>
: Iterazione su tutti i nodi del grafo	: Iterazione su tutti i nodi e archi del grafo
<hr/>	<hr/>
<b>foreach</b> $u \in G.V()$ <b>do</b> Esegui operazioni sul nodo $u$	<b>foreach</b> $u \in G.V()$ <b>do</b> Esegui operazioni sul nodo $u$ ; <b>foreach</b> $v \in G.adj(u)$ <b>do</b> Esegui operazioni sull'arco $(u, v)$
<hr/>	<hr/>

## 8.2 Visite dei grafi

Dato un grafo  $G = (V, E)$  e  $r \in V$  radice o sorgente si intende per visita visitare una e una sola volta tutti i nodi che possono essere raggiunti da  $r$ .

<hr/>
: graphTraversal(Graph $G$ , Node $r$ )
<hr/>
Set $S = \text{Set}()$ %Insieme generico S.insert( $r$ ) %Da specificare {Marca il nodo $r$ } <b>while</b> $S.size() > 0$ <b>do</b> Node $u = S.remove()$ %Da specificare {Visita il nodo $u$ } <b>foreach</b> $v \in G.adj(u)$ <b>do</b> {Visita l'arco $(u, v)$ } <b>if</b> $v$ non è stato marcato <b>then</b> Marca il nodo $v$ S.insert( $v$ ) %Da specificare
<hr/>

### 8.2.1 Visita in ampiezza o breadth-first search

In questo tipo di visita si visitano i nodi per livelli crescenti a partire dalla sorgente. Gli obiettivi di questa visita sono di visitare i nodi a distanza  $k$  prima dei nodi a distanza  $k + 1$ , calcolare il cammino più breve da  $r$  a tutti gli altri nodi (distanze misurate come numero di archi attraversati). Generare un albero breadth-first contenente tutti i nodi raggiungibili da  $r$  tale per cui il cammino dalla radice  $r$  al nodo  $u$  nell'albero corrisponde al cammino più breve nel grafo.

---

```
: bfs(Graph  $G$ , Node  $r$ )
  Queue  $Q$  = Queue()
   $Q.enqueue(r)$ 
  boolean [] visited = new boolean [ $G.size()$ ]
  foreach  $u \in G.V() - \{r\}$  do
    | visited[ $u$ ] = false
  visited[ $r$ ] = true
  while not  $Q.empty()$  do
    | Node  $u$  =  $Q.dequeue()$ 
    | {Visita il nodo  $u$ }
    | foreach  $v \in G.adj(u)$  do
    | | {Visita l'arco ( $u, v$ )}
    | | if not visited[ $v$ ] then
    | | | visited[ $v$ ] = true
    | | |  $Q.enqueue(v)$ 
```

---

### Calcolo dei cammini più brevi o del numero di Erdős

L'algoritmo di erdos oltre a determinare la lunghezza del cammino più breve genera l'arco di copertura bfs che contiene tali cammini.

## 8.2. VISITE DEI GRAFI

---

---

```
: erdos(Graph G, Node r, int [] erdos, Node [] parents)
```

---

```
    Queue Q = Queue()
    Q.enqueue(r)
    foreach u ∈ G.V() - {r} do
        | erdos[u] = ∞
    erdos[r] = 0
    parents[r] = nil
    while not Q.empty() do
        | Node u = Q.dequeue()
        | {Visita il nodo u}
        | foreach v ∈ G.adj(u) do
            | if erdos[v] = ∞ then
                | | erdos[v] = erdos[u] + 1
                | | parents[v] = u
                | | Q.enqueue(v)
```

---

---

```
: printPath(Node r, Node s, Node [] parents)
```

---

```
    if r = s then
        | print s
    else if parents[s] == nil then
        | print "error"
    else
        | printPath(r, parents[s], parents)
        | print s
```

---

### Complessità

La complessità di una bfs è  $O(m + n)$  in quanto ognuno degli  $n$  nodi viene salvato nella coda al più una volta. Ogni volta che un nodo viene estratto tutti i suoi archi vengono analizzati una sola volta. Il numero di archi analizzati è pertanto  $m = \sum_{u \in V} out_d(u)$ , dove  $out_d(u)$  è l'out-degree del nodo  $u$ .

### 8.2.2 Visita in profondità o depth-first search

La visita in profondità è una visita ricorsiva: per ogni nodo adiacente si visita ricorsivamente tale nodo, visitando ricorsivamente i suoi adiacenti e così via. Questo tipo di ricerca è spesso una subroutine in altri problemi, visita tutto il grafo, nono solo i nodi raggiungibili dalla radice e genera pertanto una foresta formata da una collezione di alberi depth-first. Si realizza attraverso uno stack che viene reso implicito attraverso la ricorsione.

**Implementazione ricorsiva**

---

```
: dfs(Graph G, Node u, boolean [] visited)
visited[u] = true
{visita il nodo u in pre-order}
foreach v ∈ G.adj(u) do
    if not visited[v] then
        {Visita l'arco (u,v)}
        dfs(G, v, visited)
{visita il nodo u in post-order}
```

---

**Implementazione iterativa**

Una dfs ricorsiva in casi di grafi molto profondi può superare la dimensione dello stack del linguaggio, si rende pertanto esplicito lo stack utilizzando una versione iterativa. Un nodo può essere inserito nella pila più volte in quanto il controllo viene fatto all'estrazione. Ha complessità  $O(m+n)$  con  $O(m)$  visite degli archi,  $O(m)$  estrazioni e inserimenti e  $O(n)$  visite dei nodi. Per la visita in post order quando un nodo viene scoperto viene inserito nello stack con il tag *discovery*, quando viene estratto un nodo con il tag *discovery* viene re-inserito con il tag *finish* e vengono inseriti tutti i suoi vicini. Quando viene estratto un nodo con il tag *finish* viene fatta la post-visita.

---

```
: dfs(Graph G, Node r)
Stack S = Stack()
S.push(r)
boolean [] visited = new boolean [G.size()]
foreach u ∈ G.V() do
    visited[u] = false
while not S.empty() do
    Node u = S.pop()
    if not visited[u] then
        {Visita il nodo u in pre-order}
        visited[u] = true
        foreach v ∈ G.adj(u) do
            {Visita l'arco (u,v)}
            S.push(v)
```

---

**Componenti connesse**

Ci si pone il problema di verificare se il grafo è connesso e se non lo è di identificare le sue componenti connesse. Un grafo risulta connesso se al termine della dfs tutti i suoi nodi sono marcati, altrimenti la visita deve ricominciare da capo da un nodo non marcato identificando una nuova componente del grafo. L'appartenenza ad una componente connessa viene identificata attraverso un vettore  $id[]$  tale per cui  $id[u]$  è l'identificatore della componente connessa di appartenenza.

<pre><b>: int [] cc(Graph G)</b> <b>int [] id = new int [G.size()]</b> <b>foreach</b> <math>u \in G.V()</math> <b>do</b>   <math>id[u] = 0</math> <b>int counter = 0</b> <b>foreach</b> <math>u \in G.V()</math> <b>do</b>   <b>if</b> <math>id[u] == 0</math> <b>then</b>     <math>counter += 1</math>     <math>ccdfs(G, counter, u,</math>       <math>id)</math> <b>return id</b></pre>	<pre><b>: int [] ccdfs(Graph G, int</b> <b>counter, Node u, int [] id)</b> <math>id[u] = counter</math> <b>foreach</b> <math>v \in G.adj(u)</math> <b>do</b>   <b>if</b> <math>id[v] == 0</math> <b>then</b>     <math>ccdfs(G, counter, v,</math>       <math>id)</math></pre>
--	---

**Grafo non orientato aciclico**

<pre><b>: boolean [] hasCycleRec(Graph G, Node u, Node p, boolean []</b> <b>visited)</b> <math>visited[u] = \mathbf{true}</math> <b>foreach</b> <math>v \in G.adj(u) - \{p\}</math> <b>do</b>   <b>if</b> <math>visited[v]</math> <b>then</b>     <b>return true</b>   <b>else if</b> <math>hasCycleRec(G, v, u, visited)</math> <b>then</b>     <b>return true</b> <b>return false</b></pre>
---



---

```

: boolean [] hasCycle(Graph G)
  boolean [] visited = new boolean [G.size()]
  foreach u ∈ G.V() do
    | visited[u] = false
  foreach u ∈ G.V() do
    | if not visited[u] then
      | | if hasCycleRec(G, u, nil, visited) then
      | | | return true
  return false

```

---

### Grafo orientato aciclico

**Classificazione degli archi** Ogni qual volta si esamina un arco da un nodo marcato ad un nodo non marcato tale arco diventa un arco dell'albero di copertura dfs  $T$ . Gli archi non inclusi nell'albero possono essere divisi in tre categorie:

- Se  $u$  è un antenato di  $v$  in  $T$  ( $u, v$ ) è detto arco in avanti.
- Se  $u$  è un discendente di  $v$  in  $T$  ( $u, v$ ) è detto arco all'indietro.
- Se i primi due non sussistono viene detto arco di attraversamento.

Indicato con *time* un contatore, il vettore *dt* il discovery time, o tempo di scoperta di un nodo e *ft* il finish time o tempo di fine di un nodo.

---

```

: dfs-schema(Graph G, Node u, int & time, int [] dt, int [] ft)
  {Visita il nodo u in pre-order}
  time += 1
  dt[u] = time
  foreach v ∈ G.adj(u) do
    | {Visita l'arco (u, v) qualsiasi}
    | if dt[v] = 0 then
    | | {Visita l'arco (u, v) albero}
    | | dfs-schema(G, v, time, dt, ft)
    | | else if dt[u] > dt[v] and ft[v] = 0 then
    | | | Visita l'arco (u, v) indietro
    | | else if dt[u] < dt[v] and ft[v] ≠ 0 then
    | | | Visita l'arco (u, v) avanti
    | | else
    | | | Visita l'arco (u, v) attraversamento
  {Visita il nodo u in post-order}
  time += 1
  ft[u] = time

```

---

## 8.2. VISITE DEI GRAFI

---

Classificare gli archi permette di dimostrare proprietà rispetto a questa classificazione e pertanto costruire degli algoritmi migliori. In particolare data una visita dfs di un grafo  $G$  per ogni coppia di nodi  $u, v \in V$  solo una delle seguenti condizioni è vera:

- Gli intervalli  $[dt[u], ft[u]]$  e  $[dt[v], ft[v]]$  sono non-sovrapposti: allora  $u$  e  $v$  non sono discendenti l'uno dell'altro nella foresta DF.
- L'intervallo  $[dt[u], ft[u]]$  è contenuto in  $[dt[v], ft[v]]$ , allora  $u$  è un discendente di  $v$  nella foresta DF.
- L'intervallo  $[dt[v], ft[v]]$  è contenuto in  $[dt[u], ft[u]]$ , allora  $v$  è un discendente di  $u$  nella foresta DF.

**Teorema** un grafo è aciclico se e solo se non esistono archi all'indietro nel grafo.

**Dimostrazione** Se esiste un ciclo, sia  $u$  il primo nodo del ciclo che viene visitato e  $(v, u)$  un arco del ciclo. Il cammino che connette  $v$  a  $u$  verrà prima o poi visitato e da  $v$  verrà scoperto l'arco all'indietro  $(v, u)$ . Se esiste un arco all'indietro  $(u, v)$ , dove  $v$  è un antenato di  $u$  allora esiste un cammino da  $v$  a  $u$  e un arco da  $u$  a  $v$ , ovvero un ciclo.

---

```
: hasCycle(Graph G, Node u, int & time, int [] dt, int [] ft)
```

---

```
time += 1
dt[u] = time
foreach v ∈ G.adj(u) do
    if dt[v] == 0 then
        if hasCycle(G, v, time, dt, ft) then
            return true
        else if dt[u] > dt[v] and ft[v] == 0 then
            return true
time += 1
ft[u] = time
return false
```

---

### Ordinamento topologico

L'algoritmo per un ordinamento topologico consiste in una dfs in cui l'operazione di visita consiste nell'aggiungere il nodo in testa ad una lista a tempo di fine (ovvero post-ordine). L'output sarà pertanto una sequenza di nodi ordinata per tempo decrescente di fine. In questo modo quando un nodo è finito tutti i suoi discendenti sono stati aggiunti alla lista e aggiungendolo in testa è nell'ordine corretto.

---

```
: Stack topSort(Graph  $G$ )
```

---

```
Stack  $S$  = Stack()
boolean [] visited = boolean [ $G.size()$ ]
foreach  $u \in G.V()$  do
    | visited[ $u$ ] = false
foreach  $u \in G.V()$  do
    | if not visited[ $u$ ] then
    | | ts-dfs( $G$ , visited,  $S$ )
return  $S$ 
```

---



---

```
: Stack ts-dfs(Graph  $G$ , Node  $u$ , boolean [] visited, Stack  $S$ )
```

---

```
visited[ $u$ ] = true
foreach  $v \in G.adj(u)$  do
    | if not visited[ $v$ ] then
    | | ts-dfs( $G$ ,  $v$ , visited,  $S$ )
 $S.push(u)$ 
```

---

### Algoritmo di Kosaraju

Utilizzato per trovare le componenti fortemente connesse di un grafo orientato. Per farlo effettua una visita dfs al grafo, calcola il grafo trasposto  $G_t$  ed esegue una visita dfs sul grafo  $G_t$  utilizzando *cc* esaminando i nodi in ordine inverso di tempo di fine della prima visita. Le componenti connesse e i relativi alberi DF rappresentano le componenti fortemente connesse di  $G$ . (Sostituito dall'algoritmo di Tarjan che richiede una sola visita). Applicando l'algoritmo topologico si

---

```
: int [] scc(Graph  $G$ )
```

---

```
Stack  $S$  = topSort( $G$ ) %First visit
Graph  $G^T$  = transpose( $G$ ) %Graph transposal
return cc $G^T$ ,  $S$  %Second visit
```

---

è sicuri che se un arco  $(u, v)$  non appartiene ad un ciclo,  $u$  viene listato prima di  $v$  nella sequenza ordinata e gli archi di un ciclo vengono listati in un qualche ordine che è ininfluente. Si utilizza *topSort()* per ottenere i nodi in ordine decrescente di tempo di fine. Essendo che ogni passo di questo algoritmo richiede  $O(n + m)$ , la complessità totale è  $O(m + n)$ .

**Calcolo del grafo trasposto** Dato un grafo orientato  $G = (V, E)$  il corrispettivo grafo trasposto  $G_t = (V, E_t)$  è un grafo con gli stessi nodi ma con gli archi orientati nel senso opposto:  $E_t = \{(u, v) | (v, u) \in E\}$ . L'algoritmo per il suo calcolo ha costo  $O(m + n)$ .

## 8.2. VISITE DEI GRAFI

---

```

: int [] transpose(Graph G)
  Graph  $G^T$  = Graph( $G$ )
  foreach  $u \in G.V()$  do
    |  $G^T.insertNode(u)$ 
  foreach  $u \in G.V()$  do
    | foreach  $v \in G.adj(u)$  do
      | |  $G^T.insertEdge(v, u)$ 
  return  $G^T$ 

```

---

**Calcolo delle componenti connesse** Invece di esaminare i nodi in ordine arbitrario questa versione li esamina nell'ordine LIFO memorizzato nello stack.

<pre> : int [] cc(Graph G, Stack S)   int [] id = new int [G.size()]   foreach <math>u \in G.V()</math> do       id[u] = 0   int counter = 0   while not S.empty() do       u = S.pop()       if id[u] == 0 then           counter += 1           ccdfs(<math>G, counter, u, id</math>)   return id </pre>	<pre> : ccdfs(Graph G, int counter, Node u, int [] id)   id[u] = counter   foreach <math>v \in G.adj(u)</math> do       if id[v] == 0 then           ccdfs(<math>G, counter, v, id</math>) </pre>
--	---

---

**Dimostrazione di correttezza** Si costruisca il grafo delle componenti  $C(G) = (V_C, E_C)$ , dove  $V_C = \{C_1, \dots, C_k\}$ , dove  $C_i$  è la  $i$ -esima SCC di  $G$  e  $E_C = \{(C_i, C_j) | \exists (u_i, u_j) \in E : u_i \in C_i \wedge u_j \in C_j\}$ . Il grafo delle componenti è aciclico e inoltre  $C(G^T) = [C(G)]^T$ . I discovery e finish time del grafo delle componenti corrispondono ai corrispettivi del primo nodo visitato in  $C$ :  $dt(C) = \min\{dt(u) | u \in C\}$  e  $ft(C) = \max\{ft(u) | u \in C\}$ .

**Teorema** Siano  $C$  e  $C'$  due distinte SCCs nel grafo orientato  $G = (V, E)$ . Se c'è un arco  $(C, C') \in E_C$ , allora  $ft(C) > ft(C')$ .

**Corollario** Siano  $C_u$  e  $C_v$  due SCCs distinte nel grafo orientato  $G = (V, E)$ , se c'è un arco  $(u, v) \in E_T$  tale che  $u \in C_u$  e  $v \in C_v$ , allora  $ft(C_u) <$

$ft(C_v)$ .

$$\begin{aligned}(u, v) \in E_T &\Rightarrow \\(v, u) \in E &\Rightarrow \\(C_v, C_u) \in E_C &\Rightarrow \\ft(C_v) > ft(C_u) &\Rightarrow \\ft(C_u) < ft(C_v) &\end{aligned}$$

**Conclusion** Se le componenti  $C_u$  e  $C_v$  sono connesse da un arco  $(u, v) \in E_T$  allora dal corollario  $ft(C_u) < ft(C_v)$  e dall'algoritmo la visita di  $C_v$  inizierà prima della visita di  $C_u$ . Non esistono cammini tra  $C_u$  e  $C_v$  in  $E_T$  altrimenti il grafo sarebbe ciclico, pertanto dall'algoritmo la visita di  $C_v$  non raggiungerà mai  $C_u$ , pertanto  $cc()$  assegnerà correttamente gli identificatori delle componenti ai nodi.



## Capitolo 9

# Strutture dati speciali

### 9.1 Code con priorità

Una coda con priorità è una struttura dati astratta simile ad una coda in cui ogni elemnto inserito possiede una priorità. Si dividono in min-priority queue in cui l'estrazione avviene per valore crescente di priorità e max-priority queue, in cui l'estrazione avviene per valore decrescente di priorità. Le operazioni permesse sono di inserimento in coda, estrazione dell'elemento con priorità di valore min/max e di modifica di priorità di un elemento inserito.

#### 9.1.1 Specifica

---

**: MinPriorityQueue**

---

*%Crea una coda con priorità vuota*

**MinPriorityQueue()**

*%Restituisce true se la coda con priorità è vuota*

**boolean isEmpty()**

*%Restituisce l'elemento minimo di una coda con priorità non vuota*

**Item min()**

*%Rimuove e restituisce l'elemento minimo di una coda con priorità non vuota*

**Item DeleteMin()**

*%Inerisce l'elemento x con priorità p all'interno della coda con*

*priorità, restituendo un oggetto PriorityItem che identifica x all'interno della coda*

**PriorityItem insert(Item x, int p)**

*%Diminuisce la priorità dell'oggetto identificato da y portandola a p*

**decrease(PriorityItem x, int p)**

---

### 9.1.2 Implementazioni

Metodo	Lista o vettore non ordinato	Lista ordinata	Vettore ordinato	Albero RB
$min()$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(\log n)$
$deleteMin()$	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(\log n)$
$insert()$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(\log n)$
$decrease()$	$O(n)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$

L'implementazione più comune è attraverso gli heap, strutture speciali che associano i vantaggi di un albero (esecuzioni in tempo  $O(\log n)$ ) e vantaggi di un vettore (memorizzazione efficiente).

### 9.1.3 Heap

#### Definizioni di alberi

**Albero binario perfetto** In un albero binario perfetto tutte le foglie hanno la stessa altezza  $h$ , tutti i nodi interni hanno grado 2 e dato  $n$  il numero di nodi ha altezza  $h = \lfloor \log n \rfloor$ . Data l'altezza  $h$  ha numero di nodi  $n = 2^{h+1} - 1$ .

**Albero binario completo** In un albero binario completo tutte le foglie hanno altezza  $h$  o  $h - 1$ , tutti i nodi a livello  $h$  sono accatastati a sinistra e tutti i nodi hanno grado 2 tranne al più uno. Dato il numero di nodi  $n$  ha altezza  $h = \lfloor \log n \rfloor$ .

#### Alberi binari heap

Un albero binario max-heap (min-heap) è un albero completo tale che il valore memorizzato nel nodo è maggiore (minore) dei valori memorizzati nei suoi figli. Un albero heap non impone una relazione di ordinamento totale tra i figli di un nodo, pertanto è un ordinamento parziale.

#### Memorizzazione

Gli alberi binari heap sono memorizzati tramite un vettore heap  $A = [0, \dots, n-1]$  tale per cui:

- La radice si trova all'indice  $i = 0$ , ovvero  $root() = 0$ .
- Il padre del nodo salvato all'indice  $i$  si trova in  $p(i) = \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$ .
- Il figlio sinistro del nodo salvato all'indice  $i$  si trova in  $l(i) = 2i + 1$ .
- Il figlio destro del nodo salvato all'indice  $i$  si trova in  $r(i) = 2i + 2$ .

Proprietà max-heap sul vettore:  $A[i] \geq A[l(i)], [i] \geq A[r(i)]$ . Proprietà min-heap sul vettore:  $A[i] \leq A[l(i)], [i] \leq A[r(i)]$ .



**heapsort()**

L'*heapsort()* ordina un max-heap "in-place" prima costruendo un max-heap nel vettore e poi spostando l'elemento max in ultima posizione, ripristinando la proprietà max-heap. Utilizza pertanto le funzioni *heapBuild()* che costruisce un max-heap a partire dal vettore non ordinato e *maxHeapRestore()* che ripristina le proprietà max-heap.

**maxHeapRestore()** Riceve come input un vettore  $A$  e un indice  $i$ , tale per cui gli alberi binari con radici  $l(i)$  e  $r(i)$  sono max-heap e il suo obiettivo è modificare "in-place" il vettore  $A$  in modo tale che l'albero binario con radice  $i$  sia un max-heap. Essendo che ad ogni chiamata vengono eseguiti  $O(1)$  confronti, e se il nodo  $i$  non è massimo si chiama ricorsivamente sui figli e che l'esecuzione termina quando si raggiunge una foglia e l'altezza dell'albero è pari a  $\lfloor \log n \rfloor$   $T(n) = O(\log n)$ .

---

```

: maxHeapRestore(Item [] A, int i, int i)
  int max = i
  if l(i) ≤ dim and A[l(i)] > A[max] then
    max = l(i)
  if r(i) ≤ dim and A[r(i)] > A[max] then
    max = r(i)
  if i ≠ max then
    A[i] ↔ A[max] maxHeapRestore(A, max, dim)

```

---

**Dimostrazione della correttezza per induzione sull'altezza** Al termine dell'esecuzione l'albero radicato in  $A[i]$  rispetta la proprietà max-heap.

- Caso base  $h = 0$ : se l'altezza è zero esiste un unico nodo che rispetta la proprietà.
- Ipotesi induttiva: l'algoritmo funziona correttamente su tutti gli alberi di altezza inferiore ad  $h$ .
- Passo induttivo:
  - Caso 1:  $A[i] \geq A[l(i)], A[i] \geq A[r(i)]$ , allora l'albero radicato in  $A[i]$  rispetta la proprietà di max-heap e l'esecuzione termina.
  - Caso 2:  $A[l(i)] > A[i], A[r(i)] > A[i]$ , viene fatto uno scambio  $A[i] \leftrightarrow A[l(i)]$ , dopo lo scambio  $A[i] \geq A[l(i)], A[i] \geq A[r(i)]$ , il sottoalbero radicato in  $r(i)$  rimasto inalterato, mentre il sottoalbero radicato in  $l(i)$  può aver perso la proprietà, pertanto si svolge la chiamata ricorsiva su di esso che ha altezza minore di  $h$ , pertanto è corretto.
  - Caso 3: simmetrico rispetto al caso 2.

### 9.1. CODE CON PRIORITÀ

---

**heapBuild()** Sia  $A[1, \dots, n]$  un vettore da ordinare, tutti i nodi  $A[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \dots, n]$  sono foglie dell'albero e pertanto heap contenenti un elemento. La procedura *heapBuild()* attraversa i restanti nodi dell'albero a partire da  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  fino ad 1 ed esegue *maxHeapRestore()* su ognuno di essi. L'algoritmo ha complessità  $\Theta(\log n)$ . Aggiungere dimostrazione, non la capisco.

---

```
: heapBuild(litem [] A, int n)
```

---

```
  for  $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  down to 1 do
    | maxHeapRestore(A, i, n)
```

---

**Correttezza** Si dimostra attraverso l'invariante di ciclo: all'inizio di ogni iterazione del ciclo **for** i nodi  $[i + 1, \dots, n]$  sono radice di uno heap.

- Inizializzazione: all'inizio  $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Si supponga che  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  non sia una foglia, pertanto esiste almeno il figlio sinistro  $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ , con indice superiore ad  $n$ , pertanto assurdo. La dimostrazione vale per tutti gli indici successivi.
- Conservazione: È possibile applicare *maxHeapRestore()* al nodo  $i$  in quanto  $2i \leq 2i + 1 \leq n$  sono entrambi radici di heap. Al termine dell'iterazione tutti i nodi  $[1, \dots, n]$  sono radici di heap.
- Conclusione: al termine  $i = 0$ , pertanto il nodo 1 è radice di uno heap.

**Implementazione heapsort** Il primo elemento contiene il massimo, viene collocato in fondo, l'elemento in fondo viene collocato in testa, si chiama *maxHeapRestore()* per ripristinare la situazione e la dimensione dello heap viene progressivamente ridotta. L'algoritmo ha complessità  $\Theta(n \log n)$  in quanto *heapBuild()* ha costo  $\Theta(n)$  e la chiamata di *maxHeapRestore()* costa  $\Theta(\log i)$  in un heap con  $i$  elementi. Pertanto  $T(n) = \sum_{i=2}^n \log i + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$ .

---

```
: heapsort(litem [] A, int n)
```

---

```
  heapBuild(A, n)
  for  $i = n$  down to 2 do
    |  $A[1] \leftrightarrow A[i]$ 
    | maxHeapRestore(A, 1,  $i-1$ )
```

---

**Correttezza** Si dimostra la correttezza per invariante di ciclo. Al passo  $i$  il sottovettore  $A[i + 1, \dots, n]$  è ordinato,  $A[1, \dots, i] \leq A[i + 1, \dots, n]$  e  $A[1]$  è la radice di un vettore heap di dimensione  $i$ . COMPLETARE DIMOSTRAZIONE

### 9.1.4 Implementazione di code con priorità

Si vedrà l'implementazione di una min-priority queue, visto che la max-priority è speculare.

#### Memorizzazione

<b>:</b> PriorityItem
<b>int</b> priority
Item value
<b>int</b> pos;
<b>:</b> swap(PriorityItem $\llcorner$ H, <b>int</b> i, <b>int</b> j)
H[i] $\leftrightarrow$ H[j]
H[i].pos = i
H[j].pos = j

#### Inizializzazione

<b>:</b> PriorityQueue
<b>int</b> capacity
<b>int</b> dim
PriorityItem $\llcorner$ H
PriorityQueuePriorityQueue( <b>int</b> n)
PriorityQueue t = <b>new</b> PriorityQueue
t.capacity = n
t.dim = 0
t.H = <b>new</b> PriorityItem [1, ..., n]
<b>return</b> t

### 9.1. CODE CON PRIORITÀ

---

#### Inserimento

---

```
: PriorityItem insert(Item x, int p)
```

---

```
  precondition: dim < capacity
  dim += 1
  H[dim] = new PriorityItem()
  H[dim].value = x
  H[dim].priority = p
  H[dim].pos = dim
  int i = dim
  while i > 1 and H[i].priority < H[p(i)].priority do
    | swap(H, i, p(i))
    | i = p(i)
  return H[i]
```

---

#### *minHeapRestore()*

---

```
: minHeapRestore(PriorityItem [] A, int i, int dim)
```

---

```
  int min = i
  if l(i) ≤ dim and A[l(i)].priority < A[min].priority then
    | min = l(i)
  if r(i) ≤ dim and A[r(i)].priority < A[min].priority then
    | min = r(i)
  if i ≠ min then
    | swap(A, i, min)
    | minHeapRestore(A, min, dim)
```

---

#### Cancellazione e lettura minimo

---

```
: Item DeleteMin()
```

---

```
  precondition: dim > 0
  swap(H, 1, dim)
  dim -= 1
  minHeapRestore(H, 1, dim)
  return H[dim+1].value
```

---

---

```
: Item min()
```

---

```
  precondition: dim > 0
  return H[1].value
```

---

**Decremento priorità**


---

```

: decrease(PriorityItem x, int p)


---


precondition: p < x.priority
x.priority = p
int i = x.pos
while i > 1 and H[i].priority < H[p(i)].priority do
    | swap(H, i, p(i))
    | i = p(i)

```

---

**Complessità**

Tutte le operazioni che modificano gli heap devono sistemare la proprietà heap lungo un cammino radice-foglia (*deleteMin()*) oppure lungo un cammino nodo-radice (*insert()*, *decrease()*). Essendo l'altezza  $\lfloor \log n \rfloor$  il costo di tali operazioni è  $O(\log n)$ .

Operazione	Costo
<i>insert()</i>	$O(\log n)$
<i>deleteMin()</i>	$O(\log n)$
<i>min()</i>	$\Theta(1)$
<i>decrease()</i>	$O(\log n)$

**9.2 Insiemi disgiunti - Merge-find set**

In alcune applicazioni si è interessati a gestire una collezione  $S = \{S_1, \dots, S_k\}$  di insiemi dinamici disgiunti tali che:

- $\forall i, j : i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset$ .
- $\bigcup_{i=1}^k S_i = S$ .

Un esempio di questi insiemi sono le componenti di un grafo. Le operazioni fondamentali sono:

- Creare  $n$  insiemi disgiunti, ognuno composto da un unico elemento.
- *merge()*: unire più insiemi.
- *find()*: identificare l'insieme a cui appartiene un elemento.

**Rappresentante**

Ogni insieme è identificato da un rappresentante univoco, un qualunque membro dell'insieme. Le operazioni di ricerca del rappresentante su uno stesso insieme devono restituire sempre lo stesso oggetto. Il rappresentante può cambiare solo in caso di unione.

### 9.2.1 Specifica

---

```

: Mfset
%Crea n componenti {1}, ..., {n}
Mfset Mfset(int n)
%Restituisce il rappresentante della componente x
int find(int x)
%Unisce le componenti che contengono x e y
merge(int x, int y)

```

---

### 9.2.2 Componenti connesse dinamiche

Per trovare le componenti connesse di un grafo non orientato dinamico si inizia con componenti connesse costituite da un unico vertice, per ogni  $(u, v) \in E$  si esegue *merge*(*u*, *v*) e alla fine ogni insieme disgiunto rappresenta una componente connessa.

---

```

: Mfset cc(Graph G)
Mfset M = Mfset(G.n)
foreach u ∈ G.V() do
    foreach v ∈ G.adj(u) do
        M.merge(u, v)
return M

```

---

Questo algoritmo ha complessità  $O(n) + m$  operazioni *merge*(*u*, *v*), interessante per la capacità di gestire grafi dinamici.

### 9.2.3 Implementazione con insieme di liste

Ogni insieme viene rappresentato da una lista concatenata: il primo oggetto di una lista è il rappresentante dell'insieme e ogni elemento della lista contiene un oggetto, un puntatore all'elemento successivo e un puntatore al rappresentante.

#### Operazione *find*(*x*)

Si restituisce il rappresentante di *x*, l'operazione *find*(*x*) richiede tempo  $O(1)$ .

#### Operazione *merge*(*x*, *y*)

Si appende la lista che contiene *y* alla lista che contiene *x* modificando i puntatori ai rappresentanti nella lista appesa. Nel caso pessimo per *n* operazioni il costo è  $O(n^2)$ , il costo ammortizzato è  $O(n)$ .

### 9.2.4 Implementazione con insieme di alberi

Ogni insieme viene rappresentato da un albero, ogni nodo dell'albero contiene un oggetto e un puntatore al padre, la radice è il rappresentante dell'insieme e ha un puntatore a sè stessa.

**Operazione *find*(*x*)**

Risale la lista dei padri di  $x$  fino a trovare la radice e restituisce la radice come rappresentante. Ha costo  $O(n)$  nel caso pessimo

**Operazione *merge*(*x*, *y*)**

Si aggancia l'albero radicato in  $y$  a  $y$  modificando il puntatore al padre di  $y$ , con costo  $O(1)$ .

**9.2.5 Tecniche euristiche**

Si dice algoritmo euristico un particolare tipo di algoritmo progettato per risolvere un problema più velocemente se i metodi classici siano troppo lenti, trovare una soluzione approssimata qualora i metodi classici falliscano nel trovare una soluzione esatta.

**Liste: euristica sul peso**

Si utilizza per diminuire il costo dell'operazione *merge*() si memorizza nella lista l'informazione sulla loro lunghezza e si aggancia la lista più corta a quella più lunga. La lunghezza della lista può essere mantenuta in tempo  $O(1)$ . Tramite analisi ammortizzata si nota come il costo di  $n-1$  operazioni merge è  $O(n \log n)$ , pertanto il costo ammortizzato delle singole operazioni è  $O(\log n)$ .

**Alberi: euristica sul rango**

Si utilizza per diminuire il costo dell'operazione *find*(*x*): ogni nodo mantiene informazioni sul proprio rango,  $rank[x]$  di un nodo  $x$  è il numero di archi del cammino più lungo fra  $x$  e una foglia sia discendente, ovvero l'altezza del sottoalbero associato al nodo. L'obiettivo è mantenere bassa l'altezza degli alberi. Un albero *Mfset* con radice  $r$  ottenuto tramite euristica sul rango ha almeno  $2^{rank[r]}$  nodi. Inoltre lo stesso albero con radice  $r$  e  $n$  nodi ha altezza inferiore a  $\log n$ .

<b>: Mfset</b>	<b>: merge(int <i>x</i>, int <i>y</i>)</b>
<pre> <b>int</b> [] parent <b>int</b> [] rank[] Mfset Mfset(<b>int</b> <i>n</i>)     Mfset t = <b>new</b> Mfset()     t.parent = <b>int</b> [1...<i>n</i>]     t.rank = <b>int</b> [1...<i>n</i>]     <b>for</b> <b>int</b> <i>i</i> = 1 <b>to</b> <i>n</i> <b>do</b>         t.parent [<i>i</i>] = <i>i</i>         t.rank [<i>i</i>] = 0     <b>return</b> t </pre>	<pre> <b>l</b>tem <math>r_x</math> = <b>find</b>(<i>x</i>) <b>l</b>tem <math>r_y</math> = <b>find</b>(<i>y</i>) <b>if</b> <math>r_x \neq r_y</math> <b>then</b>     <b>if</b> <math>rank[r_x] &gt; rank[r_y]</math> <b>then</b>         parent[<math>r_y</math>] = <math>r_x</math>     <b>if</b> <math>rank[r_y] &gt; rank[r_x]</math> <b>then</b>         parent[<math>r_x</math>] = <math>r_y</math>     <b>else</b>         parent[<math>r_x</math>] = <math>r_y</math>         rank[<math>r_y</math>] += 1 </pre>

**Alberi: euristica di compressione dei cammini**

Nell'operazione  $find(x)$  l'albero viene appiattito in modo che ricerche successive di  $x$  siano svolte in  $O(1)$ .

---

```
: int find(int x)
if  $parent[x] \neq x$  then
     $parent[x] =$ 
         $find(parent[x])$ 
return  $parent[x]$ 
```

---

**Alberi: euristica sul rango e compressione dei cammini**

Applicando entrambe le euristiche il rango non è più l'altezza del nodo ma il limite superiore alla sua altezza. Non viene calcolato il rango corretto. Il costo ammortizzato di  $m$  operazioni merge-find in un insieme di  $n$  elementi è  $O(m\alpha(n))$ , dove  $\alpha(n)$  o funzione inversa di Ackermann cresce lentamente.



# Capitolo 10

## Scelta

### 10.1 Il problema dei cammini minimi

**Definizione** Dato un cammino  $p = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$  con  $k > 1$  il costo del cammino è dato da

$$w(p) = \sum_{i=2}^k w(v_{i-1}, v_i)$$

**Input** Un grafo orientato  $G = (V, E)$ , un nodo sorgente  $s$  e una funzione di peso  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Output** Trovare un cammino da  $s$  a  $u$  per ogni nodo  $u \in V$ , il cui costo sia minimo.

#### 10.1.1 Varianti del problema

##### Cammini minimi da sorgente unica

**Input:** un grafo pesato con nodo radice  $s$ .

**Output:** i cammini minimi che vanno da  $s$  a tutti gli altri nodi.

##### Cammino minimo tra una coppia di vertici

**Input:** un grafo pesato e una coppia di vertici  $s, d$ .

**Output:** un cammino minimo fra  $s$  e  $d$ , per risolverlo si risolve il problema dei cammini minimi da sorgente unica e si estrae il cammino richiesto in quanto non si conoscono algoritmi con tempo di esecuzione migliore.

### Cammini minimi tra tutte le coppie di vertici

**Input:** un grafo pesato.

**Output:** i cammini minimi fra tutte le coppie di vertici, la soluzione si basa su programmazione dinamica.

### Pesi

Alcuni algoritmi possono funzionare unicamente con alcune categorie speciali di pesi: positivi o sia positivi che negativi e reali o interi.

### 10.1.2 Sottostruttura ottima

Si noti come due cammini possono avere un tratto in comune  $A \rightsquigarrow B$  ma non possono convergere in un nodo comune  $B$  dopo aver percorso un tratto iniziale distinto.

### Albero dei cammini minimi

L'albero dei cammini minimi è un albero di copertura radicato in  $s$  avente un cammino da  $s$  a tutti i nodi raggiungibili da  $s$ . Viene detto anche spanning tree. Dato un grafo  $G = (V, E)$  non orientato e connesso, un albero di copertura di  $G$  è un sottografo  $T = (V, E_T)$  tale che  $T$  è un albero,  $E_T \subseteq E$  e  $T$  contiene tutti i vertici di  $G$ .

**Rappresentazione albero** Per rappresentare l'albero si utilizza la rappresentazione basata sul vettore dei padri.

### Soluzione ammissibile

Una soluzione ammissibile può essere descritta da un albero di copertura  $T$  radicato in  $s$  e da un vettore di distanza  $d$ , i cui valori  $d[u]$  rappresentano il costo del cammino da  $s$  a  $u$  in  $T$ .

---

```
: void printPath(Node s, Node d, Node // T)
```

---

```
    if s == d then
        | print s
    else if T[d] == nil then
        | print "error"
    else
        | printPath(s, T[d], T)
        | print d
```

---

## 10.2 Teorema di Bellman

**Enunciato** Una soluzione ammissibile  $T$  è ottima se e solo se:

$$d[v] = d[u] + w(u, v) \quad \text{per ogni arco } (u, v) \in T$$

$$d[v] \leq d[u] + w(u, v) \quad \text{per ogni arco } (u, v) \in E$$

**Dimostrazione**

**Se  $T$  è una soluzione ottima, allora valgono le condizioni di Bellman**

Sia  $T$  una soluzione ottima e  $(u, v) \in E$ . Se  $(u, v) \in T$  allora  $d[v] = d[u] + w(u, v)$ . Se  $(u, v) \notin T$  allora  $d[v] \leq d[u] + w(u, v)$  perchè altrimenti esisterebbe nel grafo  $G$  un cammino da  $s$  a  $v$  più corto di quello in  $T$ , che è un assurdo.

**Se valgono le condizioni di Bellman allora  $T$  è una soluzione ottima** Si supponga per assurdo che il cammino da  $s$  a  $u$  non sia ottimo, allora esiste un albero  $T'$  in cui il cammino da  $s$  a  $u$  ha distanza  $d'[u] < d[u]$  con  $d'$  il vettore delle distanze associato a  $T'$ . Essendo  $d'[s] = d[s] = 0$  ma  $d'[u] < d[u]$  esiste un arco  $(h, k)$  per cui  $d'[h] \geq d[h]$  e  $d'[k] < d[k]$ . Si noti ora come per costruzione  $d'[h] \geq d[h]$  e  $d'[k] = d'[h] + w(h, k)$ , e per ipotesi  $d[k] \leq d[h] + w(h, k)$ . Combinando queste due relazioni si ottiene

$$d'[k] = d'[h] + w(h, k) \geq d[h] + w(h, k) \geq d[k]$$

Pertanto  $d'[k] \geq d[k]$ , che contraddice  $d'[k] < d[k]$ .

### 10.2.1 Implementazioni

**Algoritmo prototipo**

---

```

: (int [], int []) prototipoCamminiMinimi(Graph G, Node s)
%Inizializza T ad una foresta di copertura composta da nodi isolati
%Inizializza d con sovrastima della distanza: d[s] = 0, d[x] = +∞
while ∃(u, v) : d[u] + G.w(u, v) < d[v] do
    d[v] = d[u] + w(u, v)
    %Sostituisci il padre di v in T con u
return (T, d)

```

---

Se al termine dell'esecuzione qualche nodo mantiene una distanza infinita non è raggiungibile.

**Algoritmo generico**


---

```

: (int [], int []) shortestPath(Graph G, Node s)


---


    int [] d = new int [1...G.n] %d[u] è la distanza da s a u
    int [] T = new int [1...G.n] %T[u] è il padre di u nell'albero T
    boolean [] b = new boolean [1...G.n] %b[u] è true se u ∈ S
    foreach u ∈ G.V() - {s} do
        T[u] = nil
        d[u] = +∞
        b[u] = false
    T[s] = nil
    d[s] = 0
    b[s] = true
    [...]

```

---

```

: (int [], int []) shortestPath(Graph G, Node s)


---


    DataStructure S = Datastructure()
    S.add(s)
    while not S.isEmpty() do
        int u = S.extract()
        b[u] = false
        foreach v ∈ G.adj(u) do
            if d[u] + G.w(u, v) < d[v] then
                if not b[v] then
                    S.add(v)
                    b[v] = true
                else
                    %Azione da svolgere nel caso v sia già presente in S
                    T[v] = u
                    d[v] = d[u] + G.w(u, v)
        return (T, d)

```

---

**10.3 Algoritmo di Dijkstra**

Nella versione originale viene utilizzato per trovare la distanza minima fra due nodi utilizzando il concetto di code di priorità. Funziona unicamente con pesi positivi e viene utilizzato in protocolli di rete.

**10.3.1 Funzionamento****Inizializzazione**

Viene creato un vettore di dimensione  $n$  in cui l'indice  $u$  rappresenta il nodo  $u$ -esimo. Le priorità vengono inizializzate a  $+\infty$  e quella di  $s$  uguale a 0. Questa

operazione ha costo computazionale  $O(n)$ .

**Estrazione minimo**

Si ricerca il minimo all'interno del vettore, una volta trovato si cancella la sua priorità, con costo computazionale  $O(n)$ .

**Inserimento in coda**

Si registra la priorità nella posizione  $v$ -esima con costo  $O(1)$ .

**Aggiornamento priorità**

Si aggiorna la priorità nella posizione  $v$ -esima con costo computazionale  $O(1)$ .

---

**: (int [], int []) shortestPath(Graph  $G$ , Node  $s$ )**

---

```
PriorityQueue Q = PriorityQueue()
Q.insert( $s$ , 0)
while not Q.isEmpty() do
    int u = Q.deleteMin()
    b[u] = false
    foreach  $v \in G.adj(u)$  do
        if  $d[u] + G.w(u, v) < d[v]$  then
            if not b[v] then
                Q.insert( $v$ ,  $d[u] + G.w(u, v)$ )
                b[v] = true
            else
                Q.decrease( $v$ ,  $d[u] + G.w(u, v)$ )
            T[v] = u
            d[v] = d[u] + G.w(u, v)
    return (T, d)
```

---

**10.3.2 Correttezza per pesi positivi**



## Capitolo 11

# Risoluzione problemi

Dato un problema è possibile evidenziare quattro fasi, non necessariamente sequenziali in modo trovare una soluzione efficiente:

- Classificazione del problema.
- Caratterizzazione della soluzione.
- Tecnica di progetto.
- Utilizzo di strutture dati.

### 11.1 Classificazione dei problemi

#### **Problemi decisionali**

Determinare se un dato di ingresso soddisfa una certa proprietà.

#### **Problemi di ricerca**

È presente uno spazio di ricerca, un insieme di soluzioni possibili, una soluzione ammissibile, che rispetta certi vincoli.

#### **Problemi di ottimizzazione**

Ogni soluzione viene associata ad una funzione di costo, si vuole trovare la soluzione di costo minimo.

#### **Problemi di approssimazione**

Questo tipo di problemi nasce quando trovare la soluzione ottima è computazionalmente impossibile e pertanto ci si accontenta di una soluzione approssimata con costo basso, ma l'ottimalità è sconosciuta.

## 11.2 Definizione matematica del problema

È fondamentale definire il problema dal punto di vista matematico, spesso la formulazione è banale ma può suggerire una prima soluzione.

## 11.3 Tecniche di soluzione problemi

### **Divide-et-impera**

Un problema viene suddiviso in sotto-problemi indipendenti che vengono risolti ricorsivamente (top-down) nell'ambito di problemi di decisione e ricerca.

### **Programmazione dinamica**

La soluzione viene costruita bottom-up a partire da un insieme di sotto-problemi potenzialmente ripetuti nell'ambito dei problemi di ottimizzazione.

### **Memoization**

Una versione top-down della programmazione dinamica.

### **Tecnica greedy**

Approccio ingordo: si fa sempre la scelta localmente ottima.

### **Backtrack**

Si procede per tentativi tornando quando necessario all'indietro.

### **Ricerca locale**

La soluzione ottima viene trovata migliorando via via soluzioni esistenti.

### **Algoritmi probabilistici**

Algoritmi in cui certe scelte avvengono in maniera casuale.



## Capitolo 12

# Divide-et-impera

In questo metodo di risoluzione problemi ci sono tre fasi:

- Divide: si divide il problema in sotto-problemi più piccoli e indipendenti.
- Impera: si risolvono i sotto-problemi ricorsivamente.
- Combina: si uniscono le soluzioni dei sottoproblemi.

### 12.1 Le torri di Hanoi

Le torri di Hanoi è un gioco matematico costituito da tre pioli con  $n$  dischi di dimensioni diverse. Inizialmente i dischi sono impilati in ordine decrescente nel piolo di sinistra. Lo scopo del gioco è impilare in ordine decrescente i dischi sul piolo di destra; senza mai impilare un disco più grande su uno più piccolo, muovendo al massimo un disco alla volta e utilizzando il piolo centrale come appoggio.

---

```
: hanoi(int n, int src, int  
middle)
```

---

```
if n = 1 then  
    print src → dest  
else  
    hanoi(n - 1, src, middle,  
        dest)  
    print src → dest  
    hanoi(n - 1, middle, dest,  
        src)
```

---

Questo algoritmo trova la soluzione ottima, la ricorrenza è

$$T(n) = 2T(n - 1) + 1$$

con costo computazionale  $O(2^n)$ .

## 12.2 Quicksort

Quicksort è un algoritmo di ordinamento basato su divide-et-impera, nel caso medio è  $O(n \log n)$ , nel caso pessimo  $O(n^2)$ . Il fattore costante è migliore di quello di Mergesort, non utilizza memoria aggiuntiva e presenta tecniche euristiche per evitare il caso pessimo.

### 12.2.1 Caratterizzazione

#### Input

Un vettore  $A[1 \dots n]$ , indici  $start, end$  tali che  $1 \leq start \leq end \leq n$ .

#### Divide

Si sceglie un valore  $p \in A[start \dots end]$  detto perno o pivot. Si spostano gli elementi del vettore  $A[start \dots end]$  in modo tale che:

- $\forall i \in [start \dots j - 1] : A[i] \leq p$ .
- $\forall i \in [j + 1 \dots end] : A[i] \geq p$ .

L'indice  $j$  viene calcolato in modo tale da rispettare tale condizione, il perno viene messo in posizione  $A[j]$ .

#### Impera

Ordina i due sottovettori  $A[start \dots j - 1]$  e  $A[j + 1 \dots end]$  richiamando ricorsivamente Quicksort.

#### Combina

Non fa nulla: il primo vettore,  $A[j]$  e il secondo vettore formano già un vettore ordinato.

---

```
: int pivot(Item [] A, int
start, int end)
```

---

```
Item p = A[start]
int j = start
for int i = start
+1 to end do
    if A[i] < p then
        j += 1
        A[i] ↔ A[j]
A[start] = A[j]
A[j] = p
return j
```

---

---

```
: Quicksort(Item [] A, int
start, int end)
```

---

```
if start < end then
    int j = pivot(A, start,
end)
    Quicksort(A, start, j - 1)
    Quicksort(A, j + 1, end)
```

---

### 12.2.2 Complessità computazionale

Il costo di *pivot()* è  $\Theta(n)$ , mentre il costo di *Quicksort()* dipende dal partizionamento:

- Partizionamento peggiore: dato un vettore di dimensione  $n$  viene diviso in due sotto-problemi di dimensione 0 e  $n - 1$ .

$$T(n) = T(n - 1) + T(0) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

- Partizionamento migliore: dato un vettore di dimensione  $n$  viene sempre diviso in due sotto-problemi di dimensione  $\frac{n}{2}$ .

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Nel caso medio si alternano partizionamenti peggiori e migliori con il caso medio nel numero maggiore, pertanto nel caso medio ha complessità  $O(n \log n)$ .

## 12.3 Conclusioni

Si deve applicare divide-et-impera quando i passi "divide" e "combina" sono semplici e i costi sono migliori del corrispondente algoritmo iterativo. Presenta inoltre una più facile parallelizzazione e un utilizzo ottimale della cache ("cache oblivious").



## Capitolo 13

# Programmazione dinamica

Si dice programmazione dinamica un metodo per dividere un problema ricorsivamente in sottoproblemi in modo che ogni sottoproblema venga risolto una volta sola e la sua soluzione venga memorizzata in una tabella. Se un sottoproblema deve essere risolto nuovamente si ottiene la sua soluzione dalla tabella (lookup in  $O(1)$ ).

### 13.1 Approccio generale

Se si parte da un problema di ottimizzazione si definisce la soluzione in maniera ricorsiva, successivamente si definisce il valore della soluzione in maniera ricorsiva (primo passo per problemi di conteggio). Se da qui non sono presenti sottoproblemi ripetuti si utilizza divide et impera; se sono presenti sottoproblemi ripetuti e bisogna risolverli tutti si utilizza la programmazione dinamica, se non devono essere risolti tutti si usa memoization. Dalla tabella delle soluzioni si ottiene l'output numerico o la ricostruzione della soluzione che permette di arrivare alla soluzione ottima.

#### 13.1.1 Evitare di risolvere i problemi più di una volta

Quando si risolve un problema si memorizza il risultato ottenuto in una tabella DP, che può essere un vettore, una matrice o un dizionario. La tabella deve contenere un elemento per ogni sottoproblema che deve essere risolto.

- Casi base: si memorizzano i casi base direttamente nella tabella.
- Iterazione bottom-up: si parte dai sottoproblemi che possono essere risolti direttamente a partire dai casi base, si sale verso problemi sempre più grandi fino a raggiungere il problema originale.

### 13.1.2 Ricostruire la soluzione

Per ricostruire la soluzione si parte dalla definizione ricorsiva del problema, la dimensione di  $n$  indica l'indice sulla tabella che si deve controllare e si definisce un controllo su quale delle chiamate ricorsive viene realmente effettuata.

## 13.2 Memoization

Questa tecnica fonde l'approccio di memorizzazione della programmazione dinamica con quello top-down di divide-et-impera: si crea una tabella DP inizializzata con un valore speciale ad indicare che un certo sottoproblema non è ancora stato risolto. Ogni volta che si deve risolvere un sottoproblema si controlla nella tabella se è già stato risolto precedentemente:

- già risolto: si utilizza il risultato della tabella.
- non risolto: si calcola il risultato e lo si memorizza

In questo modo ogni sottoproblema viene calcolato una sola volta e memorizzato come nella versione bottom-up. Questa tecnica presenta vantaggi quando invece di utilizzare una tabella si utilizza un dizionario in quanto non è più necessario fare inizializzazione e il costo di esecuzione passa da  $O(nC)$  a  $O(\min(2^n, nC))$ .

---

**Implementazione 13.1:** Memoization automatica in Python

---

```
1 from functools import wraps
2
3 def memo(func):
4     cache = {}
5     @wraps(func)
6     def wrap(*args):
7         if args not in cache:
8             cache[args] = func(*args)
9         return cache[args]
10    return wrap
```

---

## 13.3 Problemi

### 13.3.1 Domino lineare

Il gioco del domino è basato su tessere di dimensione  $2 \times 1$ . Si scriva un algoritmo efficiente che prenda in input un intero  $n$  e restituisca il numero di possibili disposizioni  $n$  di tessere in un rettangolo  $2 \times n$ .

**Definizione ricorrenza**

Si definisca una formula ricorsiva  $DP[n]$  che permetta di calcolare il numero di disposizioni possibili quando si hanno  $n$  tessere. Con  $n = 0$  esiste una sola disposizione possibile, con  $n = 1$  esiste ancora una sola disposizione possibile. Mettendo una tessera in verticale si risolve il problema di dimensione  $n - 1$ , con una in orizzontale ne devo mettere due e risolvo il problema di dimensione  $n - 2$ . Essendo un problema di conteggio queste due possibilità si sommano insieme:

$$DP[n] = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ DP[n-2] + DP[n-1] & n > 1 \end{cases}$$

Si noti come  $DP[n]$  è pari al  $n + 1$ -esimo numero della serie di Fibonacci.

**Algoritmo ricorsivo**

---

```
: int domino1(int n)
  if  $n \leq 1$  then
    | return 1
  else
    | return domino1( $n - 1$ ) + domino1( $n - 2$ )
```

---

**Complessità** L'equazione di ricorrenza associata è:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ T(n-2) + T(n-1) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

Che utilizzando il master theorem per la ricorrenza lineare di ordine costante si ottiene una complessità pari a  $T(n) = \Theta(2^n)$ .

**Algoritmo iterativo**

---

```
: int domino2(int n)
  int [] DP = new int [0...n]
  DP[0] = DP[1] = 1
  for int  $i = 2$  to  $n$  do
    | DP[i] = DP[i-1] + DP[i-2]
  return DP[n]
```

---

**Complessità** Ha complessità temporale  $T(n) = \Theta(n)$  e spaziale  $S(n) = \Theta(n)$ .

**Miglioramento** Si può rendere con complessità spaziale costante  $S(n) = \Theta(1)$ .

---

```

: int domino3(int n)


---


    int DP0 = 1
    int DP1 = 1
    int DP2 = 1
    for int i = 2 to n do
        DP0 = DP1
        DP1 = DP2
        DP2 = DP0 + DP1
    return DP[n]

```

---

### 13.3.2 Hateville

Hateville è un villaggio composto da  $n$  case numerate da 1 a  $n$  lungo una singola strada. Ad Hateville ognuno odia i propri vicini da entrambi i lati. Si vuole organizzare una sagra e si rende necessario raccogliere i fondi. Ogni abitante ha intenzione di donare una quantità  $D[i]$ , ma non intende partecipare ad una raccolta fondi a cui partecipano uno o entrambi i propri vicini. Si scriva un algoritmo che restituisca la quantità massima di fondi che può essere raccolta e un algoritmo che restituisca il sottoinsieme di indici  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$  tale per cui la donazione totale  $T = \sum_{i \in S} D[i]$  è massimale.

#### Definizione ricorsiva

Sia  $HV(i)$  uno di possibili insiemi di indici da selezionare per ottenere una donazione ottimale delle prime  $i$  case di Hateville numerate  $1 \dots n$ .  $HV(n)$  è la soluzione del problema originale. Considerando vicino  $i$ -esimo si deve considerare se non accettare la sua donazione ( $HV(i) = HV(i-1)$ ) o accettarla:  $HV(i) = \{i\} \cup HV(i-2)$  e prendere il risultato massimo.

#### Sottostruttura ottima

Sia  $HV_p(i)$  il problema dato dalle prime  $i$  case e  $HV_s(i)$  una soluzione ottima per il problema  $HV_p(i)$  e  $|HV_s(i)|$  il totale di donazioni di  $HV_s(i)$  ne consegue:

- Se  $i \notin HV_s(i)$  allora  $HV_s(i) = HV_s(i-1)$ .
- Se  $i \in HV_s(i)$  allora  $HV_s(i) = HV_s(i-2) \cup \{i\}$ .

#### Dimostrazione

$i \notin HV_s(i)$   $HV_s(i)$  è una soluzione ottima anche per  $HV_p(i-1)$ , se così non fosse esisterebbe una soluzione  $HV'_s(i-1)$  per il problema  $HV_p(i)$  tale che  $|HV'_s(i-1)| > |HV_s(i)|$ , ma allora  $HV'_s(i-1)$  sarebbe una soluzione per  $HV_p(i)$  tale che  $HV'_s(i-1) > |HV_s(i)|$ , assurdo.



$\mathbf{i} \in \mathbf{HV}_s(\mathbf{i})$   $i - 1 \notin HV_s(i)$ , altrimenti non sarebbe una soluzione ammissibile, pertanto  $HV_s(i) - \{i\}$  è una soluzione ottima per  $HV_p(i-2)$  per il problema  $HV_p(i-2)$  tale che  $|HV'_s(i-2)| > |HV_s(i) - \{i\}|$ , allora  $HV'_s(i-2) \cap \{i\}$  sarebbe una soluzione per  $HV_p(i)$  tale che  $|HV'_s(i-2) \cup \{i\}| > |HV_s(i)|$ , assurdo.

#### Determinare la ricorsione

$$HV(i) = \begin{cases} \emptyset & i = 0 \\ \{1\} & i = 1 \\ \text{highest}(HV(i-1), HV(i-2) \cup \{i\}) & i \geq 2 \end{cases}$$

**Tabella DP** Sia  $DP[i]$  il valore della massima quantità di donazioni che si possono ottenere dalle prime  $i$  case di Hateville.  $DP[n]$  è il valore della soluzione ottima.

$$DP[i] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ D[1] & i = 1 \\ \max(DP[i-1], DP[i-2] + D[i]) & i \geq 2 \end{cases}$$

#### Algoritmo iterativo

---

```

: int hateville(int // D, int n)


---


    int [] DP = new int [0...n]
    DP[0] = 0
    DP[1] = D[1]
    for int i = 2 to n do
        | DP[i] = max(DP[i-1], DP[i-2]+D[i])
    return DP[n]

```

---

#### Ricostruire la soluzione originale

Considerando l'elemento  $DP[i]$  il suo valore può essere derivato considerando:

- Se  $DP[i] = DP[i-1]$  la casa  $i$  non è stata selezionata.
- Se  $DP[i] = DP[i-2] + D[i]$  la casa  $i$  è stata selezionata.

Si utilizza questa informazione per ricostruire la soluzione in modo ricorsivo: per costruire la soluzione fino a  $i$  si ricostruisce la soluzione fino a  $i-2$  e si

### 13.3. PROBLEMI

---

aggiunge  $i$  o si ricostruisce la soluzione fino a  $i - 1$  senza aggiungere nulla.

---

```
: Set solution(int [] DP, int [] D, int i)
```

---

```
if i == 0 then
|   return {}
else if i == 1 then
|   return {1}
else if DP[i] == DP[i-1] then
|   return solution(DP, D, i - 1)
else
|   Set sol = solution (DP, D, i-2)
|   sol.insert(i)
|   return sol
```

---

#### Complessità computazionale

La complessità computazionale di *solution()* è  $T(n) = \Theta(n)$ , quella computazionale e spaziale di *hateville()* è  $T(n) = \Theta(n)$  e  $S(n) = \Theta(n)$ . Questa soluzione non si può migliorare se si vuole ricostruire la soluzione.

#### 13.3.3 Knapsack

Dato un insieme di oggetti, ognuno caratterizzato da un peso e da un profitto e uno zaino con un limite di capacità trovare un sottoinsieme di oggetti il cui peso sia inferiore alla capacità dello zaino e il profitto sia massimale, ovvero maggiore o uguale di qualunque altro sottoinsieme di oggetti.

#### Caratterizzazione

##### Input

- Un vettore  $w$ , dove  $w[i]$  è il peso dell'oggetto  $i$ -esimo.
- Un vettore  $p$ , dove  $p[i]$  è il profitto dell'oggetto  $i$ -esimo.
- La capacità  $C$  dello zaino.

**Output** Un insieme  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$  tale che il volume totale deve essere minore uguale alla capacità:  $w(S) = \sum_{i \in S} w[i] < C$  e il profitto totale sia massimizzato:

$$p(S) = \sum_{i \in S} p[i].$$

#### Definizione matematica del valore della soluzione

Dato uno zaino di capacità  $C$  e  $n$  oggetti caratterizzati da peso  $w$  e profitto  $p$  si definisce  $DP[i][c]$  il massimo profitto che può essere ottenuta dai primi  $i \leq n$  oggetti contenuti in uno zaino di capacità  $c \leq C$ . Il massimo profitto ottenibile dal problema originale è rappresentato da  $DP[n][C]$ .

**Parte ricorsiva** Considerando l'ultimo oggetto lo si può non prendere:  $DP[i][c] = DP[i-1][c]$ , ovvero la capacità non cambia e non c'è profitto; se invece lo prendo  $DP[i][c] = DP[i-1][c - w[i]] + p[i]$ , ovvero si sottrae il peso alla capacità e si aggiunge il profitto relativo. La scelta della soluzione migliore è:

$$DP[i][c] = \max(DP[i-1][c], DP[i-1][c - w[i]] + p[i])$$

**Casi base** Il profitto massimo in caso di assenza di oggetti o di capacità è 0, se invece si ha capacità negativa vale  $-\infty$ .

### Formula completa

$$DP[i][c] = \begin{cases} 0 & i = 0 \vee c = 0 \\ -\infty & c < 0 \\ \max(DP[i-1][c], DP[i-1][c - w[i]] + p[i]) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

### Pseudocodice

---

```

: int knapsack(int // w, int // p, int n, int C)


---


  int [][] DP = new int [0...n][0...C]
  for int i = 0 to n do
    DP[i][0] = 0
  for int c = 0 to C do
    DP[0][c] = 0
  for int i = 1 to n do
    for int c = 1 to C do
      if w[i] ≤ C then
        DP[i][c] = max(DP[i-1][c - w[i]] + p[i], DP[i-1][c])
      else
        DP[i][c] = DP[i-1][c]
    return DP[n][C]


---



```

### Complessità computazionale

La complessità della funzione *knapsack()* è  $T(n) = O(nC)$ , una complessità pseudo-polinomiale in quanto sono necessari  $k = \log C$  bit per rappresentare  $C$  e pertanto la complessità è  $T(n) = O(n2^k)$ .

### Implementazione con memoization

Si nota come non tutti gli elementi della matrice sono necessari alla soluzione del problema. Risulta vantaggioso pertanto utilizzare la tecnica di memoization, in cui la tabella viene inizializzata esternamente in una funzione wrapper e il

### 13.3. PROBLEMI

valore  $-1$  viene utilizzato per identificare il valore di una cella non calcolata.

---

: Knapsack con memoization

---

```

int knapsack(int [] w, int [] p, int n, int C)
|   int [][] DP = new int [1...n][1...C]
|   for int i = 1 to n do
|   |   for int c = 1 to C do
|   |   |   DP[i][c] = -1
|   return knapsackRec(w, p, n, C, DP)
int knapsackRec(int [] w, int [] p, int i, int c, int [][] DP)
|   if c < 0 then
|   |   return  $-\infty$ 
|   else if i == 0 or c == 0 then
|   |   return 0
|   else
|   |   if DP[i][c] < 0 then
|   |   |   int nottaken = knapsackRec(w, p, i - 1, c, DP)
|   |   |   int taken = knapsackRec(w, p, i - 1, c - w[i], DP) + p[i]
|   |   |   DP[i][c] = max(nottaken, taken)
|   |   return DP[i][c]

```

---

#### 13.3.4 Knapsack senza limiti

Dato uno zaino di capacità  $C$  e  $n$  oggetti caratterizzati da peso  $w$  e profitto  $p$  si definisce  $DP[i][c]$  come il massimo profitto che può essere ottenuto dai primi  $i \leq n$  oggetti contenuti in uno zaino di capacità  $c \leq C$  senza porre limiti al numero di volte che un oggetto può essere selezionato. Si modifica pertanto la funzione ricorsiva come:

$$DP[i][c] = \begin{cases} 0 & i = 0 \vee c = 0 \\ -\infty & c < 0 \\ \max(DP[i][c], DP[i-1][c - w[i]] + p[i]) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo possibile è possibile semplificare la soluzione riducendo lo spazio occupato: si definisce  $DP[c]$  il massimo profitto che può essere ottenuto da tali oggetti in uno zaino di capacità  $c \leq C$ .

$$DP[c] = \begin{cases} 0 & c = 0 \\ \max_{w[i] < c} \{DP[c - w[i]] + p[i]\} & c > 0 \end{cases}$$

**Implementazione tramite memoization**

---

**: Knapsack senza limiti con memoization**

---

```
int knapsack(int [] w, int [] p, int n, int C)
|   int [] DP = new int [0...C]
|   for int c = 0 to C do
|       DP[c] = -1
|   knapsackRec(w, p, n, C, DP)
|   return DP[C]
int knapsackRec(int [] w, int [] p, int n, int c, int [][] DP)
|   if c == 0 then
|       return 0
|   else if DP[c] < 0 then
|       DP[c] = 0
|       for int i = 1 to n do
|           if w[i] ≤ c then
|               int val = knapsackRec(w, p, n, c - w[i], DP) + p[i]
|               DP[c] = max(DP[c], val)
|   return DP[c]
```

---

Attraverso questo algoritmo non è detto che tutti gli elementi debbano essere riempiti e la complessità in spazio è  $\Theta(C)$ .

**Ricostruire la soluzione**

Questo approccio rende più difficile ricostruire la soluzione: si possono ispezionare tutti gli elementi per capire da dove deriva il massimo, ma risulta più semplice memorizzare l'indice da cui deriva il massimo.

**Implementazione tramite memoization**

: Knapsack senza limiti con memoization

```

int knapsack(int [] w, int [] p, int n, int C)
    int [] DP = new int [0...C]
    int [] pos = new int [0...C]
    for int c = 0 to C do
        DP[c] = -1
        pos[c] = -1
    knapsackRec(w, p, n, C, DP, pos)
    return solution(w, C, pos)

int knapsackRec(int [] w, int [] p, int n, int c, int [] DP)
    if c == 0 then
        return 0
    else if DP[c] < 0 then
        DP[c] = 0
        for int i = 1 to n do
            if w[i] ≤ c then
                int val = knapsackRec(w, p, n, c - w[i], DP) + p[i]
                if val ≥ DP[c] then
                    DP[c] = val
                    pos[c] = i
        return DP[c]

List solution(int [] w, int c, int [] pos)
    if c == 0 or pos[c] > 0 then
        return List()
    else
        List L = solution(w, c - w[pos[c]], pos)
        L.insert(L.head(), pos[c])
        return L

```

Restituisce una lista di indici selezionati, se  $c = 0$  lo zaino è stato riempito perfettamente, se  $pos[c] < 0$  lo zaino non può essere riempito interamente.

**13.3.5 Sottosequenza comune massimale**

**Sottosequenza** Si definisce una sequenza  $P$  come sottosequenza di  $T$  se  $P$  è ottenuto da  $T$  rimuovendo uno o più dei suoi elementi o come il sottoinsieme di indici  $\{1, \dots, n\}$  degli elementi di  $T$  che compaiono anche in  $P$ . I rimanenti elementi sono indicati in ordine senza essere necessariamente contigui. La sottosequenza vuota  $\emptyset$  è sottosequenza di qualsiasi altra sottosequenza.

**Sottosequenza comune** Una sottosequenza  $X$  è detta sottosequenza comune di due sequenze  $T$  e  $U$  se è sottosequenza sia di  $T$  che di  $U$ :  $X \in \mathcal{CS}(T, U)$ .

**Sottosequenza comune massimale** Una sequenza  $X \in \mathcal{CS}(T, U)$  è una sottosequenza comune massimale di due sequenze  $T$  e  $U$  se non esiste altra sottosequenza comune  $Y \in \mathcal{CS}(T, U)$  tale che  $Y$  sia più lunga di  $X$ , si scrive:  $X \in \mathcal{LCS}(T, U)$ .

### Definizione del problema

Date due sequenze  $T$  e  $U$  si trovi la più lunga sottosequenza comune di  $T$  e  $U$ .

### Soluzione di forza bruta

---

```

: int LCS(Item [] T, Item [] U)
    Item [] maxsofar = nil
    foreach subsequence X of T do
        if X is subsequence of U then
            if len(X) > len(maxsofar) then
                maxsofar = X
    return maxsofar

```

---

Si noti come data una sottosequenza lunga  $n$ , le sue sottosequenze sono  $2^n$  e verificare che una sequenza è sottosequenza di un'altra sottosequenza è  $O(m+n)$ , la complessità computazionale dell'algoritmo sopra è pertanto  $\Theta(2^n(m+n))$ .

### Descrizione matematica della soluzione ottima

Data una sequenza  $T$  composta da caratteri  $t_1 \dots t_n$ ,  $T(i)$  denota il prefisso di  $T$  dato dai primi caratteri. L'obiettivo è, date due sequenze  $T$  e  $U$  di lunghezza  $n$  e  $m$ , di scrivere una formula ricorsiva  $LCS(T(i), U(i))$  che restituiscia la LCS dei prefissi  $T(i)$  e  $U(i)$ .

### Casi ricorsivi

**Primo caso** Si considerino due prefissi  $T(i)$  e  $U(j)$  tali per cui l'ultimo carattere coincide,  $t_i = u_j$  allora:

$$LCS(T(i), U(j)) = LCS(T(i-1), U(j-1)) \oplus t_i$$

**Secondo caso** Si considerino due prefissi  $T(i)$  e  $U(j)$  tali per cui l'ultimo carattere non coincide,  $t_i \neq u_j$  allora:

$$LCS(T(i), U(j)) = \text{longest}(LCS(T(i-1), U(j)), LCS(T(i), U(j-1)))$$

**Casi base** La sottosequenza più lunga quando una delle due sequenze è vuota, ovvero  $i = 0$  o  $j = 0$  è la sequenza vuota.

**Soluzione completa**

$$LCS(T(i), U(j)) = \begin{cases} \emptyset & i = 0 \vee j = 0 \\ LCS(T(i-1), U(j-1)) \oplus t_i & i > 0 \wedge j > 0 \wedge t_i = u_j \\ \text{longest}(LCS(T(i-1), U(j)), LCS(T(i), U(j-1))) & i > 0 \wedge j > 0 \wedge t_i \neq u_j \end{cases}$$

**Sottostruttura ottima**

Date le due sequenze  $T = (t_1, \dots, t_n)$  e  $U = (u_1, \dots, u_m)$  e  $X = (x_1, \dots, x_k)$  una LCS di  $T$  e  $U$ . Sono dati tre casi:

1.  $t_n = u_m \Rightarrow x_k = t_n = u_m \wedge X(k-1) \in \mathcal{LCS}(T(n-1), U(m-1))$
2.  $t_n \neq u_m \wedge x_k \neq t_n \Rightarrow X \in \mathcal{LCS}(T(n-1), U(m))$
3.  $t_n \neq u_m \wedge x_k \neq u_m \Rightarrow X \in \mathcal{LCS}(T(n), U(m-1))$

**Dimostrazione primo caso****Prima parte**

$$t_n = u_m \Rightarrow x_k = t_n = u_m$$

Si consideri per assurdo  $x_k \neq t_n = u_m$ . Si consideri ora  $Y = X \oplus t_n$ , allora  $Y \in \mathcal{CS}(T, U)$  e  $|Y| > |X|$ , che è una contraddizione.

**Seconda parte**

$$t_n = u_m \Rightarrow X(k-1) \in \mathcal{LCS}(T(n-1), U(m-1))$$

Si consideri per assurdo  $X(k-1) \notin \mathcal{LCS}(T(n-1), U(m-1))$ , allora  $\exists Y \in \mathcal{LCS}(T(n-1), U(m-1))$  tale che  $|Y| > |X(k-1)|$ , pertanto  $Y \oplus t_n \in \mathcal{CS}(T, U)$  e  $|Y \oplus t_n| > |X(k-1) \oplus t_n| = X$ , che è una contraddizione.

**Seconda parte (terza simmetrica)**

$$t_n \neq u_m \wedge x_k \neq t_n \Rightarrow X \in \mathcal{LCS}(T(n-1), U(m))$$

Si consideri per assurdo  $X \notin \mathcal{LCS}(T(n-1), U(m))$ , allora  $\exists Y \in \mathcal{LCS}(T(n-1), U(m))$  tale che  $|Y| > |X|$ , pertanto è anche vero che  $Y \in \mathcal{LCS}(T, U)$ , pertanto  $X$  non è  $\mathcal{LCS}(T, U)$ , che è un assurdo.

**Ricorrenza per il valore della soluzione ottimale**

Date due sequenze  $T$  e  $U$  di lunghezza  $n$  e  $m$  si scriva una formula ricorsiva  $DP[i][j]$  che restituisca la lunghezza della  $\mathcal{LCS}$  dei prefissi  $T(i)$  e  $U(j)$ .

$$DP[i][j] = \begin{cases} 0 & i = 0 \vee j = 0 \\ DP[i-1][j-1] + 1 & i > 0 \wedge j > 0 \wedge t_i = u_j \\ \max(DP[i-1][j], DP[i][j-1]) & i > 0 \wedge j > 0 \wedge t_i \neq u_j \end{cases}$$



$DP[n][m]$  contiene la lunghezza della  $LCS$  del problema originale.

---

```

: int LCS(Item [] T, Item [] U, int n, int m)


---


    int [][] DP = new int [0...n][0...m]
    for int i = 0 to n do
        DP[0][n] = DP[n][0] = 0
    for int i = 1 to n do
        for int j = 1 to m do
            if T[i] == U[j] then
                DP[i][j] = DP[i - 1][j - 1] + 1
            else
                DP[i][j] = max(DP[i - 1][j], DP[i][j - 1])
        return DP[n][m]

```

---

**Ricostruire la sottosequenza comune**

---

```

:


---


    Item [] int LCS(Item [] T, Item [] U, int n, int m)
    ...
    return subsequence(DP, T, U, n, m)
    Item [] subsequence(int [][] DP, Item [] T, Item [] U, int i, int j)
    if i == 0 or j == 0 then
        return List()
    else if T[i] == U[j] then
        List S = subsequence(DP, T, U, i - 1, j - 1)
        S.insert(S.head(), T[i])
        return S
    else
        if DP[i - 1][j] > DP[i][j - 1] then
            return subsequence(DP, T, U, i - 1, j)
        else
            return subsequence(DP, T, U, i, j - 1)

```

---

La complessità computazionale di *subsequence()* è  $O(m + n)$ , mentre quella di *LCS* è  $O(mn)$ .

### 13.3.6 String matching approssimato

#### Definizione

Si dice un'occorrenza  $k$ -approssimata di  $P$  in  $T$ , dove  $P = p_1 \dots p_m$  è una stringa detta pattern,  $T = t_1 \dots t_n$  è una stringa detta testo con  $m \leq n$ , una copia di  $P$  in  $T$  in cui sono ammessi  $k$  differenze tra caratteri di  $P$  e caratteri di  $T$  del tipo:

- I corrispondenti caratteri in  $P$ ,  $T$  sono diversi (sostituzione).
- Un carattere in  $P$  non è incluso in  $T$  (inserimento).
- Un carattere in  $T$  non è incluso in  $P$  (cancellazione).

### Problema

Il problema è trovare un'occorrenza  $k$ -approssimata di  $P$  in  $T$  con  $k$  minimo ( $0 \leq k \leq m$ ).

### Sottostruttura ottima

Sia  $DP[0 \dots m][0 \dots n]$  una tabella di programmazione dinamica tale che  $DP[i][j]$  sia il minimo valore  $k$  per cui esiste un'occorrenza  $k$ -approssimata di  $P(i)$  in  $T(j)$  che termina nella posizione  $j$ . Si hanno quattro possibilità:

- $DP[i-1][j-1]$  se  $P[i] = T[j]$ .
- $DP[i-1][j-1] + 1$  se  $P[i] \neq T[j]$  per la sostituzione.
- $DP[i-1][j] + 1$  per l'inserimento.
- $DP[i][j-1] + 1$  per la cancellazione.

$$DP[i][j] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ i & j = 0 \\ \min \{ DP[i-1][j-1] + \delta, & \delta = \text{if}(P[i] = T[j], 0, 1) \\ DP[i-1][j] + 1, & \text{altrimenti} \\ DP[i][j-1] + 1 \} \end{cases}$$

### Ricostruzione della soluzione finale

$DP[m][j] = k$  se e solo se esiste un'occorrenza  $k$ -approssimata di  $P$  in  $T(j)$  che termina nella posizione  $j$ . La soluzione del problema è data dal più piccolo valore  $DP[m][j]$  per  $0 \leq j \leq n$ . Si noti pertanto come la soluzione del problema non si trova nella casella "in basso a destra" ma vada essa stessa ricercata nella tabella  $DP$ .

**Algoritmo**


---

```

: int stringMatching(ltem [] P, ltem [] T, int m, int n)


---


  int [][] DP = new int [0...m][0...n]
  for int j = 0 to n do
    | DP[0][j] = 0
  for int i = 1 to m do
    | DP[i][0] = i
  for int i = 1 to m do
    | for int j = 1 to n do
      | | DP[i][j] = min(DP[i-1][j-1] + if(P[i] == T[j], 0, 1),
      | | DP[i-1][j]+1, DP[i][j-1]+1)
  int pos = 0; for int j = 1 to n do
    | if DP[m][j] < DP[m][pos] then
      | | pos = j
  return pos

```

---

**13.3.7 Prodotto di catena di matrici****Problema**

Data una sequenza  $n$  di matrici  $A_1, \dots, A_n$  compatibili due a due al prodotto, si vuole calcolare il loro prodotto. Si noti come il prodotto di matrici non sia commutativo ma associativo. Notando come il prodotto di matrici si basa sulla moltiplicazione scalare come operazione elementare si vuole calcolare il prodotto delle  $n$  matrici impiegando il minor numero possibile di moltiplicazioni scalari.

**Parentesizzazione**

La parentesizzazione  $P_{i,j}$  del prodotto  $A_i A_{i+1} \dots A_j$  è la matrice  $A_i$  se  $i = j$ , nel prodotto di due parentesizzazioni  $(P_{i,k} \cdot P_{k+1,j})$  altrimenti.

**Parentesizzazione ottima** La parentesizzazione che richiede il minor numero di moltiplicazioni scalari per essere completata fra tutte le parentesizzazioni possibili si dice ottima. Vale la pena preprocessare i dati per cercare la parentesizzazione migliore per risparmiare tempo nel calcolo vero e proprio. Detto  $P(n)$  il numero di parentesizzazioni per  $n$  matrici  $A_1 \dots A_n$  l'ultimo prodotto può occorrere in  $n-1$  posizioni diverse. Pertanto fissato l'indice  $k$  dell'ultimo prodotto si hanno:  $P(k)$  parentesizzazioni per  $A_1 \dots A_k$  e  $P(n-k)$  parentesizzazioni per  $A_{k+1} \dots A_n$ . Pertanto.

$$P(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} P(i)P(n-i) & n > 1 \end{cases}$$

**Numero di Catalan**

$$P(n+1) = C(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \Omega\left(\frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

In matematica  $C(n)$  indica il numero di modi in cui un poligono convesso con  $n+2$  lati può essere suddiviso in triangoli. Si può mostrare facilmente come  $P(n) = \Omega(2^n)$ .

**Lista di definizioni matematiche**

- $A_1 \cdots A_n$  è il prodotto di  $n$  matrici da ottimizzare.
- $c_{i-1}$  è il numero di righe della matrice  $A_i$ .
- $c_i$  è il numero di colonne della matrice  $A_i$ .
- $A[i \dots j]$  è il sottoprodotto  $A_i \cdot A_{i+1} \cdots A_j$ .
- $P[i \dots j]$  è una parentesizzazione per  $A[i \dots j]$ , non necessariamente ottima.

**Struttura di una parentesizzazione ottima**

Sia  $A[i \dots j]$  una sottosequenza del prodotto di matrici e si consideri una parentesizzazione ottima  $P[i \dots j]$  di  $A[i \dots j]$ . Esiste un ultimo prodotto: un indice  $k$  tale che  $P[i \dots j] = P[i \dots k] \cdot P[k+1 \dots j]$ .

**Teorema della sottostruttura ottima**

**Enunciato** Se  $P[i \dots j] = P[i \dots k] \cdot P[k+1 \dots j]$  è una parentesizzazione ottima del prodotto  $A[i \dots j]$  allora  $P[i \dots k]$  è una parentesizzazione ottima del prodotto  $A[i \dots k]$  e  $P[k+1 \dots j]$  è una parentesizzazione ottima del prodotto  $A[k+1 \dots j]$ .

**Dimostrazione** Si supponga che esista una parentesizzazione ottima  $P'[i \dots k]$  di  $A[i \dots k]$  con costo inferiore a  $P[i \dots k]$ . Allora  $P'[i \dots k] \cdot P[k+1 \dots j]$  sarebbe una parentesizzazione di  $A[i \dots j]$  con costo inferiore a  $P[i \dots j]$ , che è un assurdo.

**Valore della soluzione ottima**

Sia  $DP[i][j]$  il minimo numero di moltiplicazioni scalari necessarie per calcolare il prodotto  $A[i \dots j]$ .

- Caso base  $i = j$ . Allora  $DP[i][j] = 0$ .

- Passo ricorsivo:  $i < j$  esiste una parentesizzazione ottima

$$P[i \dots j] = P[i \dots k] \cdot P[k + 1 \dots j]$$

Sfruttando la ricorsione

$$DP[i][j] = DP[i][k] + DP[k + 1][j] + c_{i-1} \cdot c_k \cdot c_j$$

Considerando  $c_{i-1} \cdot c_k \cdot c_j$  il costo per moltiplicare la matrice  $A_i \dots A_k$ :  $c_{i-1}$  righe,  $c_k$  colonne e la matrice  $A_{k+1} \dots A_j$ :  $c_k$  righe,  $c_j$  colonne. Non si conosce il valore di  $k$  si devono provare tutti i valori che può assumere, tra  $i$  e  $j - 1$ :

$$DP[i][j] = \begin{cases} 0 & i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{DP[i][k] + DP[k + 1][j] + c_{i-1} \cdot c_k \cdot c_j\} & i < j \end{cases}$$

### Implementazione

**Input** L'algoritmo riceve in input un vettore  $c[0 \dots n]$  contenente le dimensioni delle matrici, dove  $c[0]$  è il numero di righe della prima matrice.  $c[i - 1]$  è il numero di righe della matrice  $A_i$  e  $c[i]$  è il numero di colonne della matrice  $A_i$  e due indici  $i$  e  $j$  che rappresentano l'intervallo di matrici da moltiplicare.

**Output** Il numero di moltiplicazioni scalari per calcolare il prodotto delle matrici comprese tra gli indici  $i$  e  $j$ .

	<pre> : int recPar (Item // c, int i, int j)   if i == j then       return 0   else       int min = +∞       for int k = i to j - 1 do           int q = recPar (c, i, k) + recPar (c, k + 1, j) + c[i-1]·c[k]·c[j]           if q &lt; min then               min = q           return min </pre>
<b>Approccio ricorsivo</b>	

**Valutazione** La soluzione ricorsiva top-down è  $\Omega(2^n)$ . Il problema è che i sottoproblemi che sono  $\frac{n(n+1)}{2}$  vengono risolti più volte.

**Versione bottom-up** Si creino due tabelle di programmazione dinamica, due matrici  $DP$  e  $last$  di dimensione  $n \times n$  tali che  $DP[i][j]$  contiene il numero di moltiplicazioni scalari necessarie per moltiplicare le matrici  $A[i \dots j]$  e  $last[i][j]$  con-

tiene il valore  $k$  dell'ultimo prodotto che minimizza il costo del sottoproblema.

---

```
: int computePar(Item  $\\parallel$   $c$ , int  $n$ )  
int  $DP$  = new int  $[1 \dots n][1 \dots n]$   
int  $last$  = new int  $[1 \dots n][1 \dots n]$   
for int  $i = 1$  to  $n$  do  
   $DP[i][i] = 0$   
for int  $h = 2$  to  $n$  do  
  for int  $i = 1$  to  $n - h + 1$  do  
    int  $j = i + h - 1$   
     $DP[i][j] = +\infty$   
    for int  $k = i$  to  $j - 1$  do  
      int  $temp = DP[i][k] + DP[k+1][j] + c[i - 1] \cdot c[k] \cdot c[j]$   
      if  $temp < DP[i][j]$  then  
         $DP[i][j] = temp$   
         $last[i][j] = k$   
return  $DP[1][n]$ 
```

---

**Valutazioni** Il costo computazionale è  $O(n^3)$ , in quanto ogni cella richiede tempo  $O(n)$  per essere riempita. Il costo della funzione si trova nella posizione  $DP[1][n]$ . È anche necessario mostrare la soluzione trovata, motivo per cui si sal-

vano le informazioni nella matrice last.

---

: Ricostruzione della soluzione - Stampa

---

```

void computePar(int [] c, int n)
{
    [...]
    printPar(last, 1, n)
}

void printPar(int [] last, int i, int j)
{
    if i == j then
        print "A["
        print i
        print "]"
    else
        print "("
        printPar(last, i, last[i][j])
        print "."
        printPar(last, last[i][j]+1, j)
        print ")"
}

```

---



---

: Ricostruzione della soluzione - Calcolo Effettivo

---

```

int [] Multiply(matrix [] A, int [] S, int i, int j)
{
    if i == j then
        return A[i]
    else
        int [] X = Multiply(S, i, S[i][j])
        int [] Y = Multiply(S, S[i][j]+1, j)
        return matrix-multiplication(X, Y)
}

```

---

### 13.3.8 Insieme indipendente di intervalli pesati

#### Problema

Si deve trovare un insieme indipendente di peso massimo, un sottoinsieme di intervalli disgiunti tra loro ( $b_j \leq a_i$  o  $b_i \leq a_j \forall i \neq j$ ) tale che la somma dei loro profitti sia la più grande possibile.

**Input** Siano dati  $n$  intervalli distinti  $[a_1, b_1[, \dots, [a_n, b_n[$  della retta reale aperti a destra, dove all'intervallo  $i$  è associato un profitto  $w_i$  con  $1 \leq i \leq n$ .

#### Pre-elaborazione

Per usare la programmazione dinamica è necessario ordinare gli intervalli per estremi finali crescenti. In una prima versione  $DP[i]$  contiene il profitto massimo ottenibile con i primi  $i$  intervalli:

$$DP[i] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \max(DP[i-1], \max\{DP[j] + w_i : j < i \wedge b_j \leq a_i\}) & i > 0 \end{cases}$$

### 13.3. PROBLEMI

---

Il costo computazione dell'algoritmo associato è  $O(n^2)$ .

Una possibile seconda pre-elaborazione consiste nel pre-calcolare il predecessore  $pred_i = j$  di  $i$ , dove  $j < i$  è il massimo indice tale che  $b_j \leq a_i$  e se non esiste tale indice  $pred_i = 0$ .

$$DP[i] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \max(DP[i-1], DP[pred_i] + w_i) & i > 0 \end{cases}$$

---

```
: int [] computePredecessor(int [] a, int [] b, int n)
```

---

```
int [] pred = new int [0...n]
pred[0] = 0
for int i = 1 to n do
    int j = i - 1
    while j > 0 and b[j] > a[i] do
        j = j - 1
    pred[i] = j
return pred
```

---

Si noti come calcolare i predecessori costi  $O(n^2)$ , ma può essere migliorato in  $O(n \log n)$ .

#### Implementazione

---

```
: Set maxInterval(int [] a, int [] b, int w, int n)
```

---

```
{ordina gli intervalli per estremi di fine crescenti}
int [] pred = computePredecessor(a, b, n)
int [] DP = new int [0...n]
DP[0] = 0
for int i = 1 to n do
    DP[i] = max(DP[i-1], w[i] + DP[pred[i]])
int i = n
Set S = Set()
while i > 0 do
    if DP[i-1] > w[i] + DP[pred[i]] then
        i = i - 1
    else
        S.insert(i)
        i = pred[i]
return S
```

---

#### Costo computazionale

- Ordinamento intervalli:  $O(n \log n)$ .



- Calcolo predecessori:  $O(n \log n)$ .
- Riempimento tabella DP:  $O(n)$ .
- Ricostruzione soluzione:  $O(n)$ .
- Algoritmo completo:  $O(n \log n)$ .