



МГТУ им. Н.Э. Баумана
Кафедра «Теоретическая информатика
и компьютерные технологии»

Порядки и фундированность

Вводная лекция по ДМА

А.Н. Невейвода
a_nevod@mail.ru, @TonitaN

Частичный порядок

Каркас определения

Бинарное отношение \prec на множестве P ($\prec \subseteq P \times P$) определяет порядок, если оно:

- транзитивно: $\forall a, b, c \in P (a \prec b \wedge b \prec c \Rightarrow a \prec c)$;
- антисимметрично: $\forall a, b \in P (a \prec b \wedge b \prec a \Rightarrow a = b)$

Поведение на диагонали (элементах $(a, a) \in P \times P$):

- строгий порядок: $\forall a \in P (\neg(a \prec a))$ — антирефлексивность;
- нестрогий порядок: $\forall a \in P (a \prec a)$ — рефлексивность.



Частичный порядок

Каркас определения

Бинарное отношение \prec на множестве P ($\prec \subseteq P \times P$) определяет порядок, если оно:

- транзитивно: $\forall a, b, c \in P (a \prec b \wedge b \prec c \Rightarrow a \prec c)$;
- антисимметрично: $\forall a, b \in P (a \prec b \wedge b \prec a \Rightarrow a = b)$

То есть частичный порядок соответствует отношению достижимости в ориентированном графе без циклов, за исключением, возможно, петель.

Граф, соответствующий порядку:

Порядок: $a \prec b$,
 $a \prec c$, $c \prec e$,
 $d \prec e$, $\underbrace{a \prec e}_{a \prec c \wedge c \prec e}$.

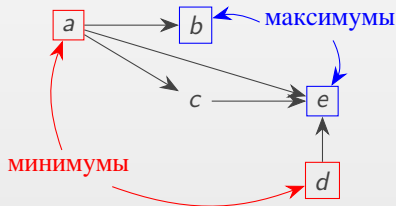


Диаграмма Хассе

Удобно перерисовать граф, изоморфный порядку, удалив визуальный мусор:

- рёбра — каркас, по которому однозначно восстанавливается достижимость;
- расположение вершин — минимумы снизу, максимумы сверху.

Какой-то граф, соответствующий порядку:

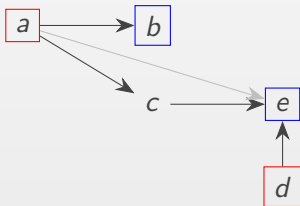


Диаграмма Хассе:

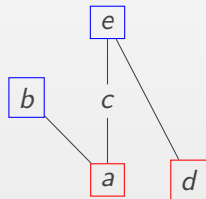


Диаграмма Хассе

Определение

Пусть P — множество элементов, $R \subset P \times P$ — отношение частичного порядка на нём. Диаграммой Хассе для пары $\langle P, R \rangle$ называется неориентированный граф $\langle V, E \rangle$ такой, что:

- множество вершин V есть P ;
 - $(a, b) \in E$ только если $(a, b) \in R \wedge a \neq b \wedge \nexists c \in P (c \neq a \wedge c \neq b \wedge (a, c) \in R \wedge (c, b) \in R)$;
 - если $(a, b) \in R$, то вершина a располагается в графе ниже вершины b . Обратное не обязательно выполняется.
-



Диаграммы Хассе и запрещённые подграфы

Если G — диаграмма Хассе, то в G запрещены подграфы-треугольники K_3 (это необходимое, но не достаточное свойство).

Связные диаграммы Хассе, в которых запрещены ветвления, описывают порядки, позволяющие сравнивать любые два элемента: формально $\forall a, b \in P(a \prec b \vee b \prec a)$. Такие порядки называются линейными (и их граф Хассе — это цепочка).

Какие ещё запрещённые подграфы в диаграммах Хассе приводят к полезным свойствам порядков, ими описываемых? Важный класс таких порядков будет приведён чуть позже.



Несколько примеров

- диаграммы без рёбер: $\begin{cases} \emptyset — \text{пустой строгий частичный порядок} \\ a \preceq b \iff a = b — \text{нестрогий порядок} \end{cases}$
- Все конечные линейно упорядоченные множества одного размера имеют одну и ту же структуру. Если P — конечное множество, и все его элементы сравнимы, то диаграмма Хассе такого порядка — цепочка из $|P| - 1$ звеньев.
- Если P бесконечно, то даже линейно его можно упорядочить по-разному.

В стиле \mathbb{N} : В стиле \mathbb{Z}^- : В стиле \mathbb{Z} : В стиле $(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2) \iff a_1 < a_2 \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 < b_2)$ на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$



Примеры практических частичных порядков

- Стандартные порядки ($<$, \leq) на множествах чисел (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{Q} и их подмножества).
- Любые порядки, основанные на оценке структур в \mathbb{N} :
 - слов по длине
 - графов по числу вершин и рёбер
 - многочленов по старшей степени
 - фигур по площади, et cetera
- Словарный порядок слов, заданный линейным порядком на их алфавите (лексикографический):
$$a_1 w_1 \prec a_2 w_2 \iff a_1 \prec a_2 \vee (a_1 = a_2 \wedge w_1 \prec w_2).$$
Пустое слово предполагается наименьшим.
- Структурные порядки:
 - слов по отношению вхождения
 - натуральных чисел по делимости
 - множеств по включению, et cetera



Зачем порядки программисту?

Алгоритм	Свойство порядка
Быстрый доступ к элементам упорядоченных множеств и сравнение таких множеств	линейность
Рекурсия "от большего к меньшему"	???
Итерация "пока есть изменения"	???

Полезно формализовать свойство завершенности вычислений по рекурсии — если они согласованы с порядком, в котором не может быть бесконечных убывающих цепей (как в $<$ на \mathbb{N}), то завершенность строго обоснована.



Фундированный порядок

Скажем, что пара $\langle P, < \rangle$ задаёт фундированное ("хорошо основанное") множество, если любое подмножество множества P имеет минимальный элемент.

Эквивалентное определение: граф Хассе отношения не содержит бесконечных цепей вниз, подграф "в стиле \mathbb{Z} " запрещён.

Фундированные

- $\langle \mathbb{N}, < \rangle$
- Конечные деревья, порядок "быть поддеревом"
- Множество строк, порядок "быть префиксом"

Не фундированные

- \mathbb{Z} (целые числа):
 $0 > -1 > -2 > \dots$
- $(0, 1]$ рациональные:
 $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$
- Множество строк, словарный порядок:
 $b > ab > aab > \dots$



Доказательство эквивалентности определений

$1 \Rightarrow 2$: Если любое подмножество имеет минимум, нет бесконечных убывающих цепей

- Предположим, есть бесконечная убывающая цепь:
 $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$
- Рассмотрим множество $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$
- По условию 1, S имеет минимальный элемент a_k
- Но тогда $a_k > a_{k+1} > \dots$ — противоречие с минимальностью a_k

$2 \Rightarrow 1$: Если нет бесконечных убывающих цепей, любое подмножество имеет минимум

- Возьмём любое непустое $S \subseteq P$
- Выберем $a_1 \in S$
- Если a_1 минимален — доказано
- Иначе существует $a_2 < a_1, a_2 \in S$
- Продолжая, получим цепь $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$
- По условию 2, цепь конечна \Rightarrow последний элемент минимален



Свойства практических частичных порядков

- Порядки, основанные на оценке структур в \mathbb{N} :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{слов по длине} \\ \text{графов по числу вершин и рёбер} \\ \text{многочленов по старшей степени} \\ \text{фигур по площади, et cetera} \end{array} \right. \quad \text{—} \quad \begin{array}{l} \text{обычно нелинейны,} \\ \text{но фундированы} \end{array}$

- Лексикографический порядок:

$a_1 w_1 \prec_{lex} a_2 w_2 \iff a_1 \prec a_2 \vee (a_1 = a_2 \wedge w_1 \prec w_2)$. Линеен, не фундирован. Shortlex-порядок:

$w_1 \prec_{slex} w_2 \iff |w_1| < |w_2| \vee (|w_1| = |w_2| \wedge w_1 \prec_{lex} w_2)$.
Линеен и фундирован.

- Структурные порядки:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{слов по отношению вхождения} \\ \text{натуральных чисел по делимости} \\ \text{множеств по включению, et cetera} \end{array} \right. \quad \text{—} \quad \begin{array}{l} \text{обычно нелинейны,} \\ \text{фундированны} \end{array}$



Индукция по фундированному порядку

Формулировка

Пусть (P, \leq) — фундированное множество. Чтобы доказать, что свойство $Q(x)$ верно для всех $x \in P$, достаточно доказать:

$$\forall x \in P \left(\forall y (y < x \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow Q(x) \right)$$

- Основание индукции скрыто: Для минимальных элементов посылка $\forall y (y < x \Rightarrow Q(y))$ верна всегда
- Требуется доказать $Q(x)$ для минимальных элементов напрямую
- Обобщение полной математической индукции на произвольные фундированные множества



Важность учёта всех минимумов

Ложное утверждение

$\forall x Q(x)$: "Любое натуральное число, большее 1, либо равно 2, либо составное"

1. База индукции для минимума: для 2 утверждение тривиально истинно.
2. Индукционное предположение: Выберем фундированный порядок \prec по отношению делимости
3. Шаг: Рассмотрим элемент x и произвольный y такой, что $y \prec x$
4. Поскольку мы предполагаем, что $Q(y)$, то y либо равен 2, либо составной. Значит, $x = k \cdot y$ ($k > 1$) уж тем более составной.
5. Ошибка: Выбор минимума по порядку $<$, а индукция по порядку \prec . Проигнорированы почти все минимумы по \prec — нечётные простые числа.



Важность свойства фундированности

Ложное утверждение

$\forall x(x > 0)$ на целых числах со стандартным порядком $\dots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \dots$

1. Индукционное предположение: $\forall y(y < x \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow Q(x)$
верно! У каждого числа найдётся меньшее его отрицательное число. Поэтому $\forall y(y < x \Rightarrow (y > 0))$ ложно для всех x , а из лжи следует всё что угодно.
2. Можем "заключить", что все числа неотрицательны



Применения индукции

Теоретические

- Теория множеств (индукция по \in)
- Теория доказательств (индукция по длине вывода)
- Теория рекурсии
- Теория графов (индукция по подграфам)

Практические

- Доказательство корректности алгоритмов
- Анализ программ с рекурсией
- Доказательство завершаемости
- Структурная индукция в формальных методах

