Трансформации и AST. Обработка ошибок. Проблема соотвествия Поста

Теория формальных языков

2022 г.

$\mathsf{LR}(k) \to \mathsf{LR}(1)$, Mickunas–Lancaster–Shneider

$$\begin{array}{lll} S' \to S & S \to Abb & S \to Bbc \\ A \to aA & A \to a & B \to aB \\ & B \to a & \end{array}$$

Не $\mathsf{LR}(1)$, из-за свёрток $A \to a$, $B \to a$. Используем трансформацию присоединения правого контекста:

$$\begin{array}{lll} S' \to S & S \to [Ab]b & S \to [Bb]c \\ [Ab] \to a[Ab] & [Ab] \to ab & [Bb] \to a[Bb] \\ & [Bb] \to ab & \end{array}$$

$\mathrm{LR}(k) \to \mathrm{LR}(1)$, Mickunas–Lancaster–Shneider

$$S' \to S \quad S \to bSS \quad S \to a$$
$$S \to aac$$

Не $\mathrm{LR}(1)$, конфликт свёртки на префиксе ba с контекстом a.
Используем трансформацию уточнения правого контекста:

$$\begin{array}{llll}
S \to bSa[a/S] & S \to bSb[b/S] & S \to a & S \to aac \\
[a/S] \to \varepsilon & [a/S] \to ac & [b/S] \to Sa[a/S] & [b/S] \to Sb[b/S]
\end{array}$$

Теперь присоединим правые контексты:

$$\begin{array}{llll}
S \to b[Sa][a/S] & \mid b[Sb][b/S] & \mid a & \mid aac \\
[Sa] \to b[Sa][[a/S]a] & \mid b[Sb][[b/S]a] & \mid aa & \mid aaca \\
[Sb] \to b[Sa][[a/S]b] & \mid b[Sb][[b/S]b] & \mid ab & \mid aacb \\
[a/S] \to \varepsilon & \mid ac & & \\
[[a/S]a] \to a & \mid aca & & \\
[[a/S]b] \to b & \mid acb & & \\
[[b/S]a] \to [Sa][[a/S]a] & \mid [Sb][[b/S]a] & & \\
[[b/S]b] \to [Sa][[a/S]b] & \mid [Sb][[b/S]b] & &
\end{array}$$

Присоединение правого контекста

- Пусть нужно присоединить правые контексты к нетерминалу A. Для всех правил вида $\mathsf{C} \to \gamma_1 \mathsf{A}\mathsf{t}\gamma_2$, где t — терминал, порождаем нетерминал $[\mathsf{A}\mathsf{t}]$ и заменяем им часть $\mathsf{A}\mathsf{t}$ данного правила.
- Для всех правил вида $A \to \delta$ добавляем правило $[\mathsf{A}\mathsf{t}] \to \delta\mathsf{t}$.
- Данное преобразование не может быть применено к правилу вида $\mathsf{C} \to \gamma_1 \mathsf{A}\mathsf{B}\gamma_2$. Поэтому, если нужно присоединять контекст в таком правиле, необходимо воспользоваться алгоритмом уточнения правого контекста.

Уточнение правого контекста

- Пусть нужно уточнить правый контекст у A по правилу $C \to \gamma_1 A B \gamma_2$. Положим, что FIRST(B) не содержит ε.
- Для каждого элемента $c \in$FIRST(B) строим нетерминал $[c/B]$ и правило $C \to \gamma_1 A c [c/B] \gamma_2$.
- Для всех правил вида $B \to c\delta$ строим правила $[c/B] \to \delta$.
- Для всех правил вида $B \to D\delta$ таких, что $c \in$FIRST(D), строим правила вида $[c/B] \to [c/D]\delta$. Рекурсивно замыкаем процедуру (до неподвижной точки).
- Если нужно уточнить контекст A по правилу $C \to \Phi A$, тогда ищем все правила $C' \to \Psi_1 C \Psi_2$, которые порождают C, получаем правила $C' \to \Psi_1 \Phi A \Psi_2$ и действуем с ними так же, как при обычном уточнении правого контекста.
- В полученной грамматике могут появиться ε-правила (кодировку для ε можно выбрать произвольно). Поэтому их придётся в дальнейшем устранить.

Применение MLS-подгонки

Исследовать на детерминированность язык
$L = \{a^n w c w^R b^n \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Видно, что если язык L распознаётся DPDA (т.е. является LR(1)-языком), то он также является LR(0)-языком, поскольку удовлетворяет префикс-свойству. Действительно, любое слово этого языка содержит единственную букву c, причём она расположена точно в середине слова.
Построим пробную КС-грамматику для языка L:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aSb \mid aCa \mid bCb \mid c \\ C & \to & aCa \mid bCb \mid c \end{array}$$

Проверим, является ли она LR(0)-грамматикой. Для этого построим LR(0)-автомат и проанализируем его на конфликты.

Применение MLS-подгонки

Исследовать на детерминированность язык
$L = \{a^n w c w^R b^n \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Пробная грамматика для L: $\begin{array}{lll} S & \to & aSb \mid aCa \mid bCb \mid c \\ C & \to & aCa \mid bCb \mid c \end{array}$

Начинаем строить LR(0)-автомат. Для этого вводим новое стартовое состояние S' (состояние окончательной свёртки) и начинаем разбор правила $S' \to \bullet S$.
Поскольку отмеченная позиция в правиле находится перед нетерминалом S, добавляем в состояние все ситуации вида $S \to \bullet\alpha$.
Переходы по нетерминалу S и терминалу c ведут к бесконфликтным свёрткам, поэтому малоинтересны. Разберёмся с переходом по a.

$$\boxed{\begin{array}{l} S' \to \bullet S \\ S \to \bullet aSb \\ S \to \bullet aCa \\ S \to \bullet bCb \\ S \to \bullet c \end{array}}$$

Применение MLS-подгонки

Исследовать на детерминированность язык
$L = \{a^n w c w^R b^n \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Пробная грамматика для L: $\begin{array}{lcl} S & \to & aSb \mid aCa \mid bCb \mid c \\ C & \to & aCa \mid bCb \mid c \end{array}$

Переходы по нетерминалу S и терминалу c ведут к бесконфликтным свёрткам, поэтому малоинтересны. Разберёмся с переходом по a.

$$\begin{array}{l} S' \to \bullet S \\ S \to \bullet aSb \\ S \to \bullet aCa \\ S \to \bullet bCb \\ S \to \bullet c \end{array} \xrightarrow{a} \begin{array}{l} S \to a \bullet Sb \\ S \to a \bullet Ca \\ S \to \bullet aSb \\ S \to \bullet aCa \\ S \to \bullet bCb \\ S \to \bullet c \\ C \to \bullet aCa \\ C \to \bullet bCb \\ C \to \bullet c \end{array}$$

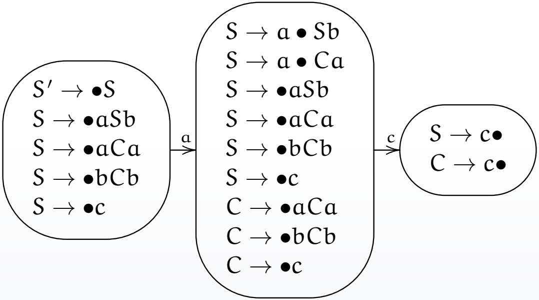
Похоже, что есть потенциальный конфликт ~~(даже два)~~ по свёрткам в S и C. Построим конфликтное состояние явно.

Применение MLS-подгонки

Исследовать на детерминированность язык
$L = \{a^n w c w^R b^n \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Пробная грамматика для L: $\begin{array}{lcl} S & \to & aSb \mid aCa \mid bCb \mid c \\ C & \to & aCa \mid bCb \mid c \end{array}$

Похоже, что есть потенциальный конфликт (даже два) по свёрткам в S и C.
Построим конфликтное состояние явно.



Присоединим к конфликтующим S и C-нетерминалам их правые контексты.

Применение MLS-подгонки

Исследовать на детерминированность язык
$L = \{a^n w c w^R b^n \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Пробная грамматика для L:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aSb \mid aCa \mid bCb \mid c \\ C & \to & aCa \mid bCb \mid c \end{array}$$

Грамматика для L после присоединения правых контекстов к нетерминалам S и C методом MLS (новые нетерминалы выделены красным):

$$\begin{array}{rcl} S & \to & a[Sb] \mid a[Ca] \mid b[Cb] \mid c \\ [Sb] & \to & a[Sb]b \mid a[Ca]b \mid b[Cb]b \mid cb \\ [Ca] & \to & a[Ca]a \mid b[Cb]a \mid ca \\ [Cb] & \to & a[Ca]b \mid b[Cb]b \mid cb \end{array}$$

Можно построить LR(0)-автомат для этой грамматики и убедиться, что он не содержит конфликтов. Значит язык L — детерминированный (более того, LR(0)).

LL-подгонка

- Устранение левой рекурсии;
- Извлечение левого контекста:

Если даны $A \to \Phi\gamma_1$, $A \to \Phi\gamma_2$, тогда можно построить эквивалентные правила $A \to \Phi\, A'$, $A' \to \gamma_1 \,|\, \gamma_2$.

Абстрактное синтаксическое дерево

Переход от конкретного дерева разбора к дереву разбора, содержащему только значащие нетерминалы, называется переходом к AST.

- Можно сливать транзитные узлы;
- Можно стирать ветви дерева разбора.

При применении подгонок и упрощений дерево разбора тоже меняется:

- устранение ε-правил — добавление новой абстрактной структуры;
- извлечение левого контекста — слияние сиблингов;
- присоединение и извлечение правого контекста — зависит от лексера и синхронизирующих токенов;
- устранение левой рекурсии — полностью перестраивает структуру дерева.

Подходы к восстановлению после ошибок в PDA

- Множество к.э. по Майхиллу–Нероуду бесконечно ⇒ синхронизация учитывает стек.

Подходы к восстановлению после ошибок в PDA

- Множество к.э. по Майхиллу–Нероуду бесконечно $\Rightarrow$ синхронизация учитывает стек.
- Стандартный подход: множество синхронизирующих терминалов строится для каждого нетерминала отдельно.

Подходы к восстановлению после ошибок в PDA

- Множество к.э. по Майхиллу–Нероуду бесконечно $\Rightarrow$ синхронизация учитывает стек.
- Стандартный подход: множество синхронизирующих терминалов строится для каждого нетерминала отдельно.
- (режим паники) При восстановлении после ошибки отбрасывается не только префикс ошибочного входа, но и вершина стека.

Подходы к восстановлению после ошибок в PDA

- Множество к.э. по Майхиллу–Нероуду бесконечно ⇒ синхронизация учитывает стек.
- Стандартный подход: множество синхронизирующих терминалов строится для каждого нетерминала отдельно.
- (режим паники) При восстановлении после ошибки отбрасывается не только префикс ошибочного входа, но и вершина стека.
- (режим починки) При восстановлении после ошибки стек не отбрасывается, а вход подгоняется под стек. Набор действий может зависеть от ячейки таблицы, содержащей ошибку.

Panic mode для LL-разбора

Ошибочная ситуация

Терминал в стеке не совпадает с терминалом на ленте, либо переход по таблице правил приводит к ошибке.

- Отбрасываем вершину стека до синхронизирующего токена и входные символы до успеха перехода по нему.
- Возможное удаление $\Rightarrow$ для токена A синхронизирующими могут предполагаться элементы FOLLOW(A).
- Возможная вставка $\Rightarrow$ синхронизирующие — FIRST(A). Если конфликт терминалов — интерпретируем как возможную вставку.

Panic mode для LR-разбора

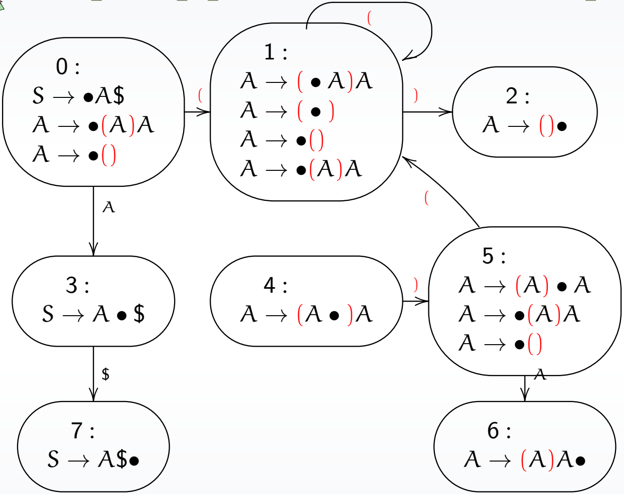
Ошибочная ситуация

Переход по таблице правил приводит к ошибке.

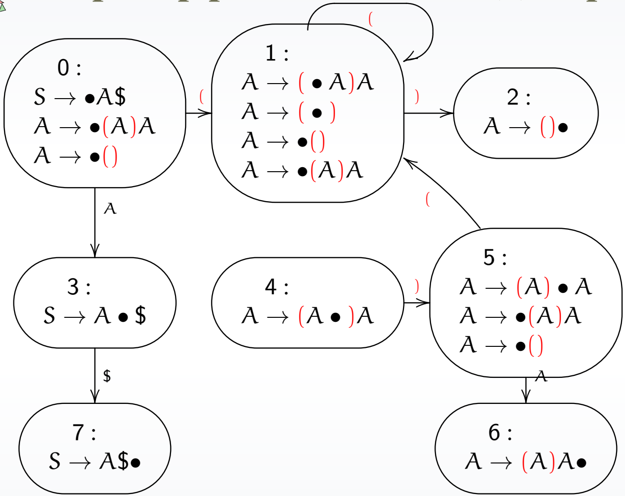
- Вводим специальный токен «ошибка» в правиле $A \to \beta \bullet \alpha$, на котором она произошла.
- Отбрасываем вершину стека до свёртки по правилу $A \to$«ошибка»$\alpha\bullet$, не добавляя ничего в стек (если есть lookahead, то до совпадения с lookahead-ом). Продолжаем разбор дальше.

Альтернатива: поиск «починки» — минимального количества действий, позволяющего возобновить парсинг.

Пример panic mode в LR(0)-парсере



Пример panic mode в LR(0)-парсере



Разбор строки $()()\$$: $([0], ()()\$) \to ([1,0],)()\$) \to ([2,1,0], ()\$) \to ([3,0], ()\$)$
На этом шаге происходит ошибка. Строим $S \to \bullet$«ошибка»$, отбрасываем () и редуцируемся в S.

Бурке–Фишер и его вариации

Идея алгоритма

При заранее заданном k и ошибке на i-ом терминале входа рассмотреть возможные последовательности терминалов от i-ого до $i + k - 1$-ого, продолжающие парсинг, и выбрать в качестве «починки» ту из них, расстояние Левенштейна до которой от реального входа наименьшее.

- (Corchuello et al) Также разрешается делать операции сдвига по lookahead-у.
- (Diekmann et al) Ищутся все возможные варианты «починки» и выбирается тот из них, который позволяет продолжить разбор на наибольшую глубину.

Разрешимость проблем в КС-грамматиках

Разрешимые проблемы

- Пустота языка
- Вхождение слова в язык
- Бесконечность языка

Неразрешимые проблемы

...большинство остальных.

Подход к доказательству неразрешимости: машины Тьюринга «с историей».

«История» вычислений

Плоская конфигурация машины Тьюринга — это $P_1 q_i p_j P_2$, где P_1 — это лента слева от головки МТ, q_i — состояние МТ, p_j — ячейка ленты, на которой стоит головка, P_2 — лента справа от головки.

Тогда шаг МТ описывается как SRS на конфигурациях.

- Пусть в состоянии q_i, прочитав символ p_i, МТ записывает p_i' и сдвигает головку вправо, переходя в состояние q_j. Тогда правило переписывания имеет вид $q_i p_i \to p_i' q_j$.
- Пусть в состоянии q_i, прочитав символ p_i, МТ записывает p_i' и сдвигает головку влево, переходя в состояние q_j, причём слева от ячейки стоит символ p_{i-1}. Тогда правило переписывания имеет вид $p_{i-1} q_i p_i \to q_j p_{i-1} p_i'$.

История вычисления МТ — это $w_0 \# w_1 \# \dots \# w_F$, где w_0 — стартовая, w_F — финальная конфигурации, и w_{i+1} получается из w_i применением SRS, описывающей шаги МТ.

Пересечение КС-грамматик

Рассмотрим следующие истории:

$$w_0\#w_1^R\#w_2\#w_3^R\dots\#w_F^G$$

Где w_i — конфигурации, начиная со стартовой и кончая какой-нибудь финальной (но не обязательно согласующиеся с правилами МТ); $w_{2\cdot i}^G$ — это просто $w_{2\cdot i}$; $w_{2\cdot i+1}^G$ — это $w_{2\cdot i}^R$ (реверсированная конфигурация).

- Язык $\mathscr{L}_1 = \{w_0\#w_1^R\#w_2\#w_3^R\dots\#w_F^G \mid$ $\#w_{2\cdot i}$ согласована с $\#w_{2\cdot i+1}$ относительно правил МТ$\}$ является КС (достаточно попарно разобрать конфигурации как слова, получающиеся из палиндромов конечным числом правил).
- Язык $\mathscr{L}_2 = \{w_0\#w_1^R\#w_2\#w_3^R\dots\#w_F^G \mid$ $\#w_{2\cdot i+1}$ согласована с $\#w_{2\cdot i+2}$ относительно правил МТ$\}$ является КС (аналогично).

Пересечение КС-грамматик

- Язык $\mathscr{L}_1 = \{w_0\#w_1^R\#w_2\#w_3^R \dots \#w_F^G \mid \#w_{2\cdot i}$ согласована с $\#w_{2\cdot i+1}$ относительно правил МТ$\}$ является КС (достаточно попарно разобрать конфигурации как слова, получающиеся из палиндромов конечным числом правил).
- Язык $\mathscr{L}_2 = \{w_0\#w_1^R\#w_2\#w_3^R \dots \#w_F^G \mid \#w_{2\cdot i+1}$ согласована с $\#w_{2\cdot i+2}$ относительно правил МТ$\}$ является КС (аналогично).
- $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow$ язык, порождаемый МТ, не пуст.
- Следовательно, проблема $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \stackrel{?}{=} \varnothing$ неразрешима для КС-языков.

Неразрешимость всеобщности

Язык $\mathscr{L}_{\mathtt{fail}} = \Sigma^* \setminus (\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2)$ является КС. КС-грамматика — объединение грамматики для языка, где хотя бы один переход с чётного шага истории на нечётный не согласуется с правилами МТ, грамматики для языка, где несогласование есть при переходе с нечётного шага на чётный, и грамматики для языка слов, имеющих неправильную лексическую структуру.

Следствие

Вопрос $\mathscr{L} \stackrel{?}{=} \Sigma^*$ неразрешим для КС-грамматик (т.к. если есть способ разрешать $\mathscr{L}_{\mathtt{fail}} \stackrel{?}{=} \Sigma^*$, тогда есть способ и разрешить проблему пустоты языка МТ).

Проблема соответствия Поста

Рассмотрим «домино» из пар $\langle u, w \rangle \in \langle \Sigma^*, \Sigma^* \rangle$. Пусть имеется n таких пар вида $\langle u_i, w_i \rangle$. Существует ли последовательность индексов, такая что $u_{i_1} \dots u_{i_k} = w_{i_1} \dots w_{i_k}$?

- Неразрешима — рассмотрим пошаговые «истории» МТ.
- Следствие — вопрос о неоднозначности КС-грамматики тоже неразрешим; вопрос о вхождении палиндрома в КС-язык неразрешим; вопрос о вхождении квадрата в КС-язык неразрешим.

Теорема Грейбах

Пусть C — семейство языков, содержащее все регулярные языки, для которого неразрешима проблема всеобщности. Если это семейство замкнуто относительно объединения и приписывания регулярных языков, то для него неразрешимо никакое свойство, выполняющееся для всех регулярных языков и замкнутое относительно производных.