Восходящий разбор.
Неоднозначность и детерминированность

Теория формальных языков

2022 г.

(Не)лирическое отступление

(Не)лирическое отступление

- Дополнительные задания не требуют больших объёмов кода, доступны всем (в том числе группам) и стоят минимум 2 балла. Следим за горящими сроками!
- Запись на доделывание закрывается после дедлайна.
- Планируем действия заранее:
    - 3 лабораторная по объёму большая — используем чужой код (с контеста, от прошлых цивилизаций), но не забываем про структуры (и Рефал-стайл).
    - 4 лабораторная будет сложной (и прошлые цивилизации помогут мало). Зато будет 2 допзадания!
    - 5 лабораторная будет легче, но выполняться в мини-группах. Допзадание будет одно.
    - На последней неделе(!!) будет биг-фарма: возможность добрать баллы по всем темам решением задач.

Неоднозначные КС-языки

Рассмотрим КС-язык $\{a^n b^m c^m\} \cup \{a^n b^n c^m\}$. Слова $a^n b^n c^n$ этого языка гарантированно имеют минимум два дерева разбора.

Неоднозначные КС-языки

Рассмотрим КС-язык $\{a^n b^m c^m\} \cup \{a^n b^n c^m\}$. Слова $a^n b^n c^n$ этого языка гарантированно имеют минимум два дерева разбора.

Определение

КС-грамматика G неоднозначная, если существует слово $w \in L(G)$ такое, что в G у него больше одного дерева разбора. КС-язык L существенно неоднозначен, если всякая его грамматика неоднозначна.

Неоднозначные КС-языки

Рассмотрим КС-язык $\{a^n b^m c^m\} \cup \{a^n b^n c^m\}$. Слова $a^n b^n c^n$ этого языка гарантированно имеют минимум два дерева разбора.

Определение

КС-грамматика G неоднозначная, если существует слово $w \in L(G)$ такое, что в G у него больше одного дерева разбора. КС-язык L существенно неоднозначен, если всякая его грамматика неоднозначна.

Существование однозначной грамматики не гарантирует существования DPDA: см. $\{a^n b^n\} \cup \{a^n b^{2n}\}$.

Алгоритм Касами–Тории

Алгоритм Кока–Янгера–Касами — таблица
$T_{i,j} = \{A \mid a_{i+1} \dots a_j \in L_G(A)\}$; изменим её на
$T'_j[A] = \{i \mid a_{i+1} \dots a_j \in L_G(A)\}$.

Алгоритм Касами–Тории

Алгоритм Кока–Янгера–Касами — таблица $T_{i,j} = \{A \mid a_{i+1} \dots a_j \in L_G(A)\}$; изменим её на $T'_j[A] = \{i \mid a_{i+1} \dots a_j \in L_G(A)\}$.

Идея алгоритма CT

Читаем очередной символ, вычисляем множество $T'_j[A]$ для всех $A \in N$, постепенно достраивая его как список, упорядоченный по возрастанию. Если $A \to BC$, тогда если $k \in T'_j[C]$, то для всех $x \in T'_k[B]$ выполнено $x \in T'_j[A]$.

Алгоритм Касами–Тории

Алгоритм Кока–Янгера–Касами — таблица $T_{i,j} = \{A \mid a_{i+1} \dots a_j \in L_G(A)\}$; изменим её на $T'_j[A] = \{i \mid a_{i+1} \dots a_j \in L_G(A)\}$.

$\forall j, A (T'_j[A] = \varnothing)$
`for j=1..n`
  `for all` $A \in N$ `if` $A \to a_j \in R$ `then` $T'_j[A] = \{j-1\}$
  `for k=j-1..1`
    `for all` $A \to BC \in R$
      `if` $k \in T'_j[C]$ `then for all` $i \in T'_k[B]$ $T'_j[A] = T'_j[A] \cup \{i\}$

Алгоритм Касами–Тории

Алгоритм Кока–Янгера–Касами — таблица
$T_{i,j} = \{A \mid a_{i+1} \dots a_j \in L_G(A)\}$; изменим её на
$T'_j[A] = \{i \mid a_{i+1} \dots a_j \in L_G(A)\}$.

$\forall j, A (T'_j[A] = \varnothing)$
for j=1..n
  for all $A \in N$ if $A \to a_j \in R$ then $T'_j[A] = \{j-1\}$
  for k=j-1..1
    for all $A \to BC \in R$
      if $k \in T'_j[C]$ then for all $i \in T'_k[B]$ $T'_j[A] = T'_j[A] \cup \{i\}$

Для однозначных грамматик АСТ работает за $O(n^2)$.

$S \to G_A A \,|\, G_B B \,|\, a \,|\, b$ $\quad A \to a \,|\, S G_A$ $\quad B \to b \,|\, S G_B$

$G_A \to a$ $\quad G_B \to b$ $\quad$ слово $abba$

$\forall \mathbf{j}, \mathbf{A}(\mathbf{T}'_{\mathbf{j}}[\mathbf{A}] = \varnothing)$

```
for j=1..n
  for k=j-1..1
    for all A → BC ∈ R
      if k ∈ T'_j[C] then for all i ∈ T'_k[B]  T'_j[A] = T'_j[A] ∪ {i}
```

Инициализация таблицы:

	S	A	B	G_A	G_B
1 — **a**					
2 — **b**					
3 — **b**					
4 — **a**					

$S \to G_A A \mid G_B B \mid \mathbf{a} \mid b \quad A \to \mathbf{a} \mid SG_A \quad B \to b \mid SG_B$

$G_A \to \mathbf{a} \quad G_B \to b \quad$ слово $abba$

```
∀j, A(T'_j[A] = ∅)
for j=1..n  \\ j = 1
  for all A ∈ N if A → a_j ∈ R then T'_j[A] = {j − 1}
  for k=j-1..1
    for all  A → BC ∈ R
      if  k ∈ T'_j[C]  then  for all  i ∈ T'_k[B]  T'_j[A] = T'_j[A] ∪ {i}
```

$j = 1$, проход по терминальным правилам, цикла по нетерминальным нет, т.к. $k = 0$:

	S	A	B	G_A	G_B
1 — **a**	0	0		0	
2 — **b**					
3 — **b**					
4 — **a**					

$S \to G_A A \,|\, G_B B \,|\, a \,|\, \mathbf{b}$ $\quad A \to a \,|\, SG_A$ $\quad B \to \mathbf{b} \,|\, SG_B$

$G_A \to a$ $\quad G_B \to \mathbf{b}$ $\quad$ слово $abba$

$\forall j, A(T_j'[A] = \varnothing)$

for j=1..n \\ $\mathbf{j = 2}$

  for all $A \in N$ **if** $A \to a_j \in R$ **then** $T_j'[A] = \{j-1\}$

  for k=j-1..1

    for all $A \to BC \in R$

      if $k \in T_j'[C]$ then for all $i \in T_k'[B]$ $T_j'[A] = T_j'[A] \cup \{i\}$

$j = 2$, проход по терминальным правилам:

	S	A	B	G_A	G_B
1 — **a**	0	0		0	
2 — **b**	1		1		1
3 — **b**					
4 — **a**					

$\mathbf{S} \to G_A A \mid \mathbf{G_B B} \mid a \mid b \quad A \to a \mid SG_A \quad \mathbf{B} \to b \mid \mathbf{SG_B}$

$G_A \to a \quad G_B \to b$ слово $abba$

$\forall j, A(T_j'[A] = \varnothing)$

```
for j=1..n \\ j = 2
  for k=j-1..1 \\ k = 1
    for all A → BC ∈ R \\  если второй нетерминал правой части есть в строке 2 с индексом 1
      if k ∈ T_j'[C] then for all i ∈ T_k'[B] T_j'[A] = T_j'[A] ∪ {i}
\\  тогда добавляем в ячейку второй строки для левого нетерминала содержимое ячейки первого нетерминала в строке 1
```

Подходящие правила есть для B и G_B. Но для нетерминала G_B (правило $S \to G_B B$) ячейка в первой строке пуста, так что добавляем только содержимое ячейки для S в ячейку B.

	S	A	B	G_A	G_B
1 — **a**	0	0		0	
2 — **b**	1		1, 0		1
3 — **b**					
4 — **a**					

$S \to G_A A \mid G_B B \mid a \mid \mathbf{b}$ $\quad A \to a \mid S G_A$ $\quad B \to \mathbf{b} \mid S G_B$

$G_A \to a$ $\quad G_B \to \mathbf{b}$ $\quad$ слово $abba$

```
∀j, A(T'_j[A] = ∅)
for j=1..n \\ j = 3
  for all A ∈ N if A → a_j ∈ R then T'_j[A] = {j − 1}
  for k=j-1..1
    for all A → BC ∈ R
      if k ∈ T'_j[C] then for all i ∈ T'_k[B] T'_j[A] = T'_j[A] ∪ {i}
```

j = 3, проход по терминальным правилам:

	S	A	B	G_A	G_B
1 — **a**	0	0		0	
2 — **b**	1		1, 0		1
3 — **b**	2		2		2
4 — **a**					

$\mathbf{S} \to G_A A \mid \mathbf{G_B B} \mid a \mid b$ $\quad A \to a \mid SG_A$ $\quad \mathbf{B} \to b \mid \mathbf{SG_B}$

$G_A \to a$ $\quad G_B \to b$ $\quad$ слово $abba$

$\forall j, A(T_j'[A] = \varnothing)$

```
for j=1..n \\ j = 3
  for k=j-1..1  \\ k = 2
    for all A → BC ∈ R \\  если второй нетерминал правой части есть в строке 3 с индексом 2
      if k ∈ T_j'[C] then for all i ∈ T_k'[B] T_j'[A] = T_j'[A] ∪ {i}
\\  тогда добавляем в ячейку третьей строки для левого нетерминала содержимое ячейки первого нетерминала в строке 2
```

Подходящие правила: $S \to G_B B$, $B \to SG_B$, причём во второй строке ячейки G_B и S обе не пустые. Добавляем их содержимое в ячейки левых частей, S и B:

	S	A	B	G_A	G_B
1 — **a**	0	0		0	
2 — **b**	1		1, 0		1
3 — **b**	2, 1		2, 1		2
4 — **a**					

$\mathbf{S} \to G_A A \,|\, \mathbf{G_B B} \,|\, a \,|\, b \quad A \to a \,|\, SG_A \quad B \to b \,|\, SG_B$

$G_A \to a \qquad G_B \to b$ слово $abba$

$\forall j, A(T_j'[A] = \varnothing)$

for j=1..n \\ $\mathbf{j = 3}$

for k=j-1..1 \\ $\mathbf{k = 1}$

for all $A \to BC \in R$ \\ если второй нетерминал правой части есть в строке 3 с индексом 1

if $k \in T_j'[C]$ then for all $i \in T_k'[B]$ $T_j'[A] = T_j'[A] \cup \{i\}$ \\ тогда добавляем в ячейку третьей строки для левого нетерминала содержимое ячейки первого нетерминала в строке 1

1 в третьей строке есть у нетерминалов S и B, но первый никогда не бывает вторым в правой части. Остаётся правило $S \to G_B B$, оно также ничего не даёт, т.к. в первой строке ячейка G_B пуста.

	S	A	B	G_A	G_B
1 — **a**	0	0		0	
2 — **b**	1		1, 0		1
3 — **b**	2, 1		2, 1		2
4 — **a**					

$S \to G_A A \mid G_B B \mid \mathbf{a} \mid b \quad A \to \mathbf{a} \mid SG_A \quad B \to b \mid SG_B$
$G_A \to \mathbf{a} \quad G_B \to b$ слово $abba$

```
∀j, A(T'_j[A] = ∅)
for j=1..n \\ j = 4
  for all A ∈ N if A → a_j ∈ R then T'_j[A] = {j − 1}
  for k=j-1..1
    for all A → BC ∈ R
      if k ∈ T'_j[C] then for all i ∈ T'_k[B] T'_j[A] = T'_j[A] ∪ {i}
```

$j = 4$, проход по терминальным правилам:

	S	A	B	G_A	G_B
1 − **a**	0	0		0	
2 − **b**	1		1, 0		1
3 − **b**	2, 1		2, 1		2
4 − **a**	3	3		3	

$\mathbf{S} \to \mathbf{G_A A} \,|\, G_B B \,|\, a \,|\, b$ $\quad$ $\mathbf{A} \to a \,|\, \mathbf{SG_A}$ $\quad$ $B \to b \,|\, SG_B$

$G_A \to a$ $\quad$ $G_B \to b$ $\quad$ слово $abba$

```
∀j, A(T'_j[A] = ∅)
for j=1..n \\ j = 4
  for k=j-1..1  \\ k = 3
    for all A → BC ∈ R  \\ если второй нетерминал правой части есть в строке 4 с индексом 3
      if k ∈ T'_j[C] then for all i ∈ T'_k[B] T'_j[A] = T'_j[A] ∪ {i}
\\ тогда добавляем в ячейку 4-ой строки для левого нетерминала содержимое ячейки первого нетерминала в строке 3
```

Подходящие правила: $S \to G_A A$, $A \to SG_A$, однако ячейка G_A в третьей строке пуста. Добавляем содержимое ячейки S в ячейку A в четвёртой строке.

	S	A	B	G_A	G_B
1 — **a**	0	0		0	
2 — **b**	1		1, 0		1
3 — **b**	2, 1		2, 1		2
4 — **a**	3	3, 2, 1		3	

$\mathbf{S} \to \mathbf{G_A A} \mid G_B B \mid a \mid b \quad A \to a \mid SG_A \quad B \to b \mid SG_B$

$G_A \to a \quad G_B \to b \quad$ слово $abba$

```
∀j, A(T'_j[A] = ∅)
for j=1..n \\ j = 4
  for k=j-1..1  \\ k = 2
    for all A → BC ∈ R   \\ если второй нетерминал правой части есть в строке 4 с индексом 2
      if k ∈ T'_j[C] then for all i ∈ T'_k[B] T'_j[A] = T'_j[A] ∪ {i}
\\ тогда добавляем в ячейку 4-ой строки для левого нетерминала содержимое ячейки первого нетерминала в строке 2
```

Подходящее правило: $S \to G_A A$, однако ячейка G_A во второй строке пуста. На этом шаге таблица не меняется.

	S	A	B	G_A	G_B
1 — **a**	0	0		0	
2 — **b**	1		1, 0		1
3 — **b**	2, 1		2, 1		2
4 — **a**	3	3, 2, 1		3	

$S \to G_A A \mid G_B B \mid a \mid b \quad A \to a \mid SG_A \quad B \to b \mid SG_B$

$G_A \to a \quad G_B \to b \quad$ слово $abba$

```
∀j, A(T'_j[A] = ∅)
for j=1..n \\ j = 4
  for k=j-1..1 \\ k = 1
    for all A → BC ∈ R    \\ если второй нетерминал правой части есть в строке 4 с индексом 1
      if k ∈ T'_j[C] then for all i ∈ T'_k[B] T'_j[A] = T'_j[A] ∪ {i}
\\ тогда добавляем в ячейку 4-ой строки для левого нетерминала содержимое ячейки первого нетерминала в строке 1
```

Подходящее правило опять $S \to G_A A$, и на сей раз нужная ячейка G_A не пуста. То, что теперь $0 \in T'_4[S]$, показывает, что $abba \in L(G)$, поскольку $T'_4[S] = \{i \mid a_{i+1} \dots a_4 \in L_G(S)\}$, где $a_1 a_2 a_3 a_4 = abba$.

	S	A	B	G_A	G_B
1 — **a**	0	0		0	
2 — **b**	1		1, 0		1
3 — **b**	2, 1		2, 1		2
4 — **a**	3, 0	3, 2, 1		3	

Детерминированные КС-языки

Язык L обладает префикс-свойством (prefix-free), если $\forall w (w \in \mathsf{L} \Rightarrow \forall v (v \neq \varepsilon \Rightarrow wv \notin \mathsf{L}))$.

Детерминированные КС-языки

Язык L обладает префикс-свойством (prefix-free), если $\forall w(w \in \mathrm{L} \Rightarrow \forall v(v \neq \varepsilon \Rightarrow wv \notin \mathrm{L}))$.

Детерминированные языки с префикс-свойством — языки, распознаваемые DPDA с допуском по пустому стеку.

Рассмотрим язык $\mathtt{a}^+$. Предположим, он распознаётся DPDA с допуском по пустому стеку. Тогда на элементе $\mathtt{a}$ стек уже обязательно пуст. А значит, работа DPDA не может быть продолжена, и элемент $\mathtt{a}\mathtt{a}$ не может быть им распознан.

Детерминированные КС-языки

Язык L обладает префикс-свойством (prefix-free), если $\forall w (w \in \mathsf{L} \Rightarrow \forall v (v \neq \varepsilon \Rightarrow wv \notin \mathsf{L}))$.

Детерминированные языки с префикс-свойством — языки, распознаваемые DPDA с допуском по пустому стеку.

Рассмотрим язык L, $w_1, w_1 w_2 \in \mathsf{L}$, $w_2 \neq \varepsilon$. Предположим, он распознаётся DPDA с допуском по пустому стеку. Тогда на элементе w_1 стек уже обязательно пуст. А значит, работа DPDA не может быть продолжена, и элемент $w_1 w_2$ не может быть им распознан.

Эндмаркеры

Рассмотрим язык $a^+\$$ (алфавит терминалов $\Sigma = \{a, \$\}$). В этом языке ни одно слово не является префиксом другого.

Эндмаркеры

Рассмотрим язык $\{w\$ \mid w \in \mathrm{L}\}$ (алфавит терминалов $\Sigma = \Sigma_{\mathrm{L}} \cup \{\$\}$, $\$ \notin \Sigma_{\mathrm{L}}$). Независимо от L, в этом языке ни одно слово не является префиксом другого.

- Хорошие новости: любой детерминированный КС-язык легко преобразовать в язык, распознаваемый DPDA с допуском по пустому стеку.

Эндмаркеры

Рассмотрим язык $\{w\$ \mid w \in L\}$ (алфавит терминалов $\Sigma = \Sigma_L \cup \{\$\}$, $\$ \notin \Sigma_L$). Независимо от L, в этом языке ни одно слово не является префиксом другого.

- Хорошие новости: любой детерминированный КС-язык легко преобразовать в язык, распознаваемый DPDA с допуском по пустому стеку.
- Плохие новости: существенно неоднозначные контекстно-свободные языки с префикс-свойством. Стандартный пример: $\{a^n b^n c^m d\} \cup \{a^m b^n c^n d\}$.

Языки нередуцируемых префиксов

Определим понятие свёртки — перехода справа налево в правиле переписывания $A \to \alpha$. Что можно сказать о всех возможных префиксах сентенциальных форм, порождаемых грамматикой G, к которым нельзя применить ни одну свёртку?

Языки нередуцируемых префиксов

Определим понятие свёртки — перехода справа налево в правиле переписывания $A \to \alpha$. Что можно сказать о всех возможных префиксах сентенциальных форм, порождаемых грамматикой G, к которым нельзя применить ни одну свёртку?

Такие с.ф. образуют регулярный язык. Идея обоснования: в распознающем их PDA из стека ничего не читается, т.е. PDA учитывает только символы сент. формы и свои состояния.

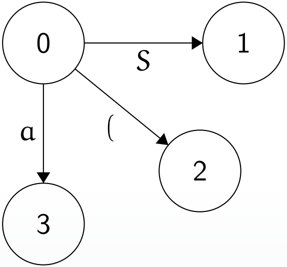
Автомат нередуцируемых префиксов

Описание конструкции

- Отмеченная позиция в правиле: $\bullet$. В правиле с правой частью $\xi_1 \ldots \xi_n$ есть $n+1$ таких позиций.
- Правило $A \to \alpha \bullet B\beta$ и правило $B \to \bullet\gamma$ — одно и то же множество переходов по символу, не приводящих к редукции $\Rightarrow$ в одном состоянии.
- При чтении элемента правой части сдвигаем $\bullet$ вправо на позицию.

Автомат нередуцируемых префиксов

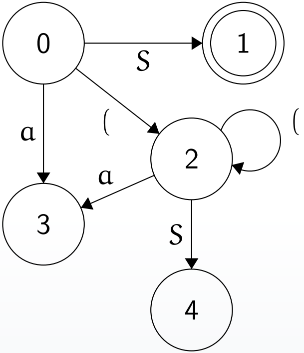
$$S' \to S \quad S \to a \quad S \to (S)$$



0	$S' \to \bullet S$
	$S \to \bullet (S)$
	$S \to \bullet a$
1	$S' \to S \bullet$
2	$S \to (\bullet S)$
3	$S \to a \bullet$

Автомат нередуцируемых префиксов

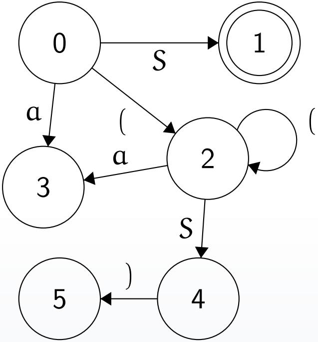
$$S' \to S \quad S \to a \quad S \to (S)$$



0	$S' \to \bullet S$
	$S \to \bullet(S)$
	$S \to \bullet a$
1	$S' \to S\bullet$
2	$S \to (\bullet S)$
	$S \to \bullet(S)$
	$S \to \bullet a$
3	$S \to a\bullet$
4	$S \to (S\bullet)$

Автомат нередуцируемых префиксов

$$S' \to S \quad S \to a \quad S \to (S)$$



0	$S' \to \bullet S$
	$S \to \bullet(S)$
	$S \to \bullet a$
1	$S' \to S\bullet$
2	$S \to (\bullet S)$
	$S \to \bullet(S)$
	$S \to \bullet a$
3	$S \to a\bullet$
4	$S \to (S\bullet)$
5	$S \to (S)\bullet$

Типы состояний автомата

1. Финальное (свёртка в S').
2. Не финальное, но свёртка.
3. Сдвиг по символу сентенциальной формы.

Что хранить в стеке PDA, построенного по такому автомату?

Типы состояний автомата

1. Финальное (свёртка в S').
2. Не финальное, но свёртка.
3. Сдвиг по символу сентенциальной формы.

Что хранить в стеке PDA, построенного по такому автомату?

- Хранить сами сентенциальные формы плохо — проблема с извлечением нескольких подряд символов.

Типы состояний автомата

1. Финальное (свёртка в S').
2. Не финальное, но свёртка.
3. Сдвиг по символу сентенциальной формы.

Что хранить в стеке PDA, построенного по такому автомату?

- Хранить сами сентенциальные формы плохо — проблема с извлечением нескольких подряд символов.
- Логично хранить последовательности последних символов с.ф., которые могут привести к разным свёрткам, закодированными одним символом стека.

Типы состояний автомата

1. Финальное (свёртка в S').
2. Не финальное, но свёртка.
3. Сдвиг по символу сентенциальной формы.

Что хранить в стеке PDA, построенного по такому автомату?

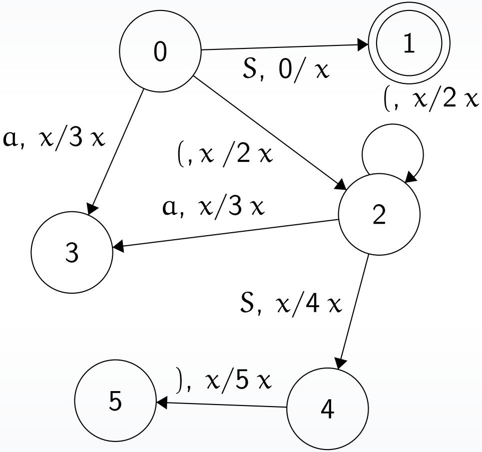
- Хранить сами сентенциальные формы плохо — проблема с извлечением нескольких подряд символов.
- Логично хранить последовательности последних символов с.ф., которые могут привести к разным свёрткам, закодированными одним символом стека.
- А это — в точности состояния автомата.

PDA по LR(0)-автомату

Общая конструкция

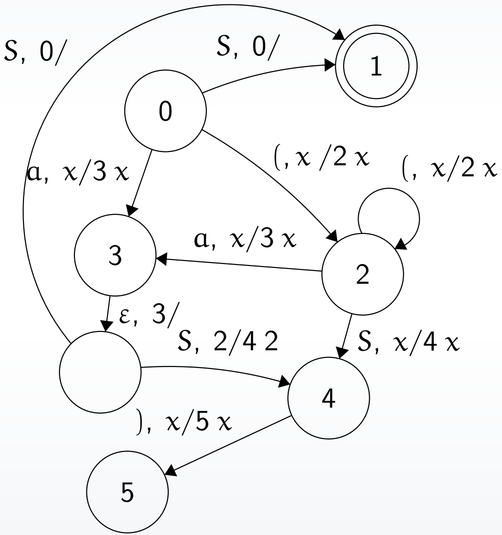
- При каждом сдвиге кладём в стек номер состояния, в которое приходим в конечном автомате.
- При каждой свёртке извлекаем из стека n символов, где n — длина правой части β правила $A \to \beta$, после чего переходим в состояние с номером $n+1$-ого символа в стеке, подразумевая на ленте символ A.
- Совершаем переход по символу A из полученного состояния (этот шаг мы на графе объединили с предыдущим).

Пример построения PDA



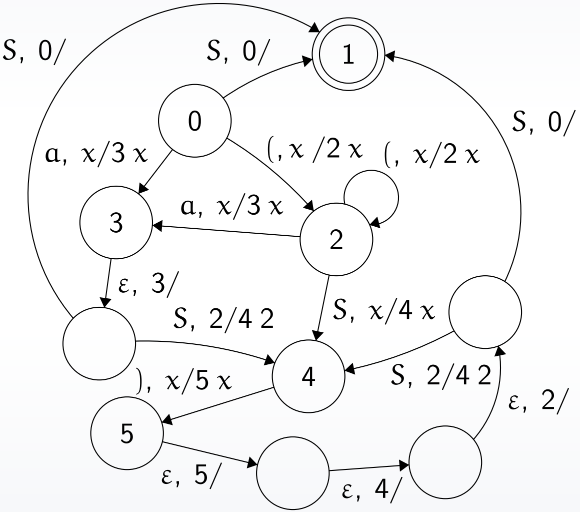
0	$S' \to \bullet S$	
	$S \to \bullet(S)$	
	$S \to \bullet a$	
1	$S' \to S\bullet$	$S \to S'$
2	$S \to (\bullet S)$	
	$S \to \bullet(S)$	
	$S \to \bullet a$	
3	$S \to a\bullet$	$a \to S$
4	$S \to (S\bullet)$	
5	$S \to (S)\bullet$	$(S) \to S$

Пример построения PDA



0	$S' \to \bullet S$	
	$S \to \bullet(S)$	
	$S \to \bullet a$	
1	$S' \to S\bullet$	$S \to S'$
2	$S \to (\bullet S)$	
	$S \to \bullet(S)$	
	$S \to \bullet a$	
3	$S \to a\bullet$	$a \to S$
4	$S \to (S\bullet)$	
5	$S \to (S)\bullet$	$(S) \to S$

Пример построения PDA

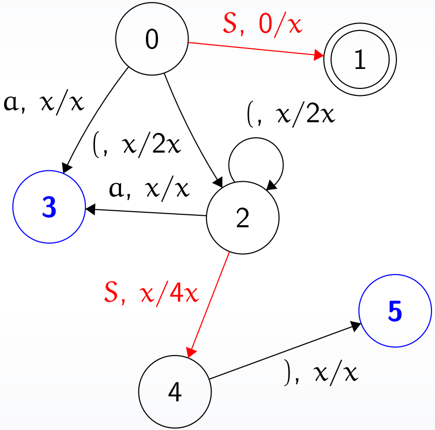


0	$S' \to \bullet S$	
	$S \to \bullet(S)$	
	$S \to \bullet a$	
1	$S' \to S\bullet$	$S \to S'$
2	$S \to (\bullet S)$	
	$S \to \bullet(S)$	
	$S \to \bullet a$	
3	$S \to a\bullet$	$a \to S$
4	$S \to (S\bullet)$	
5	$S \to (S)\bullet$	$(S) \to S$

Промежуточный PDA-распознаватель

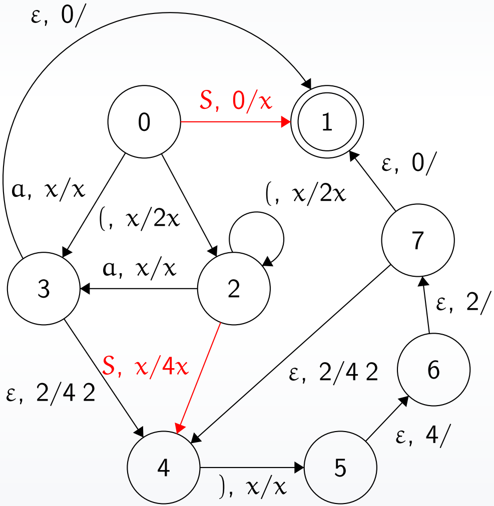
- Стековые символы, ведущие в состояния свёртки, не являющиеся финальными (у нас это 3 и 5), бесполезны, потому что сразу же безальтернативно извлекаются из стека.
- Распознаватель ещё не может быть использован как парсер, потому что он «читает» нетерминалы с ленты. Этого можно избежать, если принять, что нетерминал обязан быть считанным сразу после свёртки, и объединить свёртку (порождение нетерминала) и его считывание в один ε-переход.
- После добавления таких ε-переходов исходные переходы по нетерминалам можно удалять.

Избавление от переходов по нетерминалам



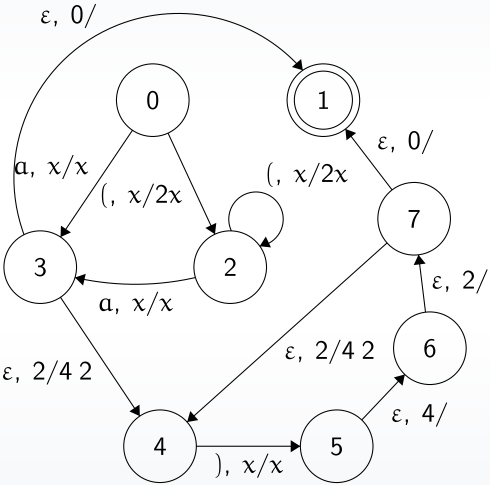
0	$S' \to \bullet S$	
	$S \to \bullet(S)$	
	$S \to \bullet a$	
1	$S' \to S\bullet$	$S \to S'$
2	$S \to (\bullet S)$	
	$S \to \bullet(S)$	
	$S \to \bullet a$	
3	$S \to a\bullet$	$a \to S$
4	$S \to (S\bullet)$	
5	$S \to (S)\bullet$	$(S) \to S$

Избавление от переходов по нетерминалам



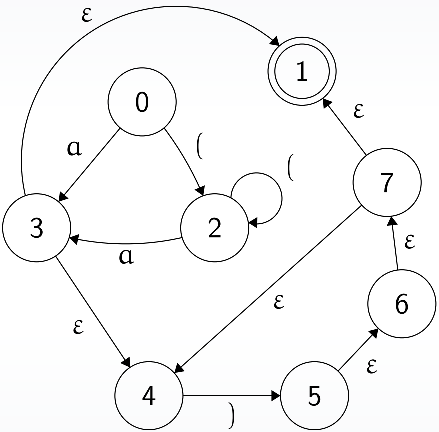
0	$S' \to \bullet S$	
	$S \to \bullet(S)$	
	$S \to \bullet a$	
1	$S' \to S\bullet$	$S \to S'$
2	$S \to (\bullet S)$	
	$S \to \bullet(S)$	
	$S \to \bullet a$	
3	$S \to a\bullet$	$a \to S$
4	$S \to (S\bullet)$	
5	$S \to (S)\bullet$	$(S) \to S$

Избавление от переходов по нетерминалам



0	$S' \to \bullet S$ $S \to \bullet(S)$ $S \to \bullet a$	
1	$S' \to S\bullet$	$S \to S'$
2	$S \to (\bullet S)$ $S \to \bullet(S)$ $S \to \bullet a$	
3	$S \to a\bullet$	$a \to S$
4	$S \to (S\bullet)$	
5	$S \to (S)\bullet$	$(S) \to S$

Бонус — регулярная аппроксимация



Аппроксимацией исходного языка $(^n a)^n$, построенной по LR(0)-автомату (Pereira–Wright), является язык $(^* a)^*$.

PDA или DPDA?

- Если есть ε-переходы, то нет никаких других.
- Если есть ε-переход, то он единственный из данного состояния.

PDA или DPDA?

- ~~Если есть ε-переходы, то нет никаких других.~~ Если делается свёртка, то нельзя сделать сдвиг.
- ~~Если есть ε-переход, то он единственный из данного состояния.~~ Если делается свёртка одного типа, то нельзя сделать свёртку другого типа.
- Допуск — по пустому стеку $\Rightarrow$ DPDA для языков с префикс-свойством.

- DPDA с допуском по пустому стеку распознают те же языки, что и LR(0)-разбор.
- В конструкции LR(0)-автомата часто навязывается эндмаркер $\Rightarrow$ изначальная грамматика может описывать не LR(0)-язык!

Отказ от эндмаркера и SLR

- Используем **ту же конструкцию** автомата.
- Разрешим при возможности сделать свёртку вида $\beta \to A$ заглянуть в множество $\mathsf{FOLLOW}(A)$, чтобы понять, какую свёртку делать (и делать ли).

Отказ от эндмаркера и SLR

- Используем **ту же конструкцию** автомата.
- Разрешим при возможности сделать свёртку вида $\beta \to A$ заглянуть в множество $\mathsf{FOLLOW}(A)$, чтобы понять, какую свёртку делать (и делать ли).

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{S}' \to \mathsf{E} & \mathsf{E} \to \mathsf{E} + \mathsf{T} & \mathsf{E} \to \mathsf{T} \\
\mathsf{E} \to \mathsf{V} = \mathsf{E} & \mathsf{T} \to (\mathsf{E}) & \mathsf{T} \to \mathtt{id} \\
 & \mathsf{V} \to \mathtt{id} &
\end{array}
$$

Здесь есть конфликт свёрток для S' (по $\mathsf{V} \to \mathtt{id}\bullet$ и $\mathsf{T} \to \mathtt{id}\bullet$), но $\mathsf{FOLLOW}_1(\mathsf{V}) \cap \mathsf{FOLLOW}_1(\mathsf{T}) = \varnothing \Rightarrow$ эта грамматика — $\mathsf{SLR}(1)$.

Коллапс линейных парсеров

Теорема

Для всякого языка из класса DCFL существует распознающая его $\mathsf{SLR}(1)$-грамматика.

Теоретический коллапс линейных парсеров

Теорема

Для всякого языка из класса DCFL существует распознающая его $\mathsf{SLR}(1)$-грамматика.

Следует из теоремы:

Для всякого языка из класса DCFL существует распознающая его $\mathsf{LR}(k)$-грамматика.

LR(k)-распознаватели

Грамматика G — $LR(k)$, тогда и только тогда, когда для всех пар сентенциальных форм xy, xy', порождаемых правосторонним разбором, где $y, y' \in \Sigma^+$, таких что xy допускает правую свёртку в префиксе y по правилу ξ_1, а xy' — свёртку где угодно по правилу ξ_2, и первые k символов y и y' совпадают, $\xi_1 = \xi_2$.

LR(k)-распознаватели

Грамматика G — LR(k), тогда и только тогда, когда для всех пар сентенциальных форм xy, xy', порождаемых правосторонним разбором, где $y, y' \in \Sigma^+$, таких что xy допускает правую свёртку в префиксе y по правилу ξ_1, а xy' — свёртку где угодно по правилу ξ_2, и первые k символов y и y' совпадают, $\xi_1 = \xi_2$.

$$\begin{array}{lll} S' \to S & S \to L = R; & S \to R; \\ L \to id & L \to *R & R \to L \end{array}$$

Поскольку $= \in FOLLOW_1(R)$, возникает конфликт вида сдвиг–свёртка при попытке анализа с.ф. L. Но lookahead у L, порождённой посредством $S \to L = R$, и посредством $S \to R; \to L;$, будет разный.

$\mathsf{LR}(k)$-распознаватели

Грамматика G — $\mathsf{LR}(k)$, тогда и только тогда, когда для всех пар сентенциальных форм xy, xy', порождаемых правосторонним разбором, где $y, y' \in \Sigma^+$, таких что xy допускает правую свёртку в префиксе y по правилу ξ_1, а xy' — свёртку где угодно по правилу ξ_2, и первые k символов y и y' совпадают, $\xi_1 = \xi_2$.

Любая $\mathsf{LR}(k)$-грамматика по определению гарантирует однозначный разбор при определённой длине lookahead-строки, поэтому ни одна грамматика с неоднозначным разбором не является $\mathsf{LR}(k)$ ни для какого значения k.

$\mathsf{LR}(k) \to \mathsf{LR}(1)$, Mickunas–Lancaster–Shneider

$$\begin{array}{lll} S' \to S & S \to Abb & S \to Bbc \\ A \to aA & A \to a & B \to aB \\ & B \to a & \end{array}$$

Не $\mathsf{LR}(1)$, из-за свёрток $A \to a$, $B \to a$. Используем трансформацию присоединения правого контекста:

$$\begin{array}{lll} S' \to S & S \to [Ab]b & S \to [Bb]c \\ [Ab] \to a[Ab] & [Ab] \to ab & [Bb] \to a[Bb] \\ & [Bb] \to ab & \end{array}$$

$\mathsf{LR}(k) \to \mathsf{LR}(1)$, Mickunas–Lancaster–Shneider

$$S' \to S \qquad S \to bSS \qquad S \to a$$
$$S \to aac$$

Не $\mathsf{LR}(1)$, конфликт свёртки на префиксе ba с контекстом a.
Используем трансформацию уточнения правого контекста:

$$\begin{array}{llll}
S \to bSa[a/S] & S \to bSb[b/S] & S \to a & S \to aac \\
{[a/S]} \to \varepsilon & [a/S] \to ac & [b/S] \to Sa[a/S] & [b/S] \to Sb[b/S]
\end{array}$$

Теперь присоединим правые контексты:

$$\begin{array}{llll}
S \to b[Sa][a/S] & \mid b[Sb][b/S] & \mid a & \mid aac \\
{[Sa]} \to b[Sa][[a/S]a] & \mid b[Sb][[b/S]a] & \mid aa & \mid aaca \\
{[Sb]} \to b[Sa][[a/S]b] & \mid b[Sb][[b/S]b] & \mid ab & \mid aacb \\
{[a/S]} \to \varepsilon & \mid ac & & \\
{[[a/S]a]} \to a & \mid aca & & \\
{[[a/S]b]} \to b & \mid acb & & \\
{[[b/S]a]} \to [Sa][[a/S]a] & \mid [Sb][[b/S]a] & & \\
{[[b/S]b]} \to [Sa][[a/S]b] & \mid [Sb][[b/S]b] & &
\end{array}$$

Применение MLS-подгонки

Исследовать на детерминированность язык
$L = \{a^n w c w^R b^n \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Видно, что если язык L распознаётся DPDA (т.е. является LR(1)-языком), то он также является LR(0)-языком, поскольку удовлетворяет префикс-свойству. Действительно, любое слово этого языка содержит единственную букву c, причём она расположена точно в середине слова.

Построим пробную КС-грамматику для языка L:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & aSb \mid aCa \mid bCb \mid c \\
C & \to & aCa \mid bCb \mid c
\end{array}
$$

Проверим, является ли она LR(0)-грамматикой. Для этого построим LR(0)-автомат и проанализируем его на конфликты.

Применение MLS-подгонки

Исследовать на детерминированность язык
$L = \{a^n w c w^R b^n \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Пробная грамматика для L:
$$\begin{array}{lcl} S & \to & aSb \mid aCa \mid bCb \mid c \\ C & \to & aCa \mid bCb \mid c \end{array}$$

Начинаем строить LR(0)-автомат. Для этого вводим новое стартовое состояние S' (состояние окончательной свёртки) и начинаем разбор правила $S' \to \bullet S$.

Поскольку отмеченная позиция в правиле находится перед нетерминалом S, добавляем в состояние все ситуации вида $S \to \bullet\alpha$.

Переходы по нетерминалу S и терминалу c ведут к бесконфликтным свёрткам, поэтому малоинтересны. Разберёмся с переходом по a.

$$\boxed{\begin{array}{l} S' \to \bullet S \\ S \to \bullet aSb \\ S \to \bullet aCa \\ S \to \bullet bCb \\ S \to \bullet c \end{array}}$$

Применение MLS-подгонки

Исследовать на детерминированность язык
$L = \{a^n w c w^R b^n \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Пробная грамматика для L: $\begin{array}{lcl} S & \to & aSb \mid aCa \mid bCb \mid c \\ C & \to & aCa \mid bCb \mid c \end{array}$

Переходы по нетерминалу S и терминалу c ведут к бесконфликтным свёрткам, поэтому малоинтересны. Разберёмся с переходом по a.

$$\boxed{\begin{array}{l} S' \to \bullet S \\ S \to \bullet aSb \\ S \to \bullet aCa \\ S \to \bullet bCb \\ S \to \bullet c \end{array}} \xrightarrow{a} \boxed{\begin{array}{l} S \to a \bullet Sb \\ S \to a \bullet Ca \\ S \to \bullet aSb \\ S \to \bullet aCa \\ S \to \bullet bCb \\ S \to \bullet c \\ C \to \bullet aCa \\ C \to \bullet bCb \\ C \to \bullet c \end{array}}$$

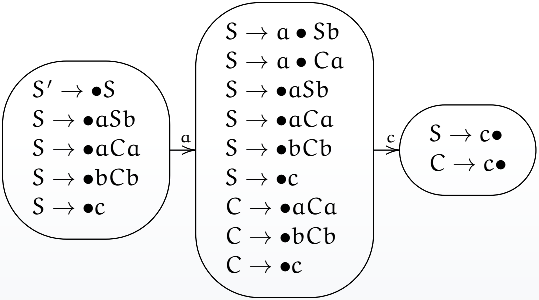
Похоже, что есть потенциальный конфликт (даже два) по свёрткам в S и C. Построим конфликтное состояние явно.

Применение MLS-подгонки

Исследовать на детерминированность язык
$L = \{a^n w c w^R b^n \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Пробная грамматика для L:
$$\begin{array}{lcl} S & \to & aSb \mid aCa \mid bCb \mid c \\ C & \to & aCa \mid bCb \mid c \end{array}$$

Похоже, что есть потенциальный конфликт (даже два) по свёрткам в S и C. Построим конфликтное состояние явно.



Присоединим к конфликтующим S и C-нетерминалам их правые контексты.

Применение MLS-подгонки

Исследовать на детерминированность язык
$L = \{a^n w c w^R b^n \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Пробная грамматика для L:
$$\begin{aligned} S &\to aSb \mid aCa \mid bCb \mid c \\ C &\to aCa \mid bCb \mid c \end{aligned}$$

Грамматика для L после присоединения правых контекстов к нетерминалам S и C методом MLS (новые нетерминалы выделены красным):

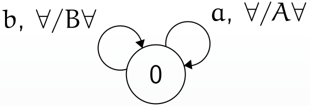
$$\begin{aligned} S &\to a[Sb] \mid a[Ca] \mid b[Cb] \mid c \\ [Sb] &\to a[Sb]b \mid a[Ca]b \mid b[Cb]b \mid cb \\ [Ca] &\to a[Ca]a \mid b[Cb]a \mid ca \\ [Cb] &\to a[Ca]b \mid b[Cb]b \mid cb \end{aligned}$$

Можно построить LR(0)-автомат для этой грамматики и убедиться, что он не содержит конфликтов. Значит язык L — детерминированный (более того, LR(0)).

Другой подход к анализу КС-языков

Исследовать на детерминированность язык
$L = \{a^n w c w^R b^n \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Можно сразу попробовать построить DPDA для L. Заметим, что до прочтения буквы c стек обязательно заполняется (иначе потеряется информация либо о структуре палиндрома, либо о количестве букв a в начале слова), причём, поскольку неизвестно, когда именно префикс a^n переходит в палиндром, придётся запоминать, какие конкретные буквы были прочитаны: считаем, что символ стека A соответствует a, символ B — терминалу b.

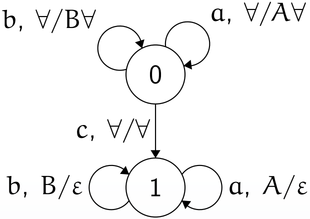


Для экономии места символ $\forall$ использован в роли параметра, пробегающего значения A, B и Z_0: на детерминированность это не влияет, поскольку переходы с его участием делаются по разным терминалам.

Другой подход к анализу КС-языков

Исследовать на детерминированность язык
$L = \{a^n w c w^R b^n \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

После прочтения буквы c стек только опустошается: структура оставшейся части слова определяется уже прочитанной его частью.

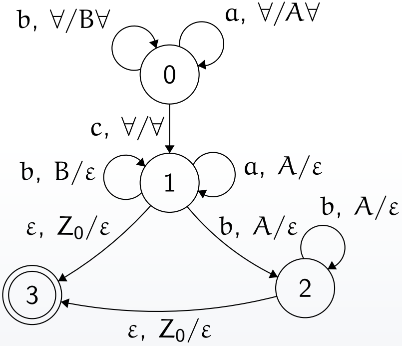


Единственная тонкость — это переход от чтения w^R к чтению b^n. Он происходит, если на вершине стека лежит A, а читается буква b, и это не приводит к неопределённости, поскольку при чтении буквы b из палиндромной части мы обязаны всегда иметь на вершине стека символ B.

Другой подход к анализу КС-языков

Исследовать на детерминированность язык
$L = \{a^n w c w^R b^n \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Добавляем состояние чтения суффикса b^n (в нём на вершине стека должны быть всегда лишь символы A) и финальное состояние. Легко убедиться, что итоговый стековый автомат — DPDA.



Лемма о накачке для DCFL

Теорема (S. Yu)

Пусть L — DCFL. Тогда существует такая длина накачки p, что для всех пар слов $w, w' \in L$, таких что $w = xy \ \&\ w' = xz$, $|x| > p$ и первые буквы y, z совпадают, выполнено одно из двух:

1. существует накачка только префикса x (в привычном смысле);
2. существует разбиение $x = x_1 x_2 x_3$, $y = y_1 y_2 y_3$, $z = z_1 z_2 z_3$ такое, что $|x_2 x_3| \leqslant p$, $|x_2| > 0$, и $\forall i (x_1 x_2^i x_3 y_1 y_2^i y_3 \in L \ \&\ x_1 x_2^i x_3 z_1 z_2^i z_3 \in L)$.

Лемма о накачке для DCFL

Теорема (S. Yu)

Пусть L — DCFL. Тогда существует такая длина накачки p, что для всех пар слов $w, w' \in L$, таких что $w = xy \;\&\; w' = xz$, $|x| > p$ и первые буквы y, z совпадают, выполнено одно из двух:

1. существует накачка только префикса x (в привычном смысле);
2. существует разбиение $x = x_1x_2x_3$, $y = y_1y_2y_3$, $z = z_1z_2z_3$ такое, что $|x_2x_3| \leqslant p$, $|x_2| > 0$, и $\forall i(x_1x_2^ix_3y_1y_2^iy_3 \in L \;\&\; x_1x_2^ix_3z_1z_2^iz_3 \in L)$.

Рассмотрим язык $\{a^nb^n\} \cup \{a^nb^{2n}\}$, положим $x = a^nb^{n-1}$, $y = b$, $z = b^{n+1}$, где $n - 1 > p$. Тогда в случае 2 придётся накачивать в x только b, а в случае 1 нет подходящей накачки.

Замыкания DCFL

- Замкнуты относительно дополнения (смена конечных состояний в DPDA).
- Замкнуты относительно пересечения с регулярным языком.
- Не замкнуты относительно объединения (см. $\{a^n b^n\} \cup \{a^n b^{2n}\}$).
- Не замкнуты относительно пересечения.

Замыкания DCFL

- Замкнуты относительно дополнения (смена конечных состояний в DPDA).
- Замкнуты относительно пересечения с регулярным языком.
- Не замкнуты относительно объединения (см. $\{a^n b^n\} \cup \{a^n b^{2n}\}$).
- Не замкнуты относительно пересечения.
- Не замкнуты относительно гомоморфизмов. См. $\{ca^n b^n\} \cup \{a^n b^{2n}\}$.
- Не замкнуты относительно конкатенации. См. $L_1 = \{ca^n b^n\} \cup \{a^n b^{2n}\}$, $L_2 = c^*$.

Метод подмены vs накачка для DCFL

- Так же, как и в лемме о накачке для DCFL, нужно подобрать два слова xy, xz с длинными одинаковыми префиксами и различными суффиксами y, z, принадлежащие языку L.
- В лемме о накачке суффиксы y и z должны иметь существенно разное происхождение с точки зрения их распознавания PDA (разное поведение стека на префиксе x в слове xy и в слове xz), а в методе подмены часто достаточно, если стек на x только накапливается, а на y и z читается по-разному.
- В обоих случаях x лучше выбирать так, чтобы от поведения стека на нём максимально сильно зависел успех распознавания суффиксов y и z.

Метод подмены vs накачка для DCFL

Исследовать LL(k)-свойства уже известного нам DCFL $L = \{a^n w c w^R b^n \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

- Подберём два слова с одинаковым поведением стека до буквы c и разными суффиксами. Проще всего это сделать, если положить, что до c встречаются только буквы a. Тогда $xz = a^{n+k} c a^{n+k}$, $yz = a^{n+k} c b^{n+k}$, где n так велико, что после прочтения префикса $x = a^n$ в стеке точно есть минимум $k + 3$ символа, где k — предполагаемый lookahead.

Метод подмены vs накачка для DCFL

Исследовать LL(k)-свойства уже известного нам DCFL $L = \{a^n w c w^R b^n \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

- $xz = a^{n+k}ca^{n+k}$, $yz = a^{n+k}cb^{n+k}$, где n так велико, что после прочтения префикса $x = a^n$ в стеке точно есть минимум $k+3$ символа, где k — предполагаемый lookahead.
- Пусть последний символ стека после чтения a^n — T_z. В слове $a^{n+k}ca^{n+k}$ при чтении символа T_z анализатору будет видно $k_1 \leqslant k$ букв a (если $k_1 < k$, то за ними будет конец слова), и начиная с этого состояния анализатор распознает суффикс a^i, $i \geqslant k_1$. В слове $a^{n+k}cb^{n+k}$ при чтении символа T_z анализатор увидит $k_2 \leqslant k$ букв b и распознает суффикс b^j, $j \geqslant k_2$.
- Если заменить в слове $a^{n+k}cb^{n+k}$ суффикс b^j на a^i, то анализатор прочитает T_z с lookahead'ом, равным a^{k_1}. Ситуация ничем не будет отличаться от той, где он видел a^{k_1} букв в суффиксе слова $a^{n+k}ca^{n+k}$, и анализатор определит, что слово $a^{n+k}cb^{n+k-j}a^i \in L$, что неверно. Значит, L — не LL(k).

Степень недетерминизма языка

Если PDA $\mathscr{A}$ допускает декомпозицию на DPDA, между которыми есть максимум k недетерминированных переходов, но не допускает такую декомпозицию при $i < k$ переходов, скажем, что $\mathscr{A}$ задаёт КС-язык с k-недетерминированностью.

Степень недетерминизма языка

Если PDA $\mathscr{A}$ допускает декомпозицию на DPDA, между которыми есть максимум k недетерминированных переходов, но не допускает такую декомпозицию при $i < k$ переходов, скажем, что $\mathscr{A}$ задаёт КС-язык с k-недетерминированностью.

1. Степень недетерминированности языка $\{a^n b^n\} \cup \{a^n b^{2n}\}$?

Степень недетерминизма языка

Если PDA $\mathscr{A}$ допускает декомпозицию на DPDA, между которыми есть максимум k недетерминированных переходов, но не допускает такую декомпозицию при $i < k$ переходов, скажем, что $\mathscr{A}$ задаёт КС-язык с k-недетерминированностью.

1. Степень недетерминированности языка $\{a^n b^n\} \cup \{a^n b^{2n}\}$?
   Ответ: 1
2. Степень недетерминированности языка $\{a^n b^n\} \cup \ldots \cup \{a^n b^{k*n}\}$?

Степень недетерминизма языка

Если PDA $\mathscr{A}$ допускает декомпозицию на DPDA, между которыми есть максимум k недетерминированных переходов, но не допускает такую декомпозицию при $i < k$ переходов, скажем, что $\mathscr{A}$ задаёт КС-язык с k-недетерминированностью.

1. Степень недетерминированности языка $\{a^n b^n\} \cup \{a^n b^{2n}\}$? Ответ: 1
2. Степень недетерминированности языка $\{a^n b^n\} \cup \ldots \cup \{a^n b^{k*n}\}$? Ответ: тоже 1 (см. критерий исправляемости)
3. Степень недетерминированности языка $\{ww^R\}$ — также 1.
4. Степень недетерминированности языка $\{ww^R vv^R\}$ равна 2.

Исправление недетерминированности

Пусть L — недетерминированный КС-язык и $k > 0$. Язык L — k-исправляемый, если существует алфавит Δ, $\Delta \cap \Sigma = \emptyset$ и DCFL $L(k) \subseteq (\Sigma \cup \Delta)^*$ такой, что для $h(\Delta) = \varepsilon$, $h(L(k)) = L$ и все слова языка $L(k)$ содержат не больше k букв из Δ.

Язык L имеет k-ую степень недетерминизма $\Leftrightarrow$ L k-исправляемый, но не $k-1$-исправляемый.

Исправляемость и анализ на DCFL

Техника использования леммы о накачке для DCFL

- анализируем позиции в словах языка L, в которых может произойти смена наполнения стека на его опустошение, а может не произойти. Такие позиции считаем подозрительными на исправляемость.
- подбираем два слова из L, xyz_1, xyz_2 такие, что исправляемая позиция находится в подслове y, причём в подслове y слова xyz_1 происходит наполнение стека, а в слове xyz_2 стек опустошается либо игнорируется.
- убеждаемся, что отдельно x накачать нельзя, после чего рассматриваем накачки yz_1 и yz_2. Из-за разного поведения стека на их префиксах, скорее всего, эти накачки будут выводить из языка L.

Пример применения

Проанализировать контекстно-свободный язык $L = \{wa^n c^n w^R \,|\, w \in \{a, b\}^*\}$.

- В словах языка есть произвольные подслова из $\{a, b\}^*$, что усложняет анализ. К тому же есть блок c^n, который на первый взгляд однозначно указывает на детерминизм, однако нет условия $n \geqslant 1$, поэтому в некоторых случаях на его существование нельзя положиться. Воспользуемся замкнутостью DCFL относительно пересечений с регулярными языками, избавимся от c^n и сузим область накачек.
- Простейший язык, с которым мы можем пересечь L для этой цели: $a^*b^*a^*$, после чего взять $xy = a^m$, $z_1 = a^{n_1}$, $z_2 = a^{n_2}b^{2*n_3}a^{m+n_2}$.

Пример применения

Проанализировать контекстно-свободный язык $L = \{wa^nc^nw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

- Нужно избавиться от подслова с буквами c и сузить область накачек.
- Простейший язык, с которым мы можем пересечь L для этой цели: $a^*b^*a^*$, после чего взять $xy = a^m$, $z_1 = a^{n_1}$, $z_2 = a^{n_2}b^{2*n_3}a^{m+n_2}$.
- Хотя поведение стека на этих фрагментах слов соответствует рекомендуемому, анализ ни к чему не приводит: мы без проблем можем накачивать в этих словах одновременно суффикс послова xy и элементы z_1 и z_2, а всё потому, что слова в языке a^*, являющиеся палиндромами, описываются регулярными выражениями. Искомое пересечение языков неудачное, выберем то, которое чётче обозначит нерегулярную структуру палиндрома.

Пример применения

Проанализировать контекстно-свободный язык
$L = \{w a^n c^n w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

- Рассмотрим пересечение L с языком $a^* b^* a^* b^* a^*$. В нём уже будут два типа палиндромов, не распознаваемые регулярками (с одним или двумя подсловами, состоящими из букв b).
- Абеляр (т.е. антагонист) выбирает длину накачки p.
- Элоиза (т.е. мы) выбирает слова $a^{p+1} b a^{p+1}$ и $a^{p+1} b a^{p+1} a^{p+1} b a^{p+1}$ и $xy = a^{p+1} b a^p$, $z_1 = a$, $z_2 = a^{p+2} b a^{p+1}$.
- Абеляр не может накачивать только $a^{p+1} b a^p$: при накачке только второго a^p произойдёт рассинхронизация с суффиксом z_1, а при любой накачке с участием первого a^{p+1} — рассинхронизация с суффиксом z_2.
- Значит, Абеляру остаётся только накачивать подслово суффикса a^p синхронно с подсловом z_1 (т.е. a) (и некоторым подсловом z_2, но это уже не важно), что также приводит к выходу из языка палиндромов.

Пример применения

Проанализировать контекстно-свободный язык $L = \{wa^nc^nw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$.

- Рассмотрим пересечение L с языком $a^*b^*a^*b^*a^*$.
- Абеляр (т.е. антагонист) выбирает длину накачки p.
- Элоиза (т.е. мы) выбирает слова $a^{p+1}ba^{p+1}$ и $a^{p+1}ba^{p+1}a^{p+1}ba^{p+1}$ и $xy = a^{p+1}ba^p$, $z_1 = a$, $z_2 = a^{p+2}ba^{p+1}$.
- Абеляр не может накачивать только $a^{p+1}ba^p$: при накачке только второго a^p произойдёт рассинхронизация с суффиксом z_1, а при любой накачке с участием первого a^{p+1} — рассинхронизация с суффиксом z_2.
- Значит, Абеляру остаётся только накачивать подслово суффикса a^p синхронно с подсловом z_1 (т.е. a) (и некоторым подсловом z_2, но это уже не важно), что также приводит к выходу из языка палиндромов.
- Заметим, что если взять слова a^pba^p и $a^pba^pa^pba^p$ и $xy = a^pba^{p-1}$, тогда синхронную накачку придумать можно: накачивать в xy букву b (она ещё в пределах длины накачки), в z_2 её же, а в z_1 ничего.
- Мы показали, что язык пересечения — NCFL, значит, язык L — NCFL.

Иерархия недетерминированных КС-языков

Семейство языков $w_1 w_1^R\$ \dots w_k w_k^R\$$ ($\$ \notin \Sigma$) задаёт бесконечную иерархию недетерминированных языков с k-недетерминизмом.

Иерархия недетерминированных КС-языков

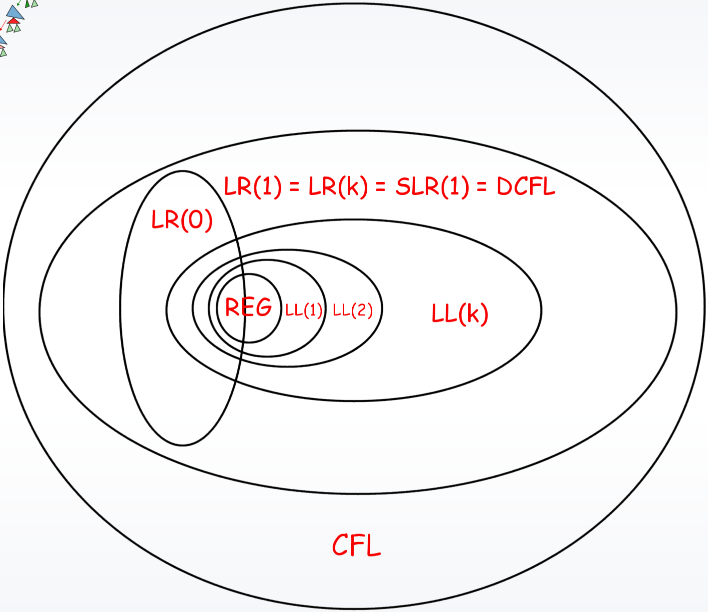
Семейство языков $w_1 w_1^R\$ \ldots w_k w_k^R\$$ ($\$ \notin \Sigma$) задаёт бесконечную иерархию недетерминированных языков с k-недетерминизмом.

- Введение вложенных структур с совпадающими маркерами начала и конца приводит к неограниченному недетерминизму.

Иерархия Хомского revisited

Утверждения ниже касаются только языков (не грамматик)!

- $\mathsf{RegL} \subset \mathsf{CFL}$;
- $\mathsf{RegL} \subset \mathsf{DCFL}$;
- $\mathsf{DCFL} \subset \mathsf{CFL}$;
- $\mathsf{RegL} \subset \mathsf{LL}(1)$;
- $\mathsf{LR}(0)$ не сравним с RegL;
- $\mathsf{LR}(0)$ не сравним с $\mathsf{LL}(k)$;
- $\mathsf{LL}(k) \subset \mathsf{LL}(k+1)$;
- $\mathsf{LL}(k) \subset \mathsf{LR}(1)$;
- $\mathsf{LR}(k) = \mathsf{SLR}(1) = \mathsf{DCFL}$.


LR(1) = LR(k) = SLR(1) = DCFL
LR(0)
REG
LL(1)
LL(2)
LL(k)
CFL