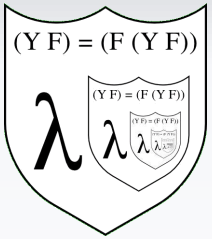
КЗ-свойства языков. MFA, атрибутные грамматики и типизация

Теория формальных языков

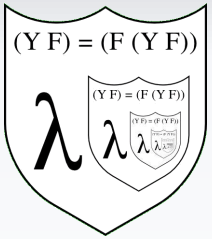
2023 г.



Кодирование LZ

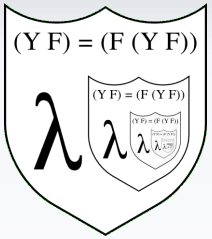
- Встретилось слово из одной буквы $\Rightarrow$ добавляем его в словарь и создаём на него ссылку.
- Встретилось слово, максимально длинное и такое, что его префикс без последней буквы уже в словаре $\Rightarrow$ добавляем его вместе с последней буквой в словарь и создаём на него ссылку.

В отличие от кодов Хаффмана, не разбираются с помощью конечных автоматов. Необходимо понятие обратных ссылок (backreferences) — актуальное в современных REGEX библиотеках. Языки, распознаваемые регулярными выражениями с backref-ами, обычно называют REGEX-языками (не «регулярными», т.к. они представляют собой более широкий класс).



Общие соглашения про языки с обратными ссылками

- Если ссылка инициализируется внутри итерации, то активной считается только последняя её инициализация. Например, выражение $((a\star)b)^+\backslash 2$ описывает язык $\{(a^\star b)^\star a^n b a^n b\}$, а не $\{a^n b(a^\star b)^\star a^n b\}$ и не $\{a^n b a^n b \ldots a^n b\}$.
  - Принято в стандарте PCRE2 и всех формализациях.
- Неинициализированные ссылки либо считаются читающими пустое слово (ε-семантика), либо недопустимы ($\varnothing$-семантика). Например, в ε-семантике $((a^\star)|b)\backslash 2$ распознаёт язык $\{a^{2n}, b\}$; в $\varnothing$-семантике $\{a^{2n}\}$.
  - В стандарте PCRE2 — $\varnothing$-семантика.
  - В различных формализациях семантика неинициализированных ссылок варьирует.

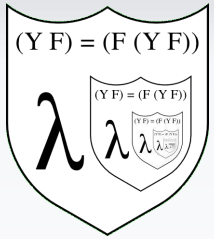


Первая формализация языков с обратными ссылками

Формализация Кампеану–Саломаа–Ю (CSY): только безымянные группы захвата в память, $\varnothing$-семантика.

- Каждая скобочная группа (τ) считается группой захвата в память и автоматически нумеруется по очерёдности вхождений открывающих скобок.
- Ссылка $\backslash k$ на скобочную группу с номером k может появиться, только если скобочная группа уже закрыта (это условие не выполняется в регулярках, принятых стандартом PCRE2).

Например, выражение $((a^\star)b^\star)\backslash 1\backslash 2$ описывает язык $\{a^n b^n a^{2n} b^n\}$. Выражение $((a^\star)b^\star \mid \backslash 1)^\star\backslash 2$ некорректно в CSY: ссылка на первую скобочную группу осуществляется внутри неё самой. По стандарту PCRE2, оно корректно.

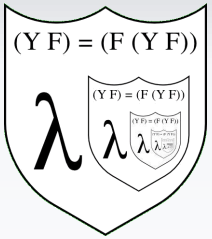


Свойства CSY-REGEX

Если $\mathscr{L}$ – CSY-язык, тогда
$\exists N \in \mathbb{N} \forall \omega \in \mathscr{L}(|\omega| > N \Rightarrow \omega = x_0 y x_1 y \dots y x_m \;\&\; |x_0 y| < N \;\&\; |y| > 0 \;\&\; \forall i \in \mathbb{N}(i > 0 \Rightarrow x_0 y^i x_1 y^i \dots y^i x_m \in \mathscr{L}))$.

Например, с помощью леммы о накачке для CSY-языков легко доказать, что $a^n b^n$ не описывается CSY-регуляркой.

- Описывают более узкий класс языков, чем PCRE2 — выражения с обратными ссылками.
- Но задача сопоставления слова с CSY-REGEX уже NP-сложна (теорема Англуин).

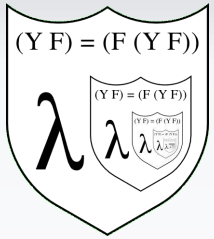


Ref-words (Shmid, 2014)

Специальные символы — $[_i$, $]_i$, x_i. Вхождения x_i и скобки с индексом i не могут встречаться внутри $[_i \ldots]_i$, однако разные скобочные блоки могут быть перепутаны:

$$[_1 a [_2 b]_1 x_1]_2 x_2$$

Значение в скобках $[_k \ldots]_k$ сохраняется в ячейку памяти с номером k и затем может быть прочитано из входной строки при чтении в backref-REGEX переменной x_k. К примеру, слово, описанное выше, определяет значение $x_1 = ab$, после чего можно вычислить, что $x_2 = bab$, и вся строка, которая сопоставляется с таким выражением, есть $ababbab$.



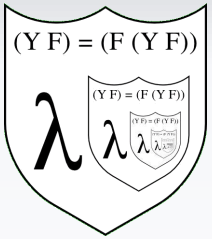
Memory Finite Automata (MFA)

$k-$MFA $\mathscr{A}$ имеет функцию перехода из $Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \cup \{1, \ldots, k\}$ в подмножество $Q \times \langle o, c, \diamond \rangle^k$, где флаги управления памятью o, c, $\diamond$ означают:

- c — «закрыть» ячейку памяти;
- o — «открыть» ячейку памяти;
- $\diamond$ — не менять состояние ячейки.

Из состояния $\langle q, v\omega, \langle u_i, r_i \rangle \rangle$ в состояние $\langle q', \omega, \langle u_i', r_i' \rangle \rangle$ ($u_i \in \Sigma^*$, $r_i \in \{o, c\}$) переходит по правилу $\delta(q, b) \to \langle q', s_1, \ldots, s_k \rangle$ следующим образом:

- если $b \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, то $v = b$;
- если $b \in \{1, \ldots, k\}$ и $r_k' = c$, то $v = u_b$;
- $r_i' = r_i$, если $s_i = \diamond$, и s_i в противном случае;
- $u_i' = u_i v$, если $r_i' = r_i = o$; $u_i' = v$, если $r_i' = o$ и $r_i = c$; и не меняется, если $r_i' = c$.

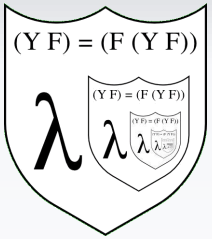


Memory Finite Automata (MFA)

$k - MFA\ \mathscr{A}$ имеет функцию перехода из $Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \cup \{1, \ldots, k\}$ в подмножество $Q \times \langle o, c, \diamond \rangle^k$, где флаги управления памятью o, c, $\diamond$ означают:

- c — «закрыть» ячейку памяти;
- o — «открыть» ячейку памяти;
- $\diamond$ — не менять состояние ячейки.

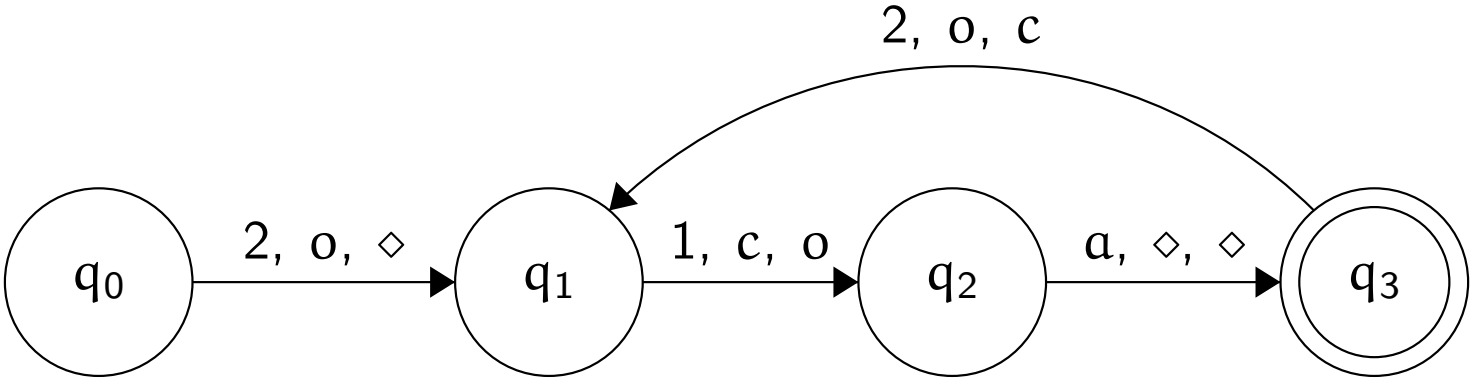
Начальная конфигурация памяти: $\langle\langle \varepsilon, c \rangle, \ldots, \langle \varepsilon, c \rangle\rangle$. То есть все ячейки закрыты для записи и содержат пустое слово.
Заметим, что запись в ячейку слова, считанного с ленты по переходу, осуществляется не исходя из флагов памяти в предыдущем состоянии, а исходя из флагов памяти в состоянии, куда осуществляется переход. То есть мы сначала открываем (или закрываем) память, а уже потом читаем с ленты и пишем в открытые ячейки.



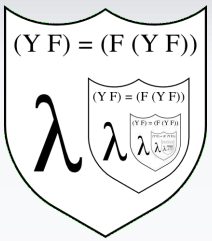
MFA для $\{a^{n^2}\}$

Backref-REGEX для этого языка: $([_1x_2]_1[_2x_1a]_2)^+$. Здесь важно, что неинициализированная переменная (первое вхождение x_2) получает значение ε.

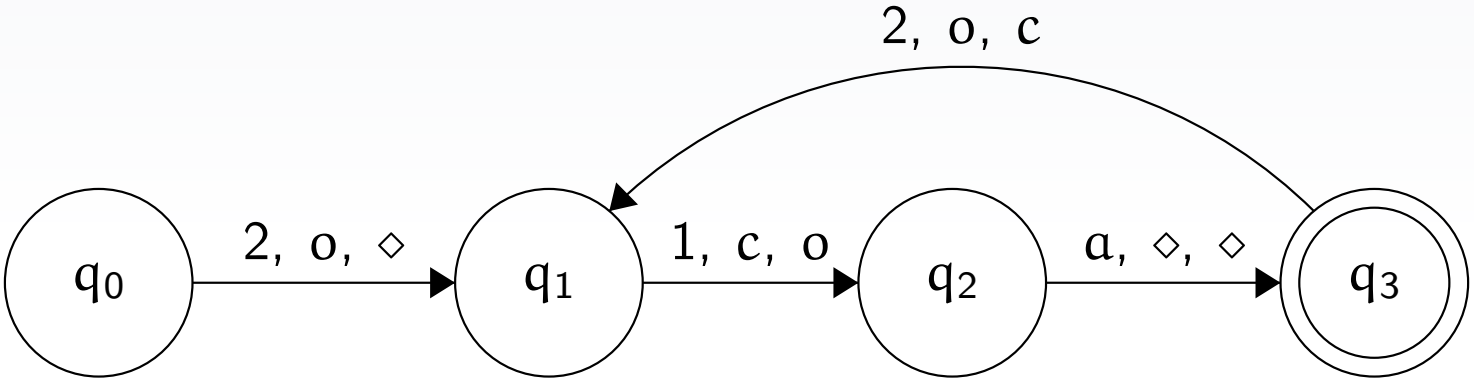
Посмотрим на 2-MFA, построенный по этому выражению:



Поскольку открытие и закрытие памяти происходит перед чтением с ленты (и, соответственно, записью в память), то на первом переходе в открытую память первой ячейки записывается пустое слово и оно же читается с ленты (т.к. начальная конфигурация второй ячейки памяти есть ε).

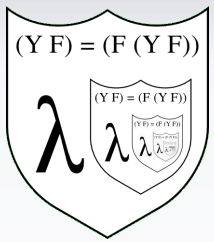


MFA для $\{a^{n^2}\}$

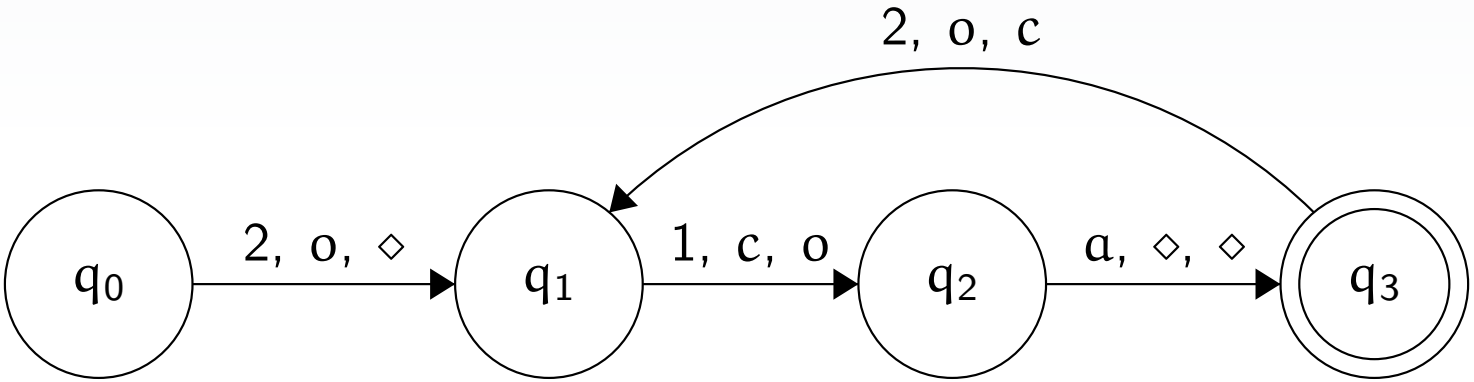


Поскольку открытие и закрытие памяти происходит перед чтением с ленты (и, соответственно, записью в память), то на первом переходе в открытую память первой ячейки записывается пустое слово и оно же читается с ленты (т.к. начальная конфигурация второй ячейки памяти есть ε). Затем память первой ячейки закрывается, и во вторую записывается содержимое первой ячейки (заодно оно же считывается с ленты). Затем считывается ещё одна буква a и также записывается во вторую ячейку.

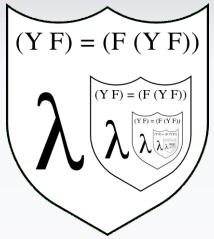
Как итог, после достижения состояния q_3 в первый раз память выглядит так: $\langle\langle \varepsilon,\ c\rangle, \langle a,\ o\rangle\rangle$



MFA для $\{a^{n^2}\}$



Как итог, после достижения состояния q_3 в первый раз память выглядит так: $\langle\langle \varepsilon,\ c\rangle, \langle a,\ o\rangle\rangle$
После следующей итерации (на которой мы считаем с ленты слово a^3 дополнительно к ранее прочитанному a) получим конфигурацию памяти $\langle\langle a,\ c\rangle, \langle aa,\ o\rangle\rangle$. И вообще, каждый раз при k-ом посещении q_3 получим состояние памяти вида $\langle\langle a^{k-1},\ c\rangle, \langle a^k,\ o\rangle\rangle$.

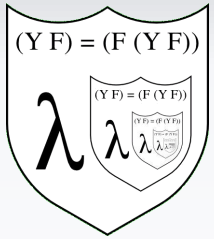


DMFA и Jumping Lemma

k — MFA детерминированный, если $\forall q \in Q, b \in \Sigma(|\bigcup_{i=1}^{k} \delta(q, i)| + |\delta(q, b)| \leqslant 1)$. DMFL — такой язык, для которого существует DMFA.

- $[_x(a|b)^*]_x cx$ определяет DMFL;
- $([_x y]_x [_y xa]_y)^*$ определяет DMFL;
- $1^+[_x 0^*]_x (1^+ x)^* 1^+$ — тоже DMFL (эквивалентен регулярке $1(1^+|0[_x 0^*]_x 1^+(0x1^+)^*)$).

- Замкнуты относительно пересечения с регулярным языком, а также относительно дополнения, но только если разрешается вводить неудачные переходы по обратным ссылкам;
- Не замкнуты относительно объединения (и даже — объединения с регулярными языками), и относительно

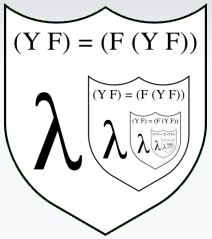


DMFA и Jumping Lemma

$k-$ MFA детерминированный, если
$\forall q \in Q, b \in \Sigma(|\bigcup_{i=1}^{k} \delta(q,i)| + |\delta(q,b)| \leqslant 1)$. DMFL — такой язык, для которого существует DMFA.

Язык $\mathscr{L}$ $\in$REGEX детерминированный, если либо он является регулярным, либо $\forall m \exists n, p_n, \nu_n$ такие, что $n \geqslant m$, $p_n, \nu_n \in \Sigma^+$, причём:

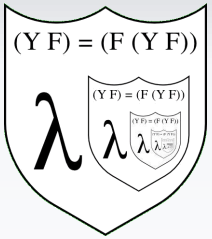
- $|\nu_n| = n$;
- ν_n — подслово p_n;
- $p_n\nu_n$ — префикс какого-то слова из $\mathscr{L}$;
- $\forall u \in \Sigma^+(p_n u \in \mathscr{L} \Rightarrow \nu_n$ — префикс $u)$.



Пример применения JL

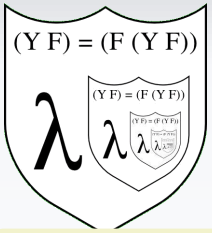
Язык $\mathscr{L} = \{a^n w b^n h(w) \mid w \in a, b^* \ \& \ h(a) = aa \ \& \ h(b) = ab\}$ не является DMFL.

- Пересечём $\mathscr{L}$ с $a^* b^+$. Получим язык $\mathscr{L}' = \{a^n b^n\}$.
- Предположим, что выполнены условия JL. Рассмотрим возможные значения ν_n.
  - Первое ν_n, для которого выполняется требуемое условие, обязано иметь вид a^n. Действительно, в противном случае при чтении префикса, состоящего из букв a, автомат мог бы принимать лишь конечное число состояний, однако классов эквивалентности по Майхиллу-Нероуду относительно языка $a^n b^n$ в языке a^* бесконечно много.
  - $\nu_n = a^n$. Тогда $p_n = a^{n+k}$. Слово $a^{n+k} b^{n+k} \in \mathscr{L}'$, но его суффикс b^{n+k} не начинается с ν_n. Что доказывает непринадлежность $\mathscr{L}'$ (а значит, и $\mathscr{L}$) к DMFL.



Отделение семантики и синтаксиса

- Все предыдущие примеры КЗ-языков выражали семантические свойства (повторения, синхронизации по аргументам, и т.д.) посредством синтаксических конструкций. В большинстве случаев это даёт выигрыш в скорости их проверки за счёт локальности алгоритмов (см. MFA или автоматы Треллиса). Но ограничивает в выразительных свойствах.
- Универсальный способ проверки семантических свойств — обход того же самого синтаксического дерева с дополнительными действиями.

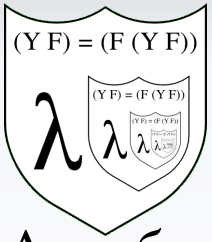


Атрибутные грамматики

Пусть $A_0 \to A_1 \ldots A_n$ — правило КС-грамматики. Припишем к нему конечное число атрибутных свойств.

- Синтетические атрибуты вычисляются для A_0 по атрибутам $A_1,\ldots,A_n$;
- Наследуемые атрибуты вычисляются для A_i по атрибутам $A_0,\ldots, A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_n$. Обычно — по атрибутам A_0 и A_1, $\ldots$, A_{i-1} (левосторонние атрибутные грамматики).

Повторные нетерминалы при присвоении атрибутов индексируются по вхождениям в правило слева направо. Т.е., например, если дано правило $N \to N - N$, тогда уравнение на атрибуты $N_0.attr = N_1.attr - N_2.attr$ будет означать, что атрибут родителя есть атрибут левого потомка минус атрибут правого потомка, помеченных нетерминалами N.
Неповторные нетерминалы в уравнениях на атрибуты обычно не индексируются.



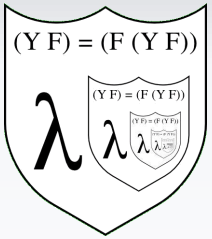
Пример АГ для $\{a^n b^n c^n\}$

Атрибут нетерминала $iter$ семантически означает число итераций. Чтобы не смешивать синтетические и наследуемые атрибуты, введём также атрибут inh_iter, означающий то же самое, но наследуемый сверху вниз по дереву разбора, а не снизу вверх. Здесь $==$ — предикат; $:=$ — операция присваивания.

	$S \to AT$	;	$T.iter == A.iter$
	$A \to aA$	;	$A_0.iter := A_1.iter + 1$
Синтетический вариант:	$A \to \varepsilon$	;	$A.iter := 0$
	$T \to bTc$	;	$T_0.iter := T_1.iter + 1$
	$T \to \varepsilon$	;	$T.iter := 0$

Вариант с наследованием:

$S \to AT$	;	$B.inh\_iter := A.iter$
$A \to aA$	;	$A_0.iter := A_1.iter + 1$
$A \to \varepsilon$	;	$A.iter := 0$
$T \to bTc$	;	$T_1.inh\_iter := T_0.inh\_iter - 1$
$T \to \varepsilon$	;	$T.inh\_iter == 0$

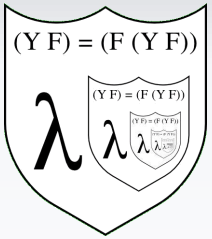


Определение типа

Понятие типа ограничивает возможные операции над его сущностями $\Rightarrow$ исключает парадоксы (неожиданное/неприемлемое поведение программ).

Система типов — гибко управляемый синтаксический метод доказательства отсутствия в программе определенных видов поведения при помощи классификации выражений языка по разновидностям вычисляемых ими значений.

Б.Пирс



Определение типа

Система типов — гибко управляемый синтаксический *метод доказательства* отсутствия в программе определенных видов поведения при помощи классификации выражений языка по разновидностям вычисляемых ими значений.

Б.Пирс

Описание утверждения о типах — *логическая спецификация*.
Записывается: $\Gamma \vdash M : \sigma$, где Γ — это перечисление $x_i : \tau_i$ — aka контекст.
Читается: «в контексте Γ терм M имеет тип σ».
Понимается: «если придать переменным x_i типы τ_i, тогда можно установить, что тип выражения M есть σ».

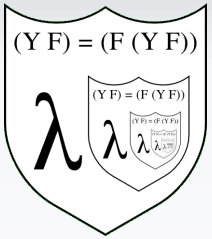
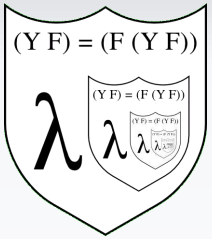


Таблица связывания

КЗ-свойства имён вынуждают использовать таблицы связывания (имён и функций) с двумя базовыми операциями:

- bind :: ([таблица], [имя], [тип]) → [таблица];
- lookup :: ([таблица], [имя]) → [тип].



Пример правил типизации

- Сорта (простые типы): Bool, Int.
- Операторы: =, +, условный, вызов функции.
- Синтаксис:

[Prog] ::= [Fs] [Fs] ::= [F] | [Fs]

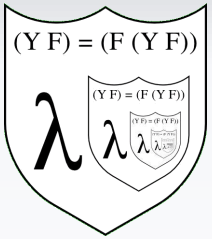
[F] ::= [TypeId] ([TIds]) = [Exp]

[Exps] ::= [Exp] | [Exp], [Exps]

[TypeId] ::= (Bool | Int) **id** [TIds] ::= [TypeId], [TIds] | [TypeId]

[Exp] ::= **num** | **id** | [Exp]+[Exp] | [Exp] = [Exp] | **id** ([Exps])

| if [Exp] then [Exp] else [Exp] | let **id** = [Exp] in [Exp]



Пример правил типизации

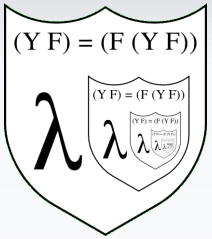
[Prog] ::= [Fs] [Fs] ::= [F] | [Fs]

[F] ::= [TypeId] ([TIds]) = [Exp]

[Exps] ::= [Exp] | [Exp], [Exps]

[TypeId] ::= (Bool | Int) **id** [TIds] ::= [TypeId], [TIds] | [TypeId]

[Exp] ::= **num** | **id** | [Exp]+[Exp] | [Exp] = [Exp] | **id** ([Exps])
| if [Exp] then [Exp] else [Exp] | let **id** = [Exp] in [Exp]

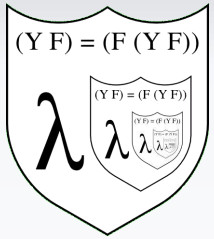


Пример правил типизации

[Prog] ::= [Fs] [Fs] ::= [F] | [Fs]
[F] ::= [TypeId] ([TIds]) = [Exp]
[Exps] ::= [Exp] | [Exp], [Exps]
[TypeId] ::= (Bool | Int) **id** [TIds] ::= [TypeId], [TIds] | [TypeId]
[Exp] ::= **num** | **id** | [Exp]+[Exp] | [Exp] = [Exp] | **id** ([Exps])
| if [Exp] then [Exp] else [Exp] | let **id** = [Exp] in [Exp]

tchExp(Exp, vtable, ftable) = case Exp of

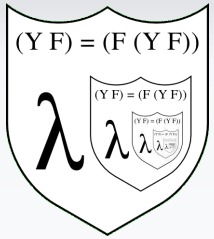
num	int
id	| t == undef = err; int | otherwise = t where t = lookup(vtable, **id**)
Exp_1+Exp_2	| $t_1 \neq$ int || $t_2 \neq$ int = err; int | otherwise = int where t_1=tchExp(Exp_1,vtable,ftable), t_2=tchExp(Exp_2,vtable,ftable)



Пример правил типизации

tchExp(Exp, vtable, ftable) = case Exp of

num	int
id	| t == undef = err; int | otherwise = t where t = lookup(vtable, **id**)
Exp_1+Exp_2	| $t_1 \neq$ int || $t_2 \neq$ int = err; int | otherwise = int where t_1=tchExp(Exp_1,vtable,ftable), t_2=tchExp(Exp_2,vtable,ftable)
Exp_1=Exp_2	| $t_1 ==$ t_2 = bool | otherwise = err; bool where t_1=tchExp(Exp_1,vtable,ftable), t_2=tchExp(Exp_2,vtable,ftable)



Правила типизации в форме вывода

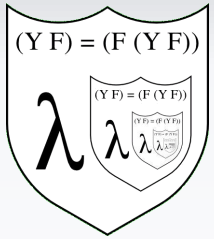
$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{num} : int} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 : int, \Gamma \vdash t_2 : int}{\Gamma \vdash t_1 + t_2 : int}$$

$$\frac{}{\Gamma, \mathbf{id} : \tau \vdash \mathbf{id} : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 : \sigma, \Gamma \vdash t_2 : \sigma}{\Gamma \vdash t_1 = t_2 : bool}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : bool, \Gamma \vdash t_2 : \sigma, \Gamma \vdash t_3 : \sigma}{\Gamma \vdash \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma, \mathbf{f\_id} : (\tau_1, \ldots, \tau_n) \to \tau_0 \vdash t_i : \tau_i}{\Gamma, \mathbf{f\_id} : (\tau_1, \ldots, \tau_n) \to \tau_0 \vdash \mathbf{f\_id}(t_1, \ldots, t_n) : \tau_0}$$

$$\frac{\Gamma, \mathbf{id} : \tau \vdash s : \sigma, \Gamma \vdash t : \tau}{\Gamma \vdash M, \text{let } \mathbf{id} = t \text{ in } s : \sigma}$$

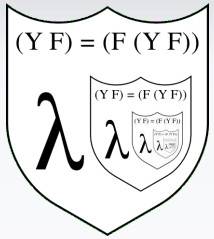


Пробное задание на РК-2

1. Язык, описывающийся следующей атрибутной грамматикой:

$$
\begin{array}{lcl}
S \to AT & ; & T.rng > A.iter \\
A \to aA & ; & A_0.iter := A_1.iter + 1 \\
A \to \varepsilon & ; & A.iter := 0 \\
T \to TcT & ; & T_0.rng := max(T_1.rng, T_2.rng) \\
T \to K & ; & T.rng := K.rng \\
K \to aK & ; & K_0.rng := K_1.rng + 1 \\
K \to bK & ; & K_0.rng := 0 \\
K \to \varepsilon & ; & K.rng := 0
\end{array}
$$

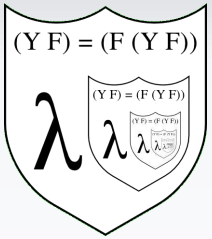
2. Язык $\{wcvw_{pref}zw_{suff} \mid w, z \in \{a, b\}^* \ \& \ v \in \{a, b, c\}^*\}$. Здесь w_{pref} — непустой префикс слова w; w_{suff} — непустой суффикс слова w.



Продолжение (третье задание)

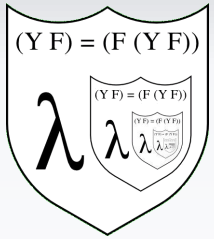
3. Язык, описывающийся следующей атрибутной грамматикой:

$$S \to SbS \quad ; \quad S_0.iter := 2 \cdot S_1.iter,\ S_1.iter == S_2.iter$$
$$S \to a \quad ; \quad S.iter := 1$$



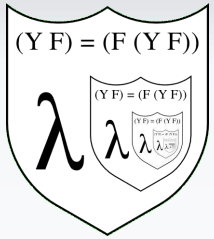
Классы задач

- Атрибутные грамматики: переводим в свёрточную форму или (мысленно) в неформальное описание. Далее действуем так же, как в других случаях.
- Языки SRS: определяем фрагменты разбиения на подслова, пытаемся выявить структуру подслов, при подозрении на выход из КС-языков или DCFL — пересекаем с регулярными языками.
- Языки с соотношением между частями слов: стараемся представить в более свёрточной форме через степенные соотношения над регулярками. Если не получается, то возможна не КС-структура (повторяемость подслов).



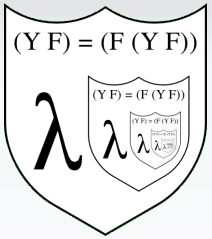
Языки SRS

1. $bb \to aa$, $ab \to aba$, носитель b^*. Регулярен: правило $ab \to aba$ влечёт правило $ab \to ab a^+$. Далее разбиваем на подходящие подслова и итерируем их чередование.
2. $ab \to baa$, носитель ab^+. Не КС: пересечём с b^+a^+.
   - Кратчайшее слово: baa. Поскольку все b только перемещаются влево, можно предположить, что каждое очередное слово получается максимальным передвижением b с самой правой позиции на самую левую.
   - Рассмотрим цепочку превращений $baab$. Получаем $baab \to babaa \to bbaaaa$.
   - Аналогично из слова ba^nb получается слово $bba^{2\cdot n}$.
   - Полученный язык $\{b^n a^{2^n}\}$ известен, как не КС.



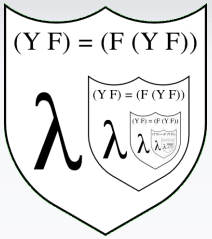
Языки SRS

1. $ab \to baa$, носитель ab^+. Не КС: пересечём с b^+a^+.
   - Кратчайшее слово: baa. Поскольку все b только перемещаются влево, можно предположить, что каждое очередное слово получается максимальным передвижением b с самой правой позиции на самую левую.
   - Рассмотрим цепочку превращений $baab$. Получаем $baab \to babaa \to bbaaaa$.
   - Аналогично из слова ba^nb получается слово $bba^{2\cdot n}$.
   - Полученный язык $\{b^n a^{2^n}\}$ известен, как не КС. Также не DFML: достаточно взять $v_n = b^n$, $p_n = b^{n+k}$. $b^{n+k}b^n a^{2^{2n+k}}$ лежит в языке, но не всякое слово с префиксом p_n, лежащее в этом языке, продолжается на v_n (см. слово $b^{n+k}a^{2^{n+k}}$).



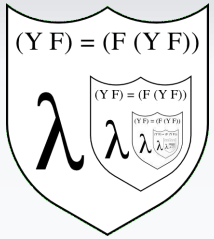
Языки соотношений

- Язык $\{w_1 w_2 \mid w_i = z_{i,1} a z_{i,2} \ \& \ |z_{i,1}| = |z_{i,2}|\}$.
- Частный случай: $b^n a b^{n+m} a b^m$. Похож на палиндромный, однако разница в том, что гораздо больше возможностей для выбора "середины палиндрома". Нужно их ограничить.
- Возьмём слова $b^{p+1} a b^p b a$ и $b^{p+1} a b^p b a b^{2p+3} a$. Из-за невозможности взять во втором слове первую по счёту букву a за середину подслова, невозможно накачивать только префикс $b^{p+1} a b^p$.
- 2-исправляемый: вставляем букву c перед каждой центральной буквой a и получаем DCFL.



Пробное-2

1. Язык SRS с правилами $a \to bab$, $ba \to ab$ над базисным словом aa (единственным). Подсказка: сначала решить задачу над базисным словом a.
2. Язык $\{w_1 u u^R w_2 \mid |u| > 1 \ \& \ w_i \neq z_1 u z_2\}$. Т.е. подслово u не содержится нигде больше в слове, при любом выборе u таком, что uu^R входит в слово языка и притом $|u| > 1$. Подсказка: сначала рассмотреть $|u| > 0$.



Продолжение (третье задание)

3. Язык, описывающийся следующей атрибутной грамматикой ($lookup$ — поиск по таблице значений $Table$, т.е. возвращает по $[Name].id$ такое $[Val].val$, что $([Name].id = [Val].val) \in Table$):

$[S] \to \{[Decl]\}[Exp]$	;	$[Exp].vars \subseteq [Decl].vars$, $[Exp].val == 1$, $[Exp].inh\_table := [Decl].table$
$[Decl] \to ([Name] = [Val])[Decl]$	;	$[Name].id \notin [Decl]_1.vars$, $[Decl]_0.table := [Decl]_1.table \cup \{[Name].id = [Val].val\}$, $[Decl]_0.vars := [Decl]_1.vars \cup \{[Name].id\}$
$[Decl] \to \varepsilon$	;	$[Decl].vars := \varnothing$, $[Decl].table := \varnothing$
$[Exp] \to [Name]$	;	$[Exp].val := lookup([Name].id, [Exp].inh\_table)$
$[Exp] \to [Exp]\ \&\ [Exp]$	;	$[Exp]_0.val := min([Exp]_1.val, [Exp]_2.val)$, $[Exp]_1.inh\_table := [Exp]_0.inh\_table$, $[Exp]_2.inh\_table := [Exp]_0.inh\_table$
$[Name] \to a[Name]$	;	$[Name]_0.id := a +\!\!+ [Name]_1.id$
$[Name] \to \varepsilon$	;	$[Name].id := \varepsilon$
$[Val] \to 0$	;	$[Val].val := 0$
$[Val] \to 1$	;	$[Val].val := 1$