Регулярные грамматики и выражения. Теорема Клини

Теория формальных языков

2023 г.

Грамматики

Определение

Грамматика — это четвёрка $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$, где:

- N — алфавит нетерминалов;
- Σ — алфавит терминалов;
- P — множество правил переписывания $\alpha \to \beta$ типа $\langle (N \cup \Sigma)^+ \times (N \cup \Sigma)^* \rangle$;
- $S \in N$ — начальный символ.

$\alpha \to \beta$, если $\alpha = \gamma_1 \alpha' \gamma_2$, $\beta = \gamma_1 \beta' \gamma_2$, и $\alpha' \to \beta' \in P$.
$\to^*$ — рефлексивное транзитивное замыкание $\to$.

Язык $\mathscr{L}(G)$, порождаемый G — множество $\{u \mid u \in \Sigma^* \ \&\ S \Rightarrow^* u\}$. Сентенциальная форма — элемент множества $\{u \mid u \in (N \cup \Sigma)^* \ \&\ S \Rightarrow^* u\}$.

Регулярные грамматики и НКА

Регулярная (праволинейная) грамматика G содержит правила вида $S \to \varepsilon$ (причём S не встречается в правых частях никаких правил), $T_i \to a_i$, $T_i \to a_i T_j$.

То есть во всех сентенциальных формах либо нет нетерминалов, либо он единствен и расположен строго справа от терминальных символов.
Каждый нетерминал N описывает собственный язык $\mathscr{L}(N)$ относительно G — язык слов, которые выводятся из N за конечное число применений правил грамматики G.

Регулярные грамматики и НКА

Регулярная (праволинейная) грамматика G содержит правила вида $S \to \varepsilon$ (причём S не встречается в правых частях никаких правил), $T_i \to a_i$, $T_i \to a_i\,T_j$.

То есть во всех сентенциальных формах либо нет нетерминалов, либо он единствен и расположен строго справа от терминальных символов.
НКА (неформально) определяется списком правил перехода и финальными состояниями.

- $T_i \to a_i\,T_j$ соответствует переходу $\langle T_i, a_i, T_j \rangle$;
- $T_i \to a_i$ соответствует переходу $\langle T_i, a_i, F \rangle$, где F — уникальное финальное состояние;
- $S \to \varepsilon$ соответствует объявлению S финальным.

Операции в регулярных грамматиках

Объединение

Дано: G_1 и G_2 — праволинейные. Построить $G : \mathscr{L}(G) = \mathscr{L}(G_1) \cup \mathscr{L}(G_2)$.

1. Переименовать нетерминалы из N_1 и N_2, чтобы стало $N_1 \cap N_2 = \varnothing$ (сделать α-преобразование). Применить переименовку к правилам G_1 и G_2.
2. Объявить стартовым символом свежий нетерминал S и для всех правил G_1 вида $S_1 \to \alpha$ и правил G_2 вида $S_2 \to \beta$, добавить правила $S \to \alpha$, $S \to \beta$ в правила G.
3. Добавить в правила G остальные правила из G_1 и G_2.

Операции в регулярных грамматиках

Конкатенация

Дано: G_1 и G_2 — праволинейные. Построить $G : \mathscr{L}(G) = \mathscr{L}(G_1)\ \mathscr{L}(G_2)$.

1. Переименовать нетерминалы из N_1 и N_2, чтобы стало $N_1 \cap N_2 = \varnothing$ (сделать α-преобразование).
2. Построить из G_1 её вариант без ε-правил (см. ниже).
3. По всякому правилу из G_1 вида $A \to a$ строим правило G вида $A \to aS_2$, где S_2 — стартовый нетерминал G_2.
4. Добавить в правила G остальные правила из G_1 и G_2. Объявить S_1 стартовым.
5. Если $\varepsilon \in \mathscr{L}(G_1)$ (до шага 2), то по всем $S_2 \to \beta$ добавить правило $S_1 \to \beta$.

Операции в регулярных грамматиках

Положительная итерация Клини

Дано: G_1 — праволинейная. Построить $G : \mathscr{L}(G) = \mathscr{L}(G_1)^+$.

1. Построить из G_1 её вариант без ε-правил.
2. По всякому правилу из G_1 вида $A \to a$ строим правило G вида $A \to aS_1$, где S_1 — стартовый нетерминал G_1.
3. Добавить в правила G все (включая вида $A \to a$) правила из G_1. Объявить S_1 стартовым.
4. Если $\varepsilon \in \mathscr{L}(G_1)$ (до шага 2), добавить правило $S_1 \to \varepsilon$ и вывести S_1 из рекурсии.

Построение грамматики без ε-правил

Дано: G — праволинейная. Построить G' без правил вида $A \to \varepsilon$ такую, что $\mathscr{L}(G') = \mathscr{L}(G)$ или $\mathscr{L}(G') \cup \{\varepsilon\} = \mathscr{L}(G)$.

1. Перенести в G' все правила G, не имеющие вид $A \to \varepsilon$.
2. Если существует правило $A \to \varepsilon$, то по всем правилам вида $B \to \alpha A$ дополнительно строим правила $B \to \alpha$.

Пересечение регулярных грамматик

Дано: G_1, G_2 — праволинейные. Построить G' такую, что $\mathscr{L}(G') = \mathscr{L}(G_1) \cap \mathscr{L}(G_2)$.

1. Построить стартовый символ G' — пару $\langle S_1, S_2 \rangle$, где S_i — стартовый символ грамматики G_i.
2. Поместить $\langle S_1, S_2 \rangle$ в множество U неразобранных нетерминалов. Множество T разобранных нетерминалов объявить пустым.
3. Для каждого очередного нетерминала $\langle A_1, A_2 \rangle \in U$:
    - 3 если $A_1 \to a \in G_1$, $A_2 \to a \in G_2$, тогда добавить в G' правило $\langle A_1, A_2 \rangle \to a$;
    - 3 если $A_1 \to aA_3 \in G_1$, $A_2 \to aA_4 \in G_2$, тогда добавить в G' правило $\langle A_1, A_2 \rangle \to a\langle A_3, A_4 \rangle$, а в U — нетерминал $\langle A_3, A_4 \rangle$, если его ещё нет в множестве T;
    - 3 если все пары правил, указанные выше, были обработаны, тогда переместить $\langle A_1, A_2 \rangle$ из U в T.
4. Повторять шаг 3, пока множество U не пусто.
5. Если $\varepsilon \in \mathscr{L}(G_1)$ & $\varepsilon \in \mathscr{L}(G_2)$, тогда добавить в G' правило $\langle S_1, S_2 \rangle \to \varepsilon$.

Лемма о накачке

Пусть $\mathfrak{n}$ — число нетерминалов в регулярной грамматике G для языка $\mathscr{L}$.

Рассмотрим слово $w \in \mathscr{L}(\mathrm{G})$, $|w| \geqslant \mathfrak{n}+1$. Оно получается применением цепочки из $\mathfrak{n}+1$ правил $\Rightarrow$ после применения хотя бы двух из них нетерминал в сентенциальной форме результата повторится.

$$S \underbrace{\to \cdots \to w_1\ A \to \cdots \to w_1\ w_2\ A}_{\text{не больше } \mathfrak{n}+1 \text{ шага}} \to \cdots \to w_1\ w_2\ w_3$$

$$\Downarrow$$

$$|w_1| + |w_2| \leqslant \mathfrak{n}+1$$

По построению, $w_3 \in \mathscr{L}(A)$ (поскольку A в конечном счёте раскрывается в w_3), и также $w_2 w_3 \in \mathscr{L}(A)$, причём $|w_2| > 0$. Кроме того, $w_1 \mathscr{L}(A) \subseteq \mathscr{L}(\mathrm{G})$, поскольку $S \to^* w_1 A$.

Лемма о накачке

Рассмотрим слово $w \in \mathscr{L}(G)$, $|w| \geqslant n+1$. Оно получается применением цепочки из $n+1$ правил $\Rightarrow$ после применения хотя бы двух из них нетерминал в сентенциальной форме результата повторится.

Известно, что $|w_1| + |w_2| \leqslant n+1$.

$$\underbrace{S \to \cdots \to w_1\ A}_{\rho_1 : \text{ вывод } w_1 A \text{ из } S} \overbrace{\to \cdots \to w_1\ w_2\ A}^{\rho_2 : \text{ вывод } w_2 A \text{ из } A} \underbrace{\to \cdots \to w_1\ w_2\ w_3}_{\rho_3 : \text{ вывод } w_3 \text{ из } A}$$

Поскольку $A \to^* w_2 A$, то $\forall k (A \to^* w_2^k A)$ (достаточно повторить k раз вывод ρ_2). Значит, $\forall k (w_1\ w_2^k\ w_3 \in \mathscr{L}(G))$.

Лемма о накачке

Утверждение

Если G — регулярная, то существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\forall w \big(w \in \mathscr{L}(G) \ \&\ |w| > n \Rightarrow \exists w_1, w_2, w_3 \big(|w_2| > 0 \ \&\ |w_1| + |w_2| \leqslant n \ \&\ w = w_1\ w_2\ w_3 \ \&\ \forall k(k \geqslant 0 \Rightarrow w_1\ {w_2}^k\ w_3 \in \mathscr{L}(G))\big)\big)$.

Известно, что $|w_1| + |w_2| \leqslant n + 1$.

$$\underbrace{S \to \cdots \to w_1\ A}_{\rho_1:\ \text{вывод } w_1 A \text{ из } S} \overbrace{\to \cdots \to w_1\ w_2\ A}^{\rho_2:\ \text{вывод } w_2 A \text{ из } A} \underbrace{\to \cdots \to w_1\ w_2\ w_3}_{\rho_3:\ \text{вывод } w_3 \text{ из } A}$$

Поскольку $A \to^* w_2 A$, то $\forall k(A \to^* w_2^k A)$ (достаточно повторить k раз вывод ρ_2). Значит, $\forall k(w_1\ w_2^k\ w_3 \in \mathscr{L}(G))$.

Ещё раз о структуре накачек

Если G — регулярная, то существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\forall w \big(w \in \mathscr{L}(G) \;\&\; |w| \geqslant n \Rightarrow \exists w_1, w_2, w_3 \big(|w_2| > 0 \;\&\; |w_1| + |w_2| \leqslant n \;\&\; w = w_1 w_2 w_3 \;\&\; \forall k (k \geqslant 0 \Rightarrow w_1 {w_2}^k w_3 \in \mathscr{L}(G))\big)\big)$.

- n — длина накачки;
- w_1 — префикс накачки;
- w_2 — накачиваемый фрагмент (или просто «накачка»);
- w_3 — суффикс накачки;
- $w_1 w_2$ — область накачки;
- слово $w_1 w_3$ (случай $k = 0$) — результат «пустой накачки» или «отрицательной накачки»;
- слова $w_1 w_2^k w_3$, где $k \geqslant 2$ — результаты «положительной накачки».

Применение леммы о накачке

Ниже запись $x[y]$ означает, что выбор x зависит от y.

Отрицание классической леммы о накачке

Пусть $\mathscr{L}$ — произвольный формальный язык. Если $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists w[n]\ \big(w \in \mathscr{L}\ \&\ |w| \geqslant n\ \&$ $\forall w_1[n, w], w_2[n, w], w_3[n, w]\ \big(|w_2| > 0\ \&\ |w_1| + |w_2| \leqslant n\ \&\ w = w_1 w_2 w_3 \Rightarrow \exists i[n, w, w_1, w_2, w_3]\ (i \geqslant 0\ \&\ w_1 {w_2}^i w_3 \notin \mathscr{L})\big)\big)$, то $\mathscr{L}$ — не регулярный.

На розовом фоне — параметры, которые выбираются произвольно. На голубом — те, которые можно конкретизировать. Таким образом, можно трактовать применение этой формы леммы о накачке как игру двух участников: «красные» пытаются создать максимально плохие условия для её применения, а «синие» — найти выигрышную стратегию в рамках условий «красных».

Применение леммы о накачке

Ниже запись $x[y]$ означает, что выбор x зависит от y.

Отрицание классической леммы о накачке

Пусть $\mathscr{L}$ — произвольный формальный язык. Если $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists w[n]\ \Big(w \in \mathscr{L}\ \&\ |w| \geqslant n\ \&\ \forall w_1[n,w], w_2[n,w], w_3[n,w]\ \big(|w_2| > 0\ \&\ |w_1| + |w_2| \leqslant n\ \&\ w = w_1 w_2 w_3 \Rightarrow \exists i[n,w,w_1,w_2,w_3]\ (i \geqslant 0\ \&\ w_1 {w_2}^i w_3 \notin \mathscr{L})\big)\Big)$, то $\mathscr{L}$ — не регулярный.

На розовом фоне — параметры, которые выбираются произвольно. На голубом — те, которые можно конкретизировать. Иногда такие игры «за кванторы» при использовании формул с большим количеством чередований $\forall$ и $\exists$ называют «играми демона и ангела» (d∀emonic vs. ang∃lic nondeterministic choice) или игрой «Абеляра и Элоизы».

Применение леммы о накачке

- Ход «красных» — выбор n. Каждое доказательство начинается фразой: «пусть n — длина накачки».
- Ход «синих»: ищем «ненакачиваемое» слово w. Это слово должно зависеть от n (его длина не меньше), и быть достаточно удобным для анализа (чтобы минимизировать количество разбиений его на фрагменты накачки).
- Ход «красных». Мы его не знаем, поэтому должны перебрать все возможные. В рамках префикса длины не больше n рассматриваем допустимые разбиения выбранного w на w_1 и w_2. Например, если w начинается с префикса a^n, то с учётом ограничения $|w_1| + |w_2| \leqslant n$ возможна только ситуация, когда $w_1 = a^{k_1}$, $w_2 = a^{k_2}$, причём $k_2 \geqslant 1$ и $k_1 + k_2 \leqslant n$.
- Выбор w_1 и w_2 однозначно определяет и значение w_3.
- Ход «синих». По каждому разбиению строим накачиваемую серию $w_1(w_2)^i w_3$ и предъявляем такое значение i_0, что $w_1(w_2)^{i_0} w_3 \notin \mathscr{L}$.

Примеры применения леммы о накачке

Обозначим обращение (reversal) слова w как w^R. Рассмотрим язык $\mathscr{L} = \{w\,w^R \mid w \in \Sigma^+\}$.

Пусть длина накачки — n. Рассмотрим слово $b^{n+1}a\,a\,b^{n+1} \in \mathscr{L}$. Поскольку $|w_1| + |w_2| \leqslant n$, то $w_2 = b^{k}$, $k \geqslant 1$. Но $b^m a\,a\,b^n \notin \mathscr{L}$, если $m \neq n$. Поэтому $\mathscr{L}$ — не регулярный.

Примеры применения леммы о накачке

Обозначим обращение (reversal) слова w как w^R. Рассмотрим язык $\mathscr{L} = \{w\,w^R \mid w \in \Sigma^+\}$.

Пусть длина накачки — n. Рассмотрим слово $b^{n+1}a\,a\,b^{n+1} \in \mathscr{L}$. Поскольку $|w_1| + |w_2| \leqslant n$, то $w_2 = b^k$, $k \geqslant 1$. Но $b^m a\,a\,b^n \notin \mathscr{L}$, если $m \neq n$. Поэтому $\mathscr{L}$ — не регулярный.

Рассмотрим язык $\mathscr{L}' = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$.

Пусть длина накачки — n. Рассмотрим множество слов $a^n b^{n+n!} \in \mathscr{L}'$. Поскольку $|w_1| + |w_2| \leqslant n$, то $w_2 = a^k$, $k \geqslant 1$. Но для всех $k \leqslant n$ $\exists v(n + k \cdot v = n + n!)$, а именно $v = \frac{n!}{k}$. Поэтому слово вида $a^{n+n!}b^{n+n!} \in \mathscr{L}'$, что абсурдно. Следовательно, $\mathscr{L}'$ не является регулярным.

Анализ на достаточность

Является ли лемма о накачке достаточной характеристикой регулярных языков? Существуют ли языки, которые «накачиваются» согласно её формулировке, но не регулярны?

Гипотеза

G — регулярная $\overset{???}{\Longleftrightarrow}$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\forall w \big(w \in \mathscr{L}(G) \,\&\, |w| \geqslant n \Rightarrow \exists w_1, w_2, w_3 \big(|w_2| > 0 \,\&\, |w_1| + |w_2| \leqslant n \,\&\, w = w_1\ w_2\ w_3 \,\&\, \forall k (k \geqslant 0 \Rightarrow w_1\ w_2{}^k\ w_3 \in \mathscr{L}(G))\big)\big)$.

Анализ на достаточность

Гипотеза

G — регулярная $\overset{???}{\Longleftrightarrow}$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\forall w \big(w \in \mathscr{L}(G)\ \&\ |w| \geqslant n \Rightarrow \exists w_1, w_2, w_3 \big(|w_2| > 0\ \&\ |w_1| + |w_2| \leqslant n\ \&\ w = w_1\ w_2\ w_3\ \&\ \forall k(k \geqslant 0 \Rightarrow w_1\ {w_2}^k\ w_3 \in \mathscr{L}(G))\big)\big)$.

Рассмотрим язык $\mathscr{L} = \left\{w\,w^R\,z \mid w \in \Sigma^+\ \&\ z \in \Sigma^+\right\}$ и $n = 4$.

- Если $|w| = 1$, тогда можно разбить слово $w\,w^R\,z$ так: $w_1 = w\,w^R$, $w_2 = z[1]$, $w_3 = z\big[2..|z|\big]$. Тогда для всех k $w_1\,w_2^k\,w_3 \in \mathscr{L}$.
- Если $|w| \geqslant 2$, тогда разбиваем так: $w_1 = \varepsilon$, $w_2 = w[1]$, $w_3 = w\big[2..|w|\big]\ w^R\,z$. Слова $w\big[2..|w|\big]\ w^R\,z$ и $w[1]^k\,w\big[2..|w|\big]\ w^R\,z$ при $k \geqslant 2$ также принадлежат $\mathscr{L}$.

Анализ на достаточность

Гипотеза

G — регулярная $\overset{???}{\Longleftrightarrow}$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\forall w\big(w \in \mathscr{L}(G) \,\&\, |w| \geqslant n \Rightarrow \exists w_1, w_2, w_3\big(|w_2| > 0 \,\&\, |w_1| + |w_2| \leqslant n \,\&\, w = w_1\ w_2\ w_3 \,\&\, \forall k(k \geqslant 0 \Rightarrow w_1\ {w_2}^k\ w_3 \in \mathscr{L}(G))\big)\big)$.

Мы нашли длину накачки для $\left\{w\, w^R\, z \mid w \in \Sigma^+ \,\&\, z \in \Sigma^+\right\}$ (она равна 4), но язык регулярным не является. Следовательно, лемма о накачке — только необходимое, но не достаточное условие регулярности.

Смысл леммы о накачке

Структура доказательства указывает, что длина накачки $\mathfrak{n}$ регулярного языка $\mathscr{L}$ не больше (возможно, меньше) числа нетерминалов в минимальной грамматике для $\mathscr{L}$.

Покажем, что у некоторых регулярных языков длина накачки действительно меньше, чем размер минимального НКА (или минимальной регулярной грамматики).

Смысл леммы о накачке

Рассмотрим $\mathscr{L} = \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \mid (\mathtt{a}\ \{\mathtt{a} \mid \mathtt{b}\}^* \mathtt{a}) | (\mathtt{b}\ \{\mathtt{a} \mid \mathtt{b}\}^* \mathtt{b})$. Если выбрать длину накачки $n = 2$, то в качестве «накачки» Ψ можно взять вторую букву слова из $\mathscr{L}$. Пусть G имеет два нетерминала S, T и распознаёт $\mathscr{L}$. Если G содержит правила $\mathsf{S} \to \mathtt{a}\mathsf{T}$ и $\mathsf{S} \to \mathtt{b}\mathsf{T}$ (или $\mathsf{S} \to \mathtt{a}\mathsf{S}$, $\mathsf{S} \to \mathtt{b}\mathsf{S}$), то для некоторого непустого z слова вида $\mathtt{a}z$ и $\mathtt{b}z$ будут либо оба принадлежать $\mathscr{L}$, либо нет, чего не может быть. Значит, G содержит либо пару $\mathsf{S} \to \mathtt{a}\mathsf{T}$, $\mathsf{S} \to \mathtt{b}\mathsf{S}$, либо пару $\mathsf{S} \to \mathtt{b}\mathsf{T}$, $\mathsf{S} \to \mathtt{a}\mathsf{S}$. Рассмотрим первый случай. Тогда для некоторого непустого z имеем $\mathtt{a}z \in \mathscr{L} \Leftrightarrow \mathtt{b}^+\mathtt{a}z \in \mathscr{L}$, что абсурдно.

Таким образом, в грамматике для $\mathscr{L}$ должно быть больше двух нетерминалов (можно обойтись тремя).

Достаточный вариант леммы о накачке

Видно, что проблемы с языком $\{w\,w^{\mathsf{R}}\,z \mid w \in \Sigma^{+} \;\&\; z \in \Sigma^{+}\}$ возникают из-за того, что у него очень удачный префикс: любая степень буквы, большая первой, начинается с палиндрома. Однако, если бы мы потребовали, чтобы слово из $\mathscr{L}$ начиналось с палиндрома хотя бы длины 4, подобное рассуждение уже не привело бы к успеху.

Достаточный вариант леммы о накачке

Мы можем искать не первый повтор нетерминала в пути разбора по грамматике, а любой, если осталось разобрать ещё достаточно длинный суффикс.

$$\underbrace{S \to \dots \to \Phi\ A_0}_{\text{Произвольное число шагов}} \to \underbrace{\Phi\ \Psi'\ A \to \dots \to \Phi\ \Psi'\ \Psi\ A}_{\text{Не более } m \text{ шагов до повтора нетерминала}} \to \dots \to \Phi\ \Psi'\ \Psi\ \Theta$$

$\mathscr{L}$ регулярный $\Leftrightarrow$ существует универсальная длина накачки m такая, что $w \in \mathscr{L}$ $(|w| \geqslant m)$ для любого $i \leqslant |w| - m$ может быть представлено как $\Phi\Psi'\Psi\Theta$, где $|\Phi| = i$, $1 \geqslant |\Psi| \leqslant m$, $|\Psi'| + |\Psi| \leqslant m$, причём $\forall k(\Phi\Psi'\Psi^k\Theta \in \mathscr{L})$.

Академические регулярные выражения $\mathcal{RE}$

- $A \mid B$ — альтернатива (вхождение слова или из A, или из B);
- $A\,B$ — конкатенация (множество слов с префиксами из A и суффиксами из B);
- A^* — итерация Клини (0 или более конкатенаций A с собой).

- A^+ — положительная итерация (синтаксический сахар для выражения $A\,A^*$);
- $A?$ — опция (синтаксический сахар для выражения $(A \mid \varepsilon)$).

И менее очевидные синтаксические конструкции, такие как отрицание, положительные и отрицательные «ретроспективные» и «опережающие» проверки (моделирующие в т.ч. пересечения), сохраняющие выразительную силу регулярных языков.

Академические регулярные выражения $\mathcal{RE}$

- $A \mid B$ — альтернатива (вхождение слова или из A, или из B);
- $A\,B$ — конкатенация (множество слов с префиксами из A и суффиксами из B);
- A^* — итерация Клини (0 или более конкатенаций A с собой).

Приоритет операций: итерация $>$ конкатенация $>$ альтернатива, то есть $ab^* \mid c^*d$ — то же, что $\big(a(b^*)\big) \mid \big((c^*)d\big)$.

Определим $r_1 = r_2 \Leftrightarrow \mathscr{L}(r_1) = \mathscr{L}(r_2)$. Для всех $r_1, r_2, r_3 \in \mathcal{RE}$:

- операции конкатенации и альтернативы ассоциативны;
- $r_1 \mid r_2 = r_2 \mid r_1$;
- $r_1(r_2 \mid r_3) = r_1r_2 \mid r_1r_3$;
- $(r_1 \mid r_2)r_3 = r_1r_3 \mid r_2r_3$.

Как описать все возможные тождества регулярных выражений?

Полукольца

Полукольцо $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \oplus, \otimes, \mathtt{0} \rangle$ над носителем $\mathcal{A}$ — это алгебраическая структура такая, что:

- $\mathcal{S}$ — коммутативный моноид по $\oplus$;
- $\mathcal{S}$ — полугруппа по $\otimes$;
- $\mathtt{0}$ — это $\mathtt{id}$ по сложению и ноль по умножению;
- выполнены левая и правая дистрибутивности.

- Регулярные выражения — идемпотентное по $\oplus$ полукольцо с единицей (ε) относительно $|$ и $\cdot$. Нуль — пустое выражение $\varnothing$, не распознающее никакую строку.
- Натуральные числа с $+, \cdot$ — коммутативное полукольцо с $\mathtt{1}$.
- Если $\mathtt{M}$ — множество, то $\langle 2^{\mathtt{M}}, \cup, \cap, \varnothing \rangle$ — идемпотентное коммутативное полукольцо с единицей, равной $\mathtt{M}$.
- $\langle \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \mathtt{min}, +, \infty \rangle$ — тропическое полукольцо.

Алгебра Клини

Для полной формализации алгебры регулярных выражений требуется ввести аксиомы для $*$. Конечной аксиоматизации для неё не существует, но можно построить полную схему аксиом.

Алгебра Клини $\langle \Sigma, |, \cdot, *, \varnothing, \varepsilon \rangle$ — идемпотентное полукольцо с единицей, удовлетворяющее следующим аксиомам:

- $x^* x + 1 = x^* = 1 + x x^*$ (аксиома развёртки)
- (формализация Саломаа, **Sal**): $\forall p, q, x\big((p \mid qx = x \Rightarrow x = q^* p) \;\&\; (p \mid xq = x \Rightarrow x = pq^*)\big)$, где q не распознаёт ε — левая и правая леммы Ардена;
- (формализация Козена, **Koz**): $\forall p, q, x\big((q \mid px \leqslant x \Rightarrow p^* q \leqslant x) \;\&\; (q \mid xp \leqslant x \Rightarrow qp^* \leqslant x)\big)$, где $x \leqslant y \Leftrightarrow x \mid y = y$, $x = y \Leftrightarrow x \leqslant y \;\&\; y \leqslant x$.

Алгебра Клини

В выводах далее используются следующие условные обозначения.

Сокращение	**Аксиома**
(Idm)	$x \mid x = x$
(Unfold)	$\varepsilon \mid xx^* = x^*,\ \varepsilon \mid x^*x = x^*$
(Dstr)	$(x \mid y)z = xz \mid yz,\ x(y \mid z) = xy \mid xz$
(Koz)	$q \mid px \leqslant x \Rightarrow p^*q \leqslant x,$ $q \mid xp \leqslant x \Rightarrow qp^* \leqslant x$

Применение коммутативности по альтернативе и ассоциативности, а также применение аксиом единицы в выводах не указываются.

Некоторые теоремы алгебры Клини

(Bsm)	$ax = xb \Rightarrow a^*x = xb^*$	(Бисимуляция)
(Sld)	$x(yx)^* = (xy)^*x$	(Сдвиг)
(Dnst)	$x^*(yx^*)^* = (x \mid y)^*$	(Уплощение)

Законы сдвига и уплощения используются в оптимизациях регулярных событий:

- закон сдвига позволяет перестраивать циклы с поствычислениями в циклы с предвычислениями;
- закон уплощения позволяет перестраивать друг в друга вложенные циклы и циклы с условиями внутри итерации.

Полнота аксиоматики

Теорема о полноте Sal и Koz

Любое равенство регулярных выражений выводимо из аксиоматики **Sal** и аксиоматики **Koz**.

Пример вывода в системе **Koz**:

$$
\begin{array}{lll}
(0) & x^* = xx^* \mid \varepsilon = xx^* \mid xx^* \mid \varepsilon = xx^* \mid x^* & (\mathsf{Unfold} + \mathsf{Idm}) \\
(1) & x \mid yx = x \Rightarrow x \mid y^*x = x & (\mathsf{Koz}, p = y, q = x) \\
(2) & x^*x^* \mid x^* = x^* & (0 + 1) \\
(3) & x^*x^* = (\varepsilon \mid xx^*)(\varepsilon \mid xx^*) & (\mathsf{Unfold}) \\
(4) & (\varepsilon \mid xx^*)(\varepsilon \mid xx^*) = (\varepsilon \mid xx^* \mid xx^*) \mid xxx^* & (\mathsf{Dstr} + 3) \\
(5) & (\varepsilon \mid xx^* \mid xx^*) \mid xxx^* = x^* \mid xxx^* & (\mathsf{Idm} + \mathsf{Unfold} + 4) \\
(6) & x^* \mid xxx^* = x^* \mid (x^* \mid xxx^*) & (\mathsf{Idm} + 5) \\
(7) & x^* \mid (x^* \mid xxx^*) = x^* \mid x^*x^* & (4 + 5) \\
(8) & x^*x^* \leqslant x^* \;\&\; x^* \leqslant x^*x^* & (2 + 7) \\
(9) & x^*x^* = x^* & (8)
\end{array}
$$

Смысл леммы Ардена и аксиом Козена

Неподвижная точка функции $f(x)$ — такое x, что $f(x) = x$.

Пусть $X = (pX) \mid q$, где X — неизвестное $\mathcal{RE}$, а p, q — известные, причём $\varepsilon \notin \mathscr{L}(p)$. Тогда $X = (p)^* q$.

То есть $p^* q$ — наименьшая (но не единственная) неподвижная точка выражения $px \mid q$ по отношению $\leqslant$, и единственная, если $\varepsilon \notin \mathscr{L}(p)$.

Рассмотрим систему уравнений:

$$
\begin{array}{ccc}
X_1 & = & (A_{11}X_1) \mid (A_{12}X_2) \mid \ldots \mid B_1 \\
X_2 & = & (A_{21}X_1) \mid (A_{22}X_2) \mid \ldots \mid B_2 \\
 & \ldots & \\
X_n & = & (A_{n1}X_1) \mid (A_{n2}X_2) \mid \ldots \mid B_n
\end{array}
$$

Положим $\varepsilon \notin A_{ij}$. Выразим X_1 через $X_2, \ldots, X_n$, X_2 через $X_3 \ldots X_n$ и т.д. Получим регулярное выражение для X_n (и после обратных подстановок также для $X_{n-1}, \ldots, X_1$).

От грамматики и НКА к $\mathcal{RE}$

Теорема Клини

По каждому НКА можно построить $\mathcal{RE}$, распознающую тот же язык. Верно и обратное.

Здесь считаем, что в НКА нет ε-переходов.

- Объявляем каждый нетерминал (или состояние НКА) переменной и строим для него уравнение:
  - По правилу $A \to aB$ (или для стрелки из A в B) добавляем альтернативу aB;
  - По правилу $A \to b$ (или для стрелки в финальное состояние) добавляем альтернативу без переменных.
  - Если начальное состояние финальное, добавляем в уравнение для S альтернативу ε.
- Решаем систему относительно S.

От грамматики к $\mathcal{RE}$

Построим $\mathcal{RE}$ по грамматике: $S \to aT \quad S \to aS$
$T \to aT \quad T \to bT \quad T \to b$

Строим по правилам грамматики систему:

$S = (aS) \mid (aT)$

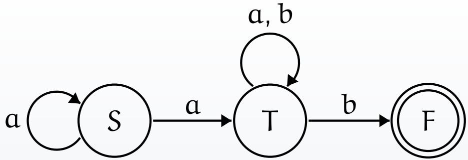
$T = ((a \mid b)T) \mid b$

Решаем второе уравнение: $T = (a \mid b)^*b$

Подставляем в первое: $S = (aS) \mid (a(a \mid b)^*b)$ Получаем ответ:

$S = a^*a(a \mid b)^*b$

Построим НКА, соответствующий этой грамматике:

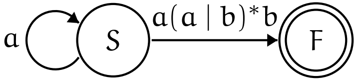


От грамматики к $\mathcal{RE}$

Построим $\mathcal{RE}$ по грамматике:
$$S \to aT \quad S \to aS$$
$$T \to aT \quad T \to bT \quad T \to b$$

Получаем ответ: $S = a^*a(a \mid b)^*b$

Построим НКА, соответствующий этой грамматике .
Видно, что решив уравнение для T, по существу мы превратили его в НКА над регексами, имеющий на одно состояние меньше.



Можно было бы сказать, что и выражение для $\mathscr{L}(S)$ соответствует НКА с одним переходом (из стартового состояния в финальное), если бы до S было «самое стартовое» состояние с переходом в S по ε. Это наблюдение приводит к «двойнику» решения уравнений по лемме Ардена — методу устранения состояний.

От грамматики к $\mathcal{RE}$

В качестве промежуточной структуры здесь используется НКА с переходами по регулярным выражениям, а не по элементам алфавита.

Метод устранения состояний

- Для единообразия перед преобразованием вводится новое начальное состояние S с ε-переходом в начальное состояние q_0, и финальное состояние T, с ε-переходами в него из всех $q \in F$. Все состояния, кроме T, становятся нефинальными.
- Пусть требуется устранить состояние q такое, что $q \xrightarrow{\tau} q$. Тогда для всех пар q_A, q_B, где $q_A \xrightarrow{\Phi} q$, $q \xrightarrow{\Psi} q_B$ (q_A и q_B могут совпадать), добавляем переход $q_A \xrightarrow{\Phi(\tau)^*\Psi} q_B$, и после всех таких добавлений удаляем q.
- Когда останутся только S и T, где $S \xrightarrow{\rho} T$, то ρ и будет искомым регулярным выражением.

От грамматики к $\mathcal{RE}$

Построим $\mathcal{RE}$ по грамматике: $\begin{array}{lll} S \to aT & S \to aS & \\ T \to aT & T \to bT & T \to b \end{array}$

Получаем ответ: $S = a^*a(a \mid b)^*b$

Если S выражать через T, получаем язык $\mathscr{L}(S) = a^*a(a \mid b)^*b$. Точно такое же выражение получится, если сначала применить к S лемму Ардена, а потом подставить туда результат вычисления $\mathscr{L}(T)$. Можно ли гарантировать, что любой порядок подстановок приведёт к одному и тому же результату?

Порядок исключения состояний

Рассмотрим систему частично приведённых правил

$$\begin{array}{lll} S \to \alpha_1 S & S \to \beta_1 T & S \to \gamma_1 \\ T \to \alpha_2 S & T \to \beta_2 T & T \to \gamma_2 \end{array}$$

, где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — регулярные выражения, включающие в себя, возможно, нетерминалы, отличные от S и T (и не включающие S и T).

По правилу Ардена выразим T через S и подставим результат в S:

$$T = \beta_2^*(\alpha_2 S \mid \gamma_2)$$
$$S = \alpha_1 S \mid \beta_1\beta_2^*\alpha_2 S \mid (\gamma_1 \mid \beta_1\beta_2^*\gamma_2)$$
$$S = (\alpha_1 \mid \beta_1\beta_2^*\alpha_2)^*(\gamma_1 \mid \beta_1\beta_2^*\gamma_2) \qquad \text{(TS)}$$

А теперь наоборот:

$$S = \alpha_1^*(\beta_1 T \mid \gamma_1)$$
$$T = \beta_2 T \mid \alpha_2\alpha_1^*\beta_1 T \mid (\gamma_2 \mid \alpha_2\alpha_1^*\gamma_1)$$
$$T = (\beta_2 \mid \alpha_2\alpha_1^*\beta_1)^*(\gamma_2 \mid \alpha_2\alpha_1^*\gamma_1)$$
$$S = \alpha_1^*\gamma_1 \mid \alpha_1^*\beta_1(\beta_2 \mid \alpha_2\alpha_1^*\beta_1)^*(\gamma_2 \mid \alpha_2\alpha_1^*\gamma_1) \qquad \text{(ST)}$$

Как получить выражение (ST) из (TS) напрямую?

Подчёркивается терм, который будет преобразован на следующем шаге; хайлайтером выделен результат преобразования.

(TS) $(\underline{\alpha_1} \mid \beta_1\beta_2^*\alpha_2)^*(\gamma_1 \mid \beta_1\beta_2^*\gamma_2)$

(0) $(\alpha_1^* \beta_1\beta_2^*\alpha_2)^* \alpha_1^* \underline{(\gamma_1 \mid \beta_1\beta_2^*\gamma_2)}$ (TS + Dnst)

(1) $\underbrace{((\alpha_1^*\beta_1\beta_2^*\alpha_2)^*\alpha_1^* \gamma_1)}_{\Phi} \mid ((\underline{\alpha_1^*\beta_1}\beta_2^*\alpha_2)^*\underline{\alpha_1^*} \underline{\beta_1}\beta_2^*\gamma_2)$ (0 + Dstr)

(2) $\Phi \mid (\alpha_1^*\beta_1 (\underline{\beta_2^*}\alpha_2 \alpha_1^*\beta_1)^* \underline{\beta_2^*}\gamma_2)$ (1 + Sld)

(3) $((\underline{(\alpha_1^*\beta_1\beta_2^*\alpha_2)^*}\underline{\alpha_1^*\gamma_1}) \mid \underbrace{(\alpha_1^*\beta_1(\beta_2 \mid \alpha_2\alpha_1^*\beta_1)^*\gamma_2)}_{\Psi}$ (2 + Dnst)

(4) $\alpha_1^*\gamma_1 \mid (\underline{\alpha_1^*\beta_1}\beta_2^*\alpha_2)^* \underline{\alpha_1^*\beta_1}\beta_2^*\alpha_2 \alpha_1^*\gamma_1 \mid \Psi$ (3 + Unfold + Dstr)

(5) $\alpha_1^*\gamma_1 \mid \alpha_1^*\beta_1 (\underline{\beta_2^*}\alpha_2^* \alpha_1^*\beta_1)^* \underline{\beta_2^*}\alpha_2\alpha_1^*\gamma_1 \mid \Psi$ (4 + Sld)

(6) $\alpha_1^*\gamma_1 \mid \underline{\alpha_1^*\beta_1(\beta_2 \mid \alpha_2^*\alpha_1^*\beta_1)^*\alpha_2}\alpha_1^*\gamma_1 \mid \Psi$ (5 + Dnst)

(ST) $\alpha_1^*\gamma_1 \mid \alpha_1^*\beta_1(\beta_2 \mid \alpha_2^*\alpha_1^*\beta_1)^* (\alpha_2\alpha_1^*\gamma_1 \mid \gamma_2)$ (6 + Dstr)

Терм (ST) получился из (TS) применением только базовых алгебраических преобразований, развёртки, сдвига и уплощения.

Порядок исключения состояний

Лемма (Conway, Krob)

Регулярные выражения, полученные методом устранения состояний (или применением леммы Ардена), эквивалентны с точностью до преобразований Dstr, Unfold + Sld и Dnst.

Действительно, различные упорядочения состояний по приоритету их исключения могут быть преобразованы друг в друга посредством парных транспозиций. А вывод выражений, полученных транспозицией, мы уже построили. Более того, он симметричный: нигде не используются схемы аксиом, включающие импликацию, т.е. все преобразования можно совершить и в обратную сторону.

С точки зрения практики, выбор порядка исключения может изменить асимптотику скорости сопоставления с выражением.