Системы переписывания термов. Завершаемость

Теория формальных языков

2021 г.

Основные понятия

Определение

Сигнатура — множество пар $\langle f, n \rangle$ из имени конструктора f и его местности n.

Нульместные конструкторы выполняют роль констант.

Определение

Пусть V — множество переменных, F — множество конструкторов; множество термов $T(F)$ над F определяется рекурсивно:

- все элементы V — термы;
- если $\langle f, n \rangle$ — конструктор и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ — терм;
- других термов нет.

Системы переписывания термов

TRS

Пусть V — множество переменных, F — множество конструкторов (сигнатура); $T(F)$ — множество термов над множеством конструкторов F. TRS — набор правил переписывания вида $\Phi_i \to \Psi_i$, где Φ_i, Ψ_i — термы в $T(F)$. Правило переписывания $\Phi_i \to \Psi_i$ применимо к терму t, если t содержит подтерм, который можно сопоставить с Φ_i.

Если к терму t не применимо ни одно правило переписывания TRS, терм называется нормализованным.

Конфлюэнтность

Определение

TRS называется конфлюэнтной, если для любых двух термов t, s, которые получаются переписыванием одного и того же терма u, существует терм v такой, что t, s оба переписываются в v.
Формально:
$\forall u, t, s(u \to^* t \; \& \; u \to^* s \Rightarrow \exists v(t \to^* v \; \& \; s \to^* v))$

Конфлюэнтные системы поддаются распараллеливанию и легко оптимизируются.
$\to$ — переписывание за 1 шаг;
$\to^*$ — переписывание за произвольное число шагов, начиная с 0.

Особенности TRS

- Недетерминированные.
- Нет ограничений на порядок применения правил.
- Не обязательно конфлюэнтны.
- Могут порождать бесконечные цепочки.

Особенности TRS

- Недетерминированные.
- Нет ограничений на порядок применения правил.
- Не обязательно конфлюэнтны.
- Могут порождать бесконечные цепочки.

Пример Хетта

$$f(x, x) \to a$$
$$f(x, g(x)) \to b$$
$$c \to g(c)$$

Терм, где нарушается конфлюэнтность?

Особенности TRS

- Недетерминированные.
- Нет ограничений на порядок применения правил.
- Не обязательно конфлюэнтны.
- Могут порождать бесконечные цепочки.

Пример Клопа

$$A \to CA$$
$$Cz \to Dz(Cz)$$
$$Dzz \to E$$

Способы преобразовать A?

Особенности TRS

- Недетерминированные.
- Нет ограничений на порядок применения правил.
- Не обязательно конфлюэнтны.
- Могут порождать бесконечные цепочки.

Пример Тойямы

- TRS 1:
  $f(0,1,x) \to f(x,x,x)$
- TRS 2:
  $g(x,y) \to x$
  $g(x,y) \to y$

Как можно вычислить $f(g(0,1),g(0,1),g(0,1))$?

Фундированность

Определение

Частичный порядок $\preceq$ является фундированным (wfo) на множестве M, если в M не существует бесконечных нисходящих цепочек относительно $\preceq$ (иногда используют термин анти-нётеровый, или просто нётеровый).

Частичный порядок $\preceq$ является монотонным в алгебре A, если $\forall f, t_1, ..., t_n, s, s' (s \preceq s' \Rightarrow f(t_1, \dots, s, \dots, t_n) \preceq f(t_1, \dots, s', \dots, t_n))$ (строго монотонным, если при этом неверно обратное).

Завершаемость

Определение

Фундированная монотонная алгебра (ФуМА) над множеством функциональных символов F — это фундированное множество $\langle A, > \rangle$ такое, что для каждого функционального символа $f \in F$ существует функция $f_A : A^n \to A$, строго монотонная по каждому из аргументов.

Определим расширение произвольного отображения σ из множества переменных в A следующим образом:

- $[x, \sigma] = \sigma(x)$;
- $[f(t_1, \ldots, t_n), \sigma] = f_A([t_1, \sigma], \ldots, [t_n, \sigma])$.

Завершаемость

Совместность

TRS $\{l_i \to r_i\}$ совместна с ФуМА A $\Leftrightarrow$ для всех i и для всех σ выполняется условие $[l_i, \sigma] > [r_i, \sigma]$.

Теорема

TRS не порождает бесконечных вычислений (завершается), если и только если существует совместная с ней ФуМА.

ФуМА, совместные с TRS

Стандартные способы определения f_A:

- лексикографический порядок на множестве имён F + отношение подтерма;
- построение монотонно возрастающей (по каждому аргументу) числовой функции, соответствующей f_A.

Оба случая подразумевают, что в построенной модели целое больше части, т.е. всегда выполняется $f(t) > t$.

Лексикографический порядок $>_{lo}$

Определение

$f(t_1, \dots, t_n) >_{lo} g(u_1, \dots, u_m)$ (этот порядок также называют порядком Кнута–Бендикса) если и только если выполнено одно из условий:

1. $\exists i(1 \leqslant i \leqslant n \,\&\, t_i = g(u_1, \dots, u_m))$;
2. $\exists i(1 \leqslant i \leqslant n \,\&\, t_i >_{lo} g(u_1, \dots, u_m))$;
3. $(f > g) \,\&\, \forall i(1 \leqslant i \leqslant m \Rightarrow f(t_1, \dots, t_n) >_{lo} u_i)$;
4. $(f = g) \,\&\, \forall i(1 \leqslant i \leqslant n \Rightarrow f(t_1, \dots, t_n) >_{lo} u_i)$ и n-ка $(t_1, \dots, t_n)$ лексикографически больше, чем $(u_1, \dots, u_n)$ (т.е. первый её не совпадающий с u_i элемент t_i удовлетворяет условию $t_i >_{lo} u_i$).

Примеры

Проверить завершаемость TRS методом $>_{lo}$:

$$f(g(x)) \to g(h(x,x))$$
$$g(f(x)) \to h(g(x),x)$$

- Первое правило переписывания вынуждает либо $g(x) >_{lo} g(h(x,x))$ (по условию 1 или 2) — что невозможно, потому что x должно лексикографически оказаться больше $h(x,x)$ (по условию 4); либо $f > g$ и $f(g(x)) > h(x,x)$ (по условию 3). В этом случае можно взять также $f > h$. Неравенство $f(g(x)) > x$ выполняется тривиально.
- Второе правило переписывания удовлетворяет условию завершаемости по условию 2, например, если показать, что $f(x) >_{lo} h(g(x),x)$. Уже имеем $f > h$, поэтому достаточно показать $f(x) >_{lo} g(x)$ и $f(x) >_{lo} x$. Оба условия тривиально выполняются из допущений выше.

Примеры

Проверить завершаемость TRS методом построения монотонной функции:

$$f(g(x, y)) \to g(h(y), x)$$
$$h(f(x)) \to f(x).$$

- Завершаемость по второму правилу переписывания автоматически выполняется по свойству подтерма. Поэтому то, что функция f стоит на двух его сторонах, не дает никаких указаний относительно того, стоит ли делать f_A быстро растущей или медленно. Все подсказки содержатся только в первом правиле переписывания.
- По первому правилу переписывания видно, что f_A надо делать большой (f стоит только слева), а h нет (h есть только справа). Положим $f_A(x) = 10 * (x + 1)$, $h_A(x) = x + 1$. Тогда должно выполняться $10 * (g_A(x, y) + 1) > g(y + 1, x)$. Этому неравенству удовлетворяет, например, $g_A(x, y) = x + y$.

Общие комментарии

- Не обязательно добиваться выполнения неравенства на образах f_A на всём множестве $\mathbb{N}$. Поскольку любой отрезок $\mathbb{N}$ от k и до бесконечности фундирован, а все образы f_A монотонны, они замкнуты на этом отрезке. Поэтому, если неравенство не выполняется для нескольких первых чисел натурального ряда, этим можно пренебречь.
- Если не получается применить $>_{lo}$ или подобрать числовую функцию, это ещё не значит, что TRS не завершается. См. пример Зантемы: $f(g(x)) \to g(f(f(x)))$.

Ординалы

Определение

Рассмотрим множество M с определенным на нем полным (линейным, фундированным) порядком $<$. Ординал τ — это порядок множества $\langle M, < \rangle$ (иногда в виде τ рассматривается само это множество). Если существует биекция f из $\langle M, < \rangle$ в $\langle M', <' \rangle$, являющаяся гомоморфизмом, то M и M' имеют одинаковые порядки.

Ординал любого множества $\{1, 2, ..., k\}$, где $k \in \mathbb{N}$ — это k. Ординал $\mathbb{N}$ — это ω.

Математика мыльных пузырей

Фон-Неймановское представление ординалов:

- $\hat{0} = \varnothing$
- $\hat{1} = \{\varnothing\}$
- $\hat{2} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\ldots$
- $\widehat{k+1} = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \hat{k}\}$

Предельные ординалы

Определение

Ординал τ предельный, если не существует τ_0 такого, что $\tau = \tau_0 + 1$.

Существование предельных ординалов делает ординальную арифметику некоммутативной, поскольку правый элемент сложения и умножения может поглощать левый.

Ординальная арифметика

- Сложение:
  $\alpha + 0 = \alpha$;
  $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$;
  β — предельный $\Rightarrow \alpha + \beta = \lim_{\gamma < \beta}(\alpha + \gamma)$.
- Умножение:
  $\alpha * 0 = 0$;
  $\alpha * (\beta + 1) = (\alpha * \beta) + \alpha$;
  β — предельный $\Rightarrow \alpha * \beta = \lim_{\gamma < \beta}(\alpha * \gamma)$.
- Экспоненциация:
  $\alpha^0 = 1$;
  $\alpha^{(\beta+1)} = (\alpha^\beta) * \alpha$;
  β — предельный $\Rightarrow \alpha^\beta = \lim_{\gamma < \beta}(\alpha^\gamma)$.

Дистрибутивность только левая: $\alpha * (\beta + \gamma) = \alpha * \beta + \alpha * \gamma$.

Примеры ординальных вычислений

- Вычислим $(\omega+1)+\omega*2$. Умножение можно раскрыть стандартным образом, поскольку 2 — не предельный ординал. Получается $\omega+1+\omega+\omega$. Чтобы вычислить $1+\omega$, перейдём к пределу: $\lim_{\gamma<\omega}(1+\gamma)$. Искомый предел есть ω, и результат — $\omega+\omega+\omega$, который можно свернуть в $\omega*3$ по правилу умножения.

Примеры ординальных вычислений

- Вычислим $(\omega + 1) + \omega * 2$. Умножение можно раскрыть стандартным образом, поскольку 2 — не предельный ординал. Получается $\omega + 1 + \omega + \omega$. Чтобы вычислить $1 + \omega$, перейдём к пределу: $\lim_{\gamma < \omega}(1 + \gamma)$. Искомый предел есть ω, и результат — $\omega + \omega + \omega$, который можно свернуть в $\omega * 3$ по правилу умножения.
- Вычислим $\omega * \omega^{\omega} + \omega^{\omega^{\omega}}$. Здесь все ординалы предельные, поэтому сразу же строим предел для подтерма $\omega * \omega^{\omega}$: $\lim_{\gamma < \omega^{\omega}}(\omega * \gamma)$. Поскольку γ включает ряд ω^{k}, предел будет равен ω^{ω}.
  Осталось вычислить $\lim_{\gamma < \omega^{\omega^{\omega}}}(\omega^{\omega} + \gamma)$. По аналогичным соображениям получается ординал $\omega^{\omega^{\omega}}$.

Трансфинитная индукция

Если $T(0)$ и для выполнено $\forall\beta(\beta < \alpha \Rightarrow T(\beta)) \Rightarrow T(\alpha)$, тогда $\forall\alpha(T(\alpha))$.

Выбор множества ординалов в качестве ФуМА — лёгкий способ доказывать завершаемость TRS.

- Не надо подбирать точные значения коэффициентов.
- Существенно расширяется класс TRS, для которых можно проверить завершаемость методом построения ФуМА.

Функция Аккермана

Функция, растущая быстрее всех элементарных

Ack(0,m) = m+1;
Ack(n,0) = Ack(n-1, 1);
Ack(n,m) = Ack(n-1, Ack(n, m-1)).

Положим $f_{Ack}(n, m) = \omega^{n+1} + m$.
Проверим условия завершаемости:
$\omega + m > m + 1$
$\omega^{n+1} > \omega^n + 1$
$\omega^{n+1} + m > \omega^n + \omega^{n+1} + m - 1$. Воспользуемся левой дистрибутивностью: $\omega^n + \omega^{n+1} = \omega^n * (1 + \omega)$. Но $1 + \omega = \omega$, откуда следует неравенство выше.

Гидра Гудстейна

Рассмотрим $g(N, k)$ — экспоненциальное представление числа N в алфавите $\{1, \dots, k\}$.
Пример: $g(11, 2) = 2^{(2+1)} + 2 + 1$.
Рассмотрим $G(N, m)$, где N записана в виде $g(N, m+1)$. Формально заменим все $m+1$ на $m+2$ в этом представлении, а затем вычтем из результата 1.
Будем шаг за шагом применять к результату преобразование G, увеличивая m.

Утверждение

$\forall N \exists m (G(G(...G(N, 2)...), m) = 0)$.

Смертность гидры Гудстейна

Сопоставим числу N функцию оценки $f(N, m)$, которая рассматривает $g(N, m)$-представление числа N и заменяет в нём все числа m на ω. Покажем, что
$f(N, m) > f(G(N, m+1) - 1, m+1)$.

Смертность гидры Гудстейна

Сопоставим числу N функцию оценки $f(N, m)$, которая рассматривает $g(N, m)$-представление числа N и заменяет в нём все числа m на ω. Покажем, что $f(N, m) > f(G(N, m+1) - 1, m+1)$.

Рассмотрим терм $G(N, m+1)$ до вычитания 1, но после замены всех оснований с m на $m+1$. Очевидно, $f(N, m) = f(G(N, m+1), m+1)$. После вычитания 1 и построения новой $m+1$-экспоненциальной формы происходит переход через предельный ординал в $f(G(N, m+1), m+1)$ и замена его некоторым заведомо меньшим (предшествующим) ординалом. Если такой переход не происходит, значит, в $f(G(N, m+1), m+1)$ есть слагаемое с основанием ω^0, и тогда $f(G(N, m+1) - 1, m+1) = f(G(N, m+1), m+1) - 1$.

Червь Беклемишева

Пусть $A = n_0 \ldots n_k$ — последовательность цифр (червь); m — параметр (срок эволюции). Пусть червь эволюционирует следующим образом:

- $n_0 = 0 \Rightarrow A[m] = n_1 \ldots n)_k$
- $n_0 = n + 1 \Rightarrow$ ищем максимальный начальный сегмент червя в алфавите цифр, больших или равных n. Пусть такой сегмент — это B. Тогда $A[n] = (nB)^{m+1}C$.

Утверждение

Все черви Беклемишева умирают.

Смертность червя

B^- — последовательность, где каждая цифра уменьшена на 1 по сравнению с B.

Построим оценочную функцию o. Если $A = 0^k$, тогла $o(A) = k$. Иначе строим разбиение $A = A_1 0 A_2 ... 0 A_n$, где не все A_i пусты и все A_i не содержат нулей. Положим $o(A) = \omega^{o(A_n^- 33)} + \cdots + \omega^{o(A_1^-)}$.

Заметим, что:

- $o(\varepsilon) =$

Смертность червя

B^- — последовательность, где каждая цифра уменьшена на 1 по сравнению с B.
Построим оценочную функцию o. Если $A = 0^k$, тогла $o(A) = k$. Иначе строим разбиение $A = A_1 0 A_2 \ldots 0 A_n$, где не все A_i пусты и все A_i не содержат нулей. Положим $o(A) = \omega^{o(A_n^- 33)} + \cdots + \omega^{o(A_1^-)}$.

Заметим, что:

- $o(\varepsilon) = 0$
- $o(0A) =$

Смертность червя

B^- — последовательность, где каждая цифра уменьшена на 1 по сравнению с B.
Построим оценочную функцию o. Если $A = 0^k$, тогла $o(A) = k$. Иначе строим разбиение $A = A_1 0 A_2 ... 0 A_n$, где не все A_i пусты и все A_i не содержат нулей. Положим $o(A) = \omega^{o(A_n^- 33)} + \dots + \omega^{o(A_1^-)}$.

Заметим, что:

- $o(\varepsilon) = 0$
- $o(0A) = o(A) + 1$
- $B \neq 0^k \Rightarrow o(B0A) =$

Смертность червя

B^- — последовательность, где каждая цифра уменьшена на 1 по сравнению с B.
Построим оценочную функцию o. Если $A = 0^k$, тогла $o(A) = k$. Иначе строим разбиение $A = A_1 0 A_2 ... 0 A_n$, где не все A_i пусты и все A_i не содержат нулей. Положим $o(A) = \omega^{o(A_n^- 33)} + \cdots + \omega^{o(A_1^-)}$.

Заметим, что:

- $o(\varepsilon) = 0$
- $o(0A) = o(A) + 1$
- $B \neq 0^k \Rightarrow o(B0A) = o(A) + o(B)$
- $B \in \{1..9\}^+ \Rightarrow o(B) =$

Смертность червя

B^- — последовательность, где каждая цифра уменьшена на 1 по сравнению с B.

Построим оценочную функцию o. Если $A = 0^k$, тогла $o(A) = k$. Иначе строим разбиение $A = A_1 0 A_2 \ldots 0 A_n$, где не все A_i пусты и все A_i не содержат нулей. Положим $o(A) = \omega^{o(A_n^- 33)} + \cdots + \omega^{o(A_1^-)}$.

Заметим, что:

- $o(\varepsilon) = 0$
- $o(0A) = o(A) + 1$
- $B \neq 0^k \Rightarrow o(B0A) = o(A) + o(B)$
- $B \in \{1..9\}^+ \Rightarrow o(B) = \omega^{o(B^-)}$

Смертность червя

Допустим, что для червей с элементами меньше k выполнено $o(A) > o(A[m])$. Докажем это неравенство для червей с элементами вплоть до k.

Смертность червя

Допустим, что для червей с элементами меньше k выполнено $o(A) > o(A[m])$. Докажем это неравенство для червей с элементами вплоть до k.

Рассмотрим $A = A_1 0 \dots 0 A_k$, положим $C = A_2 0 \dots 0 A_k$, тогда $A = A_1 0 C$, причем одно из них непусто. Если $A_1 = \varepsilon$, утверждение очевидно. Пусть $A_1 \neq \varepsilon$. Тогда $A[m] = (A_1[m]) 0 C$.

- Если $A_1[m] = 0^k$, тогда $A_1 = 1$. Тогда

Смертность червя

Допустим, что для червей с элементами меньше k выполнено $o(A) > o(A[m])$. Докажем это неравенство для червей с элементами вплоть до k.

Рассмотрим $A = A_1 0 \dots 0 A_k$, положим $C = A_2 0 \dots 0 A_k$, тогда $A = A_1 0 C$, причем одно из них непусто. Если $A_1 = \varepsilon$, утверждение очевидно. Пусть $A_1 \neq \varepsilon$. Тогда $A[m] = (A_1[m]) 0 C$.

- Если $A_1[m] = 0^k$, тогда $A_1 = 1$. Тогда $o(A) = o(C) + \omega > o(C) + k + 1$.
- Если $A_1 = 1B$, тогда $A_1[m] = (oB)^{m+1}$, $o(A_1) = \omega^{o((1B)^-)} = \omega^{o(B^-)+1}$ и $o(A_1[m]) = \omega^{o(B^-)} * (m+1) + 1$.
- Если $A_1 = (n+1)B$, где $n > 0$, тогда $A_1^-[m] = (A_1[m])^-$, $o(A_1) = \omega^{o(A_1^-)} > \omega^{o(A_1^-[m])}$.