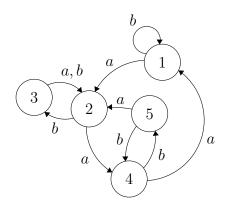
А. Автоматы

- 1. Можно ли построить read-only машину Тьюринга, которая останавливается только на лентах вида 1^n01^n ? (1 балл)
- 2. Построить минимальный НКА, распознающий слова над $\{a,b\}$ такие, что в них нет двух одинаковых подряд идущих букв. Минимальность обосновать (1 балл)
- 3. Построить минимальный НКА, распознающий слова над $\{a,b\}$ такие, что в них есть как минимум две одинаковые подряд идущие буквы. Минимальность обосновать (1 балл)
- 4. Построить минимальный НКА, распознающий язык слов над $\{a,b,c\}$ таких, что если в них встречается подслово aa, тогда после буквы не может встретиться последовательность abc. Например, слова abcabc и aacbac должны распознаваться этим автоматом, а слово cabcaa нет. Минимальность обосновать (2 балла)
- 5. Существует ли язык \mathscr{L} слов над $\{0,1\}$, который распознаётся ДКА, имеющим состояние-ловушку, и такое натуральное число n (возможно, зависящее от \mathscr{L}), что в языке-дополнении \mathscr{L} нет ни одного слова, количество нулей в котором кратно n? (2 балла)
- 6. Является ли регулярным подмножество языка неправильных скобочных последовательностей над $\{(,)\}$, такое что его элементы нельзя изоморфно отобразить в правильные скобочные последовательности? (2 балла)
- 7. Является ли регулярным язык $\{w \mid w \in \{a,b\}^+ \& w_{baa} = w_{aab} \& w_{bbab} = w_{bbaa}\}$? (2 балла)
- 8. Построить регулярное выражение, автомат Глушкова для которого детерминирован, а при формальном построении его дополнения (со сменой финальности состояний) получается 4 состояния-ловушки (2 балла).
- 9. Построить регулярное выражение, слияние по бисимуляции в котором состояний в автомате Глушкова порождает минимальный ДКА, причём сам автомат Глушкова не является минимальным (2 балла).

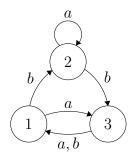
- 10. Может ли при удалении ε -правил в автомате Томпсона число состояний уменьшиться более, чем линейно? Привести пример или обосновать, почему это невозможно (3 балла).
- 11. Замкнуто ли множество регулярных языков относительно суффиксной фильтрации? А именно, если L_1, L_2 регулярные языки, что можно сказать про язык $\{w \mid \exists v(wv \in L_1 \& v \in L_2)\}$? (3 балла)
- 12. Замкнуто ли множество регулярных языков относительно swap-функции? А именно, если L регулярный, будет ли регулярным язык $\{xy \mid yx \in L\}$? (3 балла)
- 13. Построить регулярку с бесконечным языком, для которой существует несколько разных минимальных НКА, ни один из которых не является ДКА. (3 балла)
- 14. Отношение $v \le w$ это отношение подпоследовательности на строках. Язык L называется замкнутым вниз, если $\forall w, v (w \in \mathbf{L} \ \& \ v \le w \Rightarrow v \in L)$. Показать, что все замкнутые вниз языки регулярны (4 балла).
- 15. Проверить следующее утверждение. Для всякого регулярного языка L можно подобрать такое натуральное число k, что $\forall v(|v| > k \& v^n \in L \Rightarrow \exists m, v_1, w(v^n = v_1^m w \& |w| < k \& |v_1| < k))$ (5 баллов)

В. Автоматы-2

- 1. Построить регулярное выражение, распознающее курсивные, полужирные и курсивно-полужирные блоки Markdown (1 балл).
- 2. Проверить, является ли регулярным языком язык $\{a^{3n}a^{4m}b^{2k}b^{3s} \mid n < m \ \& \ k < s\}$ (1 балл).
- 3. Проверить, является ли регулярным языком язык $\{a^{3n}b^{2k}a^{4m}b^{3s} \mid n < m \lor k < s\}$ (1 балл).
- 4. Проверить, является ли регулярным языком язык $\{w \mid w \neq w_1 aabw_2 \& w \neq w_1 bbaw_2 \& |w|_a = |w|_b\}$ (1 балл).
- 5. Можно ли уменьшить звёздную высоту регулярного выражения $(a(ba)^*)^*$? (1 балл)
- 6. Пусть звёздная высота выражения u равна k, а выражения w меньше k. Может ли случиться, что минимальная звёздная высота выражения $(u^*w)^*$ равна k+2? (1 балл)
- 7. Синхронизируется ли следующий автомат? (1 балл)



8. Синхронизируется ли следующий автомат? (1 балл)



- 9. Можно ли уменьшить звёздную высоту регулярного выражения $(a(ba)^*|b)^*$? (2 балла)
- 10. Можно ли уменьшить звёздную высоту регулярного выражения $(aa^*bb^*)^*$? (2 балла)
- 11. Существует ли такое регулярное выражение, что число производных Брзозовски у него бесконечно, если не применять к ним правило идемпотентности (и применять правила ассоциативности и коммутативности)? (2 балла)
- 12. Если у двух ДКА было по n ловушек, то сколько минимум ловушек может получиться в их пересечении? (недостижимые ловушки отсекаются) (2 балла)
- 13. Если у двух ДКА было по n ловушек, то сколько максимум ловушек может получиться в их пересечении? (недостижимые ловушки отсекаются) (2 балла)
- 14. Существуют ли бесконечные регулярные языки, автомат Антимирова для которых совпадает с автоматом Глушкова, причём и тот, и другой не детерминированы? (З балла)
- 15. Для каких слов ξ_1 , ξ_2 язык $\{|w|_{\xi_1}=|w|_{\xi_2}\mid w\in\{a,b\}^*\}$ регулярен? (4 балла)

С. Автоматы-3

- 1. Построить синтаксический моноид для регулярного языка слов, которые либо содержат подряд две идущие одинаковые буквы, либо содержат подслово abc (1 балл).
- 2. Построить синтаксический моноид, распознающий язык слов над $\{a,b,c\}$ таких, что в них либо встречается хотя бы две буквы c, либо встречается хотя бы две одинаковые буквы подряд (1 балл).
- 3. Построить таблицу классов эквивалентности по Майхиллу–Нероуду для регулярного выражения $(c|\varepsilon)(ac|cb|ab)^*(ba|c)(a|b|c)$ (1 балл).
- 4. Построить таблицу классов эквивалентности по Майхиллу–Нероуду для регулярного выражения, распознающего правильно записанные регулярки без скобок, вложенных более чем дважды, и пустых слов под альтернативами или итерациями, над алфавитом $\{a,b\}$ (1 балл).
- 5. Построить регулярку, которая описывает тот же язык, что и следующая префиксная грамматика:

$$aa \to aba$$
 $ab \to aab$ $aa \to \varepsilon$

Начальное слово: $\{ab\}$ (1 балл).

- 6. Построить префиксную грамматику, распознающую тот язык слов, начинающихся и заканчивающихся одной и той же буквой. Алфавит $\{a,b,c\}$ (1 балл).
- 7. Определить длину накачки регулярного языка, не содержащего подслов ab, bc, ca и cc. Алфавит $\{a, b, c\}$ (1 балл).
- 8. Определить длину накачки языка регулярных выражений без скобок, вложенных более чем дважды, и пустых слов под альтернативами или итерациями, над алфавитом $\{a,b\}$ (2 балла).
- 9. Построить регулярку, которая описывает тот же язык, что и следующая префиксная грамматика:

$$ab \rightarrow bab$$
 $bb \rightarrow aab$ $ba \rightarrow ab$ $a \rightarrow b$

Начальные слова: $\{aa, bbb\}$ (2 балла).

- 10. Построить префиксную грамматику, описывающую тот же язык, что и регулярка $((ba|bb)^*aa)^*(ba|aab)^*$. Обосновать минимальность длины самого длинного правила в этой ПГ (3 балла).
- 11. У конечных языков, обладающих префикс-свойством, таблица классов эквивалентности по Майхиллу–Нероуду очень похожа на единичную матрицу (если удалить класс эквивалентности ловушки). Верно ли, что если язык бесконечен и не обладает префикс-свойством, то это свойство таблицы уже не будет выполняться? (3 балла)
- 12. В определении префиксной грамматики множество начальных слов должно быть конечным. Изменится ли выразительная сила префиксных грамматик, если разрешить множеству начальных слов быть регулярным? (4 балла)

C. CFG

1. Построить все возможные деревья разбора слова $\{AvBv\{CvA\}\}$ в следующей грамматике (1 балл).

$$\begin{split} [S] &::= \{ [Expr] \} \\ [Expr] &::= [Expr]v[Expr] \mid \{ [Expr] \} \mid [Var] \\ [Var] &::= [A-z] + \end{split}$$

2. Построить GNF методом Блюма–Коха для следующей грамматики (1 балл)

$$S \rightarrow BS \mid Aaa \qquad A \rightarrow AcA \mid Bd \qquad B \rightarrow SB \mid a$$

3. Построить GNF методом устранения левой рекурсии для следующей грамматики. Выбор частичного порядка осуществить так, чтобы правил получилось как можно меньше (1 балл)

$$S \rightarrow B \mid SS \mid Ab$$
 $A \rightarrow SaA \mid Bb$ $B \rightarrow BBa \mid d$

- 4. Исследовать язык $\{a^{\sqrt{n}}b^{n+3}\}$ на контекстную свободу (1 балл).
- 5. Исследовать язык $\{a^ib^ja^kb^m \mid i-j=m-k\}$ на контекстную свободу (2 балла).
- 6. Проверить следующую формулировку леммы о накачке: если L контекстно-свободен, то существует такое натуральное число p, что для любого слова w и любого достаточно длинного суффикса w' этого слова (т.е. w=vw', |w'|>f(p)) можно найти разбиение $w'=z_1y_1x_1, v=x_2y_2z_2$ такое, что $|y_1|+|y+2|>0$ & $|y_1|+|y_2|\leq p$, что $x_2y_2^iz_2z_1y_1^ix_1\in L$ для всех i (2 балла).
- 7. Исследовать на КС-свойство язык $\{w_1aw_2\mid w_i\in\{a,b\}^*\ \&\ w_1\neq w_2\ \&\ |w_1|_a=|w_2|_a\}$ (2 балла).
- 8. Построить регулярную аппроксимацию языка грамматики (2 балла):

$$S \rightarrow SaSb \mid aSAa \mid aba$$
 $A \rightarrow SA \mid bb$

- 9. Исследовать на КС-свойство язык слов из дополнения к языку правильных скобочных последовательностей над (,), с инфиксами, являющимися правильными скобочными последовательностями длины не меньше 6 (2 балла).
- 10. Проанализировать язык на КС-свойство $\{a^ib^j \mid i>j \ \& \ i<2\cdot j\}$ (2 балла).
- 11. Исследовать на КС-свойство язык $\{a^mb^n\mid m\geq \sqrt{n}\}$ (2 балла).
- 12. Исследовать на КС-свойство язык $\{a^mb^na^k \mid m \leq \log_2 k \ \& \ m \leq \log_2 b\}$ (3 балла).
- 13. Исследовать на КС-свойство язык $\{a^nb^m \mid gcd(n,m)=1\}$ (3 балла).
- 14. Проверить на регулярность. Построить регулярную аппроксимацию языка грамматики в форме регулярного выражения (3 балла):

$$S \to aSSb \mid SaAa \mid aa$$
 $A \to AS \mid bb$

- 15. Исследовать на КС-свойство язык слов над $\{a,b\}$ таких, что их циклической перестановкой (любой, не обязательно только сдвигом) можно получить палиндром (4 балла).
- 16. Исследовать на КС-свойство язык $\{u \mid u \in \{a,b\}^* \& \forall w(u \neq www)\}$ (5 баллов).

D. CFG-2

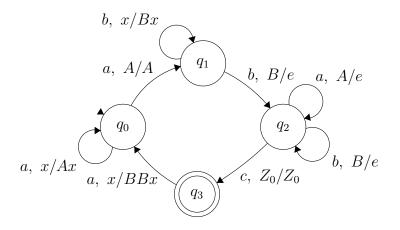
- 1. Построить грамматику-пересечение языка грамматики $S \to SaSb \mid a$ с регулярным языком $a^*b^*a^*b^*$ (1 балл).
- 2. Скажем, что формула находится в assoc-ДНФ, если она состоит из дизъюнкций конъюнкций элементарных высказываний и не содержит скобок. Верно ли, что язык формул, не являющихся assoc-ДНФ, регулярен? Привести описание этого языка. (1 балл)
- 3. Построить коммутативный образ языка (1 балл).

 $S o AbBc \mid bc$ $A o bAcA \mid b$ $B o bBcB \mid c$

- 4. Исследовать на КС-свойство язык списков натуральных чисел, рассортированных по неубыванию. Считаем, что список заключён в квадратные скобки, и элементы списка разделяются только запятой (1 балл).
- 5. Построить коммутативный образ грамматики (2 балла):

$$S \rightarrow SaSb \mid aA$$
 $A \rightarrow AA \mid AaBaA \mid Ba$ $B \rightarrow \varepsilon \mid bAbS$

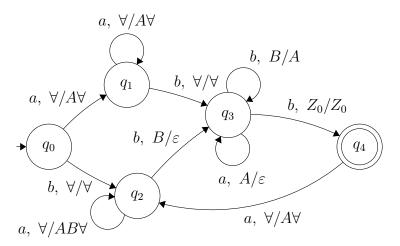
- 6. Верно ли, что если \mathscr{L} недетерминированный КС-язык, то язык префиксов слов из L тоже недетерминированный? (2 балла)
- 7. Разрешим в PDA переходы, не задействующие стек. А именно, пусть переходы описываются четвёрками $\langle q_i, \varepsilon | a, (\varepsilon | A)/\Phi, q_j \rangle$. Будут ли такие DPDA с допуском по пустому стеку эквивалентны стандартным DPDA с допуском по пустому стеку? (2 балла)
- 8. Построить грамматику-пересечение языка грамматики $S \to SaSbS \mid Sb \mid \varepsilon$ с регулярным языком $((aba)^*bb)^*$ (2 балла).
- 9. Всякий КС-язык является гомоморфным образом пересечения языка правильных скобочных последовательностей с регулярным языком. Построить соответствующие регулярный язык и гомоморфизм для языка $\{a^nb^m \mid n \neq m\}$ (2 балла).
- 10. Построить КС-грамматику для языка следующего PDA (2 балла):



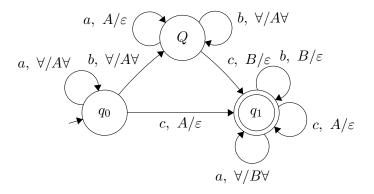
11. Проверить, задаёт ли данная грамматика LL(1)-язык (3 балла):

$$S \to cScS \mid ab \mid \varepsilon$$

- 12. Является ли контекстно-свободным язык всех логических формул со связками \neg , \Rightarrow над переменными A, B таких, что они являются отрицаниями какой-либо формулы, состоящей только из \Rightarrow ? (3 балла)
- 13. Построить КС-грамматику для языка следующего PDA (3 балла):



14. Назовём состояние q в PDA семантической ловушкой, если из него есть пути в конечные состояния, но при работе PDA в действительности по этим путям никогда нельзя пройти. Например, в PDA ниже семантической ловушкой является Q:



Существует ли алгоритм выявления семантических ловушек в PDA? (3 балла)

- 15. Существует ли такое описание языка, использующее только кванторы, логические операции, переменные типа буква, слово и натуральное число, операцию возведения слова в степень (*n*-кратную конкатенацию), а также предикат равенства, что над однобуквенным алфавитом это описание задаёт регулярный язык, над двухбувенным контекстно-свободный, над трёхбуквенным язык, не являющийся контекстно-свободным? (4 балла)
- 16. Является ли контекстно-свободным языком язык L контекстно-свободных LR(0)-грамматик над нетерминалами S, A_1, \ldots, A_n и терминалами a, b? В алфавите L, кроме заданных заранее $S, A_1, \ldots, A_n, a, b$, также есть символы \to и ; (для отделения правил друг от друга) (5 баллов)

E. CFG-3

1. Индус построил LR(0)-автомат для языка a^* по следующей грамматике:

$$S \to aS \mid \varepsilon$$

добавив в неё самое изначальное правило $S' \to S$ \$. Автомат получился с конфликтом, как и положено автомату для языка, не являющегося LR(0)-языком. Помогите индусу подогнать грамматику так, чтобы LR(0)-автомат для неё не содержал конфликтов, и объясните, что случилось. (1 балл)

- 2. Если $\mathscr{L}-$ это LL(1)-язык, будет ли \mathscr{L}^R (язык реверсированных слов) LR(0)-языком? (1 балл)
- 3. Замкнуты ли недетерминированные КС-языки относительно конкатенации с регулярными языками? Т.е. если \mathscr{L} недетерминированный КС-язык, \mathscr{R} регулярный язык, то всегда ли верно, что $\mathscr{L}\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}\mathscr{L}$ недетерминированные? (1 балл)
- 4. Если \mathscr{L} это LR(0)-язык, будет ли \mathscr{L}^R LL-языком? (1 балл)
- 5. Построить μ -гедехр, описывающее язык $\{w \mid |w|_a > |w|_b \& w \in \{a,b,c\}^*\}$ (1 балл)
- 6. Построить μ -гедехр, описывающее язык $\{wa^iw^Rb^j \mid (i>j) \lor |w|>2\}$ (1 балл)
- 7. Проверить, задаёт ли данная грамматика LR(0)-язык (2 балла):

$$S \to aAc \mid bSb$$
 $A \to aS \mid bAb \mid a$

- 8. Проанализировать контекстно-свободный язык на детерминированность: $\{wa^iw^Rb^j\mid (i>j)\vee |w|>2\}\ (2$ балла)
- 9. Проанализировать контекстно-свободный язык на детерминированность и построить PDA: $\{vwvw^R \mid |v|=2 \& v, w \in \{a,b\}^*\}$ (3 балла).
- 10. Проанализировать контекстно-свободный язык на детерминированность и построить PDA $\{w_1vw_2\mid w_i\in\{a,b\}^*\ \&\ v\in\{a,c\}^*\ \&\ |w_1|=|w_2|\}$ (3 балла).

- 11. Определить степень недетерминизма языка $\{a^n w b^m v \mid w \in \{b, c\}^* \& v = c v_1 \& v_1 \in \{a, b, c\}^* \& (|w|_c \neq 0 \Rightarrow m = n) \& (|w|_b \neq 0 \Rightarrow |v|_a = |v|_b)\}$ (3 балла).
- 12. Проверить на регулярность, и построить регулярную аппроксимацию сверху для языка КС-грамматики (3 балла)

$$S \rightarrow SaBB \mid b$$
 $B \rightarrow Bb \mid SS$

- 13. Сильно регулярные грамматики такие КС-грамматики, что нетерминалы в них можно разбить на классы так, что нетерминалы из одного класса достижимы друг для друга (т.е. из A_i выводима сентенциальная форма, содержащая B_i , и наоборот), в правой части правила для нетерминала A_i могут стоять только нетерминалы из классов не меньше i, и притом если $A_i \to \xi_1 B_i \xi_2$ (то есть A_i и B_i принадлежат одному классу и A_i ссылается на B_i в правой части), то $\xi_2 = \varepsilon$. Доказать, что сильно регулярные грамматики описывают регулярные языки, и что если выбросить любое из двух условий выше, то регулярность уже гарантировать будет нельзя (4 балла).
- 14. Неуловимый Джо знает способ, как построить регулярную аппроксимацию КС-языка через взаимно рекурсивные нетерминалы, причём такую, что она сохраняет сильно регулярные языки. Проверьте, обладает ли этим свойством аппроксимация Перейры—Райта (через LR(0)-автоматы) (5 баллов).
- 15. Депрессивный Вишенка пытается построить критерий регулярности языка, описываемого линейной КС-грамматикой. Он выдвинул гипотезу, что если язык состоит только из правил $S \to T_1ST_2$ и $S \to T_3$, где T_1 , T_2 , T_3 не ссылаются на S, все описываются праволинейными правилами, и при этом $\mathcal{L}(T_1T_1) \not\subseteq \mathcal{L}(T_1)$ и $\exists w \in \mathcal{L}(T_3)(\forall u \in \mathcal{L}(T_2) \cup \mathcal{L}(T_1) \forall z_1, z_2(u \neq z_1wz_2))$. Помогите Депрессивному Вишенке проверить его гипотезу (5 баллов).

F. K3-языки

- 1. Привести пример двух языков, объединение которых является детерминированным КС-языком, а пересечение не является КС-языком. (1 балл)
- 2. Привести пример MFA, который не является НКА и читает с ленты ничем не ограниченные фрагменты памяти, однако распознаёт регулярный язык (1 балл).
- 3. Сколько классов эквивалентности по Майхиллу-Нероуду и каких определяет следующий язык? (1 балл)

$${a^i b^j c^k \mid i + j = k \& i < j}$$

- 4. Является ли язык $\{ww^R\}$ VPL? (1 балл)
- 5. Является ли язык $\{(a^nb^*c^{n+m} \mid b^nc^{n+k})\}$ VPL? (2 балла)
- 6. Привести пример конъюнктивной грамматики, не являющейся контекстносвободной, но описывающей регулярный язык, причём, если выбросить из неё конъюнкцию, язык перестанет быть регулярным (2 балла).
- 7. Привести конъюнктивную грамматику для языка $\{(a^{n_i}b)^ka^m \mid m < \max n_i\}$ (2 балла).
- 8. Определить, какие языки описываются автоматами Треллиса над начальными словами в унарном алфавите (2 балла).
- 9. Студент Бессонный опроверг DMFA-свойство для языка $\{a^nb^mc^ka^r \mid n=r \& m=k\}$ следующим образом. Он пересёк этот язык с a^* и применил лемму о перескоке к слову a^{p+n} . Объясните, почему этот метод решения скопрометировал Бессонного, и предложите решение, которое не приводит к компромату. (3 балла)
- 10. Красный Панда на прошлой Бигфарме пытался проанализировать язык $\{a^mb^ma^n \mid n \neq m\}$. Он сначала построил для его распознавания PDA с двумя стеками, а затем автомат, у которого вместо стека очередь, и сказал, что оба эти построения обосновывают КС-свойство. Объясните, почему существование таких автоматов не

обосновывает даже то, что язык конъюнктивен (и предъявите построение конъюнктивной грамматики). (3 балла)

- 11. Является ли DMFL язык $\{a^{n^3}\}$? (4 балла)
- 12. Нерефальщик очень любит синтаксические моноиды. В связи с этим у него возникло предположение, что языки, описываемые автоматами Треллиса, в которых все символы могут встретиться на входной ленте, являются регулярными, поскольку описываются правилами переписывания с левыми и правыми частями в одном и том же алфавите. Помогите Нерефальщику проверить его предположение (5 баллов).

G. вычислимость и завершаемость

- 1. Решить проблему соответствия Поста: $\langle a, ba \rangle$, $\langle aa, ba \rangle$, $\langle b, ba \rangle$ (1 балл).
- 2. Решить проблему соответствия Поста: $\langle a, ba \rangle$, $\langle b, bab \rangle$, $\langle a, \varepsilon \rangle$ (1 балл).
- 3. Дать верхнюю оценку уровню неразрешимости задачи проверки языка на регулярность. Обосновать, почему в данной оценке кванторы нельзя заменить ограниченными (2 балла).
- 4. Дать верхнюю оценку уровню неразрешимости задачи проверки префикс-свойства языка. Обосновать, почему в данной оценке кванторы нельзя заменить ограниченными (2 балла).
- 5. Проанализировать, какой класс языков распознаётся PDA, на рёбрах которых стоят произвольные μ -regexp (2 балла).
- 6. Исследовать на завершаемость следующую TRS (2 балла)

7. Исследовать на завершаемость следующую TRS (2 балла)

variables =
$$[X, Y, Z]$$

- 1. $w(i, X) \to X$
- 2. $w(w(x,X),Y),Z) \rightarrow w(w(X,Z),w(Y,Z))$
- 8. Исследовать на завершаемость следующую TRS (3 балла)

variables =
$$[x, y]$$

 $f(f(a, x), y) \rightarrow f(f(x, f(a, y)), a)$

- 9. Дать верхнюю оценку уровню неразрешимости множества LL-языков. Обосновать, почему в данной оценке кванторы нельзя заменить ограниченными (3 балла).
- 10. Исследовать на завершаемость следующую SRS (3 балла)

$$al
ightarrow la$$
 $al
ightarrow ar$ $bl
ightarrow bar$ $rb
ightarrow lb$

- 11. Привести общий метод решения проблемы соответствия Поста, для множества пар «домино» которых $\mathcal M$ выполняется следующее условие: они составлены из всех возможных пар слов из некоторого конечного множества $\{w_1,\ldots,w_n\}$ (4 балла).
- 12. Исследовать на завершаемость следующую SRS (5 баллов)

$$fg \to gff \qquad fh \to hg$$