

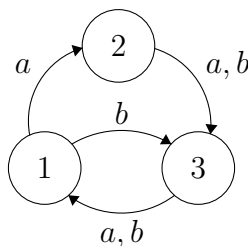
А. Автоматы

1. Построить минимальный DFA, распознающий язык слов над $\{a, b, c\}$ таких, что в них либо встречается хотя бы две буквы c , либо встречается хотя бы две одинаковые буквы подряд (1 балл).
2. Можно ли построить read-only машину Тьюринга, которая останавливается только на лентах вида $1^n 0 1^n$? (1 балл)
3. Построить минимальный NFA, распознающий слова над $\{a, b\}$ такие, что в них нет двух одинаковых подряд идущих букв. Минимальность обосновать (1 балл)
4. Построить минимальный NFA, распознающий слова над $\{a, b\}$ такие, что в них есть как минимум две одинаковые подряд идущие буквы. Минимальность обосновать (1 балл)
5. Построить минимальный DFA, распознающий язык слов над $\{a, b, c\}$ таких, что если в них встречается подслово aa , тогда после буквы не может встретиться последовательность abc . Например, слова $abcabc$ и $aacbac$ должны распознаваться этим автоматом, а слово $cabcaa$ нет (2 балла).
6. Существует ли язык L слов над $\{0, 1\}$, который распознаётся DFA, имеющим состояние-ловушку, и такое натуральное число n (возможно, зависящее от L), что в языке-дополнении L нет ни одного слова, количество нулей в котором кратно n ? (2 балла)
7. Является ли регулярным подмножество языка неправильных скобочных последовательностей над $\{(\,,\,)\}$, такое что его элементы нельзя изоморфно отобразить в правильные скобочные последовательности? (2 балла)
8. Является ли регулярным язык $\{w \mid w \in \{a, b\}^+ \ \& \ w_{baa} = w_{aab} \ \& \ w_{bbab} = w_{bbaa}\}$? (2 балла)
9. Построить регулярное выражение или конечный автомат, распознающий двоичные числа, делящиеся на 7 (2 балла).
10. Построить регулярное выражение или конечный автомат, распознающий троичные числа, делящиеся на 4 (2 балла).

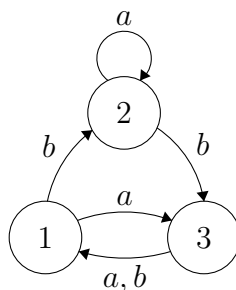
11. Построить регулярное выражение или конечный автомат, распознающий выражения вида $N + M$, где N, M — троичные числа, и их сумма — чётное число (2 балла).
12. Замкнуто ли множество регулярных языков относительно суффиксной фильтрации? А именно, если L_1, L_2 — регулярные языки, что можно сказать про язык $\{w \mid \exists v(wv \in L_1 \ \& \ v \in L_2)\}$? (3 балла)
13. Замкнуто ли множество регулярных языков относительно swarf-функции? А именно, если L — регулярный, будет ли регулярным язык $\{xy \mid yx \in L\}$? (3 балла)
14. Отношение $v \trianglelefteq w$ — это отношение подпоследовательности на строках. Язык L называется замкнутым вниз, если $\forall w, v (w \in L \ \& \ v \trianglelefteq w \Rightarrow v \in L)$. Показать, что все замкнутые вниз языки регулярны (hint: можно использовать вашу старую идею, если добавить к ней технику Майхилла–Нероуда) (3 балла).
15. Проверить следующее утверждение. Для всякого регулярного языка L можно подобрать такое натуральное число k , что $\forall v (|v| > k \ \& \ v^n \in L \Rightarrow \exists m, v_1, w (v^n = v_1^m w \ \& \ |w| < k \ \& \ |v_1| < k))$ (5 баллов)

В. Автоматы-2

1. Построить регулярное выражение, распознающее курсивные, полужирные и курсивно-полужирные блоки Markdown (1 балл).
2. Проверить, является ли регулярным языком язык $\{w \mid w \neq w_1 a a b w_2 \ \& \ w \neq w_1 b b a w_2 \ \& \ |w|_a = |w|_b\}$ (1 балл).
3. Можно ли уменьшить звёздную высоту регулярного выражения $(a(ba)^*)^*$? (1 балл)
4. Пусть звёздная высота выражения u равна k , а выражения w — меньше k . Может ли случиться, что минимальная звёздная высота выражения $(u^*w)^*$ равна $k + 2$? (1 балл)
5. Синхронизируется ли следующий автомат? (1 балл)

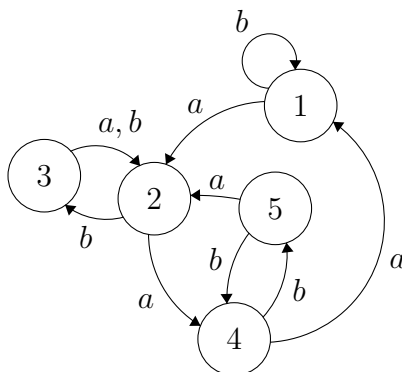


6. Синхронизируется ли следующий автомат? (2 балла)



7. Можно ли уменьшить звёздную высоту регулярного выражения $(a(ba)^* \mid b)^*$? (2 балла)
8. Можно ли уменьшить звёздную высоту регулярного выражения $(aa^*bb^*)^*$? (2 балла)

9. Синхронизируется ли следующий автомат? (3 балла)



10. Надёжен ли следующий двухсторонний протокол по Долеву–Яо? (3 балла)

- $A \rightarrow B : E_B a_A(M)$ (Алиса приписывает своё имя к сообщению и шифрует открытым ключом Боба).
- $B \rightarrow A : E_A(d_A D_B E_B a_A(M))$ (Боб расшифровывает свой ключ, стирает имя Алисы и шифрует сообщение её открытым ключом).
- $A \rightarrow B : E_B D_A E_A(d_A D_B E_B a_A(M))$ (Алиса расшифровывает свой ключ и зашифровывает сообщение ключом Боба)

11. Определить звёздную высоту выражения $(a^*b^*c)^*$ (4 балла).

12. Надёжен ли следующий трёхсторонний протокол по Долеву–Яо? (4 балла)

- $A \rightarrow B : E_B a_A(M)$ (Алиса приписывает своё имя к сообщению и шифрует открытым ключом Боба).
- $B \rightarrow C : E_C a_A(d_A D_B E_B a_A(M))$ (Боб расшифровывает свой ключ, стирает имя Алисы, затем приписывает его снова и шифрует сообщение открытым ключом Кэрл).
- $C \rightarrow A : E_A d_A D_C E_C a_A(d_A D_B E_B a_A(M))$ (Кэрл расшифровывает сообщение, стирает имя Алисы и посылает Алисе сообщение, зашифрованное её ключом).

C. CFG

1. Построить все возможные деревья разбора слова $\{AvBv\{CvA\}\}$ в следующей грамматике (1 балл).

$$[S] ::= \{[Expr]\}$$

$$[Expr] ::= [Expr]v[Expr] \mid \{[Expr]\} \mid [Var]$$

$$[Var] ::= [A-z]^+$$

2. Построить GNF методом устранения левой рекурсии для следующей грамматики (1 балл)

$$S \rightarrow SS \mid Ab \quad A \rightarrow SaA \mid Bb \quad B \rightarrow AB \mid d$$

3. Построить GNF методом Блюма–Коха для следующей грамматики (1 балл)

$$S \rightarrow BS \mid Aaa \quad A \rightarrow AcA \mid Bd \quad B \rightarrow SB \mid a$$

4. Исследовать язык $\{a^i b^j a^k b^m \mid i+k = j+m\}$ на контекстную свободу (1 балл).

5. Проверить следующую формулировку леммы о накачке: если L контекстно-свободен, то существует такое натуральное число p , что для любого слова w и любого достаточно длинного суффикса w' этого слова (т.е. $w = vw'$, $|w'| > f(p)$) можно найти разбиение $w' = z_1 y_1 x_1$, $v = x_2 y_2 z_2$ такое, что $|y_1| + |y_2| > 0$ & $|y_1| + |y_2| \leq p$, что $x_2 y_2^i z_2 z_1 y_1^i x_1 \in L$ для всех i (2 балла).

6. Исследовать язык $\{w_1 c w_2 \mid w_i \in \{a, b\}^* \text{ \& } w_1 \neq w_2\}$ (2 балла).

7. Исследовать дополнение к языку правильных скобочных последовательностей над $(,)$ (2 балла).

8. Исследовать язык $\{a^m b^n \mid m \geq \sqrt{n}\}$ (2 балла).

9. Исследовать язык $\{a^m b^m a^n \mid n \neq m\}$ (3 балла).

10. Исследовать язык $\{u \mid u \in \{a, b\}^* \text{ \& } \forall w (u \neq w w w)\}$ (3 балла).

11. Исследовать язык $\{a^n b^m \mid \gcd(n, m) = 1\}$ (4 балла).

12. Исследовать язык слов над $\{a, b\}$ таких, что их циклической перестановкой (любой, не обязательно только сдвигом) можно получить палиндром (4 балла).

D. CFG-2

1. Построить грамматику-пересечение языка грамматики $S \rightarrow SaSb \mid a$ с регулярным языком $a^*b^*a^*b^*$ (1 балл).
2. Скажем, что формула находится в assoc-ДНФ, если она состоит из дизъюнкций конъюнкций элементарных высказываний и не содержит скобок. Верно ли, что язык формул, не являющихся assoc-ДНФ, регулярен? Привести описание этого языка. (1 балл)
3. Выяснить, какой язык описывается следующей грамматикой (1 балл).
$$S \rightarrow AbBc \mid bc \qquad A \rightarrow bAcA \mid b \qquad B \rightarrow bBcB \mid c$$
4. Разрешим в PDA переходы, не задействующие стек. А именно, пусть переходы описываются четвёрками $\langle q_i, \varepsilon | a, (\varepsilon | A) / \Phi, q_j \rangle$. Будут ли такие DPDA с допуском по пустому стеку эквивалентны стандартным DPDA с допуском по пустому стеку? (2 балла)
5. Построить грамматику-пересечение языка грамматики $S \rightarrow SaSbS \mid Sb \mid \varepsilon$ с регулярным языком $((aba)^*bb)^*$ (2 балла).
6. Построить PDA для языка $\{a^ib^j \mid i > j \ \& \ i < 2 * j\}$ (2 балла).
7. Является ли контекстно-свободным язык всех логических формул над переменными A, B, C таких, что они являются отрицаниями какой-либо формулы, состоящей только из \Rightarrow , полученными исчерпывающим применением правила $\neg(A \Rightarrow B) \rightarrow A \ \& \ \neg B$ (2 балла).
8. Исследовать язык списков натуральных чисел, рассортированных по неубыванию. Считаем, что список заключён в квадратные скобки, и элементы списка разделяются только запятой (2 балла).
9. Ответить на следующий вопрос на cs.stackexchange (ответ поместить там же) (3 балла): goto.
10. Является ли контекстно-свободным язык всех логических формул со связками \neg, \Rightarrow над переменными A, B таких, что они являются отрицаниями какой-либо формулы, состоящей только из \Rightarrow (без ограничений на способ записи самих этих формул)? (3 балла)

11. Существует ли такое описание языка, использующее только кванторы, логические операции, переменные типа буква, слово и натуральное число, операцию возведения слова в степень (n -кратную конкатенацию), а также предикат равенства, что над однобуквенным алфавитом это описание задаёт регулярный язык, над двухбуквенным — контекстно-свободный, над трёхбуквенным — язык, не являющийся контекстно-свободным? (3 балла)
12. Всякий КС-язык является гомоморфным образом пересечения языка правильных скобочных последовательностей с регулярным языком. Построить соответствующие регулярный язык и гомоморфизм для языка $\{a^n b^m \mid n \neq m\}$ (4 балла).
13. Является ли контекстно-свободным языком язык L контекстно-свободных грамматик над нетерминалами S, A_1, \dots, A_n и терминалами a, b , описывающих регулярные языки? В алфавите L , кроме заданных заранее S, A_1, \dots, A_n, a, b , также есть символы \rightarrow и $;$ (для отделения правил друг от друга) (5 баллов)

Е. CFG-3

1. Если L — это LL(1)-язык, будет ли L^R (язык реверсированных слов) LR(0)-языком? (1 балл)
2. Если L — это LR(0)-язык, будет ли L^R LL-языком? (1 балл)
3. Построить μ -регехр, описывающее язык $\{w \mid |w|_a > |w|_b \ \& \ w \in \{a, b, c\}^*\}$ (1 балл)
4. Построить μ -регехр, описывающее язык $\{wa^i w^R b^j \mid (i > j) \vee |w| > 2\}$ (1 балл)
5. Индус построил LR(0)-автомат для языка a^* по следующей грамматике:
$$S \rightarrow aS \mid \varepsilon$$
добавив в неё самое изначальное правило $S' \rightarrow S\$$. Автомат получился с конфликтом, как и положено автомату для языка, не являющегося LR(0)-языком. Помогите индусу подогнать грамматику (методом MLS) так, чтобы LR(0)-автомат для неё не содержал конфликтов, и объясните, что случилось. (1 балл)
6. Проанализировать контекстно-свободный язык $\{wa^i w^R b^j \mid (i > j) \vee |w| > 2\}$ (2 балла)
7. Для каких грамматик переход от них к μ -регехр может дать экспоненциальный взрыв длины описания языка (от количества правил в грамматике)? (2 балла)
8. Проанализировать контекстно-свободный язык $\{vwwv^R \mid |v| = 2 \ \& \ v, w \in \{a, b\}^*\}$ (3 балла).
9. Проанализировать контекстно-свободный язык $\{w_1 v w_2 \mid w_i \in \{a, b\}^* \ \& \ v \in \{a, c\}^* \ \& \ |w_1| = |w_2|\}$ (3 балла).
10. Проанализировать контекстно-свободный язык $\{a^n w b^m v \mid w \in \{b, c\}^* \ \& \ v = c v_1 \ \& \ v_1 \in \{a, b, c\}^* \ \& \ (|w|_c \neq 0 \Rightarrow m = n)\}$ (3 балла).
11. При каком минимальном k данный язык является LL(k): $\{a^n (b|ba|q)^n\}$? (4 балла)

Г. модели

1. Выполняется ли формула $X \Rightarrow \exists yX$, где X — формула без свободных переменных, в любой свободной модели? А формула $\forall yX \Rightarrow X$? (вопрос простой, но с подвохом) (1 балл)
2. Построить терм, имеющий тип $(C \Rightarrow D) \Rightarrow ((C \Rightarrow D) \Rightarrow ((D \Rightarrow E) \Rightarrow C) \Rightarrow ((C \Rightarrow D) \Rightarrow ((D \Rightarrow E) \Rightarrow E)))$ (2 балла)
3. Исследовать начальную алгебру, заданную следующими аксиомами, где $A(x,y)$, $M(x,y)$, $S(x)$, Z — бинарные, унарный и нулевой конструкторы над единственным сортом, x, y — переменные (3 балла).
$$\begin{array}{ll} A(S(x),y) \rightarrow S(A(x,y)) & A(Z,y) \rightarrow y \\ M(S(x),y) \rightarrow A(y,M(x,y)) & M(Z,y) \rightarrow Z \\ A(x,M(y,z)) \rightarrow M(A(x,y),A(x,z)) \end{array}$$
4. Описывает ли аксиоматика, заданная ниже, те же самые модели, что и стандартная аксиоматика арифметики? $A(x,y)$, $M(x,y)$, $S(x)$, Z — бинарные, унарный и нулевой конструкторы над единственным сортом, x, y — переменные (3 балла).
$$\begin{array}{ll} A(S(x),y) \rightarrow S(A(x,y)) & A(Z,y) \rightarrow y \\ M(x,S(y)) \rightarrow A(M(x,y),x) & M(x,Z) \rightarrow Z \end{array}$$
5. Выполняется ли свойство $\forall y(sub(x, succ(x)) \neq succ(y))$ в любой свободной модели, заданной формулами:
$$sub(succ(x), succ(y)) = sub(x, y); \quad sub(x, Z) = Z \quad sub(Z, x) = Z?$$
А в начальной модели, заданной ими же? (3 балла)
6. Является ли полной система из следующих аксиом минимальной импликативной логики $A \Rightarrow (B \Rightarrow B)$, $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$? (4 балла, hint: если она полная, то в любой модели, где истинны эти аксиомы, будут истинными все теоремы минимальной логики)
7. Является ли контекстно-свободным язык всех выводимых в минимальной логике тавтологий над переменными A, B, C ? (4 балла) (hint: таблицы истинности идут мимо)

Г. вычислимость

1. Построить PDA с двумя стеками, распознающий язык $\{a^n b^n c^n\}$ (1 балл).
2. Дать верхнюю оценку уровню неразрешимости задачи проверки префикс-свойства языка. Обосновать, почему в данной оценке кванторы нельзя заменить ограниченными (1 балл).
3. Построить PDA с двумя стеками, распознающий язык $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ (2 балла).
4. Типизировать (удачно или неудачно) $\lambda x.x (\lambda y.y (\lambda z.(x (z y))))$ (2 балла)
5. Проанализировать, какой класс языков распознаётся конечными автоматами, на рёбрах которых стоят произвольные регулярные выражения (2 балла).
6. Изменится ли распознавательная сила PDA, если в нём стек заменить на дек? (2 балла)
7. Проанализировать, какой класс языков распознаётся PDA, на рёбрах которых стоят произвольные μ -регexр (3 балла).
8. Проанализировать, какой класс языков распознаётся PDA с двумя стеками (3 балла).
9. Дать верхнюю оценку уровню неразрешимости множества LL-языков. Обосновать, почему в данной оценке кванторы нельзя заменить ограниченными (3 балла).
10. (задача имени Царукяна) Проанализировать, какой класс языков распознаётся автоматом, аналогичным PDA, но с памятью не в виде стека, а в виде очереди (3 балла).

H. TRS и SRS

1. Исследовать на локальную и глобальную конfluence-ность следующую TRS (1 балл)

- [x]
1. $f(H, g(D)) \rightarrow H$
 2. $x \rightarrow g(x)$
 3. $f(D, D) \rightarrow H$
 4. $f(g(x), x) \rightarrow f(x, x)$

2. Исследовать на завершаемость следующую TRS (1 балл)

[X]

$$\begin{aligned} E(Q(q(E(E(W(E(E(q(W(q(X)))))))))) \rightarrow Q(Q(W(q(E(W(W(E(W(E(q(X)))))))))) \\ q(E(E(E(Q(E(E(q(X)))))))) \rightarrow E(Q(W(E(E(W(W(q(X)))))))) \\ E(Q(W(E(E(W(W(q(X)))))))) \rightarrow Q(E(E(Q(Q(E(E(Q(E(W(q(W(W(X)))))))))) \\ q(Q(Q(Q(E(W(W(W(E(E(Q(X)))))))))) \rightarrow E(E(E(q(E(Q(W(W(W(X)))))))) \\ E(E(Q(Q(E(q(E(Q(E(W(q(W(W(X)))))))))) \rightarrow q(W(E(Q(W(E(E(W(W(X)))))))) \\ E(E(E(q(W(Q(q(E(E(q(E(Q(Q(Q(E(X)))))))))))) \rightarrow E(W(Q(Q(W(E(E(Q(q(E(W(X)))))))))) \\ q(W(E(Q(Q(Q(W(E(E(W(W(X)))))))))) \rightarrow E(E(Q(E(E(q(E(Q(E(W(q(W(W(X)))))))))) \end{aligned}$$

3. Исследовать на завершаемость следующую TRS (2 балла)

- [X, Y, Z]
1. $w(i, X) \rightarrow X$
 2. $w(w(w(s, X), Y), Z) \rightarrow w(w(X, Z), w(Y, Z))$

4. Исследовать на завершаемость следующую TRS (2 балла)

- [X, Y]
1. $w(i, X) \rightarrow X$
 2. $w(w(w(s, X), Y), Z) \rightarrow w(w(X, Z), w(Y, Z))$

5. Исследовать на локальную и глобальную конfluence-ность следующую TRS (2 балла)

- [x, y]
1. $f(x, x) \rightarrow f(x, g(x))$
 2. $g(x) \rightarrow x$
 3. $f(x, g(y)) \rightarrow f(g(x), y)$
 4. $f(g(A), A) \rightarrow A$
 5. $f(A, g(A)) \rightarrow B$

6. Произвести пополнение по Книту–Бендиксу SRS $gf \rightarrow ff$; $fg \rightarrow f$ (2 балла).

7. Исследовать на завершаемость следующую TRS (3 балла)

$[x, y]$

$$f(f(a, x), y) \rightarrow f(f(x, f(a, y)), a)$$

8. Проверить следующее утверждение: «если все конструкторы TRS унарные и можно доказать, используя $>_{lo}$, что она завершается, то завершаемость TRS с реверсированными сторонами правил также доказывается с помощью $>_{lo}$ » (3 балла).
9. Произвести пополнение по Кнуту–Бендиксу SRS $ba \rightarrow ab; ab \rightarrow bb$ (3 балла).
10. (Задача на Тайное Знание) Написать автоматический переводчик из языка алгорифмов Маркова в язык рефал-функций (4 балла).