Visibly Pushdown Languages.
Конъюнктивные языки.
Древесные языки

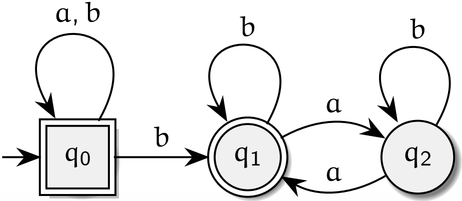
Теория формальных языков

2023 г.

AFA

Переключающиеся автоматы (Alternating Finite Automata) содержат узлы двух типов: конъюнктивные и дизъюнктивные ($\forall$-узлы и $\exists$-узлы, соответственно).

В примере AFA $\mathscr{A}$ ниже — $\exists$-узлы; — $\forall$-узлы.



ДКА, содержащий только $\{q_1, q_2\}$, принимает слова, содержащие чётное число букв a. По каждой очередной букве b данный автомат должен быть принимающим по обеим исходящим из q_0 веткам. Значит, между каждыми двумя буквами b в словах из $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ может стоять лишь чётное число букв a.

Выразительная сила AFA

- Все AFA языки регулярные, т.к. регулярные языки замкнуты относительно пересечений.
- Позволяют легко моделировать lookahead-выражения под итерацией, или lookahead-выражения внутри lookahead-выражений. Например, автомат на предыдущем слайде представляет выражение $(a \mid b(? = (b^*ab^*a)^*b^*\$))^*$.

Скобочные языки

Положим, что для каждого нетерминала правила имеют следующий вид:

$$N \to (_N \Phi)_N$$

Соответствующие языки будут замкнуты относительно пересечения и дополнения (но не итерации и конкатенации). Очень ограниченный класс языков, в котором каждый символ является открывающей или закрывающей скобкой.

Visibly Pushdown Languages

Разделим входной алфавит PDA $\mathscr{A}$ на три класса:

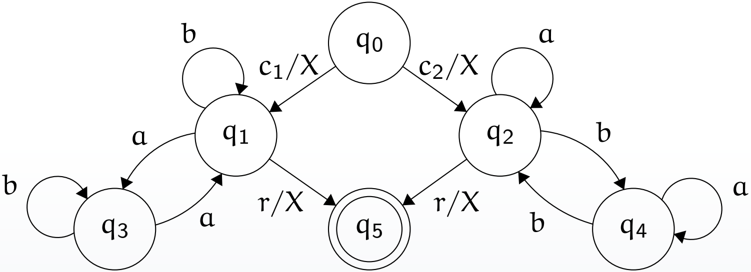
- Σ_c — вызывающий алфавит. При чтении его элементов в стек можно только класть.
- Σ_r — возвращающий алфавит. При чтении его элементов из стека можно только доставать.
- Σ (просто) — внутренний алфавит. Не меняет стек (a la конечный автомат).

Дополнительные допущения:

- завершение по финальному состоянию;
- если достигли дна стека (символ $\perp$), то символы из Σ_r не меняют его (т.е. дно стека вытолкнуть из него нельзя).

Примеры: два эквивалентных VPDA

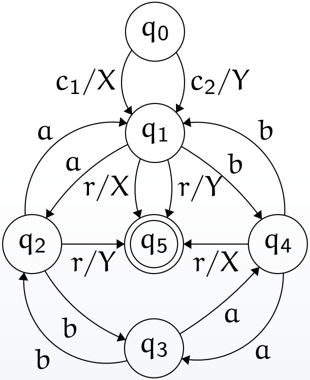
Алфавит $\Sigma_c = \{c_1, c_2\}$, $\Sigma_r = \{r\}$, $\Sigma = \{a, b\}$. Язык $c_1(b^*(ab^*ab^*)^*)r|c_2(a^*(ba^*ba^*)^*)r$. Он регулярный, и можно построить соответствующий автомат, который полностью игнорирует состояния памяти (пишем в память всегда X, и достаём тот же X).



Примеры: два эквивалентных VPDA

Алфавит $\Sigma_c = \{c_1, c_2\}$, $\Sigma_r = \{r\}$, $\Sigma = \{a, b\}$. Язык $c_1(b^*(ab^*ab^*)^*)r|c_2(a^*(ba^*ba^*)^*)r$.

Можно пойти другим путём: считать сразу чётности всех букв, но корректность выхода в конечное состояние определять по символу, который сохранён в памяти. VPDA получится такого же размера.



Теорема Майхилла–Нероуда

Язык $\mathscr{L}$ является VPL $\Rightarrow$ множество сбалансированных слов (т.е. таких, каждый символ из Σ_c в которых имеет соответствующий символ из Σ_r) разбивается на конечное число классов эквивалентности по Майхиллу–Нероуду относительно $\mathscr{L}$.

Напомним:

$$w_1 \equiv_{\mathscr{L}} w_2 \Leftrightarrow \forall u, v (u w_1 v \in \mathscr{L} \Leftrightarrow u w_2 v \in \mathscr{L})$$

Расширения КС-грамматик?

$O(n^3)$ для КС-грамматик — оценка с запасом. Что можно поместить в такой запас?

- Местность функций соответствует объявленной сигнатуре;
- ... даже при вложенных и перекрестных вызовах этих функций!

Примеры задач:

```
int f(int,...,int)
    { ... }
int g(int,...,int)
    { ... }

int main() {
   x1 = f(0,...,0);
   x2 = g(0,...,0);
}
```

```
int f(int,...,int)
       { ... }

int main() {
   x = f(
         f(0,...,0),
         ...,
         f(0,...,0))
}
```

Конъюнктивные грамматики

Конъюнктивная грамматика G — грамматика, правила которой имеют вид

$$A_i \to \Phi_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} \Phi_n$$

где A_i — нетерминал; Φ_j — строки в смешанном алфавите терминалов и нетерминалов.

Грамматика для $\{(a^n b)^k \mid n, k \geqslant 1\}$:

$$\begin{aligned}
S &\to SA \mathbin{\&} Cb \mid A \\
A &\to aA \mid ab \\
C &\to aCa \mid B \\
B &\to BA \mid b
\end{aligned}$$

Язык равенства

Связанность переменных тоже можно проверить. См. грамматику для $\{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Язык неравенства:	Язык равенства:
$S_w \to C \mid ED$	$S_w \to C \; \& \; D$
$C \to XCX \mid XEc \mid cEX$	$C \to XCX \mid c$
$D \to aB \mid bA$	$D \to aA \; \& \; aD \mid bB \; \& \; bD \mid cE$
$A \to XAX \mid cEa$	$A \to XAX \mid cEa$
$B \to XBX \mid cEb$	$B \to XBX \mid cEb$
$E \to XE \mid \varepsilon$	$E \to XE \mid \varepsilon$
$X \to a \mid b$	$X \to a \mid b$

Вопросы парсинга

Это позволяет проверять условия вроде «все переменные объявлены» или «все вызываемые функции существуют». В любой позиции, где должен заканчиваться объявленный идентификатор, для этого вызываем конструкцию равенства по всем α из алфавита имён:

$$
\begin{array}{rcrl}
\mathsf{C} & \to & \mathsf{C}_{\mathtt{len}} \,\&\, \mathsf{C}_{\mathtt{iter}} & \\
\mathsf{C}_{\mathtt{len}} & \to & \mathsf{L}\mathsf{C}_{\mathtt{len}}\mathsf{L} & |\mathsf{L}\mathsf{C}_{\mathtt{mid}}\mathsf{L} \\
\mathsf{C}_{\mathtt{mid}} & \to & \mathsf{P} & |\mathsf{PAP} \\
\mathsf{C}_{\mathtt{iter}} & \to & \mathsf{C}_{\alpha}\alpha \,\&\, \mathsf{C}_{\mathtt{iter}}\alpha & \\
\mathsf{C}_{\alpha} & \to & \mathsf{L}\mathsf{C}_{\alpha}\mathsf{L} & |\alpha\mathsf{AP}
\end{array}
$$

Здесь P — разделитель, L — буква из алфавита имён, A — произвольная строка.

Неудобство связано с линейным разрастанием количества правил при расширении алфавита имён.

Real-time клеточные автоматы

Если переписывание стартует с «листьев», но структурой является сеть, то получается т.н. «автомат Треллиса».
Выделенное красным значение — финальный нетерминал (то, что должно оказаться на вершине стека). Выделенные синим значения — нетерминалы (т.е. они не могут встречаться во входной строке).
Левая таблица определяет автомат Треллиса для слов из $\{a, b\}^*$, у которых центральная буква есть a. Правая таблица определяет автомат Треллиса для языка ПСП, где $a = ($, $b =)$.

a	a	b	c
a	c	b	
b	c	b	b
c		a	a

d	a	b	d	r
a	a	d	a	a
b	r	b		r
d		b		a
r	r	b	b	r

Real-time клеточные автоматы

Если переписывание стартует с «листьев», но структурой является сеть, то получается т.н. «автомат Треллиса».
Языки, распознаваемые такими автоматами, — это в точности линейные конъюнктивные языки.

Преобразование автомата Треллиса в конъюнктивную грамматику (она будет линейной, т.к. в каждой базисной правой части может быть, самое большее, всего один нетерминал):
$S \to A_{final}$
$A_{init(a)} \to a, a \in \Sigma$
$A_{\delta(q_1,q_2)} \to A_{q_1}c \,\&\, bA_{q_2}, \forall b, c \in \Sigma$

Древесные автоматы

Древесный автомат задаётся входным алфавитом (сигнатурой конструкторов) $\Sigma \subset \{\langle f, n \rangle\}$ и конечным состоянием, а также правилами перехода: $\langle f, n \rangle \in \Sigma \Rightarrow (q_1, \ldots, q_n, f) \to q_s$.

Переписывание происходит снизу вверх (от листьев к корню).

- Описывают все деревья разбора КС-грамматик.
- Обладают свойствами регулярных языков (замкнутость относительно булевых операций, теорема Майхилла–Нероуда)

Грамматики древесных сопряжений (TAG)

Если деревья разрешается разрезать посередине и встраивать в них другие деревья из заданного базиса, то получаются так называемые «мягко контекстно-зависимые языки», которые также характеризуются КЗ-грамматиками, в которых каждый нетерминал оснащён стеком, и с правилами вида:

- $A[\circ\circ\eta] \to \Phi_1 A'[\circ\circ\eta']\Phi_2$
- или $A[\eta] \to \Phi$

Пример такой грамматики для языка $\{a^n b^n c^n d^n\}$:

$S[\circ\circ] \to aS[\circ\circ l]d \mid T[\circ\circ]$

$T[\circ\circ l] \to bT[\circ\circ]c$

$T[\varepsilon] \to \varepsilon$

TAG-языки и конъюнктивные языки

	TAG	CG
Сложность разбора	$O(n^6)$	$O(n^3)$
Накачки	есть	нет
Язык $\{a^n b^n c^n d^n e^n\}$	не входит	входит
Язык $\{ww\}$	входит	неизвестно