1. $\mathscr{L}_1 = \left\{ v_1 z v_2 z \mid |z| \geqslant 2 \ \& \ z, v_2 \in \{a, b, c\}^* \ \& \ v_1 \in \{a, b\}^* \right\}$
2. Множество троичных чисел, кратных 5.
3. Множество трасс грамматик с правилами вида $N_i \to \gamma N_j$, $N_i \to N_j \gamma$, $N_i \to \varepsilon$.
4. Множество трасс грамматики G_k с правилами вида $S \to S_1 S_1$, $S_1 \to S_2 S_2 \dots$, $S_k \to a$, $S_k \to SS$.

Решение задачи I

«Интуитивно» язык не регулярный — есть требование вхождения одинаковых подслов, которые «по идее» можно как-то отделить от аморфных значений v_1 и v_2. Попробуем провести это отделение более последовательно.

Два момента в данном языке обращают на себя внимание:

- словарь (язык) v_1 отличается от словаря смежного с ним слова z. Это значит, что если взять первую букву z из разности языка z и языка v_1, то никакое значение v_1 не сможет её поглотить.
- словарь (язык) v_2 точно такой же, как у смежных вхождений z. Поэтому в принципе v_2 может поглотить любой суффикс первого вхождения z, а также любой префикс второго вхождения.

Чтобы слово v_2 не могло поглотить префикс второго вхождения z, надо сделать так, чтобы его положение определялось однозначно. Мы уже знаем, что выгодно взять z начинающимся с буквы c (это исключит поглощение префикса z значением v_1). Значит, если в слове будет всего две буквы c, то ровно одна из них должна начинать первое вхождение z, и ровно одна должна начинать второе вхождение. Осталось дополнить z достаточно длинными суффиксами, исключающими возможность «накачки» их одновременно.

Кандидат на контрпример — серия слов $ca^{n+2}ca^{n+2}$, где n — длина накачки.

Теперь можно доказать нерегулярность языка посредством теоремы Майхилла–Нероуда. Действительно, слова вида $ca^m ca^{m+k+1}$ языку не принадлежат, а $ca^{m+k}ca^m$ — точно принадлежат (при этом $z = ca^m$, $v_2 = a^k$), что порождает нижнетреугольную матрицу принадлежности: наименования строк здесь — это префиксы слов, а столбцов — соответствующие суффиксы.

	ca	ca^2	ca^3	$\dots$
ca	$+$	$-$	$-$	$-$
ca^2	$+$	$+$	$-$	$-$
ca^3	$+$	$+$	$+$	$-$
$\dots$		$\dots$		

Также можно использовать этот контрпример для построения короткого доказательства нерегулярности $\mathscr{L}_1$, если пересечь его с языком (регулярным) $R = ca^*ca^*$. В слове $ca^{n+2}ca^{n+2}$, принадлежащем пересечению $R \cap \mathscr{L}_1$, можно накачивать лишь фрагмент, состоящий только из букв a, чтобы не выйти из языка R. Пусть такой фрагмент имеет длину k (где $k > 0$). Тогда при отрицательной накачке получится слово $ca^{n-k+2}ca^{n+2}$, которое не входит в $\mathscr{L}_1$.

Наиболее неприятный путь — прямое применение леммы о накачке к слову $ca^{n+2}ca^{n+2}$ без использования свойств замыканий. На этом пути придётся разобрать два случая.

- Фрагмент накачки имеет вид a^k. Этот случай аналогичен уже рассмотренному в решении с пересечением.

- Фрагмент накачки имеет вид ca^k. Отметим, что $k < n$. Тогда при положительной накачке в одну итерацию получим слово $ca^kca^{n+2}ca^{n+2}$. Поскольку это слово начинается с c, то значение z должно начинаться с c, а значит, должно заканчиваться на a^{n+2} (потому что первое с конца вхождение c уж точно будет относиться к z). Но это значит, что z должна содержать также и фрагмент ca^kc (иначе первое вхождение z не сможет заканчиваться на a^{n+2}), а он в этом слове не повторяется.

В этой задаче у большинства возникла одна из двух проблем:

- Или взято значение z с префиксом в языке $\{a, b\}$, из-за чего оно смешалось со значением v_1.

- Или взято значение z, равное c^n (очевидно, вы заметили, что в противном случае анализу мешает v_1). Тогда мы можем весь суффикс z, кроме двух первых букв, положить в v_2. Вообще, в этой задаче не стоит брать значения z, значение префикс-функция у которых больше, чем 0 (и осторожнее с такими словами в других задачах).

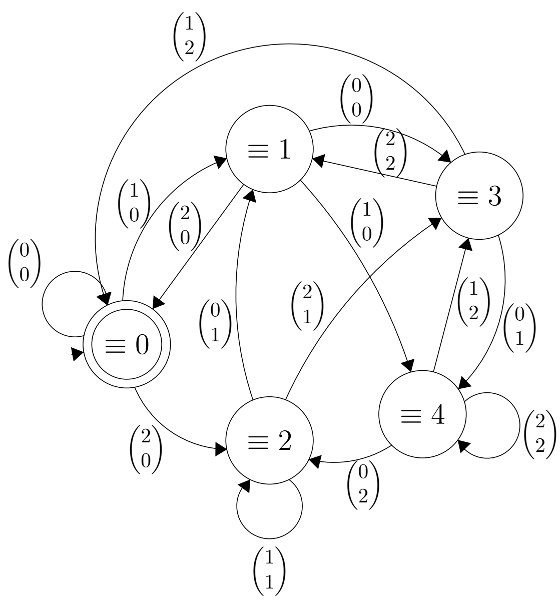
Решение задачи II

Если x кратно 5, то $\exists y(x = 5 \cdot y)$. Что указывает: можно использовать метод построения автоматов для пар $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, таких что $x = 5 \cdot y$, а потом взять в нём проекцию по x.

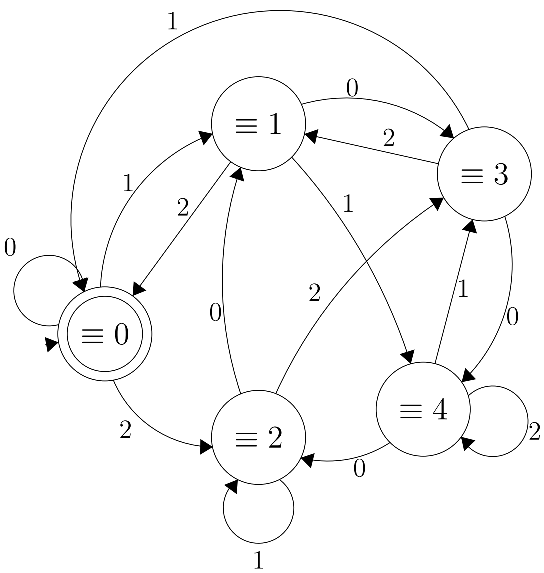
Для этого сначала найдём все пути, ведущие в ловушки, а именно, определим критическую разницу между x и y снизу и сверху, которая не может быть исправлена приписыванием никаких младших разрядов. Если $x - 5y = k$, то максимально большой выигрыш в пользу x в следующем разряде будет, если к x припишется 2, а к y — 0. Тогда очередное значение $x' - 5y'$ будет $3x + 2 - 15y = 3k + 2$. $3k + 2 \leqslant k$, если $k \leqslant -1$, и это критическая разница в пользу y, которая гарантирует, что все пути в автомате, на которых получено это значение, будут тупиковыми.

Обратно, максимально большой выигрыш в пользу y в следующем разряде будет при приписывании к x нуля, а к y — двойки. Тогда $x' - 5y' = 3x - 15y - 10 = 3k - 10$. Если $3k - 10 \geqslant k$, то $k \geqslant 5$, поэтому все пути в автомате, на которых встретится такая разница между x и $5y$, также будут тупиковыми.

Значит, в состояниях, не являющихся ловушками, величина $x - 5y$ варьирует от 0 до 4. Дальнейшее построение автомата — техническая процедура.



Автомат-проекция указанного ДКА по первому компоненту также будет детерминированным (вообще говоря, это не гарантируется для проекций).



К аналогичному решению задачи можно было прийти и без проекций. Действительно, рассмотрим, как будут изменяться остатки от деления x на 5 при приписывании очередного разряда.

Остаток	Приписан 0	Приписана 1	Приписана 2
0	$0 \cdot 3 + 0 = 0$	$0 \cdot 3 + 1 = 1$	$0 \cdot 3 + 2 = 2$
1	$1 \cdot 3 + 0 = 3$	$1 \cdot 3 + 1 = 4$	$1 \cdot 3 + 2 = 0$
2	$2 \cdot 3 + 0 \equiv 1$	$2 \cdot 3 + 1 \equiv 2$	$2 \cdot 3 + 2 \equiv 3$
3	$3 \cdot 3 + 0 \equiv 4$	$3 \cdot 3 + 1 \equiv 0$	$3 \cdot 3 + 2 \equiv 1$
4	$4 \cdot 3 + 0 \equiv 2$	$4 \cdot 3 + 1 \equiv 3$	$4 \cdot 3 + 2 \equiv 4$

Минимальность ДКА почти очевидна: состояния $\equiv 1$, $\equiv 3$ различимы друг от друга и от остальных состояний на переходах по 2 и 1 соответственно; если состояния $\equiv 1$, $\equiv 3$ доказуемо различимы, то $\equiv 2$ и $\equiv 4$ после этого можно различить поведением на переходах по любому значению. На основе этих наблюдений построим таблицу классов эквивалентности.

	00	01	02	10	11
ε	+	−	−	−	−
1	−	+	−	−	−
2	−	−	+	−	−
10	−	−	−	+	−
11	−	−	−	−	+

Она не только свидетельствует, что построенный ДКА минимален, но и обосновывает, что никакой НКА для этого языка не может иметь меньше 5 состояний (согласно расширенному критерию Глайстера–Шаллита, нижняя граница на число состояний в НКА — число строк в верхнетреугольной матрице).

Осталось разобраться с вопросом о регулярном выражении для данного языка. Минимальность представленного ДКА даже в классе недетерминированных автоматов наводит на мысль, что регулярка может получиться очень длинной. И действительно, после устранения состояний $\equiv 3$ и $\equiv 4$ мы получаем ДКА, представляющий собой полный граф переходов из трёх вершин, а языки таких ДКА порождают максимальное разрастание длины при переходе к регулярным выражениям. Таким образом, мы имеем дело именно с таким языком, когда представление в форме ДКА оказывается экспоненциально более выгодным, чем в форме регулярного выражения (как минимум, при применении алгоритма устранения состояний напрямую).

Решение задачи III

Множество трасс грамматик с правилами вида $N_i \to \gamma N_j, N_i \to N_j\gamma, N_i \to \varepsilon$

Трассы — это слова в алфавите $\Sigma \cup \{N_i\} \cup \{\to\} \cup \{;\}$, где ; — разделитель между смежными применениями правил.

Поскольку грамматика в задаче содержит по одному нетерминалу в правых частях правил, то каждое очередное правило будет применяться именно к этому нетерминалу. Далее воспользуемся следующими двумя фактами:

- число правил грамматики конечно
- раскрываемый в новом правиле нетерминал является либо крайним (то есть непосредственно предшествует ;), либо вторым с края (за ним следует единственная буква $\gamma_i \in \Sigma$).

Построим регулярные языки R_1 и R_2, соответствующие каждому из указанных условий, тогда корректные трассы грамматики будут принадлежать языку $R_1 \cap R_2$.

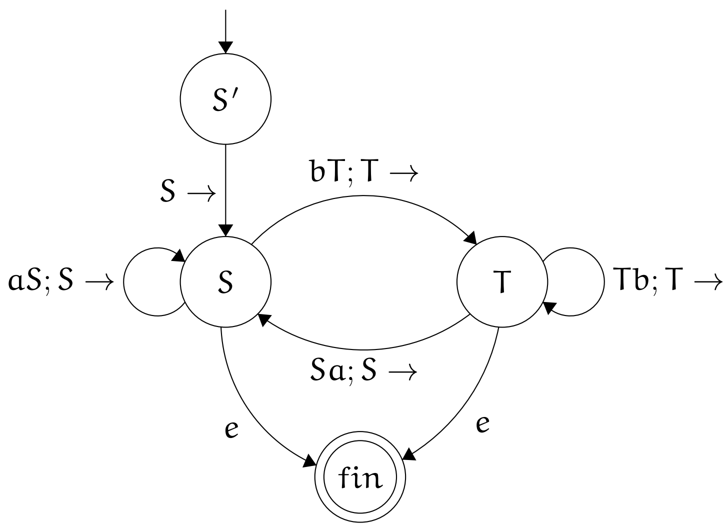
- R_1 определяет, что трасса составлена из правил именно данной грамматики. То есть $R_1 = (N_1 \to \Phi_1 \mid \ldots \mid N_k \to \Phi_k;)^*(M_0 \to \varepsilon \mid \ldots M_s \to \varepsilon)$, где $N_i \to \Phi_i$ — рекурсивные правила грамматики (т.е. содержащие нетерминал в правой части); $M_i \to \varepsilon$ — финальные правила грамматики.
- R_2 определяет, что в трассе раскрываются именно те нетерминалы, которые были порождены в предшествующей правой части. То есть $R_2 = S \to .?(N_1.?; N_1 \to .? \mid \ldots \mid N_k.?; N_k \to .?)^*\varepsilon$, где .? — опциональная возможность прочитать один символ, N_i — все нетерминалы грамматики. Этот язык позволяет правилам не содержать ни одного терминального символа, либо иметь несколько вхождений нетерминалов в правые части. Но это в данном случае не существенно, поскольку строки языка R_2, содержащие применения таких правил в трассе, не входят в язык R_1 и потому не содержатся в пересечении.

Определять язык корректных трасс путём явного описания регулярного выражения было бы намного труднее: пришлось бы ветвить регулярное выражение по всем возможным переходам от одного нетерминала к другому. В худшем случае, это привело бы к экспоненциальному росту регулярного выражения. Действительно, если объявить базисными состояниями ДКА нетерминалы, и задать правила перехода из каждого нетерминала в каждый другой по различным терминальным символам, мы получим чуть-чуть другое представление ДКА — полного графа, минимальное регулярное выражение для которого экспоненциально зависит от числа нетерминалов.

Приведём пример регулярного выражения и расширенного ДКА (допускающего переходы по словам, а не только по буквам) для языка трасс следующей грамматики.

$$S \to aS \mid bT \mid \varepsilon$$
$$T \to Tb \mid Sa \mid \varepsilon$$

В расширенном ДКА, приведённом ниже, S' — стартовое состояние, определяющее стартовый нетерминал грамматики, $\mathtt{fin}$ — финальное состояние, соответствующее переходам по правилам, не содержащим нетерминалов в правой части; e — это кодировка для ε в трассах (чтобы не путать с ε — незакодированным пустым словом).



Регулярное выражение, извлечённое из такого автомата: $S \to ((aS; S \to) \mid (bT; T \to (Tb; T \to)^*(Sa; S \to)))^*(e \mid bT; T \to (Tb; T \to)^*e)$. В силу полноты графа переходов между «нетерминальными» состояниями S и T, его не удастся сделать существенно короче.

1 Решение задачи IV

Если бы в грамматике не было правила, обновляющего итерацию ($S_k \to SS$), то такая грамматика описывала бы конечные языки, и для каждого конкретного значения k можно было бы записать конечный язык её трасс. Однако из-за возможных возвратов к разбору S этого сделать не получится. Более того, количество нетерминалов S в сентенциальных формах грамматики ещё и может накапливаться, значит, нужно будет как-то считать количество тех нетерминалов, которые накопились в сентенциальной форме, но ещё не разобраны.

Последнее наблюдение «интуитивно» приводит к соображению, что язык нерегулярный. Чтобы построить формальное доказательство, возьмём простейшую грамматику G_1 из указанного в условии задачи класса.

$$\begin{aligned} &S \to S_1 S_1 \\ &S_1 \to SS \mid a \end{aligned}$$

Рассмотрим её трассы, n раз разбирающие S по правилам $S \to S_1S_1; S_1 \to SS$. Они будут содержать следующий префикс: $W_n = S \to (S_1S_1; S_1 \to SS; S \to)^n$. В рамках данного языка накачать такой префикс можно, только меняя значение n (поскольку в префиксе нет применений правила $S_1 \to a$, то они не могут появиться и в накачке, а остальные два правила должны строго следовать друг за другом в любой трассе грамматике).

Пусть m — длина накачки языка. Рассмотрим слово $W_m P$, где P — некоторый суффикс, описывающий корректное завершение трассы, начинающейся с W_m. Мы уже знаем, что «накачки» слова $W_m P$ должны иметь вид $(S_1S_1; S_1 \to SS; S \to)^{m+k\cdot i}$, где $k > 0$ — число попарных применений правил разбора в накачиваемом фрагменте.

Каждая трасса с префиксом W_n порождает, проследовав по данному пути разбора, сентенциальную форму вида $S(SS_1)^n$. Значит, полный разбор каждого нетерминала S требует как минимум двух обращений к правилу $S_1 \to a$; разбор каждого из S_1 требует минимум одного обращения к правилу $S_1 \to a$. Значит, каждая итерация $S_1S_1; S_1 \to SS; S \to$ порождает минимум три вхождения буквы a в суффикс трассы. Возьмём $i = |P|$, тогда суффикс P слова $S \to (S_1S_1; S_1 \to SS; S \to)^{m+k\cdot i}P$ должен содержать как минимум $3 \cdot (|P| \cdot k + m)$ букв a, а его длина явно меньше. Это доказывает нерегулярность языка трасс грамматики G_1, а значит, и для всего класса подобных грамматик.

В этой задаче мы смогли даже обойтись без рассмотрения конкретного значения суффикса P при использовании леммы о накачке. Для построения таблицы классов эквивалентности суффиксы уже придётся явным образом строить; нас будут интересовать кратчайшие пути разбора сентенциальных форм $S(SS_1)^i$, порождаемых префиксами трасс.

- Кратчайший путь разбора S есть $S \to S_1S_1; S_1 \to a; S_1 \to a$.
- Кратчайший путь разбора S_1 есть $S_1 \to a$.

Таким образом, требуемые суффиксы примут вид $P_i = (S_1S_1; S_1 \to a; S_1 \to a)(; S \to S_1S_1; S_1 \to a; S_1 \to a; S_1 \to a)^i$. Таблица классов эквивалентности с префиксами W_i и суффиксами P_i будет содержать знак плюс только на диагонали: везде, где длина префикса больше, будет недостаточно финальных правил для разбора всех нетерминалов, а везде, где длина суффикса больше, не хватит числа порождающих правил для S, поскольку в суффиксах P_i нетерминалы S не порождаются, а только разбираются.