

Нормализация вычислений



Теория формальных языков
2021 г.

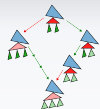


ADT как TRS

Отношение одношаговой редукции $\rightarrow_{\mathcal{T}}$, определяемое \mathcal{T} – это наименьшее отношение на термах такое, что $M[v := \sigma(L)] \rightarrow_{\mathcal{T}} M[v := \sigma(R)]$, где x входит в терм M однажды, и $L \rightarrow R$ – правило переписывания \mathcal{T} .
Многошаговая редукция: $M \rightarrow\!\!\rightarrow N$.

В общем случае редукция требует сделать унификацию левой части правила, L , с некоторым подтермом терма M . Пример: $A(x, S(y)) \rightarrow S(A(x, y))$ может применяться к терму $A(A(Z, S(Z)), S(S(Z)))$ двумя разными способами: через подстановку $x := A(Z, S(Z))$, $y := S(Z)$ и через $x := Z$, $y := Z$.

Пусть \mathcal{T} – конфлюэнтная TRS. Тогда
 $\mathcal{T} \vdash M = N \Leftrightarrow M \rightarrow\!\!\rightarrow \circ \leftarrow\!\!\leftarrow N$.



Виды конфлюэнтности

- (Глобальная) конфлюэнтность:
$$N_1 \leftarrow M \rightarrow N_2 \Rightarrow N_1 \rightarrow \circ \leftarrow N_2.$$
- Локальная конфлюэнтность:
$$N_1 \leftarrow M \rightarrow N_2 \Rightarrow N_1 \rightarrow \circ \leftarrow N_2.$$



Виды конфлюэнтности

- (Глобальная) конфлюэнтность:
$$N_1 \leftarrow M \rightarrow N_2 \Rightarrow N_1 \rightarrow \circ \leftarrow N_2.$$
- Локальная конфлюэнтность:
$$N_1 \leftarrow M \rightarrow N_2 \Rightarrow N_1 \rightarrow \circ \leftarrow N_2.$$

Рассмотрим следующую TRS:

$\infty \rightarrow S(\infty) \quad \text{Eq?}(x, x) \rightarrow \text{True} \quad \text{Eq?}(x, S(x)) \rightarrow \text{False}$

Она локально конфлюэнтна (проверьте), но не является конфлюэнтной.



Виды конfluence

- (Глобальная) конfluence:
$$N_1 \leftarrow M \rightarrow N_2 \Rightarrow N_1 \rightarrow \circ \leftarrow N_2.$$
- Локальная конfluence:
$$N_1 \leftarrow M \rightarrow N_2 \Rightarrow N_1 \rightarrow \circ \leftarrow N_2.$$

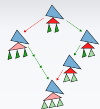
Рассмотрим следующую TRS:

$$\infty \rightarrow S(\infty) \quad \text{Eq?}(x, x) \rightarrow \text{True} \quad \text{Eq?}(x, S(x)) \rightarrow \text{False}$$

Она локально конfluence (проверьте), но не является конfluence.

Лемма Ньюмана

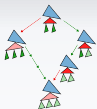
В завершающихся TRS локальная конfluence эквивалентна конfluence.



Критические пары

Напоминание

Термы T_1 и T_2 унифицируются, если $\exists \sigma (T_1 \sigma = T_2 \sigma)$. Если для всех σ' таких, что $T_1 \sigma' = T_2 \sigma'$ существует подстановка η такая, что $T_1 \sigma' = (T_1 \sigma) \eta$, тогда σ — most general unifier для T_1 и T_2 ($\sigma = \text{mgu}(T_1, T_2)$).

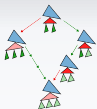


Критические пары

Напоминание

Термы T_1 и T_2 унифицируются, если $\exists \sigma (T_1 \sigma = T_2 \sigma)$. Если для всех σ' таких, что $T_1 \sigma' = T_2 \sigma'$ существует подстановка η такая, что $T_1 \sigma' = (T_1 \sigma) \eta$, тогда σ — most general unifier для T_1 и T_2 ($\sigma = \text{mgu}(T_1, T_2)$).

Правила $L_1 \rightarrow R_1$ и $L_2 \rightarrow R_2$ образуют критическую пару $\langle R_1 \sigma, (L_1 \sigma)[P \sigma := R_2 \sigma] \rangle$, если в L_1 существует подтерм P , не равный переменной, такой что $P \sigma = L_2 \sigma$.



Левострогие TRS

TRS называется левострогим, если в левых частях её правил нет повторных переменных.

Если TRS левострогий и не имеет нетривиальных критических пар, то она конфлюэнтна.

Если HOF редуцируется к нормальной форме, эта нормальная форма единственна. (см. алгебру комбинаторной логики)

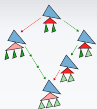
Все завершающиеся функции HOF имеют нормальную форму.



Теорема о конфлюэнтности

Пара термов $\langle T_1, T_2 \rangle$ объединяема $\Leftrightarrow T_1 \rightarrow^* \circ \leftarrow^* T_2$.
TRS локально конфлюэнтна \Leftrightarrow все её критические пары объединяемы.

Рассмотрим TRS $\mathcal{T} = \{f(g(x)) \rightarrow x, g(f(x)) \rightarrow x\}$. В \mathcal{T} единственные критические пары — это $\langle f(x), f(x) \rangle$ для $f(g(f(x)))$ и $\langle g(x), g(x) \rangle$ для $g(f(g(x)))$ — объединяемые.

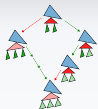


Теорема о конфлюэнтности

Пара термов $\langle T_1, T_2 \rangle$ объединяема $\Leftrightarrow T_1 \rightarrow^* \circ \leftarrow^* T_2$.
TRS локально конфлюэнтна \Leftrightarrow все её критические пары объединяемы.

Рассмотрим TRS $\mathcal{T} = \{f(g(x)) \rightarrow x, g(f(x)) \rightarrow x\}$. В \mathcal{T} единственные критические пары — это $\langle f(x), f(x) \rangle$ для $f(g(f(x)))$ и $\langle g(x), g(x) \rangle$ для $g(f(g(x)))$ — объединяемые.

Рассмотрим TRS \mathcal{T} с правилом $f(f(x)) \rightarrow g(x)$. Она порождает критическую пару $\langle f(g(x)), g(f(x)) \rangle$, не сводимую к общему терму. Если добавить к \mathcal{T} правило $f(g(x)) \rightarrow g(f(x))$, оно не испортит завершаемость (почему?), но появится конфлюэнтность.



Пример

Аксиомы списка	Аксиомы ошибки
$\text{car}(\text{cons } x \text{ } l) = x$	$\text{car nil} = \text{error}_a$
$\text{cdr}(\text{cons } x \text{ } l) = l$	$\text{cdr nil} = \text{error}_l$
$\text{isempty? nil} = \text{true}$	$\text{cons error}_a \text{ } l = \text{error}_l$
$\text{isempty? (cons } x \text{ } l) = \text{false}$	$\text{cons } x \text{ error}_l = \text{error}_l$
$\text{cond}_a \text{ true } x \text{ } y = x$	$\text{car error}_l = \text{error}_a$
$\text{cond}_a \text{ false } x \text{ } y = y$	$\text{cdr error}_l = \text{error}_l$
$\text{cond}_b \text{ true } v1 \text{ } v2 = v1$	$\text{isempty? error}_l = \text{error}_b$
$\text{cond}_b \text{ false } v1 \text{ } v2 = v2$	$\text{cond}_a \text{ error}_b \text{ } x \text{ } y = \text{error}_a$
$\text{cond}_l \text{ true } l1 \text{ } l2 = l1$	$\text{cond}_b \text{ error}_b \text{ } x \text{ } y = \text{error}_b$
$\text{cond}_l \text{ false } l1 \text{ } l2 = l2$	$\text{cond}_l \text{ error}_b \text{ } x \text{ } y = \text{error}_l$



Пример

Аксиомы списка	Аксиомы ошибки
$\text{car}(\text{cons } x \text{ l}) = x$	$\text{car nil} = \text{error}_a$
$\text{cdr}(\text{cons } x \text{ l}) = \text{l}$	$\text{cdr nil} = \text{error}_l$
$\text{isempty? nil} = \text{true}$	$\text{cons error}_a \text{ l} = \text{error}_l$
$\text{isempty? (cons } x \text{ l)} = \text{false}$	$\text{cons } x \text{ error}_l = \text{error}_l$
$\text{cond}_a \text{ true } x \text{ y} = x$	$\text{car error}_l = \text{error}_a$
$\text{cond}_a \text{ false } x \text{ y} = y$	$\text{cdr error}_l = \text{error}_l$
$\text{cond}_b \text{ true } v1 \text{ v2} = v1$	$\text{isempty? error}_l = \text{error}_b$
$\text{cond}_b \text{ false } v1 \text{ v2} = v2$	$\text{cond}_a \text{ error}_b \text{ x y} = \text{error}_a$
$\text{cond}_l \text{ true } l1 \text{ l2} = l1$	$\text{cond}_b \text{ error}_b \text{ x y} = \text{error}_b$
$\text{cond}_l \text{ false } l1 \text{ l2} = l2$	$\text{cond}_l \text{ error}_b \text{ x y} = \text{error}_l$
Безопасная кр. пара: $\langle \text{error}_a, \text{car error}_l \rangle$ (правила $\text{car}(\text{cons } x \text{ l}) = x$ и $\text{cons error}_a \text{ l} = \text{error}_l$).	



Пример

Аксиомы списка	Аксиомы ошибки
$\text{car}(\text{cons } x \ l) = x$	$\text{car } \text{nil} = \text{error}_a$
$\text{cdr}(\text{cons } x \ l) = l$	$\text{cdr } \text{nil} = \text{error}_l$
$\text{isempty? } \text{nil} = \text{true}$	$\text{cons } \text{error}_a \ l = \text{error}_l$
$\text{isempty? } (\text{cons } x \ l) = \text{false}$	$\text{cons } x \ \text{error}_l = \text{error}_l$
$\text{cond}_a \ \text{true } x \ y = x$	$\text{car } \text{error}_l = \text{error}_a$
$\text{cond}_a \ \text{false } x \ y = y$	$\text{cdr } \text{error}_l = \text{error}_l$
$\text{cond}_b \ \text{true } v1 \ v2 = v1$	$\text{isempty? } \text{error}_l = \text{error}_b$
$\text{cond}_b \ \text{false } v1 \ v2 = v2$	$\text{cond}_a \ \text{error}_b \ x \ y = \text{error}_a$
$\text{cond}_l \ \text{true } l1 \ l2 = l1$	$\text{cond}_b \ \text{error}_b \ x \ y = \text{error}_b$
$\text{cond}_l \ \text{false } l1 \ l2 = l2$	$\text{cond}_l \ \text{error}_b \ x \ y = \text{error}_l$

Безопасная кр. пара: $\langle \text{error}_a, \text{car } \text{error}_l \rangle$ (правила $\text{car}(\text{cons } x \ l) = x$ и $\text{cons } \text{error}_a \ l = \text{error}_l$).

Проблемная кр. пара: $\langle l, \text{cdr } \text{error}_l \rangle$ (правила $\text{cdr}(\text{cons } x \ l) = l$ и $\text{cons } \text{error}_a \ l = \text{error}_l$). Спецификация противоречива.



Исправление ошибок

$\text{car}(\text{cons } x \text{ l}) = x$

$\text{cdr}(\text{cons } x \text{ l}) = \text{l}$

$\text{isempty? nil} = \text{true}$

$\text{isempty? (cons } x \text{ l)} = \text{false}$

$\text{cond}_a \text{ true } x \text{ y} = x$

$\text{cond}_a \text{ false } x \text{ y} = y$

$\text{cond}_b \text{ true } v1 \text{ } v2 = v1$

$\text{cond}_b \text{ false } v1 \text{ } v2 = v2$

$\text{cond}_l \text{ true } l1 \text{ } l2 = l1$

$\text{cond}_l \text{ false } l1 \text{ } l2 = l2$

$\text{error?}_l \text{ error}_l = \text{true}$

$\text{car nil} = \text{error}_a$

$\text{cdr nil} = \text{error}_l$

$\text{cons error}_a \text{ l} = \text{error}_l$

$\text{cons } x \text{ error}_l = \text{error}_l$

$\text{car error}_l = \text{error}_a$

$\text{cdr error}_l = \text{error}_l$

$\text{isempty? error}_l = \text{error}_b$

$\text{cond}_a \text{ error}_b \text{ } x \text{ y} = \text{error}_a$

$\text{cond}_b \text{ error}_b \text{ } x \text{ y} = \text{error}_b$

$\text{cond}_l \text{ error}_b \text{ } x \text{ y} = \text{error}_l$

$\text{error?}_l \text{ nil} = \text{false}$



Исправление ошибок

~~car(cons x l) = x~~
~~cdr(cons x l) = l~~
isempty? nil = true
~~isempty? (cons x l) = false~~
 $\text{cond}_a \text{ true } x \ y = x$
 $\text{cond}_a \text{ false } x \ y = y$
 $\text{cond}_b \text{ true } v1 \ v2 = v1$
 $\text{cond}_b \text{ false } v1 \ v2 = v2$
 $\text{cond}_l \text{ true } l1 \ l2 = l1$
 $\text{cond}_l \text{ false } l1 \ l2 = l2$
 $\text{error?}_l \text{ error}_l = \text{true}$
 $\text{error?}_l (\text{cons } x \ l) = \text{cond}_b (\text{error?}_a \ x) \text{ true}$

$\text{car nil} = \text{error}_a$
 $\text{cdr nil} = \text{error}_l$
 $\text{cons error}_a \ l = \text{error}_l$
 $\text{cons } x \ \text{error}_l = \text{error}_l$
 $\text{car error}_l = \text{error}_a$
 $\text{cdr error}_l = \text{error}_l$
 $\text{isempty? error}_l = \text{error}_b$
 $\text{cond}_a \text{ error}_b \ x \ y = \text{error}_a$
 $\text{cond}_b \text{ error}_b \ x \ y = \text{error}_b$
 $\text{cond}_l \text{ error}_b \ x \ y = \text{error}_l$
 $\text{error?}_l \text{ nil} = \text{false}$

$(\text{cond}_b (\text{error?}_l \ l) \text{ true } \text{false})$

$\text{car}(\text{cons } x \ l) = \text{cond}_a (\text{error?}_a \ x) \ \text{error}_a$
 $(\text{cond}_a (\text{error?}_l \ l) \ \text{error}_a \ x)$

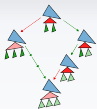
...и т.д. для error?_a и error?_b и для двух других проблемных правил.



Алгоритм Кнута–Бендикса

Пополнение правилами переписывания по критическим парам не меняет отношение доказуемого равенства в TRS, но может плохо повлиять на завершаемость \Rightarrow пополнение должно контролироваться нетеровым (wfo) порядком \preceq .

Пусть дана TRS \mathcal{T} , доказуемо завершающаяся в ФуМА \mathcal{A} с wfo \preceq . Будем расширять \mathcal{T} правилами $L_i \rightarrow R_i$, где $\langle L_i, R_i \rangle$ — критические пары и $R_i^{\mathcal{A}} \preceq L_i^{\mathcal{A}}$ до неподвижной точки расширения. Результат — конфлюэнтная \mathcal{T} .



Проверка алг. типа данных с помощью TRS

- Анализ всех критических пар конечен.
- Если удалось получить конфлюэнтную систему пополнением, тогда легко проверить, корректны ли выполняющиеся в ней эквивалентности, построив нормальные формы всех термов.
- Если нашлась критическая пара вида $\langle x, t \rangle$, тогда спецификация противоречива.



Бесконечная пополняемость

Рассмотрим trs с двумя правилами:

$$u(x) + u(y) \rightarrow u(x + y), \quad (x + y) + z \rightarrow x + (y + z).$$

Для доказательства завершаемости в ней положим

$$x +^A y = (y)^x, \quad u^A(x) = x^2.$$



Бесконечная пополняемость

Рассмотрим trs с двумя правилами:

$$u(x) + u(y) \rightarrow u(x + y), \quad (x + y) + z \rightarrow x + (y + z).$$

Для доказательства завершаемости в ней положим $x +^A y = (y)^x$, $u^A(x) = x^2$.

Первая критическая пара: $\langle u(x) + (u(y) + z), u(x + y) + z \rangle$.

Пополним trs правилом $u(x + y) + z \rightarrow u(x) + (u(y) + z)$ и проверим, сохранится ли монотонность в ФуМА.



Бесконечная пополняемость

Рассмотрим trs с двумя правилами:

$$u(x) + u(y) \rightarrow u(x + y), \quad (x + y) + z \rightarrow x + (y + z).$$

Для доказательства завершаемости в ней положим $x +^A y = (y)^x$, $u^A(x) = x^2$.

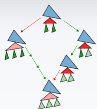
Первая критическая пара: $\langle u(x) + (u(y) + z), u(x + y) + z \rangle$.

Пополним trs правилом $u(x + y) + z \rightarrow u(x) + (u(y) + z)$ и проверим, сохранится ли монотонность в ФуМА.

Каждая новая критическая пара

$\langle u^n(x) + (u^n(y) + z), u^n(x + y) + z \rangle$ будет порождать очередное правило переписывания

$u^n(x + y) + z \rightarrow u^n(x) + (u^n(y) + z)$, убывающее в ФуМА.



Вычисление базисов Грёбнера

Зададим упорядочение \triangleleft на n -ках из \mathbb{N} (степенях переменных в мономе) такое, что:

- $\forall s([0, \dots, 0] \triangleleft s)$;
- $\forall s, t_1, t_2(t_1 \triangleleft t_2 \Rightarrow s + t_1 \triangleleft s + t_2)$.

Инициальный моном $\text{in}_{\triangleleft}(g)$ полинома g — это моном, больший всех других мономов g в смысле \triangleleft .

Выберем мономиальный порядок \triangleleft . Найти базис G идеала I полиномов над полем такой, что инициальный идеал $\text{in}_{\triangleleft}(I) = \langle \text{in}_{\triangleleft}(g) \mid g \in G \rangle$ (порождается инициальными мономами полиномов из G).

Критерий Бюхбергера: G — базис Грёбнера, если все $r = \frac{\max(\text{in}_{\triangleleft}(g_i), \text{in}_{\triangleleft}(g_j))}{\text{in}_{\triangleleft}(g_i)} * g_i - \frac{\max(\text{in}_{\triangleleft}(g_i), \text{in}_{\triangleleft}(g_j))}{\text{in}_{\triangleleft}(g_j)} * g_j$ имеют разложение в G . Операция максимума \max — поэлементная.



Алгоритмы Бюхбергера и Кнута–Бендикса

- ❶ Если в F выполнен критерий Бюхбергера \Rightarrow базис построен.
- ❷ Иначе существует критическая пара $\langle g_i, g_j \rangle$, порождающая неразложимый r . Добавляем r в базис и продолжаем.



Алгоритмы Бюхбергера и Кнута–Бендикса

- ❶ Если в F выполнен критерий Бюхбергера \Rightarrow базис построен.
- ❷ Иначе существует критическая пара $\langle g_i, g_j \rangle$, порождающая неразложимый r . Добавляем r в базис и продолжаем.

Конечность вычисления lfp (наименьшей неподвижной точки) гарантируется теоремой Гильберта о конечнопорожденности идеалов.



Алгоритмы Бюхбергера и Кнута–Бендикса

- 1 Если в F выполнен критерий Бюхбергера \Rightarrow базис построен.
- 2 Иначе существует критическая пара $\langle g_i, g_j \rangle$, порождающая неразложимый r . Добавляем r в базис и продолжаем.

Конечность вычисления lfp (наименьшей неподвижной точки) гарантируется теоремой Гильберта о конечнопорожденности идеалов.

Алгоритм Бюхбергера (почти) моделируется алгоритмом пополнения Кнута–Бендикса над алгеброй с правилами переписывания — аксиомами кольца. Для каждого полинома $p \in F$, где $p = \text{in}_{\triangleleft} p + p'$, добавляем правила $\text{in}_{\triangleleft} p \rightarrow p'$ и $\text{in}_{\triangleleft} px \rightarrow p' * x$.



Алгоритмы Бюхбергера и Кнута–Бендикса

- 1 Если в F выполнен критерий Бюхбергера \Rightarrow базис построен.
- 2 Иначе существует критическая пара $\langle g_i, g_j \rangle$, порождающая неразложимый r . Добавляем r в базис и продолжаем.

Конечность вычисления lfp (наименьшей неподвижной точки) гарантируется теоремой Гильберта о конечнопорожденности идеалов.

Алгоритм Бюхбергера (почти) моделируется алгоритмом пополнения Кнута–Бендикса над алгеброй с правилами переписывания — аксиомами кольца. Для каждого полинома $p \in F$, где $p = \text{in}_{\triangleleft} p + p'$, добавляем правила $\text{in}_{\triangleleft} p \rightarrow p'$ и $\text{in}_{\triangleleft} px \rightarrow p' * x$.

Проблема: коммутативность и ассоциативность убивают нётеровость trs и завершаемость пополнения.



Свободные модели

Рассмотрим сигнатуру Σ и множество формул логики первого порядка P над Σ . Алгебра \mathcal{A} называется свободной моделью (loose model) над $\langle \Sigma, P \rangle$, если $\mathcal{A} \models P$.



Свободные модели

Рассмотрим сигнатуру Σ и множество формул логики первого порядка P над Σ . Алгебра \mathcal{A} называется свободной моделью (loose model) над $\langle \Sigma, P \rangle$, если $\mathcal{A} \models P$.

Теорема об изоморфизме

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ — алгебры, ϕ — изоморфизм $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$. Тогда для всякой FO-формулы $P(X)$ и окружения $\alpha(X)$ выполняется эквивалентность $\mathcal{A}, \alpha \models P \Leftrightarrow \mathcal{A}', \phi \circ \alpha \models P$.



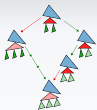
Свободные модели

Рассмотрим сигнатуру Σ и множество формул логики первого порядка P над Σ . Алгебра \mathcal{A} называется свободной моделью (loose model) над $\langle \Sigma, P \rangle$, если $\mathcal{A} \models P$.

Теорема об изоморфизме

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ — алгебры, ϕ — изоморфизм $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$. Тогда для всякой FO-формулы $P(X)$ и окружения $\alpha(X)$ выполняется эквивалентность $\mathcal{A}, \alpha \models P \Leftrightarrow \mathcal{A}', \phi \circ \alpha \models P$.

Невыразимость: $\mathcal{A}, \alpha(x) \models P(x) \Rightarrow \mathcal{A} \models \forall x P(x)$



Свободные модели

Рассмотрим сигнатуру Σ и множество формул логики первого порядка P над Σ . Алгебра \mathcal{A} называется свободной моделью (loose model) над $\langle \Sigma, P \rangle$, если $\mathcal{A} \models P$.

Теорема об изоморфизме

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ — алгебры, ϕ — изоморфизм $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$. Тогда для всякой FO-формулы $P(X)$ и окружения $\alpha(X)$ выполняется эквивалентность $\mathcal{A}, \alpha \models P \Leftrightarrow \mathcal{A}', \phi \circ \alpha \models P$.

Невыразимость: $\mathcal{A}, \alpha(x) \models P(x) \Rightarrow \mathcal{A} \models \forall x P(x)$

Рассмотрим алгебру над \mathbb{R} с 0 и $+$ (со стандартными аксиомами). Единственные предикаты от одной переменной, выражимые в этой алгебре и не являющиеся общезначимыми — это $x = 0$ и $x \neq 0$.



Выразимость в модели \mathbb{R}

Рассмотрим алгебру \mathcal{R} над \mathbb{R} с константами 0 и 1 и операциями $+$, $*$ (в стандартной аксиоматике).

- Можно ли в \mathcal{R} выразить $>$?
- Пусть ϕ — автоморфизм $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$. Пусть q — рациональное число. Охарактеризовать предикат $P(\phi(q), q)$.
- Охарактеризовать все автоморфизмы \mathcal{R} .



Виды программных семантик

- ❶ Аксиоматическая — логические правила вывода, описывающие пути вычислений. Определяет равенство между программами.



Виды программных семантик

- ❶ Аксиоматическая — логические правила вывода, описывающие пути вычислений. Определяет равенство между программами.
- ❷ Денотационная — алгебраическая модель, определяющая функцию означивания (денотат): $\llbracket P \rrbracket$.
 - Инициальные модели — + рекурсия;
 - Свободные модели — выразимость.



Виды программных семантик

- ❶ Аксиоматическая — логические правила вывода, описывающие пути вычислений. Определяет равенство между программами.
- ❷ Денотационная — алгебраическая модель, определяющая функцию означивания (денотат): $\llbracket P \rrbracket$.
 - Инициальные модели — + рекурсия;
 - Свободные модели — выразимость.
- ❸ Операционная — описание исполнения программ в конкретной модели вычислений.