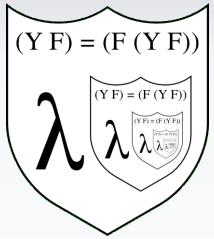
Модели.
Алгебраические типы данных

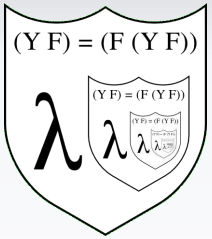
Теория формальных языков

2021 г.



Проектирование структур

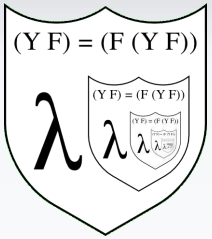
- На прошлом занятии — полиморфные функциональные типы без структур. Как навесить структуры?
- Хорошо спроектированные полиморфные функции действуют семантически одинаково на аргументах разного вида.
- Как описать аналог этого свойства для структур данных?



Сигнатура с сортами

Определение

Алгебра $\mathcal{A}$ — набор носителей (сортов), выделенных элементов и функций первого порядка в сигнатуре данных носителей. На формальном языке,
$\mathcal{A} = \langle \{\mathcal{N}_i\}, \{c_i\}, \{f_i : \mathcal{N}_{i_1} \times \ldots \mathcal{N}_{i_{k_i}} \to \mathcal{N}'_i\} \rangle$.



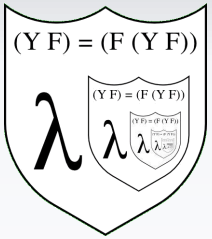
Сигнатура с сортами

Определение

Алгебра $\mathcal{A}$ — набор носителей (сортов), выделенных элементов и функций первого порядка в сигнатуре данных носителей. На формальном языке,
$\mathcal{A} = \langle \{\mathcal{N}_i\}, \{c_i\}, \{f_i : \mathcal{N}_{i_1} \times \ldots \mathcal{N}_{i_{k_i}} \to \mathcal{N}'_i\} \rangle$.

Иными словами, в алгебре у функций сигнатуры не бестиповые, а оснащены простыми типами.

- $\lambda x.x\ x$ — нет сортов;
- $\lambda x\, y.\mathit{if}\ x\ \mathit{then}\ y * 2\ \mathit{else}\ y$ — есть сорта.



Сигнатура с сортами

Определение

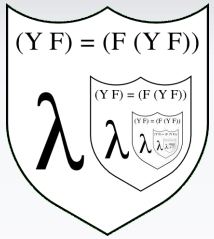
Алгебра $\mathcal{A}$ — набор носителей (сортов), выделенных элементов и функций первого порядка в сигнатуре данных носителей. На формальном языке,
$\mathcal{A} = \langle \{\mathcal{N}_i\}, \{c_i\}, \{f_i : \mathcal{N}_{i_1} \times \ldots \mathcal{N}_{i_{k_i}} \to \mathcal{N}'_i\} \rangle$.

Иными словами, в алгебре у функций сигнатуры не бестиповые, а оснащены простыми типами.

- $\lambda x.x\ x$ — нет сортов;
- $\lambda x\, y.\mathit{if}\ x\ \mathit{then}\ y * 2\ \mathit{else}\ y$ — есть сорта.

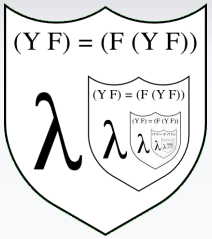
Зачем многосортные алгебры нужна в CS?

- Сигнатура Σ — синтаксис ЯП;
- $\Sigma(X)$ + Γ_X (контекст) — множество термов ЯП.
- Алгебра над Σ — семантика ЯП.



Универсальные алгебры

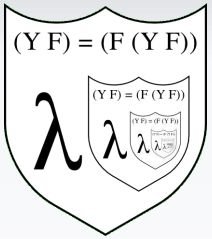
- В CS выделенные значения — функции от нуля аргументов (конструкторы).
- Каждой константе в Σ соответствует ровно один носитель из $\mathcal{A}$;
- Каждому функциональному символу в Σ соответствует отображение с такой же сигнатурой.
- Каждому присвоению сорта (утверждению о типизации) в контексте Γ вида $\chi_i : T_i$ соответствует окружение — отображение из χ_i в множество носителей $\mathcal{A}$.



Интерпретации

Пусть η — окружение. Значение $\mathcal{A}[\![M]\!]\eta$ (читаем: интерпретация M) определяется рекурсивно.

- $\mathcal{A}[\![x]\!]\eta = \eta(x)$
- $\mathcal{A}[\![f(M_1, \ldots\ M_n)]\!]\eta = f^{\mathcal{A}}(\mathcal{A}[\![M_1]\!]\eta, \ldots, \mathcal{A}[\![M_n]\!]\eta)$.

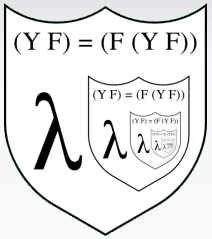


Интерпретации

Пусть η — окружение. Значение $\mathcal{A}[\![M]\!]\eta$ (читаем: интерпретация M) определяется рекурсивно.

- $\mathcal{A}[\![x]\!]\eta = \eta(x)$
- $\mathcal{A}[\![f(M_1, \ldots\ M_n)]\!]\eta = f^{\mathcal{A}}(\mathcal{A}[\![M_1]\!]\eta, \ldots, \mathcal{A}[\![M_n]\!]\eta)$.

- Множество натуральных чисел — интерпретация термов над сигнатурой $\{s(\bullet), z\}$ — единственный одноместный конструктор + константа.
- Множество двоичных деревьев — интерпретация термов над сигнатурой $\{\langle \bullet, \bullet \rangle, e\}$ — единственный двухместный конструктор + константа.
- Свободная алгебра — каждый функциональный символ интерпретируется собой.



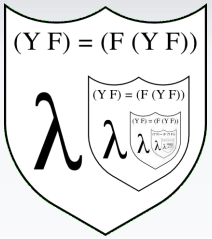
Интерпретации

Пусть η — окружение. Значение $\mathcal{A}[\![M]\!]\eta$ (читаем: интерпретация M) определяется рекурсивно.

- $\mathcal{A}[\![x]\!]\eta = \eta(x)$
- $\mathcal{A}[\![f(M_1, \ldots\ M_n)]\!]\eta = f^{\mathcal{A}}(\mathcal{A}[\![M_1]\!]\eta, \ldots, \mathcal{A}[\![M_n]\!]\eta)$.

- Множество натуральных чисел — интерпретация термов над сигнатурой $\{s(\bullet), z\}$ — единственный одноместный конструктор + константа.
- Множество двоичных деревьев — интерпретация термов над сигнатурой $\{\langle \bullet, \bullet \rangle, e\}$ — единственный двухместный конструктор + константа.
- Свободная алгебра — каждый функциональный символ интерпретируется собой.

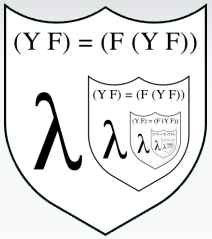
Лемма о подстановке: $[\![M[x := N]]\!]\eta = [\![M]\!](\eta[x := [\![N]\!]\eta])$.



Модели

Выполнимость уравнения в окружении η принято обозначать $\mathcal{A}, \eta \models \mathrm{M} = \mathrm{N}[\Gamma]$, где η согласовано с Γ (т.е. значения переменных имеют правильные типы).

- Выполнимость в модели: $\mathcal{A} \models \mathrm{M} = \mathrm{N}[\Gamma]$ (для любого окружения).
- Общезначимость: $\models \mathrm{M} = \mathrm{N}[\Gamma]$ (для любого окружения в любой алгебре).



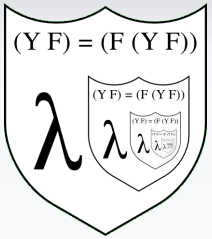
Модели

Выполнимость уравнения в окружении η принято обозначать $\mathcal{A}, \eta \models M = N[\Gamma]$, где η согласовано с Γ (т.е. значения переменных имеют правильные типы).

- Выполнимость в модели: $\mathcal{A} \models M = N[\Gamma]$ (для любого окружения).
- Общезначимость: $\models M = N[\Gamma]$ (для любого окружения в любой алгебре).

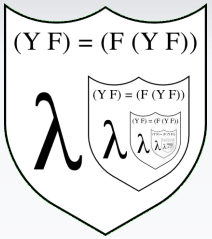
Бесконечность HOF

Пусть в алгебре $\mathcal{A}$ есть одна бинарная операция $\circ$ и выделенное значение a такое, что $\mathcal{A} \models (a \circ x) \circ y = x$. Тогда если носитель $\mathcal{A}$ содержит больше одного элемента, то он бесконечен.



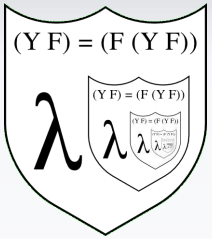
Выводимость и выполнимость

- Навесим на свободную алгебру над Σ множество уравнений $\mathbb{E}$ в сигнатуре Σ и объявим полученную структуру алгебраической спецификацией.
- Скажем, что из $\mathbb{E}$ семантически следует $\mathrm{M} = \mathrm{N}$, если во всех алгебрах, удовлетворяющих $\mathbb{E}$, выполняется $\mathrm{M} = \mathrm{N}$. Пишем: $\mathbb{E} \models \mathrm{M} = \mathrm{N}$.
- Допустимые правила вывода: симметричность и транзитивность равенства, введение свободной переменной в контекст и правило подстановки.
- (теоремы корректности и полноты)
  $\mathbb{E} \vdash \mathrm{M} = \mathrm{N} \Leftrightarrow \mathbb{E} \models \mathrm{M} = \mathrm{N}$.



Пример

Общерекурсивных полиморфных функций с типом $\mathrm{P} = ((\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow \mathrm{A}) \Rightarrow \mathrm{A}$ (P — формула Пирса) не существует.

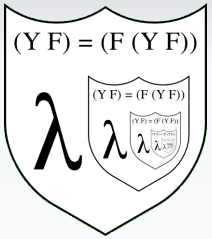


Пример

Общерекурсивных полиморфных функций с типом $P = ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (P — формула Пирса) не существует.

Рассмотрим следующую конечнозначную модель и убедимся, что формула Пирса в ней не общезначима.

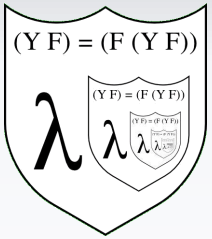
A	B	$A \Rightarrow B$	P
0	0	1	...
0	n	n	...
0	1	1	...
n	0	0	...
n	n	n	n
n	1	1	...
1	0	0	...
1	n	n	...
1	1	1	...



Теорема Линденбаума–Тарского

Если алгебраическая спецификация имеет модель, тогда она имеет конечную модель.

Основа современных методов анализа программ — Satisfiability Modulo Theories (поиск конечной контрмодели).

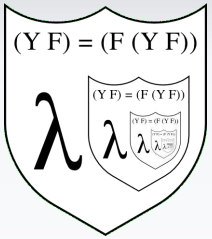


Универсум Эрбрана

Определение

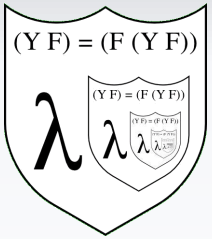
Набор всех правильно типизированных термов в сигнатуре $\langle \{f_i\}, \{c_j\} \rangle$ — универсум Эрбрана.

Интуитивно задаёт наиболее общую модель для системы вывода, но не учитывает эквациональность, т.е. возможность равенства термов.



Инициальные алгебры

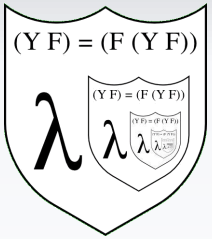
Пусть $\mathcal{C}$ — множество алгебр над сигнатурой Σ (Σ-алгебр) и $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$. $\mathcal{A}$ называется инициальной, если для любой $\mathcal{A}' \in \mathcal{C}$ существует единственный гомоморфизм из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$.



Инициальные алгебры

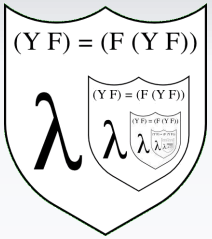
Пусть $\mathcal{C}$ — множество алгебр над сигнатурой Σ (Σ-алгебр) и $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$. $\mathcal{A}$ называется инициальной, если для любой $\mathcal{A}' \in \mathcal{C}$ существует единственный гомоморфизм из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$.

- «Никакого мусора» — в $\mathcal{A}$ должно быть так мало различных элементов, насколько возможно.
- «Никакой путаницы» — в $\mathcal{A}$ элементы должны быть равны только если без этого равенства не обойтись.



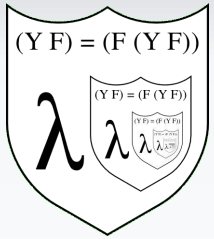
Примеры

- Рассмотрим односортную сигнатуру $\Sigma_0 = \langle 0, S(x) = x \to x + 1 \rangle$ над типом натуральных чисел. Тогда свободная алгебра с константой 0 и единственным унарным конструктором $S(\bullet)$ является инициальной для алгебр над Σ_0. Если добавить в сигнатуру сложение и аксиомы $x + 0 = x$, $x + S(y) = S(x + y)$, тогда инициальная алгебра станет стандартной арифметикой Пресбургера.



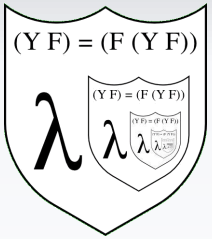
Примеры

- Рассмотрим односортную сигнатуру $\Sigma_0 = \langle 0, S(x) = x \to x + 1 \rangle$ над типом натуральных чисел. Тогда свободная алгебра с константой 0 и единственным унарным конструктором $S(\bullet)$ является инициальной для алгебр над Σ_0. Если добавить в сигнатуру сложение и аксиомы $x + 0 = x$, $x + S(y) = S(x + y)$, тогда инициальная алгебра станет стандартной арифметикой Пресбургера.
- Алгебра с добавлением ω для наименьшего числа, большего всех натуральных, инициальной не является. Аналогично $\mathbb{Z}_k$.



Примеры

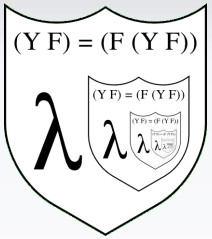
- Рассмотрим односортную сигнатуру $\Sigma_0 = \langle 0, S(x) = x \to x + 1 \rangle$ над типом натуральных чисел. Тогда свободная алгебра с константой 0 и единственным унарным конструктором $S(\bullet)$ является инициальной для алгебр над Σ_0. Если добавить в сигнатуру сложение и аксиомы $x + 0 = x$, $x + S(y) = S(x + y)$, тогда инициальная алгебра станет стандартной арифметикой Пресбургера.
- Алгебра с добавлением ω для наименьшего числа, большего всех натуральных, инициальной не является. Аналогично $\mathbb{Z}_k$.
- Выполнимость в инициальной $\mathcal{A}$ неидентична доказуемости. См. коммутативность сложения: $\mathcal{A} \models M + N = N + M$ в инициальной модели, но это не так для ординальной модели.



Лемма Ламбека

Определение

Скажем, что X — это lfp (наименьшая неподвижная точка) для f над A, если
$(\forall n f^n(A) \in X)\ \&\ \forall Y(\forall n(f^n(A) \in Y) \Rightarrow X \subseteq Y)$.



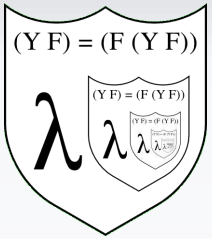
Лемма Ламбека

Определение

Скажем, что X — это lfp (наименьшая неподвижная точка) для f над A, если
$(\forall n f^n(A) \in X)\ \&\ \forall Y(\forall n(f^n(A) \in Y) \Rightarrow X \subseteq Y)$.

Лемма Ламбека, полуформально

Пусть F — это сигнатура (здесь не Σ по терминологическим причинам) вместе с функцией обхода, V — множество выделенных значений. Тогда $\mathrm{lfp}(F\ V)$ — инициальная алгебра над F и V.



Лемма Ламбека

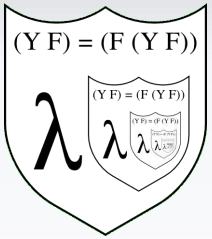
Определение

Скажем, что X — это lfp (наименьшая неподвижная точка) для f над A, если
$(\forall n f^n(A) \in X)\ \&\ \forall Y(\forall n(f^n(A) \in Y) \Rightarrow X \subseteq Y)$.

Лемма Ламбека, полуформально

Пусть F — это сигнатура (здесь не Σ по терминологическим причинам) вместе с функцией обхода, V — множество выделенных значений. Тогда $\mathrm{lfp}(F\ V)$ — инициальная алгебра над F и V.

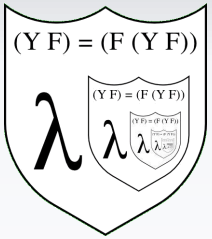
Проще говоря, инициальная алгебра задаётся индукцией по построению термов.



Пример: множества

сорта:	set, nat, bool
уравнения:	0+0=0, 0+1=1, ..., k+n=m
	eq? x x = true
	eq? 0 1 = false, ..., eq? n m = false
	ismem? x empty = false
	ismem? x (ins y s) = if (eq? x y) then true
	else ismem? x s
	union empty s = s
	union (ins y s) s' = ins y (union s s')

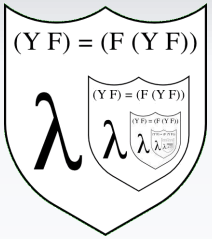
Выполняется ли уравнение union s s' = union s' s в инициальной модели?



Пример: множества

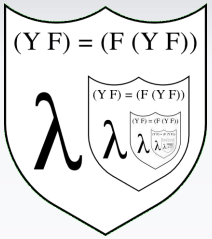
сорта:	set, nat, bool
уравнения:	0+0=0, 0+1=1, ..., k+n=m
	eq? x x = true
	eq? 0 1 = false, ..., eq? n m = false
	ismem? x empty = false
	ismem? x (ins y s) = if (eq? x y) then true
	else ismem? x s
	union empty s = s
	union (ins y s) s' = ins y (union s s')

Выполняется ли уравнение union s s' = union s' s в инициальной модели? Ответ: нет, инициальная модель — модель списков с навязанным порядком обхода слева направо.



Спецификация списков

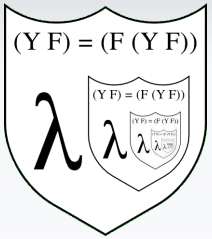
сорта:	list, atom, bool
уравнения:	car(cons x l) = x
	cdr(cons x l) = l
	isempty? nil = true
	isempty? (cons x l) = false
	cond_a true x y = x
	cond_a false x y = y
	cond_b true v1 v2 = v1
	cond_b false v1 v2 = v2
	cond_l true l1 l2 = l1
	cond_l false l1 l2 = l2



Спецификация списков

сорта:	list, atom, bool
уравнения:	car(cons x l) = x
	cdr(cons x l) = l
	isempty? nil = true
	isempty? (cons x l) = false
	cond_a true x y = x
	cond_a false x y = y
	cond_b true v1 v2 = v1
	cond_b false v1 v2 = v2
	cond_l true l1 l2 = l1
	cond_l false l1 l2 = l2

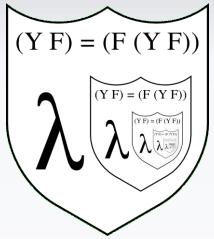
Выполняется ли уравнение (cons (car l)(cdr l)) = l в инициальной модели?



Спецификация списков

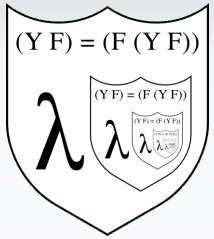
сорта:	list, atom, bool
уравнения:	car(cons x l) = x
	cdr(cons x l) = l
	isempty? nil = true
	isempty? (cons x l) = false
	cond_a true x y = x
	cond_a false x y = y
	cond_b true v1 v2 = v1
	cond_b false v1 v2 = v2
	cond_l true l1 l2 = l1
	cond_l false l1 l2 = l2

Выполняется ли уравнение (cons (car l)(cdr l)) = l в инициальной модели? Ответ: нет, проблема с термами вида (cdr nil) и (car nil).



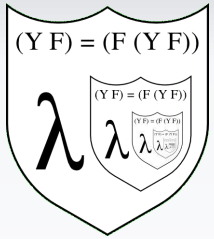
Работа над ошибками

- Ничего не делаем. Пусть (car nil) и (cdr nil) будут новыми термами в инициальной алгебре. К чему это приведёт? (спойлер: к добавлению бесконечного множества ошибочных термов разных сортов)



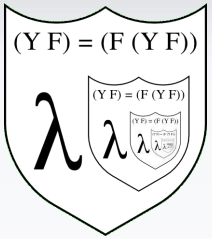
Работа над ошибками

- Ничего не делаем. Пусть (car nil) и (cdr nil) будут новыми термами в инициальной алгебре. К чему это приведёт? (спойлер: к добавлению бесконечного множества ошибочных термов разных сортов)
- Null-неопределённости. Положим, что (car nil) произвольно, (cdr nil)=nil. Уничтожается индуктивное равенство между списками.



Работа над ошибками

- Ничего не делаем. Пусть (car nil) и (cdr nil) будут новыми термами в инициальной алгебре. К чему это приведёт? (спойлер: к добавлению бесконечного множества ошибочных термов разных сортов)
- Null-неопределённости. Положим, что (car nil) произвольно, (cdr nil)=nil. Уничтожается индуктивное равенство между списками.
- Введение терма-ошибки.



Наивная обработка ошибок

уравнения:

car nil = error_a

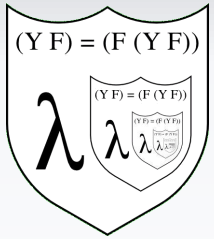
cdr nil = error_l

cons error_a l = error_l

cons x error_l = error_l

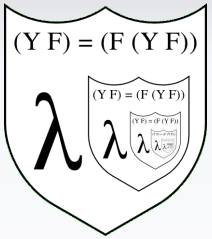
car error_l = error_a

cdr error_l = error_l



Наивная обработка ошибок

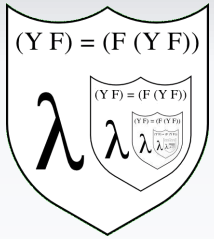
уравнения:	car nil = error_a
	cdr nil = error_l
	cons error_a l = error_l
	cons x error_l = error_l
	car error_l = error_a
	cdr error_l = error_l
	isempty? error_l = error_b
	cond_a error_b x y = error_a
	cond_b error_b x y = error_b
	cond_l error_b x y = error_l



Наивная обработка ошибок

уравнения:	car nil = error_a
	cdr nil = error_l
	cons error_a l = error_l
	cons x error_l = error_l
	car error_l = error_a
	cdr error_l = error_l
	isempty? error_l = error_b
	cond_a error_b x y = error_a
	cond_b error_b x y = error_b
	cond_l error_b x y = error_l

Проблема с аксиомой car (cons x l) = x — из-за неё можно доказать, что в данной модели любой терм равен ошибке.



Краткое резюме

- Аксиоматический способ описания семантики двойственен алгебраическому.
- Алгебраические типы данных задаются инициальными алгебрами, т.е. рекурсивный обход по определению существует.
- Non-exhaustive patterns (неисчерпывающие правила переписывания для термов заданного сорта) — указание на возможную ошибку в описании инициальной алгебры.