A. Автоматы

1. Пусть w — слово в $\{a, b\}$ длины 3. Сколько состояний может содержать минимальный ДКА, распознающий слова, начинающиеся и кончающиеся на w? (1 балл)

2. Построить минимальный НКА, распознающий слова над $\{a, b\}$ такие, что они содержат равное количество подслов ab^2 и ba. Минимальность обосновать (1 балл)

3. Построить минимальный НКА, распознающий слова над $\{0, 1, 2\}$, соответствующие чётным троичным числам без ведущих нулей и без последовательности из двух подряд идущих нулей. Минимальность обосновать (1 балл)

4. Построить минимальный НКА, распознающий подслова, содержащие ab^2 и a^3, но не кончающиеся на b^2. Минимальность обосновать (1 балл)

5. Построить регулярное выражение для языка слов в $\{a, b\}$ таких, что они содержат равное количество подслов a^3 и ba (1 балл)

6. Пусть w — слово в $\{a, b\}$. Верно ли, что минимальный НКА, распознающий слова, кончающиеся на w, совпадает с минимальным ДКА? Если нет, то на сколько может различаться число состояний в них? (1 балл)

7. Пусть w — слово в $\{a, b\}$ длины n. Сколько состояний может содержать минимальный НКА, распознающий слова, начинающиеся и кончающиеся на w? (2 балла)

8. Существует ли язык $\mathscr{L}$ слов над $\{0, 1\}$, который распознаётся ДКА, имеющим состояние-ловушку, и такое натуральное число n (возможно, зависящее от $\mathscr{L}$), что в языке-дополнении $\mathscr{L}$ нет ни одного слова, сумма единиц и нулей в котором кратна n? (2 балла)

9. Является ли регулярным подмножество языка неправильных скобочных последовательностей над $\{(,)\}$, такое что одной парной перестановки (т.е. смены двух символов местами) было достаточно, чтобы получилась правильная скобочную последовательность, и

при этом замена всех (на), а (на) порождала бы реверс слова до замены? (2 балла)

10. Найти оптимальную последовательность устранения состояний при переводе автомата Глушкова для $a((ab|ba)a^*)^*$ в регулярку (2 балла)

11. Построить регулярное выражение, слияние по бисимуляции в котором состояний в автомате Глушкова порождает минимальный ДКА, причём сам автомат Глушкова не является минимальным (2 балла).

12. Замкнуто ли множество регулярных языков относительно суффиксной фильтрации? А именно, если L_1, L_2 — регулярные языки, что можно сказать про язык $\big\{w \mid \exists v(wv \in L_1 \ \&\ v \in L_2)\big\}$? (3 балла)

13. Замкнуто ли множество регулярных языков относительно перестановки суффиксов и префиксов относительно языка инфиксов? А именно, если L_1, L_2 — регулярные, будет ли регулярным язык $\big\{xyz \mid zyx \in L_1 \ \&\ y \in Ł_2\big\}$? (3 балла)

14. Построить регулярку с бесконечным языком, для которой существует несколько разных минимальных НКА, ни один из которых не является ДКА. Минимальность обосновать. (3 балла)

15. Пусть w — некоторое слово длины n в алфавите $\{a, b\}$; $\mathscr{A}(w)$ — минимальный ДКА, распознающий, встречается ли это слово в строке. Предложить схему устранения состояний для $\mathscr{A}(w)$, приводящую к порождению максимально короткого регулярного выражения (3 балла)

16. Отношение $v \trianglelefteq w$ — это отношение подпоследовательности на строках. Язык L называется замкнутым вниз, если $\forall w, v(w \in Ł \ \&\ v \trianglelefteq w \Rightarrow v \in L)$. Показать, что все замкнутые вниз языки регулярны (4 балла).

17. Распространим определение производной на пересечения: скажем, что $\delta_a(r_1 \cap r_2) = \delta_a(r_1) \cap \delta_a(r_2)$. Удастся ли перенести конструкцию автомата Брзозовски на регулярные выражения, дополнительно содержащие операцию $\cap$, и останется ли она при этом конечной? (4 балла)

18. Проверить следующее утверждение. Для всякого регулярного языка L можно подобрать такое натуральное число k, что $\forall v\big(|v| > k \;\&\; v^n \in L \Rightarrow \exists m, v_1, w(v^n = v_1^m w \;\&\; |w| < k \;\&\; |v_1| < k)\big)$ (5 баллов)

B. Автоматы-2

1. Проверить, является ли регулярным язык $\{w_1 w_2 \mid |w_1| > 0 \ \& \ \exists v(w_1 = vv^R)\}$ (1 балл).

2. Проверить, является ли регулярным язык $\{w_1 w_2 w_1 \mid |w_1| > 0 \ \&$ w_2 не начинается с $w_1\}$ (1 балл).

3. Проверить, является ли регулярным язык грамматики (1 балл).

$$
\begin{aligned}
S &\to SS \\
S &\to abS \\
S &\to b
\end{aligned}
$$

4. Известно, что пересечение языка $\mathscr{L}_1 = \{ww\}$ с регулярным языком $\mathscr{L}_2$ является конечным регулярным языком. Пусть $\mathscr{L}_2$ описывается регуляркой алфавитной длины n. Сколько языков $\mathscr{L}_2$ существует для $n = 3$? (1 балл).

5. Можно ли построить регулярное выражение с отрицанием, но без итераций, для выражения $(a(ba)^*)^*$? (1 балл)

6. Можно ли построить регулярное выражение с отрицанием, но без итераций, для выражения $(aa|bb)^*$? (1 балл)

7. Построить регулярное выражение или автомат, распознающий вектора двоичных чисел $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, являющиеся решениями уравнения $2 \cdot x = 3 \cdot y + 1$. Ведущие нули возможны, чтение со старшего разряда к младшему (2 балла).

8. Проверить, является ли регулярным язык грамматики (2 балла).

$$
\begin{aligned}
S &\to SaaS \\
S &\to SbS \\
S &\to b \\
S &\to aab
\end{aligned}
$$

9. Посредством леммы о накачке проверить, является ли регулярным язык $\{a^{n^2} b^{n^2}\} \bigcup \{a^n b^m \mid n \neq m\}$ (2 балла).

10. Можно ли построить регулярное выражение с отрицанием, но без итераций, для выражения $(a(ba)^*|bc^*)^*$? (2 балла)

11. Можно ли построить регулярное выражение с отрицанием, но без итераций, для выражения $((aa)^*(ab|bc)ab^*)^*$? (2 балла)

12. Существует ли такое регулярное выражение, что число производных Брзозовски у него бесконечно, если не применять к ним правило идемпотентности (и применять правила ассоциативности и коммутативности)? (2 балла)

13. Известно, что пересечение языка $\mathscr{L}_1 = \left\{w \,\middle|\, |w|_a = |w|_b\right\}$ с регулярным языком $\mathscr{L}_2$ является бесконечным регулярным языком. Пусть $\mathscr{L}_2$ описывается регуляркой, не содержащей альтернатив, алфавитной длины n и звёдной высоты, равной 1. Сколько языков $\mathscr{L}_2$ существует для заданного n? (3 балла).

14. Известно, что пересечение языка $\mathscr{L}_1 = \left\{w \,\middle|\, w = w^R\right\}$ с регулярным языком $\mathscr{L}_2$ является бесконечным регулярным языком. Пусть $\mathscr{L}_2$ описывается регуляркой, не содержащей альтернатив, алфавитной длины n и звёдной высоты, равной 1. Сколько языков $\mathscr{L}_2$ существует для заданного n? (3 балла).

15. Существуют ли бесконечные регулярные языки, автомат Антимирова для которых совпадает с автоматом Глушкова, причём и тот, и другой не детерминированы? (3 балла)

16. Посредством леммы о накачке проверить, является ли регулярным язык $\left\{a^{\frac{n}{\log n}}\right\}$ (3 балла).

17. Для каких слов ξ_1, ξ_2 язык $\{|w|_{\xi_1} = |w|_{\xi_2} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ регулярен? (4 балла)

18. Для каких слов $\xi_{1,i}$, $\xi_{2,i}$ $(i = 1..3)$ язык $\{\bigwedge_{i \leq 3} |w|_{\xi_{1,i}} = |w|_{\xi_{2,i}} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ регулярен? (5 баллов)

C. Автоматы-3

1. Построить синтаксический моноид и определить длину накачки для регулярного языка слов, которые либо содержат подряд две идущие одинаковые буквы, либо содержат подслово abc (1 балл).

2. Построить синтаксический моноид, распознающий язык слов над $\{a, b, c\}$ таких, что в них либо встречается хотя бы две буквы c, либо встречается хотя бы две одинаковые буквы подряд (1 балл).

3. Построить таблицу классов эквивалентности по Майхиллу–Нероуду для регулярного выражения $(c|\varepsilon)(ac|cb|ab)^*(ba|c)(a|b|c)$ (1 балл).

4. Построить регулярку, которая описывает тот же язык, что и следующая префиксная грамматика:

   $$aa \to aba \qquad ab \to aab \qquad aa \to \varepsilon$$

   Начальное слово: $\{ab\}$ (1 балл).

5. Для каких LR(0)-регулярных языков их минимальный ДКА обязан содержать не меньше двух конечных состояний? (1 балл)

6. Построить префиксную грамматику, распознающую тот язык слов, начинающихся и заканчивающихся одной и той же буквой. Алфавит $\{a, b, c\}$ (1 балл).

7. Построить синтаксический моноид и определить длину накачки для регулярного выражения, распознающего правильно записанные регулярки без скобок, вложенных более чем дважды, и пустых слов под альтернативами или итерациями, над алфавитом $\{a, b\}$ (2 балла).

8. Построить префиксную грамматику для регулярных выражений без скобок, вложенных более чем дважды, и пустых слов под альтернативами или итерациями, над алфавитом $\{a, b\}$ (2 балла).

9. Построить регулярку, которая описывает тот же язык, что и следующая префиксная грамматика:

$$ab \to bab \qquad bb \to aab \qquad ba \to ab \qquad a \to b$$

Начальные слова: $\{aa, bbb\}$ (2 балла).

10. Верно ли, что правила переписывания синтаксического моноида являются точным подмножеством правил переписывания в префиксной грамматике, описывающей его язык? (2 балла)

11. Стандартный алгоритм устранения ε-переходов (не через замыкания) строит все транзитные переходы, являющиеся композицией ε-путей и перехода с меткой по символу алфавита. После чего ε-переходы стираются. Сколько максимум (от числа исходных состояний автомата) при этом может получиться недостижимых вершин? (2 балла)

12. Построить префиксную грамматику, описывающую тот же язык, что и регулярка $((ba|bb)^*aa)^*(ba|aab)^*$. Обосновать минимальность длины самого длинного правила в этой ПГ (3 балла).

13. У конечных языков, обладающих префикс-свойством, таблица классов эквивалентности по Майхиллу–Нероуду очень похожа на единичную матрицу (если удалить класс эквивалентности ловушки). Верно ли, что если язык бесконечен или не обладает префикс-свойством, то это свойство таблицы уже не будет выполняться? (3 балла)

14. Могут ли в префиксной грамматике для LR(0)-регулярного языка одновременно встречаться правила вида $w \to v_1v_2$ и $w \to v_1$? (3 балла)

15. проф. Сергей Дмитриевич разрабатывает алгоритм, который строит 1-однозначное регулярное выражение по ДКА. Он подозревает, что существуют такие регулярки, автомат Глушкова для которых детерминирован (т.е. 1-однозначные), но методом исключения состояний из этого автомата всегда получается 1-недетерминированная регулярка, какой бы порядок исключения состояний мы ни выбрали. Проверьте гипотезу профессора (3 балла)

16. В определении префиксной грамматики множество начальных слов должно быть конечным. Изменится ли выразительная сила префиксных грамматик, если разрешить множеству начальных слов быть регулярным? (4 балла)

C. CFG

1. Сколько максимум деревьев разбора существует для правильных скобочных последовательностей длины n в грамматике (1 балл).

   $S \to SS$
   $S \to (S)$
   $S \to ()$

2. Выяснить, какой язык описывает данная грамматика (представить описание языка) (1 балл)

   $S \to BS \mid A \qquad A \to AcA \mid a \qquad B \to SB \mid a$

3. Выяснить, какой язык описывает данная грамматика (представить описание языка) (1 балл)

   $S \to SS \mid A \qquad A \to ASb \mid ab$

4. Исследовать на КС-свойство язык $\left\{a^m b^n \mid m \geq \sqrt{n} \vee n > m^2\right\}$ (1 балл).

5. Исследовать язык $\{a^{\sqrt{n}} b^{n+3}\}$ на контекстную свободу методом леммы о накачке (1 балл).

6. Исследовать язык $\{a^i b^j a^k b^m \mid$ либо i и k, либо j и m имеют общего делителя$\}$ на контекстную свободу (2 балла).

7. Построить коммутативный образ грамматики — т.е. регулярное выражение, порождающее слова с таким же соотношением букв, что и слова грамматики (2 балла).

   $S \to AbBc \mid bc \qquad A \to bAcA \mid b \qquad B \to bBcB \mid c$

8. Проверить следующую формулировку леммы о накачке: если L контекстно-свободен, то существует такое натуральное число p, что для любого слова w и любого достаточно длинного суффикса w' этого слова (т.е. $w = vw'$, $|w'| > f(p)$) можно найти разбиение $w' = z_1 y_1 x_1$, $v = x_2 y_2 z_2$ такое, что $|y_1| + |y + 2| > 0$ & $|y_1| + |y_2| \leq p$, что $x_2 y_2^i z_2 z_1 y_1^i x_1 \in L$ для всех i (2 балла).

9. Исследовать на КС-свойство язык $\left\{w_1 a w_2 \mid w_i \in \{a,b\}^* \;\&\; w_1 \neq w_2 \;\&\; |w_1|_a = |w_2|_a\right\}$ (2 балла).

10. Построить регулярную аппроксимацию (нетривиальный регулярный язык, включающий в себя язык) языка грамматики (2 балла):

$$S \to SaSb \,|\, aSAa \,|\, aba \qquad A \to SA \,|\, bb$$

11. Исследовать на КС-свойство язык слов из дополнения к языку правильных скобочных последовательностей над (,), с инфиксами, являющимися правильными скобочными последовательностями длины не меньше 6 (2 балла).

12. Проанализировать язык на КС-свойство $\left\{a^i b^j \mid i > j \;\&\; i < 2 \cdot j\right\}$ (2 балла).

13. Исследовать на КС-свойство язык $\{a^n b^m c^k \mid gcd(n, m) < k\}$ (3 балла).

14. Построить коммутативный образ грамматики (3 балла):

$$S \to SaSb \,|\, aA \qquad A \to AA \,|\,|\, AaBaA \,|\, Ba \qquad B \to \varepsilon \,|\, bAbS$$

15. Исследовать на КС-свойство язык $\{a^n b^m c^k \mid n \neq m \;\&\; m \neq k \;\&\; n \neq k\}$ (3 балла).

16. Исследовать на КС-свойство язык слов над $\{a, b\}$ таких, что их циклической перестановкой (любой, не обязательно только сдвигом) можно получить палиндром (4 балла).

17. Исследовать на КС-свойство язык $\{u \mid u \in \{a, b\}^* \;\&\; \forall w (u \neq www)\}$ (4 балла).

18. Студент Сара Глубокая пытается установить КС-свойство языка слов, представляющих собой дополнение к языку конкатенации двух палиндромов, причём пустое слово тоже считается палиндромом. Помогите Саре решить эту задачу (4 балла).

19. Исследовать на КС-свойство язык $\{a^n b^m \mid n = k^2 \vee n \neq m\}$ (5 баллов).

D. CFG-2

1. Верно ли, что если алфавиты языков $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ совпадают, и при этом $\mathscr{L}_1$ недетерминированный, то $\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2$ тоже недетерминированный? (1 балл).

2. Проанализировать язык на детерминированность: $\{wa^n w^R b^n \mid w \in ba^*\}$ (1 балл).

3. Проанализировать язык на детерминированность: $\{w_1 a^n w_2 b^n \mid n > 0 \;\&\; |w_1|_{ab} = 0 \;\&\; |w_2|_{ba} = |w_2|_{ab} > 0\}$ (1 балл).

4. Верно ли, что если алфавиты языков $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ не совпадают, и при этом $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ — LL(k), то $\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2$ — LL(k)? (1 балл).

5. Верно ли, что если алфавиты языков $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ не пересекаются, и при этом $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ — LL(k), то $\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2\mathscr{L}_1$ — LL(k)? (1 балл).

6. Верно ли, что если $\mathscr{L}$ — недетерминированный КС-язык, то язык суффиксов слов из L — тоже недетерминированный? (2 балла)

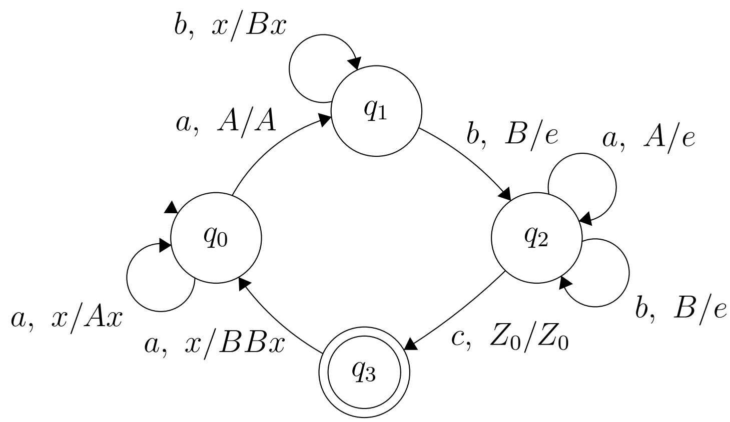
7. Верно ли, что если алфавиты языков $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ не пересекаются, и при этом $\mathscr{L}_2$ — LR(0), а $\mathscr{L}_1$ детерминированный, то $\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2$ — LR(0)? Исправить, если неверно, усилить, если верно (2 балла).

8. Разрешим в PDA переходы, не задействующие стек. А именно, пусть переходы описываются четвёрками $\langle q_i, \varepsilon | a, (\varepsilon | A)/\Phi, q_j \rangle$. Будут ли такие DPDA с допуском по пустому стеку эквивалентны стандартным DPDA с допуском по пустому стеку? (2 балла)

9. Построить грамматику-пересечение языка грамматики $S \to SaSbS \mid Sb \mid \varepsilon$ с регулярным языком $((aba)^* bb)^*$ (2 балла).

10. Всякий КС-язык является гомоморфным образом пересечения языка правильных скобочных последовательностей с регулярным языком. Построить соответствующие регулярный язык и гомоморфизм для языка $\{a^n b^m \mid n \neq m\}$ (2 балла).

11. Построить КС-грамматику для языка следующего PDA (2 балла):

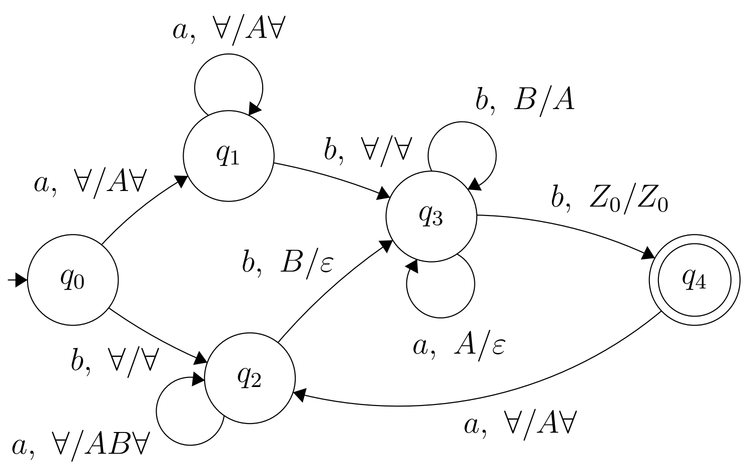


12. Проверить, задаёт ли данная грамматика LL(1)-язык (3 балла):

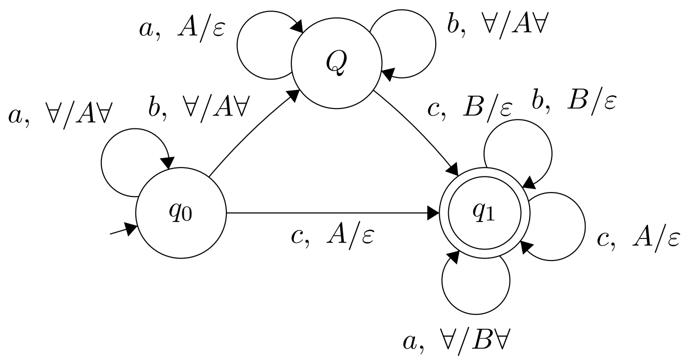
$$S \to cScS \,|\, ab \,|\, \varepsilon$$

13. Является ли контекстно-свободным язык всех логических формул со связками $\neg$, $\Rightarrow$ над переменными A, B таких, что они являются отрицаниями какой-либо формулы, состоящей только из $\Rightarrow$? (3 балла)

14. Построить КС-грамматику для языка следующего PDA (3 балла):



15. Назовём состояние q в PDA семантической ловушкой, если из него есть пути в конечные состояния, но при работе PDA в действительности по этим путям никогда нельзя пройти. Например, в PDA ниже семантической ловушкой является Q:



Существует ли алгоритм выявления семантических ловушек в PDA? (3 балла)

16. Рассмотрим серию языков $\left\{\gamma_1^i\gamma_2^j\gamma_3^k \;\middle|\; i,j,k > 0 \;\&\; (P_1(i,j,k) \vee P_2(i,j,k))\right\}$. P_t — линейные функции от своих аргументов, т.е. $P_t = c_{1,t}\cdot i + c_{2,t}\cdot j + c_{3,t}\cdot k = d_t$, где c_{t_1,t_2} и d_t — целые (возможно, неположительные). В каких случаях языки этой серии будут недетерминированными? (4 балла)

17. Существует ли такое описание языка, использующее только кванторы, логические операции, переменные типа буква, слово и натуральное число, операцию возведения слова в степень (n-кратную конкатенацию), а также предикат равенства, что над однобуквенным алфавитом это описание задаёт регулярный язык, над двухбувенным — контекстно-свободный, над трёхбуквенным — язык, не являющийся контекстно-свободным? (4 балла)

18. Является ли контекстно-свободным языком язык L контекстно-свободных LR(0)-грамматик над нетерминалами $S, A_1, \ldots, A_n$ и терминалами a, b? В алфавите L, кроме заданных заранее S, A_1,…, A_n, a, b, также есть символы $\to$ и ; (для отделения правил друг от друга) (5 баллов)

E. CFG-3

1. Индус построил LR(0)-автомат для языка a^* по следующей грамматике:

   $S \to aS \mid \varepsilon$

   добавив в неё самое изначальное правило $S' \to S\$$. Автомат получился с конфликтом, как и положено автомату для языка, не являющегося LR(0)-языком. Помогите индусу подогнать грамматику так, чтобы LR(0)-автомат для неё не содержал конфликтов, и объясните, что случилось. (1 балл)

2. Если $\mathscr{L}$ — это $LL(1)$-язык, будет ли $\mathscr{L}^R$ (язык реверсированных слов) $LR(0)$-языком? (1 балл)

3. Замкнуты ли недетерминированные КС-языки относительно конкатенации с регулярными языками? Т.е. если $\mathscr{L}$ — недетерминированный КС-язык, $\mathscr{R}$ — регулярный язык, то всегда ли верно, что $\mathscr{L}\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}\mathscr{L}$ — недетерминированные? (1 балл)

4. Если $\mathscr{L}$ — это $LR(0)$-язык, будет ли $\mathscr{L}^R$ LL-языком? (1 балл)

5. Проверить, задаёт ли данная грамматика LR(0)-язык (2 балла):

   $$S \to aAc \,|\, bSb \qquad A \to aS \,|\, bAb \,|\, a$$

6. Специалист по NP-неполным задачам заметил, что язык, который он рассматривает, является объединением двух КС-языков $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$, причём $\mathscr{L}_2$ недетерминированный. Из этого он заключил, что исходный язык также недетерминированный, что было опровергнуто контрпримером: если $\mathscr{L}_2 \subset \mathscr{L}_1$, и $\mathscr{L}_1$ детерминирован, то очевидно $\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$ тоже недетерминированный. Можно ли придумать контрпримеры другого типа к этому утверждению? И можно ли наложить дополнительное условие на языки, чтобы его сузить до частного случая, который верен? (2 балла).

7. Проанализировать контекстно-свободный язык на детерминированность: $\{wa^iw^Rb^j \mid (i > j) \vee |w| > 2\}$ (2 балла)

8. Проанализировать контекстно-свободный язык на детерминированность и построить PDA $\{w_1 v w_2 \mid w_i \in \{a,b\}^* \ \&\ v \in \{a,c\}^* \ \&\ |w_1| = |w_2|\}$ (2 балла).

9. Проанализировать контекстно-свободный язык на детерминированность и построить PDA: $\{vwvw^R \mid |v| = 2 \ \&\ v, w \in \{a,b\}^*\}$ (3 балла).

10. Проанализировать на Real-Time-свойство (3 балла)

$$\{a^{3\cdot i} b^{2\cdot i + 2\cdot j} c^j\}$$

11. Верно ли, что конкатенация языка непустых чётных палиндромов и произвольного языка $\mathscr{L}$ всегда не детерминирована? (3 балла)

12. Сильно регулярные грамматики — такие КС-грамматики, что нетерминалы в них можно разбить на классы так, что нетерминалы из одного класса достижимы друг для друга (т.е. из A_i выводима сентенциальная форма, содержащая B_i, и наоборот), в правой части правила для нетерминала A_i могут стоять только нетерминалы из классов не меньше i, и притом если $A_i \to \xi_1 B_i \xi_2$ (то есть A_i и B_i принадлежат одному классу и A_i ссылается на B_i в правой части), то $\xi_2 = \varepsilon$. Доказать, что сильно регулярные грамматики описывают регулярные языки, и что если выбросить любое из двух условий выше, то регулярность уже гарантировать будет нельзя (3 балла).

13. Изменится ли смысл леммы о накачке для детерминированных КС-языков, если позволить суффиксам общего префикса быть пустыми или начинаться с разных букв? (4 балла)

14. Неуловимый Джо знает способ, как построить регулярную аппроксимацию КС-языка через взаимно рекурсивные нетерминалы, причём такую, что она сохраняет сильно регулярные языки. Проверьте, обладает ли этим свойством аппроксимация Перейры–Райта (через LR(0)-автоматы) (4 балла).

15. Депрессивный Вишенка пытается построить критерий регулярности языка, описываемого линейной КС-грамматикой. Он выдвинул гипотезу, что если язык состоит только из правил $S \to T_1 S T_2$ и $S \to T_3$, где T_1, T_2, T_3 не ссылаются на S, все описываются праволинейными правилами, и при этом $\mathscr{L}(T_1 T_1) \not\subseteq \mathscr{L}(T_1)$ и $\exists w \in$

$\mathscr{L}(T_3)(\forall u \in \mathscr{L}(T_2) \cup \mathscr{L}(T_1) \forall z_1, z_2 (u \neq z_1 w z_2))$. Помогите Депрессивному Вишенке проверить его гипотезу (5 баллов).

F. КЗ-языки

1. Привести пример двух языков, объединение которых является детерминированным КС-языком, а пересечение не является КС-языком. (1 балл)

2. Привести пример MFA, который не является НКА и читает с ленты ничем не ограниченные фрагменты памяти, однако распознаёт регулярный язык (1 балл).

3. Проанализировать на DMFA-свойство (1 балл)

$$\{a^i b a^j b a^k \mid i + k > j\}$$

4. Привести пример конъюнктивной грамматики, не являющейся контекстно-свободной, но описывающей регулярный язык, причём, если выбросить из неё конъюнкцию, язык перестанет быть регулярным (1 балл).

5. Привести конъюнктивную грамматику для языка $\{(a^{n_i} b)^k a^m \mid m < \max n_i\}$ (2 балла).

6. Определить, какие языки описываются автоматами Треллиса над начальными словами в унарном алфавите (2 балла).

7. Студент Бессонный опроверг DMFA-свойство для языка $\{a^n b^m c^k a^r \mid n = r \,\&\, m = k\}$ следующим образом. Он пересёк этот язык с a^* и применил лемму о перескоке к слову a^{p+n}. Объясните, почему этот метод решения скопрометировал Бессонного, и предложите решение, которое не приводит к компромату. (2 балла)

8. Может ли существовать такой КС-язык, что он описывается двумя независимыми (т.е. действующими различно) PDA, которые вовлекают стек на одном и том же символе алфавита, при этом если удалить какие-либо действия со стеком хотя бы в одном из PDA, то язык будет описан уже некорректно? (2 балла)

9. Проанализировать на DMFA-свойство (2 балла)

$$\{a^i b a^j \mid j < 2 \cdot i\}$$

10. Красный Панда на позапрошлой Бигфарме пытался проанализировать язык $\{a^m b^m a^n \mid n \neq m\}$. Он сначала построил для его распознавания PDA с двумя стеками, а затем автомат, у которого вместо стека очередь, и сказал, что оба эти построения обосновывают КС-свойство. Объясните, почему существование таких автоматов не обосновывает даже то, что язык конъюнктивен (и предъявите построение конъюнктивной грамматики). (2 балла)

11. Построить конъюнктивную грамматику для языка $\{aba^2b \dots a^n b a^{n^2}\}$ (3 балла)

12. Существует ли автомат Треллиса для языка $\{a^n b^n\} \cup \{a^n b^{2n}\}$? Если да, то построить его (3 балла)

13. Существует ли линейная конъюнктивная грамматика для языка $\{ww^R a^n b^n\}$ $(w \in \{a, b\}^*)$? Если да, то построить её (3 балла)

14. Является ли DMFL язык $\{a^{n^3 - n^2}\}$? (4 балла)

15. Нерефальщик очень любит синтаксические моноиды. В связи с этим у него возникло предположение, что языки, описываемые автоматами Треллиса, в которых все символы могут встретиться на входной ленте, являются регулярными, поскольку описываются правилами переписывания с левыми и правыми частями в одном и том же алфавите. Помогите Нерефальщику проверить его предположение (4 балла).

16. Студент Сара Глубокая заметил, что реверсирование не выводит из больших классов языков (регулярные, КС, конъюнктивные, линейно-конъюнктивные), но часто ломает детерминизм (КС-детерминизм, LL-свойство даже при сохранении детерминизма, 1-однозначность регулярок, DMFA-языки). Проверьте наблюдение Сары (2 балла). Попробуйте разобраться, замкнуты ли MFA-языки относительно реверсирования (5 баллов)

G. вычислимость и завершаемость

1. Решить проблему соответствия Поста: $\langle a, ba\rangle$, $\langle abb, ba\rangle$, $\langle b, ba\rangle$, $\langle a, bb\rangle$ (1 балл).

2. Существуют ли неразрешимые проблемы Поста, содержащие домино $\langle a, \varepsilon\rangle$, $\langle \varepsilon, b\rangle$ такие, что в них есть хотя бы ещё одна домино с преобладанием букв a в ячейке снизу, и хотя бы одна домино с преобладанием букв b в ячейке сверху? (1 балл).

3. Дать верхнюю оценку уровню неразрешимости задачи проверки языка на регулярность. Обосновать, почему в данной оценке кванторы нельзя заменить ограниченными (2 балла).

4. Дать верхнюю оценку уровню неразрешимости задачи проверки префикс-свойства языка. Обосновать, почему в данной оценке кванторы нельзя заменить ограниченными (2 балла).

5. Проанализировать, какой класс языков распознаётся PDA, на рёбрах которых стоят произвольные μ-regexp (2 балла).

6. Исследовать на завершаемость следующую TRS (2 балла)

$$
\begin{array}{l}
\text{variables} = [X] \\
E(Q(q(q(E(E(E(W(E(E(q(W(q(X))))))))))))) \to Q(Q(W(q(E(W(W(E(W(E(q(X))))))))))) \\
q(E(E(E(E(Q(E(E(q(X))))))))) \to E(Q(W(E(E(W(W(q(X)))))))) \\
E(Q(W(E(E(W(W(q(X)))))))) \to Q(E(E(Q(Q(E(q(E(Q(E(W(q(W(W(X)))))))))))))) \\
q(q(Q(Q(Q(E(W(W(W(E(E(Q(X)))))))))))) \to E(E(E(q(E(Q(W(W(W(X))))))))) \\
E(E(Q(Q(E(q(E(Q(E(W(q(W(W(X))))))))))))) \to q(W(E(Q(W(E(E(W(W(X))))))))) \\
E(E(E(q(W(Q(q(E(q(E(E(q(Q(E(Q(Q(Q(E(X)))))))))))))))))) \to E(W(Q(Q(W(E(E(Q(q(E(W(X))))))))))) \\
q(W(E(Q(Q(Q(W(E(E(W(W(X))))))))))) \to E(E(Q(E(E(q(E(Q(E(W(q(W(W(X)))))))))))))
\end{array}
$$

7. Исследовать на завершаемость следующую TRS (2 балла)

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{variables} = [X, Y, Z] \\
1. & w(i, X) \to X \\
2. & w(w(w(s, X), Y), Z) \to w(w(X, Z), w(Y, Z))
\end{array}
$$

8. Исследовать на завершаемость следующую TRS (3 балла)

   variables $= [x, y]$

   $f(f(a, x), y) \to f(f(x, f(a, y)), a)$

9. Дать верхнюю оценку уровню неразрешимости множества LL-языков. Обосновать, почему в данной оценке кванторы нельзя заменить ограниченными (3 балла).

10. Исследовать на завершаемость следующую SRS (3 балла)

$$al \to la \qquad ra \to ar \qquad bl \to bar \qquad rb \to lb$$

11. Привести общий метод решения проблемы соответствия Поста, для множества пар «домино» которых $\mathcal{M}$ выполняется следующее условие: они составлены из всех возможных пар слов из некоторого конечного множества $\{w_1, \dots, w_n\}$ (4 балла).

12. Исследовать на завершаемость следующую SRS (5 баллов)

$$fg \to gff \qquad fh \to hg$$