

А. Автоматы

1. Пусть w_1, w_2 — строки в $\{a, b\}$. Построить минимальный ДКА, распознающий слова над $\{a, b\}$ такие, что они содержат и строку w_1 , и строку w_2 . Минимальность обосновать (1 балл)
2. Пусть w_1, w_2 — строки в $\{a, b\}$. Построить минимальный НКА, распознающий слова над $\{a, b\}$ такие, что они содержат и строку w_1 , и строку w_2 . Минимальность обосновать (1 балл)
3. Построить регулярное выражение для языка слов в $\{a, b\}$ таких, что они содержат равное количество подслов a^3 и ba (1 балл)
4. Существует ли язык \mathcal{L} слов над $\{0, 1\}$, который распознаётся ДКА, имеющим состояние-ловушку, и такое натуральное число n (возможно, зависящее от \mathcal{L}), что в языке-дополнении \mathcal{L} нет ни одного слова, сумма единиц и нулей в котором кратна n ? (2 балла)
5. Является ли регулярным подмножество языка неправильных скобочных последовательностей над $\{(,)\}$, такое что одной парной перестановки (т.е. смены двух символов местами) было достаточно, чтобы получилась правильная скобочная последовательность, и при этом замена всех $($ на $)$, а $($ на $)$ порождала бы реверс слова до замены? (2 балла)
6. Найти оптимальную последовательность устраниния состояний при переводе позиционного автомата для $a((ab|ba)a^*)^*$ в регулярку (2 балла)
7. Замкнуто ли множество регулярных языков относительно суффиксной фильтрации? А именно, если L_1, L_2 — регулярные языки, что можно сказать про язык $\{w \mid \exists v (wv \in L_1 \& v \in L_2)\}$? (2 балла)
8. Замкнуто ли множество регулярных языков относительно перестановки суффиксов и префиксов относительно языка инфиксов? А именно, если L_1, L_2 — регулярные, будет ли регулярным язык $\{xyz \mid zyx \in L_1 \& y \in L_2\}$? (2 балла)
9. Построить описание таких ДКА (зависящих от параметра), что регулярное выражение, получающееся из таких ДКА посредством

устранения состояний, экспоненциально велико относительно числа состояний ДКА (3 балла)

10. Построить регулярку с бесконечным языком, для которой существует несколько разных минимальных НКА, ни один из которых не является ДКА. Минимальность обосновать. (3 балла)
11. Пусть w — некоторое слово длины n в алфавите $\{a, b\}$; $\mathcal{A}(w)$ — минимальный ДКА, распознающий, встречается ли это слово в строке. Предложить схему устранения состояний для $\mathcal{A}(w)$, приводящую к порождению максимально короткого регулярного выражения (3 балла)
12. Отношение $v \trianglelefteq w$ — это отношение подпоследовательности на строках. Язык L называется замкнутым вниз, если $\forall w, v(w \in L \& v \trianglelefteq w \Rightarrow v \in L)$. Показать, что все замкнутые вниз языки регулярны (4 балла).
13. Распространим определение производной на пересечения: скажем, что $\delta_a(r_1 \cap r_2) = \delta_a(r_1) \cap \delta_a(r_2)$. Удастся ли перенести конструкцию автомата Брзозовски на регулярные выражения, дополнительно содержащие операцию \cap , и останется ли она при этом конечной? (4 балла)
14. Проверить следующее утверждение. Для всякого регулярного языка L можно подобрать такое натуральное число k , что $\forall v(|v| > k \& v^n \in L \Rightarrow \exists m, v_1, w(v^n = v_1^m w \& |w| < k \& |v_1| < k))$ (5 баллов)

В. Автоматы-2

1. Проверить, является ли регулярным язык грамматики (1 балл)

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow SaSb & S \rightarrow SbSa \\ S \rightarrow ba b & S \rightarrow aba \end{array}$$

2. Проверить, является ли регулярным язык грамматики (1 балл).

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow STS & S \rightarrow Sa & S \rightarrow \varepsilon \\ T \rightarrow aTa & T \rightarrow b & \end{array}$$

3. Проверить, является ли регулярным язык грамматики (1 балл).

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow SaS & S \rightarrow bSb \\ S \rightarrow bbS & S \rightarrow a \end{array}$$

4. Известно, что пересечение языка $\mathcal{L}_1 = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$ с регулярным языком \mathcal{L}_2 является конечным регулярным языком. Пусть \mathcal{L}_2 описывается регуляркой алфавитной длины n . Сколько языков \mathcal{L}_2 существует для $n = 3$? (1 балл).
5. Посредством леммы о накачке проверить, является ли регулярным язык $\{a^{n^2}b^{n^2}\} \cup \{a^n b^m \mid n \neq m\}$ (2 балла).
6. Можно ли построить регулярное выражение с отрицанием, но без итераций, для выражения $(a(ba)^*|bc^*)^*$? (2 балла)
7. Можно ли построить регулярное выражение с отрицанием, но без итераций, для выражения $((aa)^*(ab|bc)ab^*)^*$? (2 балла)
8. Известно, что пересечение языка $\mathcal{L}_1 = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$ с регулярным языком \mathcal{L}_2 является бесконечным регулярным языком. Пусть \mathcal{L}_2 описывается регуляркой, не содержащей альтернатив, алфавитной длины n и звёздной высоты, равной 1 (то есть без вложенных итераций). Сколько языков \mathcal{L}_2 существует для заданного n ? (3 балла).

9. Известно, что пересечение языка $\mathcal{L}_1 = \{w \mid w = w^R\}$ с регулярным языком \mathcal{L}_2 является бесконечным регулярным языком. Пусть \mathcal{L}_2 описывается регуляркой, не содержащей альтернатив, алфавитной длины n и звёздной высоты, равной 1. Сколько языков \mathcal{L}_2 существует для заданного n ? (3 балла).
10. Для каких слов ξ_1, ξ_2 язык $\{|w|_{\xi_1} = |w|_{\xi_2} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ регулярен? (4 балла)
11. Для каких слов $\xi_{1,i}, \xi_{2,i}$ ($i = 1..3$) язык $\{\bigwedge_{i \leq 3} |w|_{\xi_{1,i}} = |w|_{\xi_{2,i}} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ регулярен? (5 баллов)

С. Автоматы-3

1. Построить синтаксический монoid и определить длину накачки для регулярного языка слов, которые либо содержат подряд две идущие одинаковые буквы, либо содержат подслово abc (1 балл).
2. Построить синтаксический монид, распознающий язык слов над $\{a, b, c\}$ таких, что в них либо встречается хотя бы две буквы c , между которыми не встречается три одинаковые буквы подряд, либо встречается хотя бы две одинаковые буквы подряд (1 балл).
3. Для каких LR(0)-регулярных языков их минимальный ДКА обязан содержать не меньше двух конечных состояний? (1 балл)
4. Построить префиксную грамматику, распознающую тот язык слов, начинающихся и заканчивающихся одной и той же буквой. Алфавит $\{a, b, c\}$ (1 балл).
5. Построить синтаксический монид и определить длину накачки для регулярного выражения, распознающего правильно записанные регулярки без скобок, вложенных более чем дважды, и пустых слов под альтернативами или итерациями, над алфавитом $\{a, b\}$ (2 балла).
6. Алгоритм устранения ε -переходов не через замыкания строит все транзитные переходы, являющиеся композицией ε -путей и перехода с меткой по символу алфавита. После чего ε -переходы стираются. Сколько максимум (от числа исходных состояний автомата) при этом может получиться недостижимых вершин? (2 балла)
7. У конечных языков, обладающих префикс-свойством, таблица классов эквивалентности по Майхиллу–Нероуду очень похожа на единичную матрицу (если удалить класс эквивалентности ловушки). Верно ли, что если язык бесконечен или не обладает префикс-свойством, то это свойство таблицы всегда не будет выполняться? (3 балла)
8. Могут ли в префиксной грамматике для LR(0)-регулярного языка одновременно встречаться правила вида $w \rightarrow v_1v_2$ и $w \rightarrow v_1$? (3 балла)

9. проф. Сергей Дмитриевич разрабатывает алгоритм, который строит 1-однозначное регулярное выражение по ДКА. Он подозревает, что существуют такие регулярки, автомат Глушкива для которых детерминирован (т.е. 1-однозначные), но методом исключения состояний из этого автомата всегда получается 1-недетерминированная регулярка, какой бы порядок исключения состояний мы ни выбрали. Проверьте гипотезу профессора (3 балла)

D. CFG

1. Выяснить, детерминированный ли язык описывает данная грамматика (1 балл)

$$S \rightarrow SB \mid A \quad A \rightarrow AcA \mid a \quad B \rightarrow SB \mid a$$

2. Выяснить, детерминированный ли язык описывает данная грамматика (1 балл)

$$S \rightarrow SS \mid A \quad A \rightarrow ASb \mid ab$$

3. Исследовать на КС-свойство язык $\{a^m b^n \mid m \geq \sqrt{n} \vee n \geq m\}$ (2 балла).

4. Исследовать язык $\{a^i b^j a^k b^m \mid \text{либо } i \text{ и } k, \text{ либо } j \text{ и } m \text{ взаимно просты}\}$ на контекстную свободу (2 балла).

5. Построить коммутативный образ грамматики — т.е. регулярное выражение, порождающее слова с таким же соотношением букв, что и слова грамматики (2 балла).

$$S \rightarrow AbBc \mid bc \quad A \rightarrow bAcA \mid b \quad B \rightarrow bBcB \mid c$$

6. Проверить следующую формулировку леммы о накачке: если L контекстно-свободен, то существует такое натуральное число p , что для любого слова w и любого достаточно длинного суффикса w' этого слова (т.е. $w = vw'$, $|w'| > f(p)$) можно найти разбиение $w' = z_1y_1x_1$, $v = x_2y_2z_2$ такое, что $|y_1| + |y_2| > 0$ & $|y_1| + |y_2| \leq p$, что $x_2y_2^iz_2z_1y_1^ix_1 \in L$ для всех i (2 балла).

7. Студент Сара Глубокая пытается установить КС-свойство языка слов, представляющих собой дополнение к языку конкатенации двух палиндромов, причём пустое слово тоже считается палиндромом. Помогите Саре решить эту задачу (3 балла).

8. Построить коммутативный образ грамматики (3 балла):

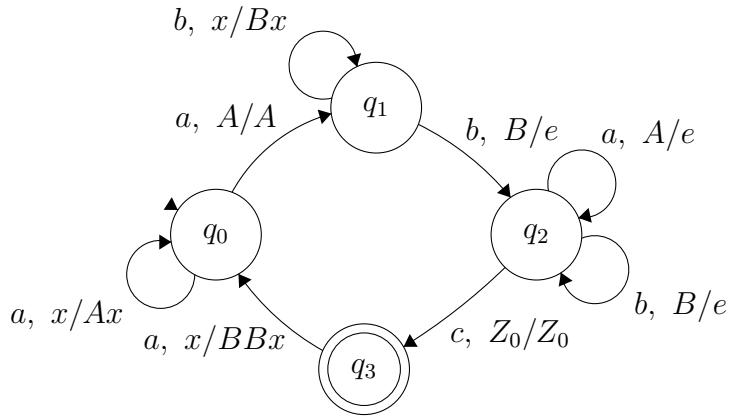
$$S \rightarrow SaSb \mid aA \quad A \rightarrow AA \mid AaBaA \mid Ba \quad B \rightarrow \varepsilon \mid bAbS$$

9. Исследовать на КС-свойство язык $\{a^n b^m c^k \mid n \neq m \& m \neq k \& n \neq k\}$ (3 балла).

10. Исследовать на КС-свойство язык $\{a^n b^m \mid n = k^2 \vee n \neq m\}$ (4 балла).

E. CFG-2

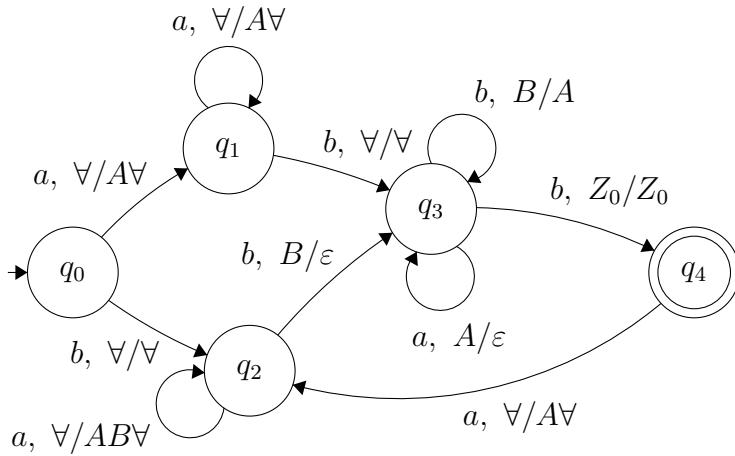
1. Верно ли, что если алфавиты языков \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 совпадают, и при этом \mathcal{L}_1 недетерминированный, то $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ тоже недетерминированный? (1 балл).
2. Проанализировать язык на детерминированность: $\{wa^n w^R b^n \mid w \in ba^*(ba)^*\}$ (1 балл).
3. Проанализировать язык на детерминированность: $\{w_1 a^n w_2 b^n \mid n > 0 \ \& \ |w_1|_{ab} = 0 \ \& \ |w_2|_{ba} = |w_2|_{ab} > 0\}$ (1 балл).
4. Верно ли, что если алфавиты языков \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 не совпадают, и при этом \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 — LL(k), то $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ — LL(k)? (1 балл).
5. Верно ли, что если алфавиты языков \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 не пересекаются, и при этом \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 — LL(k), то $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2\mathcal{L}_1$ — LL(k)? (1 балл).
6. Верно ли, что если \mathcal{L} — недетерминированный КС-язык, то язык суффиксов слов из L — тоже недетерминированный? (2 балла)
7. Верно ли, что если алфавиты языков \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 не пересекаются, и при этом \mathcal{L}_2 — LR(0), а \mathcal{L}_1 детерминированный, то $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ — LR(0)? Исправить, если неверно, усилить, если верно (2 балла).
8. Построить грамматику-пересечение языка грамматики $S \rightarrow SaSbS \mid Sb \mid \varepsilon$ с регулярным языком $((aba)^*bb)^*$ (2 балла).
9. Всякий КС-язык является гомоморфным образом пересечения языка правильных скобочных последовательностей с регулярным языком. Построить соответствующие регулярный язык и гомоморфизм для языка $\{a^n b^m \mid n \neq m\}$ (2 балла).
10. Построить КС-грамматику для языка следующего PDA (2 балла):



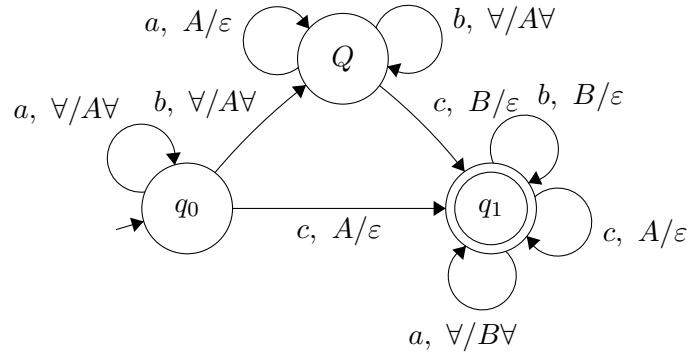
11. Проверить, задаёт ли данная грамматика LL(1)-язык (3 балла):

$$S \rightarrow cScS \mid ab \mid \varepsilon$$

12. Является ли контекстно-свободным языком всех логических формул со связками \neg, \Rightarrow над переменными A, B таких, что они являются отрицаниями какой-либо формулы, состоящей только из \Rightarrow ? (3 балла)
13. Построить КС-грамматику для языка следующего PDA (3 балла):



14. Назовём состояние q в PDA семантической ловушкой, если из него есть пути в конечные состояния, но при работе PDA в действительности по этим путям никогда нельзя пройти. Например, в PDA ниже семантической ловушкой является Q :



Существует ли алгоритм выявления семантических ловушек в PDA?
(3 балла)

15. Рассмотрим серию языков $\{\gamma_1^i \gamma_2^j \gamma_3^k \mid i, j, k > 0 \text{ } \& \text{ } (P_1(i, j, k) \vee P_2(i, j, k))\}$. P_t — линейные функции от своих аргументов, т.е. $P_t = c_{1,t} \cdot i + c_{2,t} \cdot j + c_{3,t} \cdot k = d_t$, где c_{t_1, t_2} и d_t — целые (возможно, неположительные). В каких случаях языки этой серии будут недeterminированными? (4 балла)
16. Является ли контекстно-свободным языком L контекстно-свободных LR(0)-грамматик над нетерминалами S, A_1, \dots, A_n и терминалами a, b ? В алфавите L , кроме заданных заранее S, A_1, \dots, A_n, a, b , также есть символы \rightarrow и $;$ (для отделения правил друг от друга) (5 баллов)

F. CFG-3

1. Индус построил LR(0)-автомат для языка a^* по следующей грамматике:

$$S \rightarrow aS \mid \varepsilon$$

добавив в неё самое изначальное правило $S' \rightarrow S\$$. Автомат получился с конфликтом, как и положено автомату для языка, не являющегося LR(0)-языком. Помогите индусу подогнать грамматику так, чтобы LR(0)-автомат для неё не содержал конфликтов, и объясните, что случилось. (1 балл)

2. Замкнуты ли недетерминированные КС-языки относительно конкатенации с регулярными языками? Т.е. если \mathcal{L} — недетерминированный КС-язык, \mathcal{R} — регулярный язык, то всегда ли верно, что $\mathcal{L}\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}\mathcal{L}$ — недетерминированные? (1 балл)
3. Если \mathcal{L} — это $LR(0)$ -язык, будет ли \mathcal{L}^R LL -языком? (1 балл)
4. Проверить, задаёт ли данная грамматика $LR(0)$ -язык (2 балла):

$$S \rightarrow aAc \mid bSb \quad A \rightarrow aS \mid bAb \mid a$$

5. Специалист по NP-неполным задачам заметил, что язык, который он рассматривает, является объединением двух КС-языков \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 , причём \mathcal{L}_2 недетерминированный. Из этого он заключил, что исходный язык также недетерминированный, что было опровергнуто контрпримером: если $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$, и \mathcal{L}_1 детерминирован, то очевидно $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ тоже недетерминированный. Можно ли придумать контрпримеры другого типа к этому утверждению? И можно ли наложить дополнительное условие на языки, чтобы его сузить до частного случая, который верен? (2 балла).
6. Сильно регулярные грамматики — такие КС-грамматики, что нетерминалы в них можно разбить на классы так, что нетерминалы из одного класса достижимы друг для друга (т.е. из A_i выводима сентенциальная форма, содержащая B_j , и наоборот), в правой части правила для нетерминала A_i могут стоять только нетерминалы из классов не меньше i , и притом если $A_i \rightarrow \xi_1 B_i \xi_2$ (то есть A_i и B_i

принадлежат одному классу и A_i ссылается на B_i в правой части), то $\xi_2 = \varepsilon$. Доказать, что сильно регулярные грамматики описывают регулярные языки, и что если выбросить любое из двух условий выше, то регулярность уже гарантировать будет нельзя (2 балла).

7. Верно ли, что конкатенация языка непустых чётных палиндромов и произвольного языка \mathcal{L} всегда не детерминирована? (3 балла)
8. Изменится ли смысл леммы о накачке для детерминированных КС-языков, если позволить суффиксам общего префикса быть пустыми или начинаться с разных букв? (4 балла)
9. Неуловимый Джо знает способ, как построить регулярную аппроксимацию КС-языка через взаимно рекурсивные нетерминалы, причём такую, что она сохраняет сильно регулярные языки. Проверьте, обладает ли этим свойством аппроксимация через LR(0)-PDA (4 балла).
10. Депрессивный Вишенка пытается построить критерий регулярности языка, описываемого линейной КС-грамматикой. Он выдвинул гипотезу, что если язык состоит только из правил $S \rightarrow T_1ST_2$ и $S \rightarrow T_3$, где T_1, T_2, T_3 не ссылаются на S , все описываются праволинейными правилами, и при этом $\mathcal{L}(T_1T_1) \not\subseteq \mathcal{L}(T_1)$ и $\exists w \in \mathcal{L}(T_3) (\forall u \in \mathcal{L}(T_2) \cup \mathcal{L}(T_1) \forall z_1, z_2 (u \neq z_1wz_2))$. Помогите Депрессивному Вишенке проверить его гипотезу (5 баллов).