### Функциональное программирование Вводная часть

А.Н. Непейвода 2023 г.

X I



## Побочные эффекты

```
bool flag;
int f (int n) {
    int retVal;
    if flag {retVal = 2*n;}
    else retVal = n;
    flag != flag;
    return retVal;
}

bool flag;
    flag = true;
    printf("f(1)+f(2) = %d\n",
    f(1)+f(2));
    flag != flag;
    printf("f(2)+f(1) = %d\n",
    return retVal;
    }
}
```

Что вернет функция test?



## Побочные эффекты

```
bool flag;
int f (int n) {
    int retVal;
    if flag {retVal = 2*n;}
    else retVal = n;
    flag != flag;
    return retVal;
}

void test () {
    flag = true;
    printf("f(1)+f(2) = %d\n",
    f(1)+f(2));
    flag != flag;
    printf("f(2)+f(1) = %d\n",
    f(2)+f(1));
}
```

#### Что вернет функция test?

```
f(1)+f(2) = 4

f(2)+f(1) = 5
```



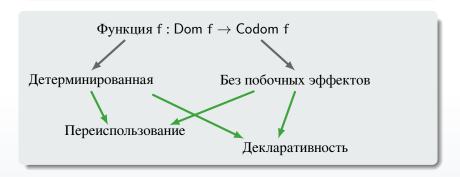
## Основное определение

**ФП** (парадигма программирования) — основной вычислительный процесс рассматривается как вычисление значений математических функций.



## Основное определение

**ФП** (парадигма программирования) — основной вычислительный процесс рассматривается как вычисление значений математических функций.





## Чистое ФП

**Чистая функция** в  $\Phi\Pi$  — функция, поведение которой аналогично математической.

#### Не являются чистыми:

- Ю-функции;
- rand-функции;
- функции, зависящие от или меняющие глобальное состояние среды.



# Свойства ФП

#### Cons

- Фон-неймановское горлышко
- Интерактивность



## Свойства ФП

#### Pros

- "Носят семантику с собой"
- Верифицируемость (!!)
- Параметризуемость
- Быстрое прототипирование

#### Cons

- Фон-неймановское горлышко
- Интерактивность



#### Свойства ФП

#### Pros

- "Носят семантику с собой"
- Верифицируемость (!!)
- Параметризуемость
- Быстрое прототипирование

#### Cons

- Фон-неймановское горлышко
- Интерактивность

- ФЯП уже эффективны для реализации массивного параллелизма и многопоточности (Scala, Erlang).
- Интерактивность дополнительная инкапсуляция (монадическое программирование, реактивное программирование).
- Высокоуровневые оптимизации.



## Миграция в массовые ЯП

- Анонимные функции и функции высших порядков.
- Развитое сопоставление с образцом (record patterns в Java, etc).
- Алгебраические типы данных.
- Функторы и монады (асинхронные вычисления).
- Средства метапрограммирования.
- Системы типизации в стиле соответствия Карри–Ховарда.

«Все там будем»: академические ФЯП — это песочница, где зарождается дизайн современных ЯП вообще.



# Теоретические основы ФП как паттерны проектирования

- Инкапсуляция побочных эффектов
- Высокая параметризуемость без потери надёжности
- Перенос оптимизаций на абстрактный уровень

После 2010 года — стремительный рост публикаций о применении теории категорий в программной инженерии. Внедрение паттернов на основе алгебраических понятий в дисциплину программирования.



## Структура курса

- Два языка: Рефал (разминочный), Haskell (центральный).
- Бестиповое и типизированное лямбда-исчисление.
- Начала теории категорий.
- 5 лабораторных работ × 8 баллов
- 2 РК × 15 баллов



# Модели вычислений («системы координат»)

- Машины Тьюринга (автоматы) максимально императивны, манипуляция строками
- Рекурсивные функции Клини (структурное программирование) — всё ещё императивны, манипуляция функциями
- Алгорифмы Маркова (системы переписывания термов)
   декларативны, манипуляция строками
- Лямбда-исчисление (системы функций высшего порядка) — декларативны, манипуляция функциями

Манипуляция строками  $\Rightarrow$  программа как «белый ящик» Манипуляция функциями  $\Rightarrow$  программа как «чёрный ящик»



## Алгорифмы Маркова

#### Синтаксис

#### Семантика

- Данные единственная строка.
- Правила просматриваются сверху вниз по списку.
- Выбирается самое левое вхождение подстроки  $\Phi_i$ , после чего в случае финального правила оно просто заменяется на  $\Psi_i$ , а в случае нефинального заменяется на  $\Psi_i$ , и операция повторяется над изменённой строкой.

По сути — рекурсивный вызов функции, разбивающей строку по шаблону  $(.*)\Phi_i(.*)$ . С именованными группами — как-то так:

$$(?<\texttt{x1}>.*?)\Phi_{\textbf{i}}(?<\texttt{x2}>.*) \rightarrow \texttt{group}(\texttt{x1}) ++ \Psi_{\textbf{i}} ++ \texttt{group}(\texttt{x2})$$



# Алгорифмы Маркова как рекурсивная функция

- С учётом того, что группы всегда соответствуют выражениям .\* (на самом деле .\*?), заменим их просто именами.
- Конкатенацию сделаем неявной не только в регулярках, но и в результате.
- Результат: рекурсивная функция следующего вида.

Все левые части содержат один и тот же вызов, так что упоминание об f там избыточно. Получился примитивный ЯП.



# Рефал:

## засахаренные алгорифмы Маркова

- Свободные образцы: вместо примитивного образца всё множество возможных образцов над свободным моноидом, в том числе с повторными переменными.
- «Много функций»: введение идентификатора функции, стоящего в образце самым первым и определяющего выбор подмножества правил переписывания.
- Вложенные структуры: использование лесов строк (дополнительного конструктора в моноиде) в качестве данных программы.



## Над тезисом Чёрча-Тьюринга

#### От нормальных алгорифмов к машинам Тьюринга

- Введём символ «головка машины»  $\tau$  и символы состояний  $\xi_j$ . Потребуем  $\Phi_i$  и  $\Psi_i$  всегда начинаться с символа  $\tau$ , за которым следует  $\xi_i$  и единственная буква строки.
- Правила становятся коммутирующими; ленивое сопоставление также больше не актуально.

#### Обратно

• Воспользуемся расширенным тезисом Чёрча-Тьюринга...

#### Наблюдение

Переход от алгорифмов к другим моделям вычислений очень прост — почти все преобразования такого типа сводимы к применению системы переписывания термов, которая выражается нормальным алгорифмом Рефал-программой.

Условно, нормальные алгорифмы являются «абсолютной комонадой» (полностью «белый ящик»).



## Декларативные объявления

```
f \mid J = ...

f \mid x \mid = ...

f \mid (x : \_) = ...
```

- Частичный разбор терма начиная с внешнего конструктора.
- Сопоставление сверху вниз (аналогично цепочке if-elif-else).
- Не перестановочные предложения: третье в том числе описывает и случай, когда список одноэлементный (т.к. алгебраически список определяется конструкторами : (т.е. cons) и [], т.е. nil).



### Регулярные выражения

Проблема неоднозначности разбора строковых данных уже решалась в рамках построения механизма сопоставления с регулярными выражениями.

• Жадные квантификаторы — забирают максимально длинную подстроку

```
match = re.search(r'\( .*\)', r'0 ( (12)3)4(56 ) 7')
# match[0] = ((12)3)4(56)
```

 Ленивые квантификаторы — забирают максимально короткую подстроку

```
match = re.search(r'\( .*?\)', r'0 ( (12 ) 3)4(56)7')
# match[0] = ((12)
```

Здесь — произвольная буква, \* — квантификатор: повторять образец 0 или больше раз, \( ( и \) — экранированные представления круглых скобок.



## Ассоциативные образцы

Для краткости ++ опускается. Например: x'A'y — сокращённая запись для x ++ ['A'] ++ y.

- Сопоставление ленивое, сверху вниз.
- Эффективный доступ к строке с начала, с конца или с середины (например, при использовании суффиксного массива). Условный "шаг" вызов сопоставления. С точки зрения реализации, "шаг" имеет сложность, большую, чем O(1).
- Строки очевидно. Как добавить леса с доступом "с середины"?



## Ассоциативные образцы

- Сопоставление ленивое, сверху вниз.
- Эффективный доступ к строке с начала, с конца или с середины (например, при использовании суффиксного массива). Условный "шаг" вызов сопоставления. С точки зрения реализации, "шаг" имеет сложность, большую, чем O(1).
- Строки очевидно. Как добавить леса с доступом "с середины"? Решение: дополнительный конструктор, добавляющий глубину вложенности.

Дан список списков. Выделить список, содержащий букву 'A'. (list x1 (list z1 'A' z2) x2) — с тегами (АТД); (x1 (z1 'A' z2) x2) — без тегов (ака Рефал);



## Структурные скобки

Круглые скобки (не закавыченные) — дополнительный конструктор в полугруппе с конкатенацией.

- Имитация многоместных функций.
- Более общо моделирование древовидных структур.

```
[Tree] ::= (Node [Info] (Children [Tree]+)) | (Leaf [Info])
```



Образец — это строка в объединённом алфавите констант и переменных. Понятие языка образца (слов, которые могут сопоставиться с образцом) появилось только в 80-е годы, т.е. теория рефал-данных — одна из самых «молодых» в мире ЯП (и появилась она не в связи с рефалом, а в связи с вопросами машинного обучения).

Далее предполагаем все образцы «ленивыми» (переменные, начиная от самой левой, принимают как можно более короткие значения).

- Образец, находящий две одинаковые закавыченные последовательности?
- Образец, проверяющий, есть ли в слове квадрат (т.е. дважды повторяющееся подслово)?



• Образец, находящий две одинаковые закавыченные последовательности?

x1 " x2 " x3 " x2 " x4

Заметим, что если внутри значения x2 окажутся хотя бы одни кавычки, то существует более «ленивое» сопоставление (с той же длиной значения x1, но меньшей — x2).

• Образец, проверяющий, есть ли в слове квадрат (т.е. дважды повторяющееся подслово)?



• Образец, находящий две одинаковые закавыченные последовательности?

```
x1 " x2 " x3 " x2 " x4
```

• Образец, проверяющий, есть ли в слове квадрат (т.е. дважды повторяющееся подслово)?

Первая проба: x1 x2 x2 x3



• Образец, находящий две одинаковые закавыченные последовательности?

x1 " x2 " x3 " x2 " x4

 Образец, проверяющий, есть ли в слове квадрат (т.е. дважды повторяющееся подслово)?

Первая проба: x1 x2 x2 x3

Fail! Тривиально, из-за наличия в моноиде единицы — пустого слова. Требуется подчеркнуть непустоту — сказать, что в квадрат входит хотя бы один символ. Разделим переменные образца на два класса:

- e .name expression , сопоставляется с чем угодно;
- s . name symbol , сопоставляется только с символом.



• Образец, находящий две одинаковые закавыченные последовательности?

x1 " x2 " x3 " x2 " x4

 Образец, проверяющий, есть ли в слове квадрат (т.е. дважды повторяющееся подслово)?
 Разделим переменные образца на два класса:

- e . name expression , сопоставляется с чем угодно;
- s .name symbol , сопоставляется только с символом.

Тогда решение задачи выглядит так:

e.x1 s.y e.x2 s.y e.x2 e.x3



## Функции над образцами

Когда спроектирован образец, построить соответствующую функцию совсем просто. В правых частях можно использовать любые переменные образца, в любом количестве.

- Функция, находящая в аргументе две одинаковые закавыченные последовательности, и возвращающая одну из них?
- Функция, находящая в слове квадрат (т.е. дважды повторяющееся подслово)?



## Функции над образцами

 Функция, находящая в аргументе две одинаковые закавыченные последовательности, и возвращающая одну из них?

```
F {e.x1 '\"' e.x2 '\"' e.x3 '\"' e.x2 '\"'
e.x4 = e.x2;}
```

 Функция, находящая в слове квадрат (т.е. дважды повторяющееся подслово)?

$$F \{e.x1 \ s.y \ e.x2 \ s.y \ e.x2 \ e.x3 = s.y \ e.x2;\}$$



Дано двоичное число длины 3. Записать функцию, возвращающую в двоичной форме (с лидирующими нулями) число единиц в нём.



Дано двоичное число длины 3. Записать функцию, возвращающую в двоичной форме (с лидирующими нулями) число единиц в нём.

#### Решение «в лоб»:

```
F { 0 0 0 = 0 0;

0 0 1 = 0 1;

0 1 0 = 0 1;

0 1 1 = 1 0;

1 0 0 = 0 1;

1 0 1 = 1 0;

1 1 0 = 1 0;

1 1 1 = 1 1; }
```



Дано двоичное число длины 3. Записать функцию, возвращающую в двоичной форме (с лидирующими нулями) число единиц в нём.

#### Решение «в лоб»:

```
F { 0 0 0 = 0 0;

0 0 1 = 0 1;

0 1 0 = 0 1;

0 1 1 = 1 0;

1 0 0 = 0 1;

1 0 1 = 1 0;

1 1 0 = 1 0;

1 1 1 = 1 1; }
```

- Два нуля влекут результат 0 1;
- Две единицы влекут результат 1 0;
- Осталось разобраться с t t. Но такие данные порождают всегда t t.



Дано двоичное число длины 3. Записать функцию, возвращающую в двоичной форме (с лидирующими нулями) число единиц в нём.

#### Второе приближение:

```
F { t t t = t t;
    x1 0 x2 0 x3 = 0 1;
    x1 1 x2 1 x3 = 1 0;
}
```



Дано двоичное число длины 3. Записать функцию, возвращающую в двоичной форме (с лидирующими нулями) число единиц в нём.

значение!

Второе приближение:

```
F \{ t t t t = t t;
    x1 0 x2 0 x3 = 0 1; — другое;
  }
```

• Видно, что вторая и третья строчки почти одинаковы — на первом месте в результате стоит выделенное значение, на втором x1 1 x2 1 x3 = 1 0 о Длина строки x1 x2 x3 всегда равна 1, и это именно то другое



Дано двоичное число длины 3. Записать функцию, возвращающую в двоичной форме (с лидирующими нулями) число единиц в нём.

#### Почти решение:



Дано двоичное число длины 3. Записать функцию, возвращающую в двоичной форме (с лидирующими нулями) число единиц в нём.

#### Почти решение:

```
F { t t t = t t;
    x1 t x2 t x3
    = t x1 x2 x3;
}
```

- А теперь видно, что и первая строчка не нужна — в ней делается то же, что и во второй.
- Итоговая функция содержит всего одну строчку:
   x1 t x2 t x3 = t x1 x2 x3.
   Причём хі справа от знака = можно располагать как угодно относительно друг друга, ответ всё равно будет правильным.



# Задача Корлюкова ++

Чуть-чуть усложним задачу.

Дано двоичное число длины 4. Записать в двоичной форме (с лидирующими нулями) число единиц в нём.

Видно, что за исключением случая четырёх единиц, сгодилось бы предыдущее решение, если бы мы умели выкидывать из образца один ноль и собирать всё остальное в новый образец.



## Задача Корлюкова ++

Чуть-чуть усложним задачу.

Дано двоичное число длины 4. Записать в двоичной форме (с лидирующими нулями) число единиц в нём.

Видно, что за исключением случая четырёх единиц, сгодилось бы предыдущее решение, если бы мы умели выкидывать из образца один ноль и собирать всё остальное в новый образец.

Как описать образцы для элементов образцов?

[Образец](, [Выражение] : [Образец])\*



## Задача Корлюкова ++

Чуть-чуть усложним задачу.

Дано двоичное число длины 4. Записать в двоичной форме (с лидирующими нулями) число единиц в нём.

Видно, что за исключением случая четырёх единиц, сгодилось бы предыдущее решение, если бы мы умели выкидывать из образца один ноль и собирать всё остальное в новый образец.

Как описать образцы для элементов образцов?

#### [Образец](, [Выражение] : [Образец])\*

Решение задачи Корлюкова++ в этих терминах:

```
F {1 1 1 1 = 1 0 0;
    x1 0 x2
    , x1 x2 : z1 t z2 t z3 = 0 t z1 z2 z3; }
```



- Слово содержит как букву 'А', так и букву 'В'.
- Два слова являются циклическими перестановками (т.е.  $w_1 = uv, w_2 = vu$ ).
- Слово не содержит ничего, кроме (произвольного числа) букв 'A'.
- Два слова являются степенями одного и того же слова  $(w_1 = v^i, w_2 = v^j)$ .



- Слово содержит как букву 'A', так и букву 'B'.
   Ответ: образец x1 'A' x2, x1 x2: z1 'B' z2 (поскольку 'A' точно не содержит ничего от 'B')
- Два слова являются циклическими перестановками (т.е.  $w_1 = uv, w_2 = vu$ ).
- Слово не содержит ничего, кроме (произвольного числа) букв 'A'.
- Два слова являются степенями одного и того же слова  $(w_1 = v^i, w_2 = v^j)$ .



- Слово содержит как букву 'A', так и букву 'B'.

  Ответ: образец x1 'A' x2, x1 x2: z1 'B' z2 (поскольку 'A' точно не содержит ничего от 'B')
- Два слова являются циклическими перестановками (т.е.  $w_1 = uv, w_2 = vu$ ). Тут решение тривиальное: (x1 x2) (x2 x1).
- Слово не содержит ничего, кроме (произвольного числа) букв 'A'.
- Два слова являются степенями одного и того же слова  $(w_1 = v^i, w_2 = v^j)$ .



• Слово содержит как букву 'А', так и букву 'В'.

Ответ: образец x1 'A' x2, x1 x2: z1 'B' z2 (поскольку 'A' точно не содержит ничего от 'B')

• Два слова являются циклическими перестановками (т.е.  $w_1 = uv, w_2 = vu$ ).

Тут решение тривиальное: (х1 х2) (х2 х1).

• Слово не содержит ничего, кроме (произвольного числа) букв 'A'.

Решение нетривиальное: х, 'A' х : х 'A'.

• Два слова являются степенями одного и того же слова  $(w_1 = v^i, w_2 = v^j)$ .



• Слово содержит как букву 'А', так и букву 'В'.

Ответ: образец x1 'A' x2, x1 x2: z1 'B' z2 (поскольку 'A' точно не содержит ничего от 'B')

• Два слова являются циклическими перестановками (т.е.  $w_1 = uv, w_2 = vu$ ).

Тут решение тривиальное: (х1 х2) (х2 х1).

• Слово не содержит ничего, кроме (произвольного числа) букв 'A'.

Решение нетривиальное: х, 'A' х : х 'A'.

• Два слова являются степенями одного и того же слова  $(w_1 = v^i, w_2 = v^j)$ .

По аналогии с предыдущим: (x1) (x2), x1 x2 : x2 x1.



## Ещё несколько задач

#### Какие языки описываются следующими образцами?

- x1, x1 A B : B A x1, x1 : x2 x2
- x1, x1 x1: t1 x2 x1 x3, x1: t1 x2 t2 x4



### Ещё несколько задач

#### Какие языки описываются следующими образцами?

- x1, x1 A B : B A x1, x1 : x2 x2
   Пустой язык. Поскольку уравнение (а это именно уравнение)
   x1 A B = B A x1 имеет решения вида В (A B)\*, а они все нечётной длины.
- x1, x1 x1: t1 x2 x1 x3, x1: t1 x2 t2 x4



## Ещё несколько задач

#### Какие языки описываются следующими образцами?

- x1, x1 A B : B A x1, x1 : x2 x2
   Пустой язык. Поскольку уравнение (а это именно уравнение)
   x1 A B = B A x1 имеет решения вида В (A B)\*, а они все нечётной длины.
- x1, x1 x1: t1 x2 x1 x3, x1: t1 x2 t2 x4 Язык слов вида  $w^s$ , где  $s \ge 2$ . Почему они подходят, понять легко, а вот почему не подходят другие слова, проще понять, изучив основы комбинаторики слов.



## Стандартные Рефал-образцы

- Три типа переменных: е-переменные (типа выражение), t-переменные (типа терм: буква или выражение в скобках), s-переменные (типа буква).
- Константы без кавычек идентификаторы (например, ААА).
- Константы в одинарных кавычках строки (например, 'AAA').

```
F {
    e.1 '(' e.2 ')' e.3
    , <G e.2> : True = <F e.1 e.3>;
    e.1 s.x e.2
    , '()' : e.z1 s.x e.z2 = UNBALANCE;
    e.Z = BALANCE; }
G {
    e.z1 '(' e.z2 = False;
    e.x = True; }
```



## Идентификаторы и строки

#### Преобразования типов

- Идентификатор в строку: <Explode [Identifier]>;
- Строку в идентификатор: <Implode [String]>;
- Макроцифру в строку: <Symb [Number]>;
- Строку в макроцифру: <Numb [String]>.
- Идентификатор и макроцифра всегда сопоставляются с единственной s-переменной. То есть, True : s.x и 1001 : s.x успешно, 'True' : s.x неудачно.
- С учётом Implode, идентификаторы образуют бесконечный алфавит констант.
- Это позволяет удобно использовать идентификаторы в качестве управляющих конструкций без использования «лишних» структурных скобок.



## Пример: переименовка Рефал-функции

```
Rename {
  ((e.Name) e.NewName) e.1 e.Name e.2'f'e.3
  , <Meaningless e.1 e.2> : True
     = e.1 e.NewName e.2'{'
       <Rename ((e.Name) e.NewName) e.3>;
  ((e.Name) e.NewName) e.1 '<'e.Name' 'e.2
     = e.1'<'e.NewName' '
       <Rename ((e.Name) e.NewName) e.2>;
  (e.Names) e.Other = e.Other; }
Meaningless {
  ' 'e.x = <Meaningless e.x>;
  e.x' ' = <Meaningless e.x>;
  /* ∏YCTO */ = True;
  '/*'e.x'*/'e.xx = <Meaningless e.xx>;
  e.z = False; }
```



# Ввод & Вывод

- Поток с номером 0 всегда открыт это консоль.
- При чтении результат строка символов.
- При записи преобразование всех термов в символы происходит автоматически.



# Модули

- Объявление функции, видимой из другого модуля \$ENTRY [FName];
- Импорт функции \$EXTERN [Fname].

Если в нескольких модулях обнаружатся ENTRY — функции с одинаковыми именами, возникнет ошибка сборки.



### Блоки

Если в слове несколько вхождений буквы 'В', то функция F1 будет перебирать их все, несмотря на то, что в принципе может подойти только первое из них. Блоки дают не только возможность построить локальное определение, но и возможность управлять возвратами, т.к. при заходе в блок точка возврата во внешнюю функцию удаляется.



# Синтаксис блоков

Здесь круглые скобки — метасимволы, фигурные скобки — символы языка.

Предложение всегда заканчивается;, но это может произойти либо при вызове блока, либо при переходе к правой части. Блоки могут быть вложенными.



# Дополнительные стеки

- Положить в стек: <Br [String] '=' [Expression] >;
- Достать из стека: <Dg [String]>;
- Достать копию: <Cp [String]>.

Имена стеков можно порождать и вычислять как обычные строки.



#### Сложность сопоставления

```
F1 {
   e.1 'A' e.2, e.2 : e.3 'B' e.4 = True;
   e.1 = False: }
F2 {
   e.1 'A' e.2
     , e.1 e.2 : \{e.3 'B' e.4 = True;
        e.Z = False; };
   e.Z = False; }
F3 {
   Init 'A' e.1 = \langle F3 | Pass | e.1 \rangle:
   Pass 'B' e.1 = True;
   s.Mode t.x e.1 = \langle F3 \text{ s.Mode e.1} \rangle;
   s.Mode e.Z = False; }
```

Эффективность F2 выше, чем F1 — нет удлинения переменной е.1. Функция F3 менее всего зависит от внутренних свойств Рефал-машины (сопоставление всегда линейно), но несколько хуже отражает семантику, чем F2.



# Метапрограммирование на Рефале

Вызов <Mu [Identifier] [Expression] > осуществляет вызов функции с именем [Identifier] и аргументом [Expression]. Функция с именем [Identifier] должна быть либо определена в том же модуле, либо определена в прилинкованном к нему модуле как \$ENTRY.



## Проектирование образцов

- Открытые переменные подлежащие удлинению.
   Стараемся не допускать больше двух открытых переменных в образце.
- Если пустое сопоставление с переменной нас не устраивает, нужно это учесть, иначе оно обязательно когда-нибудь возникнет.
- Если некоторое обобщение образца определяет подмножество правил, которые могут быть применены к данным, то используем это обобщение для захода в блок и внутри блока уже выбираем конкретное правило.



## Общие принципы проектирования

- Новая структура вложенных слов (лесов) ⇒ вводим новую функцию.
- Другой способ обработки той же самой структуры ⇒ удобно использовать управляющие идентификаторы внутри той же функции.
- Объект «разбирается» образцом, но используется в правой части как целое ⇒ используем условия или блоки как безвозвратные at-конструкции.
- Порождается новый объект, который передаётся сразу нескольким функциям ⇒ используем условия как безвозвратные let-конструкции.
- Есть редко используемые аккумуляторы  $\Rightarrow$  рассматриваем возможность перемещения их в стек.