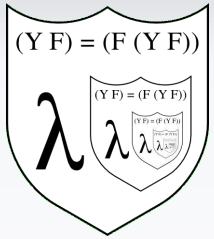
Контейнеры и категории

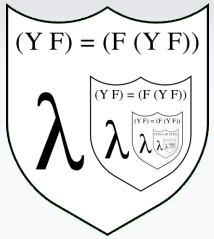
Функциональное программирование
2023 г.



Pattern Matching в Haskell

- Сопоставление по образцам — сверху вниз (рассахаривание в case-оператор).
- Сопоставление с образцом — слева направо.
- Образцы линейные (без повторных переменных).
- Можно также внутри let и лямбда-объявлений.

```
ff y = let (x:4:y) = map (*2) [1,2,1]
    in x + 5
```



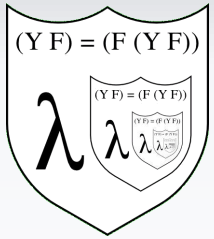
Некоторые удобные конструкции

- As-образец (аналог where для образцов):

```
f x@(y:ys) = (:) y x
```

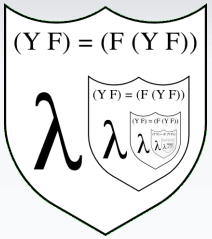
- Ленивые образцы (связывание с образцом не влечет выполнение аргумента):

```
f ~(x:xs) = x
```



Примеры

```
-- bottom
f x = f x

let x = f 1 in 0

let (x,y) = f 1 in 0

(\(x,y) -> 0) (f 1)

(\ ~(x,y) -> 0) (f 1)

(\(x,y) -> 0) ((f 1),(f 1))

(\(x:xs) -> (x:x:xs)) (f 1)
```



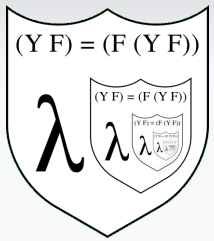
Теория категорий

Определение

Категория C — пара $\{O, M\}$, где O — набор объектов, M — набор стрелок (морфизмов), и выполнены следующие законы:

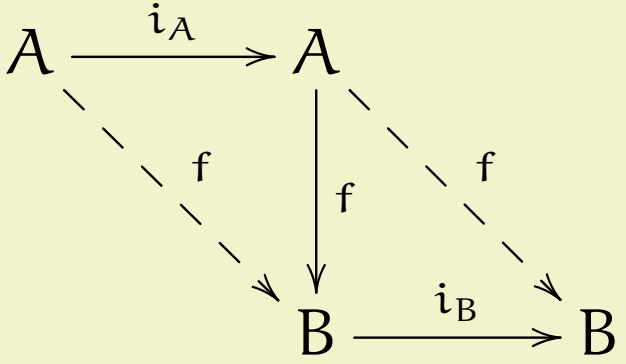
- $\forall A, B \in O\ \exists \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B\ \forall f : A \to B(\mathrm{id}_B \circ f = f \circ \mathrm{id}_A = f))$ (тождественный морфизм)
- $\forall f : A \to B, g : B \to C\ \exists h : A \to C(f \circ g = h)$ (существование композиции)
- $\forall f, g, h(f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h)$ (ассоциативность композиции)

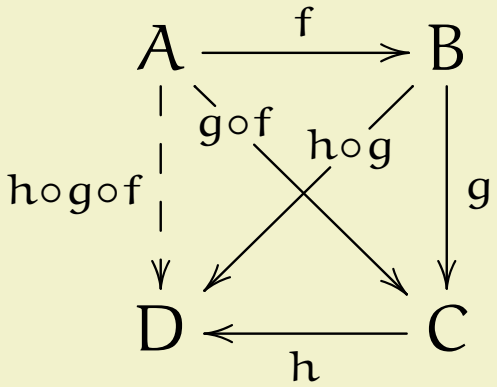
Объекты — типы; морфизмы — функции над типами.



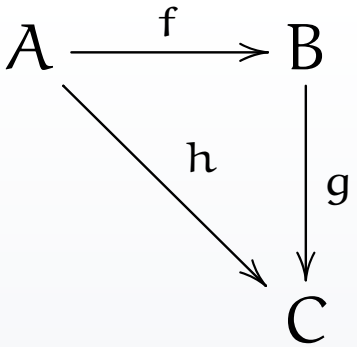
Коммутативные диаграммы

Диаграммы для законов категории

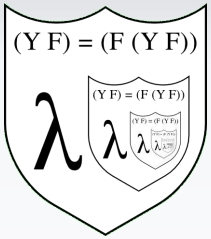




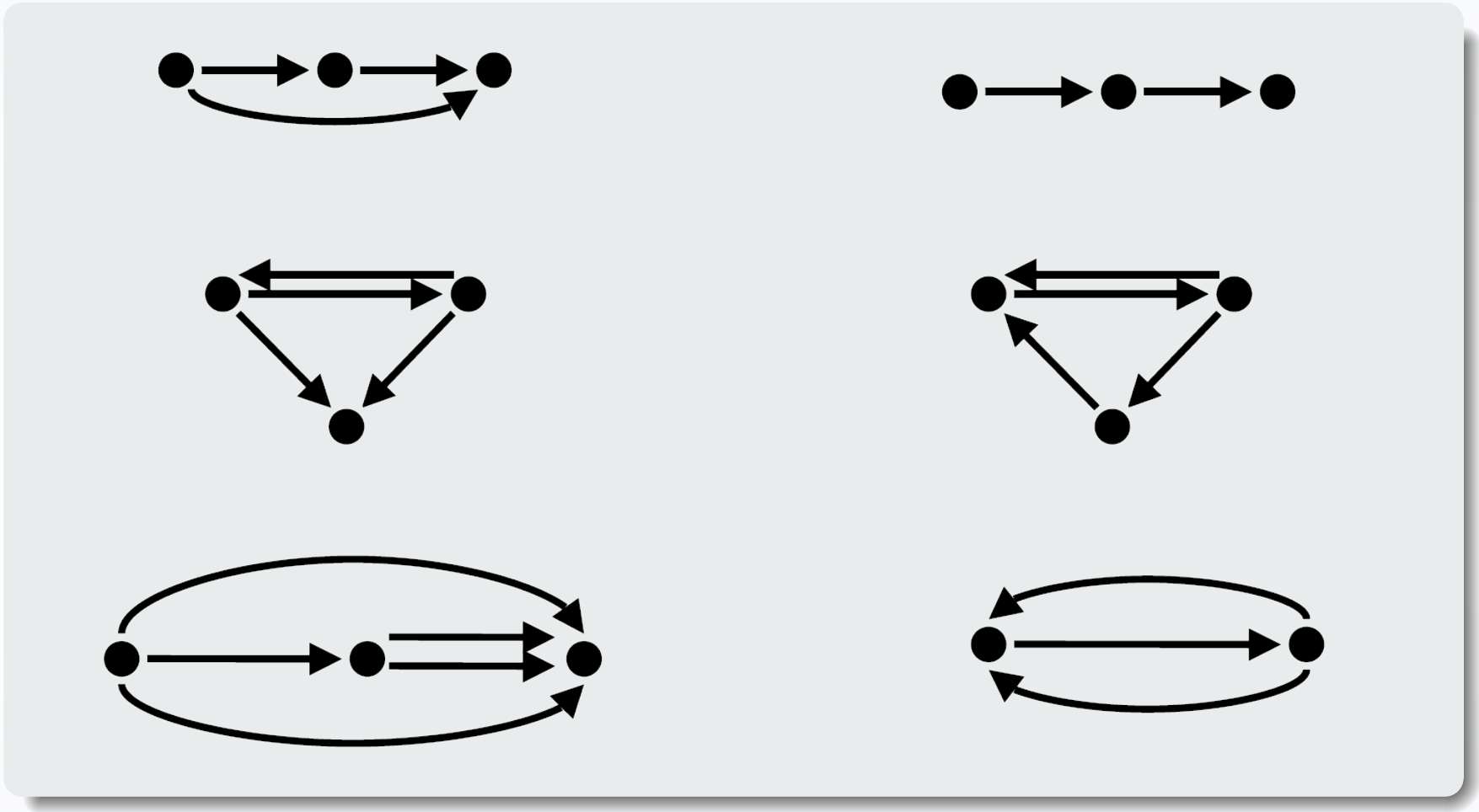
- Треугольник указанного ниже вида означает, что $g \circ f = h$.



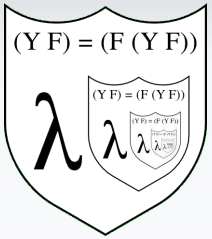
- Пунктир указывает, что морфизм единственный.



Задача



Диаграммы не обязательно коммутативные! Единичные морфизмы опускаются.

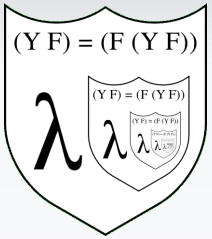


Универсальная конструкция

Универсальная конструкция — конструкция, которая описывается только свойствами морфизмов, а не внутренними свойствами объектов, включённых в конструкцию.

Эпиморфизм — такой морфизм f, что
$\forall g_1, g_2 (g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2)$.
Мономорфизм — такой морфизм f, что
$\forall h_1, h_2 (f \circ h_1 = f \circ h_2 \Rightarrow h_1 = h_2)$.

Универсальные конструкции определяются с точностью до изоморфизма.



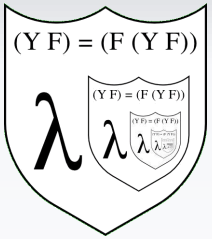
Универсальная конструкция

Универсальная конструкция — конструкция, которая описывается только свойствами морфизмов, а не внутренними свойствами объектов, включённых в конструкцию.

Эпиморфизм — такой морфизм f, что
$\forall g_1, g_2 (g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2)$.
Мономорфизм — такой морфизм f, что
$\forall h_1, h_2 (f \circ h_1 = f \circ h_2 \Rightarrow h_1 = h_2)$.

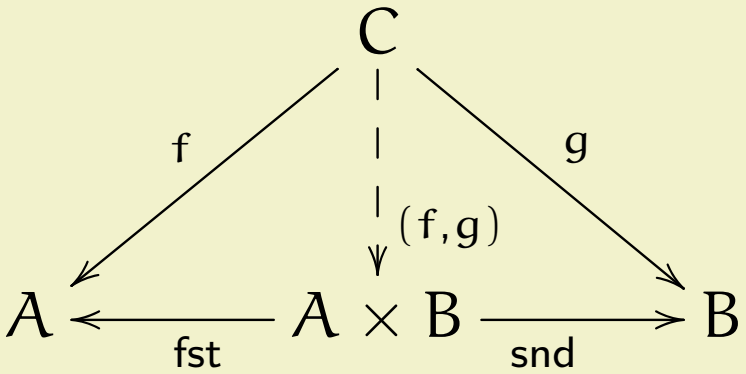
Универсальные конструкции определяются с точностью до изоморфизма.

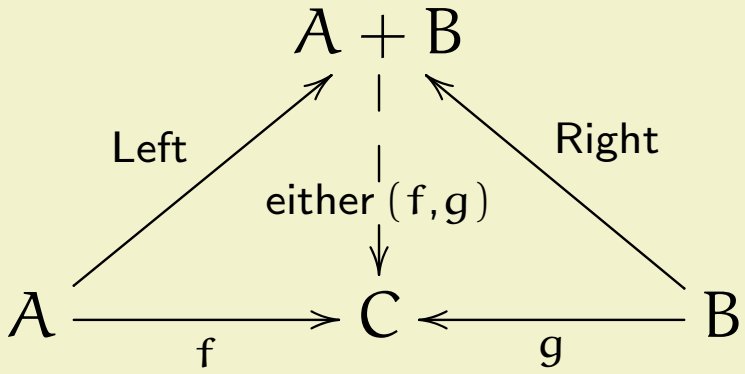
Инициальный объект — такой объект, что из него есть ровно одна стрелка в любой другой.
Терминальный объект — объект, в который есть ровно одна стрелка из любого другого.



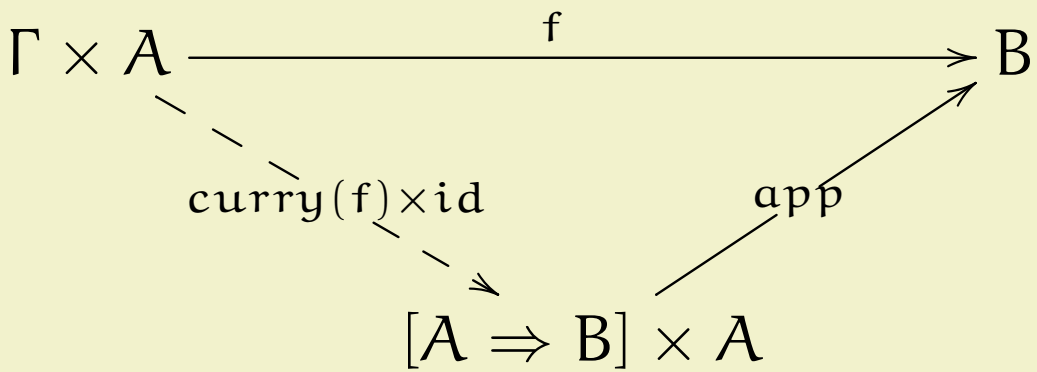
Конструкторы типов

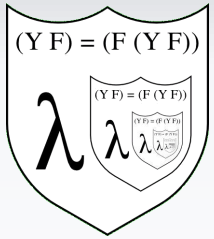
Прямое произведение и прямая сумма





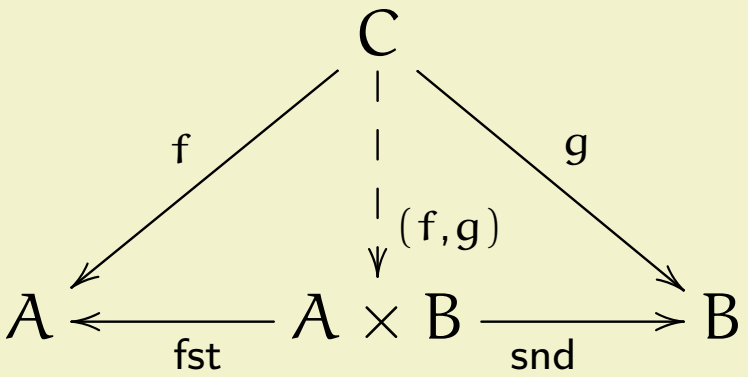
Функциональный тип(экспонента) — пока без пояснений

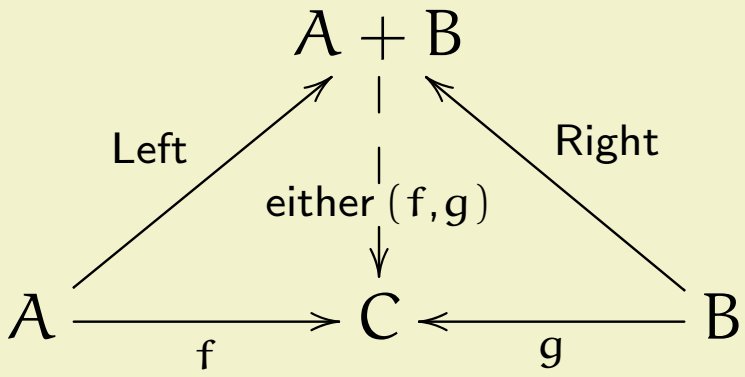




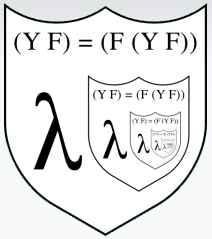
Конструкторы типов

Прямое произведение и прямая сумма





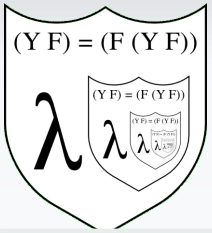
Из каждого «кандидата» на произведение есть стрелка в «оптимальное» произведение.



Алгебраические типы данных

- Структура — перечисление n-ок.
- Прямое произведение: $(a, ()) \sim a$, $(a, b) \sim (b, a)$, $(a, (b, c)) \sim ((a, b), c)$.
- Прямая сумма: $\mathtt{Either}\ a\ \mathtt{void} \sim a$, $\mathtt{Either}\ a\ (\mathtt{Either}\ b\ c) \sim \mathtt{Either}\ (\mathtt{Either}\ a\ b)\ c$.
- Дистрибутивность: $(a,\ \mathtt{Either}\ b\ c) \sim \mathtt{Either}\ (a, b)\ (a, c)$

Прямая сумма + прямое произведение + дистрибутивность = полукольцо.



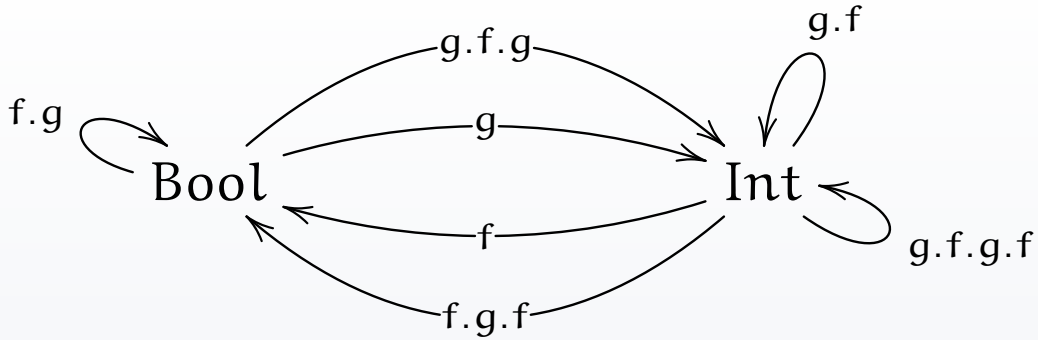
Пример

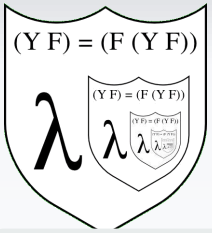
Начинающий программист спроектировал систему с двумя типами: int и bool — и следующими преобразованиями f, g между ними.

```
f x
    | x >= 0 = True
    | x < 0 = False
g True = 1
g False = 0
```

Какая категория соответствует его системе? Какие изменения можно внести, чтобы категория упростилась?

Системе соответствует следующая категория.



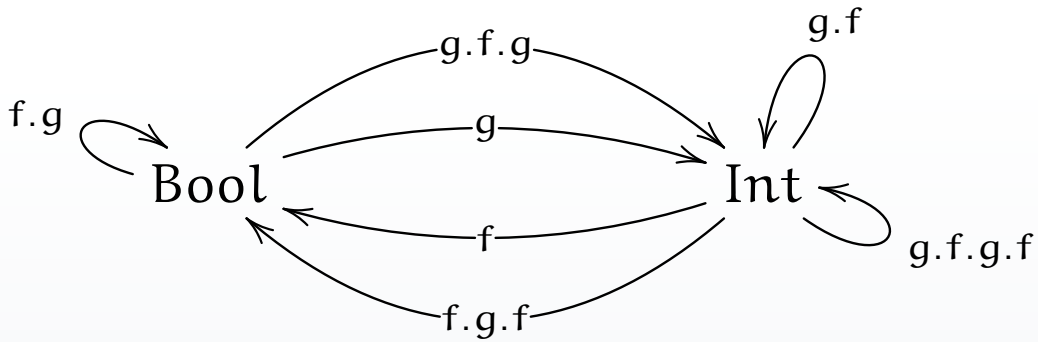


Пример

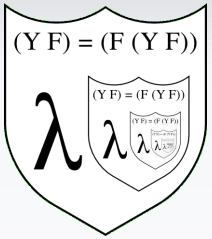
```
f x
    | x >= 0 = True
    | x < 0 = False
g True = 1
g False = 0
```

Какая категория соответствует его системе? Какие изменения можно внести, чтобы категория упростилась?

Системе соответствует следующая категория.

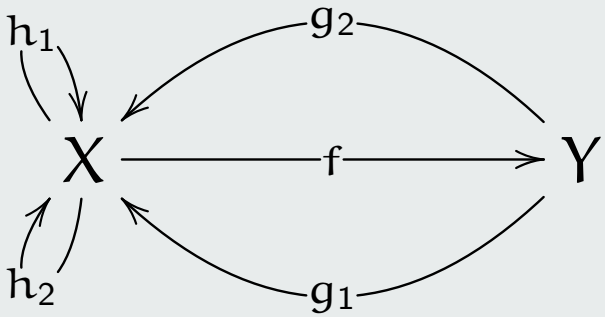


Чтобы ее улучшить, достаточно положить либо g False = -1, либо f x | x <= 0 = False.

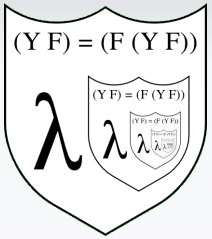


Задача

Рассмотрим следующую категорию.

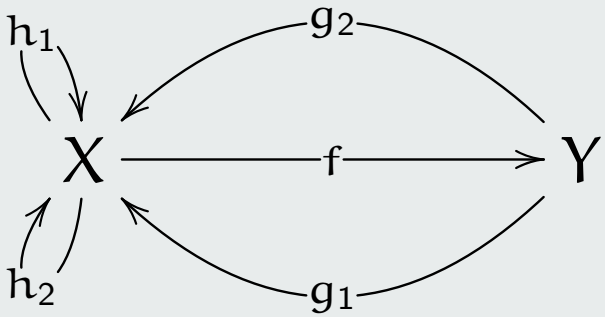


Построить систему типов X, Y и преобразований между ними, которая ей соответствует.



Задача

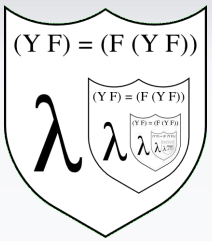
Рассмотрим следующую категорию.



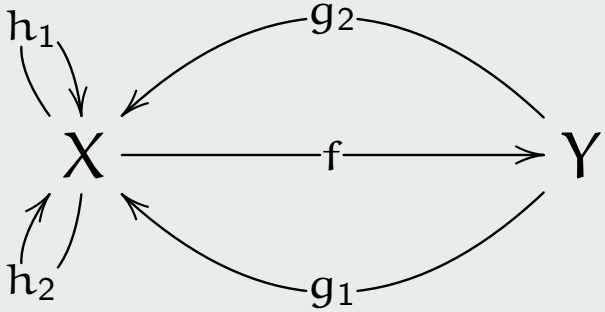
Построить систему типов X, Y и преобразований между ними, которая ей соответствует.

Композиции $f.g_1$, $f.g_2$ обе могут быть равны только id_Y. Поэтому f — сюръекция. Предположим теперь, что $g_1.f = id_X$. Тогда $g_1.f.g_2 = g_1 = g_2$, что невозможно. Поэтому ни $g_1.f$, ни $g_2.f$ тождественными морфизмами быть не могут.

Композиции $f.h_1$, $f.h_2$ — морфизмы из X в Y. Такой морфизм на диаграмме один, это f. Поэтому $f.h_1 = f.h_2 = f$.



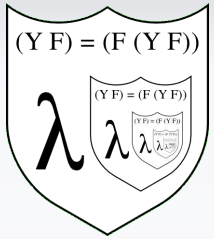
Продолжение задачи



Положим, что тип Y состоит ровно из одного элемента a (то есть $Y = \{a\}$). Тогда для всех $x \in X$ $f(x) = a$. Пусть $g_1(a) = b_1$, $g_2(a) = b_2$. Тогда композиция $g_1.f$ — это морфизм, отображающий все элементы X в b_1, а $g_2.f$ отображает все в b_2. Назначим $g_1.f = h_1$, $g_2.f = h_2$. Проверим существование композиций.

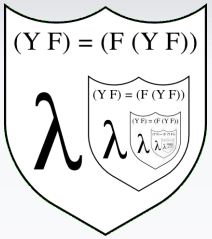
$h_1.h_1 = h_1$	$h_1.g_1 = g_1$	$g_1.f = h_1$
$h_1.h_2 = h_1$	$h_1.g_2 = g_1$	$g_2.f = h_2$
$h_2.h_1 = h_2$	$h_2.g_1 = g_2$	$f.g_i = id$
$h_2.h_2 = h_2$	$h_2.g_1 = g_2$	$f.h_i = f$

Поскольку определенные нами преобразования являются функциями в алгебраическом смысле, ассоциативность композиции выполняется.

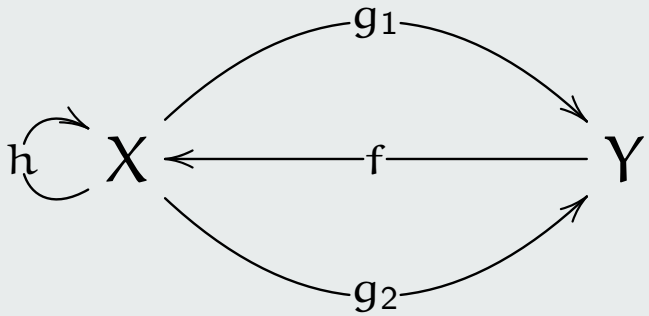


Рекомендации

1. Ритуальная фраза про «функции в алгебраическом смысле» подходит для всех чистых функций (детерминированных). Главное при построении модели — убедиться, что существуют все композиции.
2. Если у объекта X есть петли (стрелки в себя), нужно убедиться, что существует композиция петли с собой, с другими петлями и со всеми входящими в X и исходящими из X стрелками.
3. Чем меньше элементов содержит тип, тем проще построить модель. Если к объекту X из каждого другого объекта ведет не больше, чем одна стрелка, и петель у X нет, можно попробовать объявить X одноэлементным типом. Это самое простое решение, но не обязательно оно подойдет.



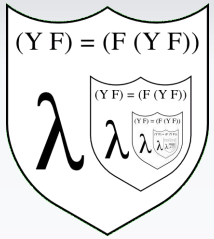
Это категория или нет?



Заведомо $g_i.f = id_Y$ (других морфизмов из Y в Y нет). Поэтому f — инъекция. Притом $h.f = f$, что означает, что h совпадает с id_X на $codom(f)$ (т.е. если $\exists w(f(w) = v)$, то $h(v) = v$).

Известно, что $h \neq id_X$, то есть $\exists a'(h(a') \neq a')$. Поэтому $a' \notin codom(f)$, и f — не сюръекция. Значит, композиции $f.g_i$ не могут быть равны id_X (в частности, ни одна из них не может принимать значение a'), следовательно, обе они равны h.

Поскольку $g_1 \neq g_2$, то $\exists a(g_1(a) \neq g_2(a))$. Поскольку f инъективна, то $f(g_1(a)) \neq f(g_2(a))$. С другой стороны, из рассуждений выше $f(g_1(a)) = h(a) = f(g_2(a))$. Противоречие.



Другие преобразования типов

Что такое в терминах категорий список $[a]$?

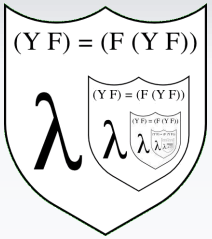
- Любой тип может порождать список.
- Структура преобразований над простыми типами переносится на структуру преобразований над списками.

Списки — это преобразование между категориями!

Определение

Даны категории C_1, C_2. Функтор F — преобразование $F : C_1 \to C_2$ такое, что

- если $f : a \to b$ — морфизм C_1, то $F(f) : F(a) \to F(b)$ — морфизм C_2;
- $F(id_X) = id_{F(X)}$;
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.



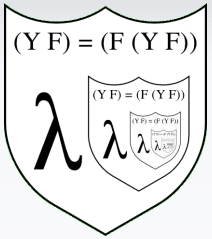
Функторы

Функтор `F a` — полиморфная структура, снабжённая функцией `fmap` (или <$>):

```
fmap :: (a -> b) -> F a -> F b
```

Логичное требование: если функция ничего не делает, её навешивание на структуру не должно ничего менять.

```
fmap id = id
```



Функторы в Haskell

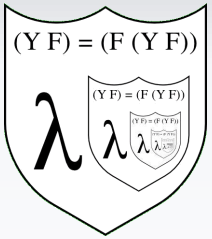
Определение

```
class Functor f where
fmap :: (a -> b) -> f a -> f b
```

Примеры

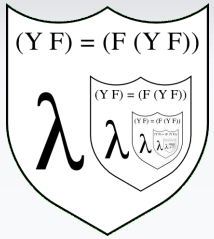
```
-- списки
instance Functor [] where
fmap = map
-- Maybe
instance Functor Maybe where
fmap f (Just x) = Just (f x)
fmap f Nothing = Nothing
```

fmap можно заменить инфиксным <$>.



ФЯ как исчисление

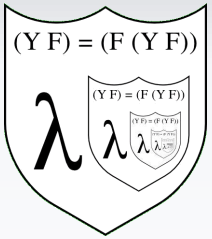
1. Строим тип требуемой полиморфной структуры в виде формулы логики.
2. Строим вывод этого типа, и заодно пытаемся извлечь из вывода построение.
3. Если построение неоднозначно, тогда тестируем варианты построения с помощью законов.
4. Если построение всё ещё неоднозначно, значит, их несколько. Только на этом этапе требуется согласовать конструкцию с библиотечной.
5. PROFIT! Почти всегда получаем корректно определённую структуру, 100% согласованную с дизайном языка.



Функтор State s

```
-- F a раскрываем как s -> (a, s)
fmap :: (a -> b) -> (s -> (a, s)) -> (s -> (b, s))
```

В виде логической формулы:
$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((S \Rightarrow A \;\&\; S) \Rightarrow (S \Rightarrow B \;\&\; S))$.



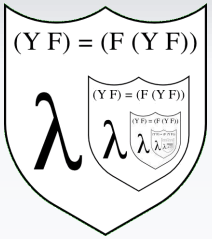
Функтор State s

```
-- F a раскрываем как s -> (a, s)
fmap :: (a -> b) -> (s -> (a, s)) -> (s -> (b, s))
```

В виде логической формулы:
$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((S \Rightarrow A \;\&\; S) \Rightarrow (S \Rightarrow B \;\&\; S))$.
Два возможных способа доказательства:

- `\f x s -> let (x1, s1) = x s in (f x1, s)`
- `\f x s -> let (x1, s1) = x s in (f x1, s1)`

Какой из них подойдёт для построения правильного функтора?
Здравого смысла у нас нет, есть только логика.



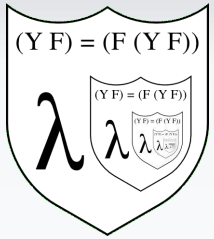
Функтор State s

```
-- F a раскрываем как s -> (a, s)
fmap :: (a -> b) -> (s -> (a, s)) -> (s -> (b, s))
```

В виде логической формулы:
$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((S \Rightarrow A \;\&\; S) \Rightarrow (S \Rightarrow B \;\&\; S))$.
Два возможных способа доказательства:

- `\f x s -> let (x1, s1) = x s in (f x1, s)`
- `\f x s -> let (x1, s1) = x s in (f x1, s1)`

Какой из них подойдёт для построения правильного функтора?
Здравого смысла у нас нет, есть только логика.
(подсказка: законы)



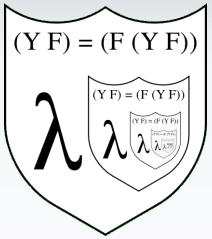
Функтор Either e I

```
-- F a раскрываем как Either e a
fmap :: (a -> b) -> (Either e a) -> (Either e b)
```

Требуемая формула типа: $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((E \vee A) \Rightarrow (E \vee B))$.

$$
\dfrac{
\dfrac{
*A \Rightarrow B \qquad \text{тип } f
\quad
\dfrac{
*E \vee A \qquad \text{тип } a
\quad
\dfrac{
\dfrac{
*E \qquad z1
}{
E \vee B \qquad \text{Left } z1
}
\quad
\dfrac{
*A \qquad z2
}{
B \qquad f\ z2
}
}{
E \vee B \qquad \text{Right } (f\ z2)
}
}{
E \vee B \qquad \text{either } (\lambda z1 \to \text{Left } z1)\ (\lambda z2 \to \text{Right } (f\ z2))\ a
}
}{
(E \vee A) \Rightarrow (E \vee B) \qquad \lambda a \to \text{either } (\lambda z1 \to \text{Left } z1)\ (\lambda z2 \to \text{Right } (f\ z2))\ a
}
}{
(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((E \vee A) \Rightarrow (E \vee B))
}
$$

$$
\lambda f \to (\lambda a \to \text{either } (\lambda z1 \to \text{Left } z1)\ (\lambda z2 \to \text{Right } (f\ z2))\ a)
$$

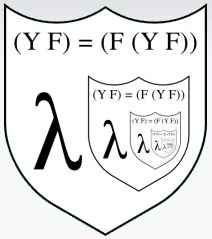


Примеры функторов

Задача

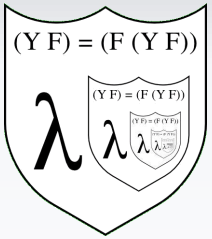
Может ли аппликация <$> для списков быть определена как fmap1, fmap2, fmap3? Если нет, то какие законы функторов нарушаются?

```
fmap1 f [] = []
fmap1 f (x:xs) = (f x : f x : fmap1 f xs)

fmap2 f [] = []
fmap2 f (x:xs) = mappend (fmap2 f xs) [f x]

fmap3 f [] = []
fmap3 f (x:xs)
        | (f x) == x = (x:xs)
        | otherwise = (f x : f x : fmap3 f xs)
```



Бифункторы

```
class Bifunctor f where
  bimap :: (a -> c) -> (b -> d) -> f a b -> f c d
  bimap g h = first g.second h
  first :: (a -> c) -> f a b -> f c b
  first g = bimap g id
  second :: (b -> d) -> f a b -> f a d
  second = bimap id
```

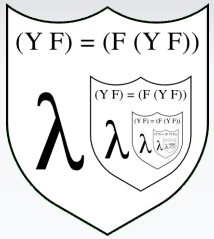


Функции > 1 аргумента

Проблема:

```
?fmap :: (a -> (b -> c)) -> F a -> ???
```

Получается алгебраическая структура «не до конца вычисленных» значений: `F (b -> c)`. Как вычислять её дальше?



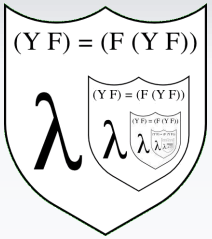
Функции > 1 аргумента

Проблема:

```
?fmap :: (a -> (b -> c)) -> F a -> ???
```

Получается алгебраическая структура «не до конца вычисленных» значений: `F (b -> c)`. Как вычислять её дальше? Понадобится функция типа:

```
??? :: F (b -> c) -> (F b -> F c)
```



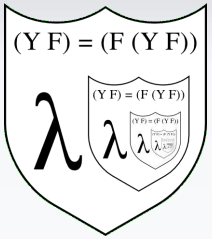
Функции > 1 аргумента

Понадобится функция типа:

```
<*> :: F (b -> c) -> (F b -> F c)
```

С помощью такой аппликации можно обрабатывать функции какого угодно числа аргументов, если добавить ещё «стандартный способ» погружения в алгебру:

```
pure :: a -> F a
```



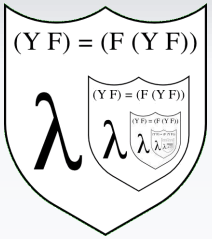
Аппликативные функторы

Определение

```
class Functor f => Applicative f where
pure :: a -> f a
<*> :: f(a -> b) -> f a -> f b
```

Примеры

```
-- Списки
instance Applicative [] where
pure x = [x]
fs <*> xs = [f x | f <- fs, x <- xs]
-- Maybe
instance Applicative Maybe where
pure = Just
Nothing <*> _ = Nothing
(Just f) <*> a = f <$> a
```

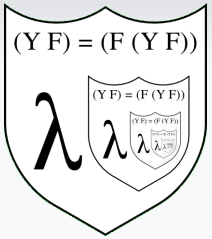


Законы аппликативов

Пока смотрим:

```
pure id <*> x = x
pure f <*> pure x = pure (f x)
u <*> pure x = pure (\f -> f x) <*> u
pure (.) <*> u <*> v <*> w = u <*> (v <*> w)
```

Алгебраически естественно выводятся из альтернативного представления аппликативных функторов через т.н. «тензорное умножение» на моноидальной структуре.



Моноидальная структура

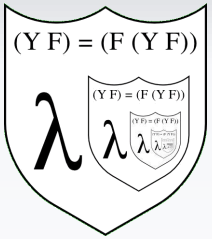
```
class Functor f => Monoidal f where
  (**) :: f a -> f b -> f (a,b)
  unit :: f ()
```

Законы моноидальных функторов:

```
u ** unit = u = unit ** u
fmap (f * g) (u ** v) = fmap f u ** fmap g v
u ** (v ** w) = (u ** v) ** w
```

Правила перевода:

```
pure x = fmap (const x) unit
fs <*> xs = fmap (uncurry ($)) $ fs ** xs
```



Аппликатив для `State s`

Запишем подходящий тип:

$$(S \Rightarrow (A \Rightarrow B)\ \&\ S) \Rightarrow (S \Rightarrow A\ \&\ S) \Rightarrow (S \Rightarrow B\ \&\ S)$$

Начнём вывод:

$*S \Rightarrow (A \Rightarrow B)\ \&\ S$ — тип `f`

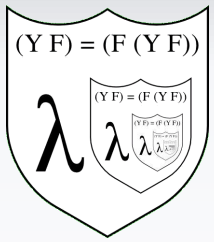
$*S \Rightarrow A\ \&\ S$ — тип `a`

$*S$ — тип `s`

...и непонятно, что применять к `s`*:* `f` *или* `a`*?*

$$(S \Rightarrow (A \Rightarrow B)\ \&\ S) \Rightarrow (S \Rightarrow A\ \&\ S) \Rightarrow (S \Rightarrow B\ \&\ S)$$

Достроить вывод типа, извлечь терм и показать, что извлечённый терм не противоречит законам аппликативов номер 1 и 3 (законы 2 и 4 можно не проверять) — 3 балла. Решение здесь не единственное.



Аппликатив для `Either e`

$*A \Rightarrow B$ тип f

$*E \vee A$ тип a

$*E$ $z1$ $*A$ $z2$

$*E$ $v1$ $*A \Rightarrow B$ $v2$

B $v2\ z2$

$E \vee B$ $\mathrm{Left}\ v1$ $E \vee B$ $\mathrm{Right}\ (v2\ z2)$

$E \vee B$ $\mathrm{Left}\ z1$ $E \vee B$ $\mathrm{either}\ (\lambda v1 \to \mathrm{Left}\ v1)\ (\lambda v2 \to \mathrm{Right}\ (v2\ z2))\ \mathrm{f}$

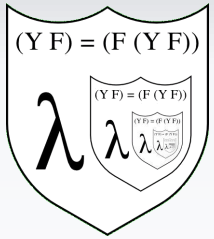
$E \vee B$ $\mathrm{either}\ (\lambda z1 \to \mathrm{Left}\ z1)\ (\lambda z2 \to$
$(\mathrm{either}\ (\lambda v1 \to \mathrm{Left}\ v1)\ (\lambda v2 \to \mathrm{Right}\ (v2\ z2)\ \mathrm{f}))\ \mathrm{a}$

$(E \vee A) \Rightarrow (E \vee B)$ тип $\lambda a \to (\mathrm{either}\ \ldots)$

$(E \vee (A \Rightarrow B)) \Rightarrow ((E \vee A) \Rightarrow (E \vee B))$ тип $\lambda f\ a \to$

$\mathrm{either}\ (\lambda z1 \to \mathrm{Left}\ z1)$
$(\lambda z2 \to (\mathrm{either}\ (\lambda v1 \to \mathrm{Left}\ v1)\ (\lambda v2 \to \mathrm{Right}\ (v2\ z2)\ \mathrm{f}))$
a

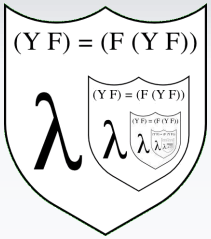
Не считая неудобной кодировки для разбора случаев, вывод простой и прямолинейный.



Упражнения

```
-- K, S определяются как обычно
f x y = K (*) `S` (+) x `S` (+) y
> f 1 2 3
```

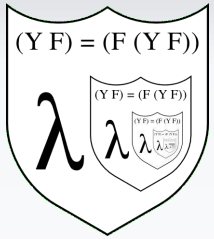
```
> [(*0),(+100),(-2)] <*> [1,2,3]
> (,,) <$> "dog" <*> "cat" <*> "rat"
> (\a b c ->[a,b,c]) <$> (+5) <*> (*3) <*> (/2) $ 7
```



Задача

Может ли аппликативный функтор на списках задаваться операциями fapp1, fapp2? Если нет, какие законы аппликативных функторов нарушаются?

```
fapp1 [] xs = []
fapp1 (f:fs) (x:xs) = ((f x):(fapp1 fs xs))

fapp2 [] xs = []
fapp2 [f] xs = map f xs
fapp2 (f:fs) xs = fapp2 fs (map f xs)
```



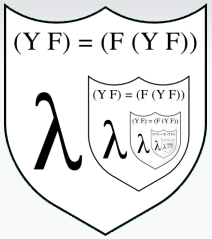
Продолжение задачи

Ещё раз рассмотрим определение аппликации в контексте списков.

```
pure x = [x]
fapp1 [] xs = []
fapp1 (f:fs) (x:xs) = ((f x):(fapp1 fs xs))
```

Эта аппликация нарушает закон сохранения единичного элемента.

```
> [\x -> x] `fapp1` [1,2,3]
[1]
```



Продолжение задачи

Ещё раз рассмотрим определение аппликации в контексте списков.

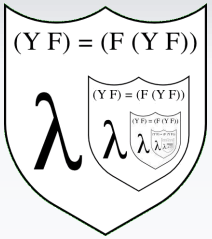
```
pure x = [x]
fapp1 [] xs = []
fapp1 (f:fs) (x:xs) = ((f x):(fapp1 fs xs))
```

Эта аппликация нарушает закон сохранения единичного элемента.

```
> [\x -> x] `fapp1` [1,2,3]
[1]
```

Можно переопределить pure так, чтобы fapp1 стало корректной аппликацией.

```
pure x = [x, x..]
```



Еще о законах аппликативов

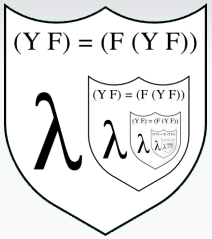
Если выполняются два первых закона, то четвертый всегда нужно проверять для списка функций, содержащего больше, чем один элемент. Например, рассмотрим определение:

```
fapp3 [] xs = []
fapp3 (f:fs) xs = map f xs
```

Четвертый закон:
fapp3 fs [x] должно быть равно fapp3 [\h -> h x] fs

Положим fs = (f:fs'), тогда
fapp3 fs [x] = [(f x)]
fapp3 [\ h -> h x] fs = map (\h -> h x) fs

Видно, что списки получаются разные. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть fs = [(+1), (+2)], x = 0.



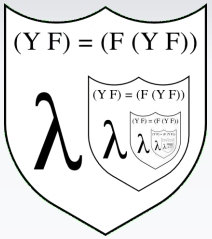
Модальные логики

Модальность «необходимости»: $\Box A$ (A выполнено во всех достижимых мирах).

Правила вывода, общие для большинства модальных логик:

$$\frac{A \text{ — теорема}}{\Box A} \qquad \frac{\Box(A \Rightarrow B)}{\Box A \Rightarrow \Box B}$$

Ничего не напоминают?



Модальные логики

Модальность «необходимости»: $\Box A$ (A выполнено во всех достижимых мирах).

Правила вывода, общие для большинства модальных логик:

$$\frac{A \text{ — теорема}}{\Box A} \qquad \frac{\Box(A \Rightarrow B)}{\Box A \Rightarrow \Box B}$$

Ничего не напоминают?

Аппликация! (и это *логичная* причина так называемого «applicative monad proposal» в Haskell)

Из интуиционистской логики можно перейти к модальной простым гомоморфизмом μ:

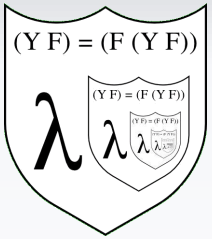
$\mu(A) = \Box A$ (A — переменная)

$\mu(\Phi \Rightarrow \Psi) = \Box(\mu(\Phi) \Rightarrow \mu(\Psi))$

$\mu(\Phi \vee \Psi) = \mu(\Phi) \vee \mu(\Psi)$

$\mu(\Phi \,\&\, \Psi) = \mu(\Phi) \,\&\, \mu(\Psi)$

Помимо правил аппликативов, в полученной логике выполнены: $\Box A \Rightarrow A$, $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$. О смысле этих правил узнаем далее

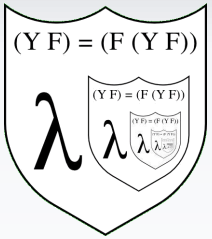


Модальная логика S4

Определение S4

- Модальность $\Box$ — «необходимость». Правило вывода:
  $$\frac{A \text{ — теорема}}{\Box A}.$$
  Аксиомы:
  - $\Box A \Rightarrow A$;
  - $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$;
  - $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow \Box A \Rightarrow \Box B$
- Двойственная модальность $\Diamond$ — «возможность». $\Diamond A \Leftrightarrow \neg \Box \neg A$. Выводимо $A \Rightarrow \Diamond A$.

Модели S4 — модели Крипке.



Лабораторная работа 2 (любой функциональный язык)

1. По описанию графа в языке Graphviz автоматически проверить, описывает ли он категорию как множество преобразований над, самое большее, множествами из n элементов, где n — это максимальное число входящих стрелок в некоторый объект.
2. По записи терма в формате Haskell, содержащей аппликацию, абстракцию, пары и проекции, построить редуцированный терм, эквивалентный ему. Исходный терм не обязательно корректно типизируется.
3. По формуле в минимальной логике и входному числу n проверить, существует ли контрпример для этой формулы в моделях Крипке максимальной высоты n.
4. По λ-терму, записанному в формате Haskell, построить CPS-термы в стиле Call-by-Name и Call-by-Value.
5. По записи терма в формате Haskell, содержащей аппликацию, абстракцию, пары и проекции, построить его тип либо вывести сообщение о том, что терм не типизируется.
6. По записи определения функции в формате Haskell, содержащего повторные переменные в образцах (но без стражей), построить корректное определение функции.
7. (на двоих) По λ-терму построить его представление в комбинаторах, с использованием ограниченного η-преобразования.
8. (на двоих) По описанию ADT в языке Haskell автоматически породить реализацию функтора для него.