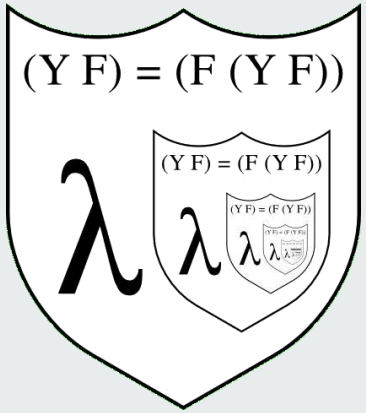
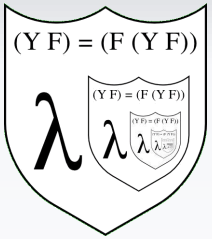
Бестиповое лямбда-исчисление

А.Н. Непейвода

2022 г.



Лямбда-исчисление

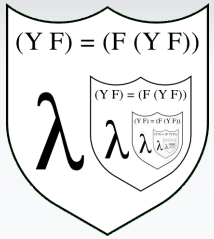


Перегруженность равенства

$$f(a) = g(a + 1)$$

Это:

- равенство заранее заданных f, g в точке a?

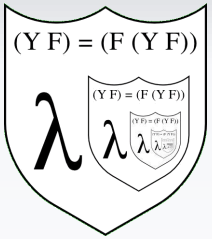


Перегруженность равенства

$$f(a) = g(a + 1)$$

Это:

- равенство заранее заданных f, g в точке a?
- равенство заранее заданных f, g для всех a?

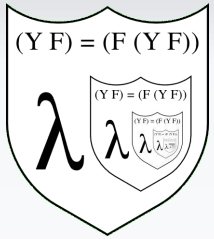


Перегруженность равенства

$$f(a) = g(a + 1)$$

Это:

- равенство заранее заданных f, g в точке a?
- равенство заранее заданных f, g для всех a?
- способ описания **новой** функции f с помощью заранее заданной функции g?

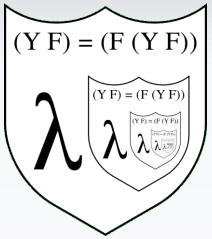


λ-исчисление: новая надежда

$$f(a) = g(a + 1)$$

Происхождение знака λ (согласно Россеру)

$$g(\hat{a} + 1) \to \hat{a}.g(a + 1) \to /\backslash a.g(a + 1)$$



λ-исчисление: новая надежда

$$f(a) = g(a + 1)$$

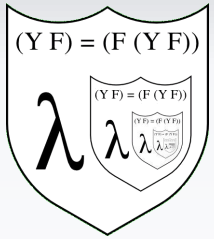
То, что мы знаем теперь

$$f = \lambda a.g(a + 1)$$

Алонзо Чёрч: порождение функций (абстракция) + применение + логические связки = надежда на формализацию математики.

- $\forall x P(x) \equiv \forall(\lambda x.P(x))$;
- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \equiv \mathsf{sum}(1, \infty, \lambda x.\frac{1}{x^2})$.

Происходит зарождение синтаксиса функций высшего порядка.



λ-исчисление: новая надежда

$$f(a) = g(a + 1)$$

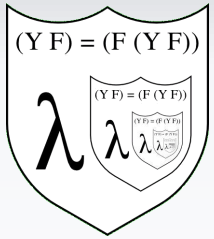
То, что мы знаем теперь

$$f = \lambda a.g(a + 1)$$

Алонзо Чёрч: порождение функций (абстракция) + применение + логические связки = надежда на формализацию математики.

Парадокс Карри

Пусть $D = \lambda x.(x\ x) \Rightarrow A$, тогда $(D\ D) \Leftrightarrow ((D\ D) \Rightarrow A)$, что влечёт A.



λ-исчисление: новая надежда

$$f(a) = g(a + 1)$$

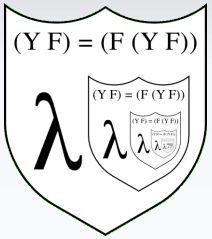
То, что мы знаем теперь

$$f = \lambda a.g(a + 1)$$

Алонзо Чёрч: порождение функций (абстракция) + применение + логические связки = надежда на формализацию математики.

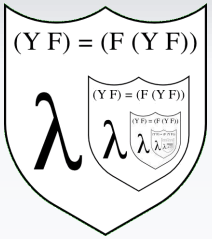
Высказывание Карри

Высказывание C, являющееся собственной посылкой: $C = C \Rightarrow A$.



Неформально о λ-исчислении

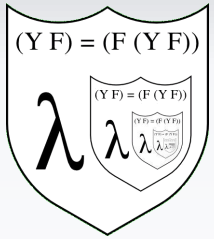
- Формальная модель вычислений, позволяет компактно описывать семантику ЯП.
- Бестиповая версия — А. Черч, 1935 (и много типизированных).
- Базисные операции — применение (функция $\rightarrow$ данные) и абстракция (данные $\rightarrow$ функция).



Неформально о λ-исчислении

Пусть F, X — термы. F X — операция применения терма F (функции) к терму X (данным). Различения по типам нет, возможно самоприменение: F F.

Пусть $M \equiv M[x]$ — терм, возможно содержащий x. Тогда абстракция $\lambda x.M$ обозначает анонимную (неименованную) функцию от x: $x \to M[x]$.



Неформально о λ-исчислении

Пусть F, X — термы. F X — операция применения терма F (функции) к терму X (данным). Различения по типам нет, возможно самоприменение: F F.

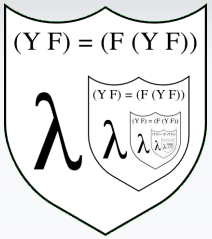
Haskell

```
-- Первый элемент пары -- функция, применяемая
-- ко второму элементу.
Fun1 Fun2
```

Пусть $M \equiv M[x]$ — терм, возможно содержащий x. Тогда абстракция $\lambda x.M$ обозначает анонимную (неименованную) функцию от x: $x \to M[x]$.

Haskell

```
\x -> M
```



Неформально о λ-исчислении

Применение и абстракция согласованы:

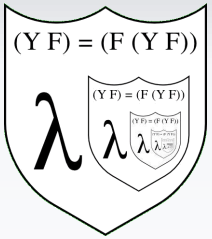
$$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda y.y) = (\lambda y.y)\ (\lambda y.y) = \lambda y.y$$

β-эквивалентность:

$$(\lambda x.M)\ N =_\beta M[x := N].$$

Чистое λ-исчисление

- Применение
- Абстракция
- β-эквивалентность.

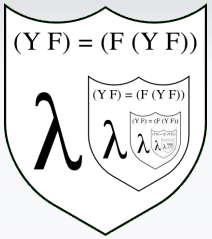


Термы λ-исчисления

- $x \in V \Rightarrow x \in \Lambda$;
- $M, N \in \Lambda \Rightarrow (M\ N) \in \Lambda$;
- $M \in \Lambda, x \in V \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda$.

Пример

$$((\lambda x.(x\ x))\ (((\lambda x.(\lambda y.x))\ ((\lambda y.y)\ y))\ x))$$



Термы λ-исчисления

- $x \in V \Rightarrow x \in \Lambda$;
- $M, N \in \Lambda \Rightarrow (M\ N) \in \Lambda$;
- $M \in \Lambda, x \in V \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda$.

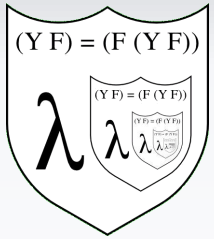
Пример

$$((\lambda x.(x\ x))\ (((\lambda x.(\lambda y.x))\ ((\lambda y.y)\ y))\ x))$$

Haskell

```
ghci> ((\y -> y) (\y -> y)) 1
1
ghci> (\x y -> y x) (\z1 z2 -> z1 z2) (\y z -> z +1) 3
4
```

Функция $\lambda x.x\ x$ в базовом Haskell не допустима из-за строгой статической типизации (см. следующая лекция).



Соглашения о скобках

- Внешние скобки опускаются.
- Применение ассоциативно влево:

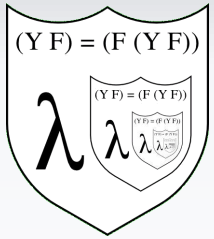
$M\ N\ P\ Q$ — то же, что $(((M\ N)\ P)\ Q)$.

- Абстракция ассоциативна вправо:

$\lambda x\ y.F$ — то же, что $(\lambda x.(\lambda y.F))$.

- Тело абстракции простирается максимально вправо.

$\lambda x.M\ N\ P$ — то же, что $\lambda x.(M\ N\ P)$.



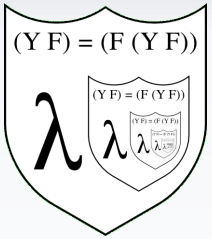
Соглашения о скобках (Haskell)

Абстракции:

```
\x -> \y -> x (\z -> z)
-- То же, что и λx.(λy.x (λz.z))
-- Но можно короче: \x y -> x (\z -> z)
```

Применения:

```
\x -> \y -> x y y y
-- То же, что и λx.(λy.(((x y) y) y)))
-- Но не это: λxy.x (y y y)
-- И не это: λxy.(x y) (y y)
```

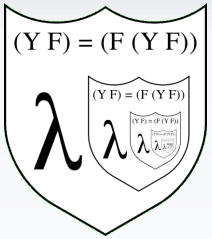


Упрощение скобочных термов (исчисление)

Пример

Внешние скобки опускаются.

$$(\lambda x.(x\ x))\ (((\lambda x.(\lambda y.x))\ ((\lambda y.y)\ y))\ x))$$

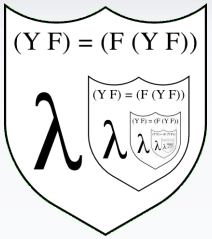


Упрощение скобочных термов (исчисление)

Пример

Применение ассоциативно влево.

$$(\lambda x.(x\ x))\ (((\lambda x.(\lambda y.x))\ ((\lambda y.y)\ y))\ x)$$

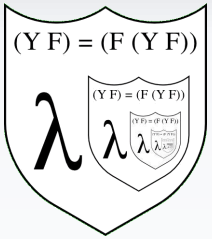


Упрощение скобочных термов (исчисление)

Пример

Абстракция ассоциативна вправо.

$$(\lambda x.x\ x)\ ((\lambda x.(\lambda y.x))\ ((\lambda y.y)\ y)\ x)$$

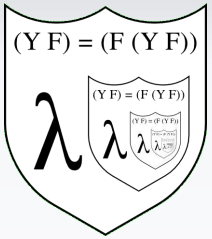


Упрощение скобочных термов (исчисление)

Пример

Итоговый терм (остальные скобки снять нельзя):

$$(\lambda x.x\ x)\ ((\lambda x\ y.x)\ ((\lambda y.y)\ y)\ x)$$



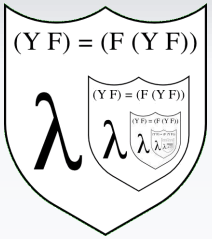
Свободные и связанные переменные

Абстракция $\lambda x.M$ **связывает** переменную x в терме M.

Пример

$$(\lambda x.x\ x)\ ((\lambda x\ y.x)\ ((\lambda y.y)\ z)\ w)$$

Связанные **вхождения** переменных выделены красным; свободные — синим.



Свободные переменные: формально

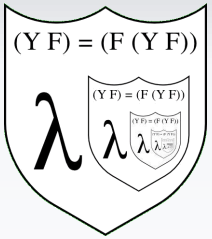
Множество свободных переменных $FV(M)$ в терме M определяется индуктивно:

- $FV(x) = \{x\}$;
- $FV(M\ N) = FV(M) \cup FV(N)$;
- $FV(\lambda x.M) = FV(M) \setminus \{x\}$.

Множество связанных переменных $BV(M)$:

- $BV(x) = \varnothing$;
- $BV(M\ N) = BV(M) \cup BV(N)$;
- $BV(\lambda x.M) = BV(M) \cup \{x\}$.

Верно ли, что $BV(M)$ — множество всех переменных, входящих в M, минус $FV(M)$?



Свободные переменные: формально

Множество свободных переменных $FV(M)$ в терме M определяется индуктивно:

- $FV(x) = \{x\}$;
- $FV(M\ N) = FV(M) \cup FV(N)$;
- $FV(\lambda x.M) = FV(M) \setminus \{x\}$.

Множество связанных переменных $BV(M)$:

- $BV(x) = \varnothing$;
- $BV(M\ N) = BV(M) \cup BV(N)$;
- $BV(\lambda x.M) = BV(M) \cup \{x\}$.

Верно ли, что $BV(M)$ — множество всех переменных, входящих в M, минус $FV(M)$? Нет! Пример: $(\lambda x.x)\ x$.

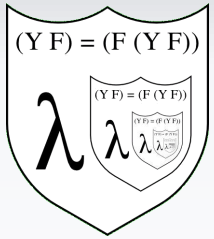
Свободные переменные: формально

Множество свободных переменных $FV(M)$ в терме M определяется индуктивно:

- $FV(x) = \{x\}$;
- $FV(M\ N) = FV(M) \cup FV(N)$;
- $FV(\lambda x.M) = FV(M) \setminus \{x\}$.

- Разные вхождения переменной x могут иметь разный статус!
- Каждая связанная переменная x в $\lambda x.M$ относится к самой внутренней абстракции, связывающей ее!

$$\lambda x.(\lambda x\ y.y\ (x\ x))\ (\lambda y.x\ (\lambda x.(x\ y)))$$



Комбинаторы

Определение

Терм M называется комбинатором, если $FV(M) = \varnothing$.

Часто используемые комбинаторы

$\mathbf{I} = \lambda x.x;$

$\mathbf{K} = \lambda x\, y.x;$

$\mathbf{K}_* = \lambda x\, y.y;$

$\omega = \lambda x.x\ x;$

$\Omega = (\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x);$

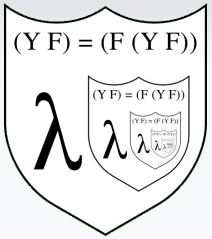
$\mathbf{C} = \lambda f\, x\, y.f\ y\ x;$

$\mathbf{B} = \lambda f\, g\, x.f\ (g\ x);$

$\mathbf{S} = \lambda f\, g\, x.f\ x\ (g\ x).$

Haskell

```
k = \x y -> x
-- id -- имя I, const - имя K, flip -- имя C.
```



α-эквивалентность

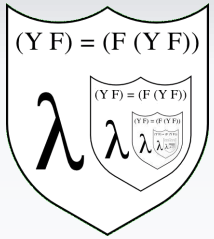
Связанные переменные можно переименовывать.

α-эквивалентные λ-термы

$$\mathbf{I} = \lambda x.x = \lambda y.y = \lambda f.f$$

α-эквивалентные термы дают один и тот же результат при β-преобразовании.

- $(\lambda x.x)\ M = M$;
- $(\lambda y.y)\ M = M$;
- $(\lambda f.f)\ M = M$.



Частичные функции

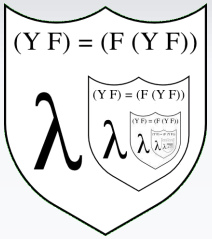
Пусть x, y свободны в $\varphi[x, y]$. Построим абстракции:

- $\Phi_x = \lambda y.\varphi[x, y]$;
- $\Phi = \lambda x.\Phi_x = \lambda x.(\lambda y.\varphi[x, y]) = \lambda x\ y.\varphi[x, y]$.

Применим эти абстракции к двум аргументам (каррирование, карринг):

$$\Phi\ X\ Y = (\Phi\ X)\ Y = \Phi_X\ Y = (\lambda y.\varphi[X, y])\ Y = \varphi[X, Y].$$

Например, $(+\ 3)$ в λ-исчислении можно понимать как операцию прибавления 3.



Частичные функции

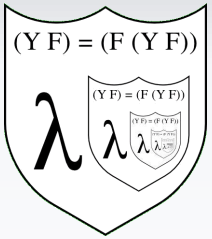
Пусть x, y свободны в $\varphi[x, y]$. Построим абстракции:

- $\Phi_x = \lambda y.\varphi[x, y]$;
- $\Phi = \lambda x.\Phi_x = \lambda x.(\lambda y.\varphi[x, y]) = \lambda x\ y.\varphi[x, y]$.

Применим эти абстракции к двум аргументам (каррирование, карринг):

$$\Phi\ X\ Y = (\Phi\ X)\ Y = \Phi_X\ Y = (\lambda y.\varphi[X, y])\ Y = \varphi[X, Y].$$

Частичного применения ко второму аргументу (без первого) нет!

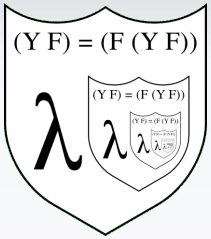


Комбинаторная логика

Комбинаторы можно определить через их поведение на аргументах:

- $\mathbf{I}\ x = x$
- $\mathbf{K}\ x\ y = x$
- $\boldsymbol{\omega}\ x = x\ x$
- $\mathbf{S}\ x\ y\ z = x\ z\ (y\ z)$

Базис $\{\mathbf{K}, \mathbf{S}, \mathbf{I}\}$ + применение — система, эквивалентная λ-исчислению.

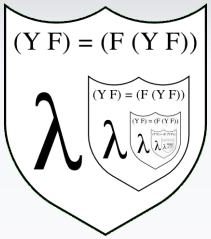


Упражнение

λ-исчисление

$\mathbf{S\ K\ I\ K} =_\beta\ ?$

$\mathbf{S\ K\ K\ K} =_\beta\ ?$

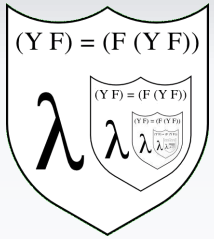


Упражнение

λ-исчисление

$$\underline{\mathbf{S}}\ \mathbf{K}\ \mathbf{I}\ \mathbf{K} =_\beta \underline{\mathbf{K}}\ \mathbf{K}\ (\mathbf{I}\ \mathbf{K}) =_\beta \mathbf{K}$$

$$\underline{\mathbf{S}}\ \mathbf{K}\ \mathbf{K}\ \mathbf{K} =_\beta \underline{\mathbf{K}}\ \mathbf{K}\ (\mathbf{K}\ \mathbf{K}) =_\beta \mathbf{K}$$



Подстановка

Определение

$$
\begin{aligned}
x[x := N] &= N \\
y[x := N] &= y \\
(P\ Q)[x := N] &= (P[x := N])\ (Q[x := N]) \\
(\lambda y.P)[x := N] &= \lambda y.(P[x := N]),\ y \notin FV(N) \\
(\lambda x.P)[x := N] &= \lambda x.P
\end{aligned}
$$

Подстановка

Определение

$$
\begin{aligned}
x[x := N] &= N \\
y[x := N] &= y \\
(P\ Q)[x := N] &= (P[x := N])\ (Q[x := N]) \\
(\lambda y.P)[x := N] &= \lambda y.(P[x := N]),\ y \notin FV(N) \\
(\lambda x.P)[x := N] &= \lambda x.P
\end{aligned}
$$

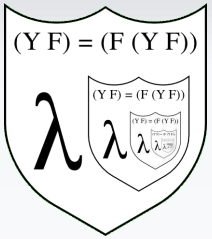
Что делать, если $y \in FV(N)$ (4 правило)?

Пример: $\lambda y.x\ y[x := y]$

Вопрос

Подойдет ли следующее правило, если $y \in FV(N)$?

$$(\lambda y.P)[x := N] = \lambda z.((P[y := z])[x := N]),\ z \notin FV(N) \cup FV(P)$$



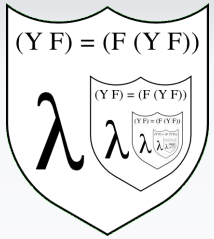
Коллизия (захвата) имен

Соглашение Барендрегта

Имена связанных переменных всегда выбираются так, чтобы они отличались от имен свободных переменных.

Пример

Редукция $((\lambda x\ y.x\ y)\ y)$ приводит к коллизии: $(\lambda y.x\ y)[x := y]$. В редукции $((\lambda x\ z.x\ z)\ y)$ коллизии нет.



Аксиомы λ-исчисления

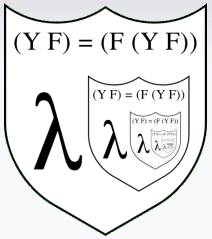
Основная аксиома β-конверсии

Для любых $M, N \in \Lambda$ $(\lambda x.M)\ N = M[x := N]$.

Аксиомы равенства

$$M = M$$
$$M = N \Rightarrow N = M$$
$$M = N\ \&\ N = L \Rightarrow M = L$$
$$M = M' \Rightarrow M\ Z = M'\ Z$$
$$M = M' \Rightarrow Z\ M = Z\ M'$$
$$M = M' \Rightarrow \lambda x.M = \lambda x.M'$$

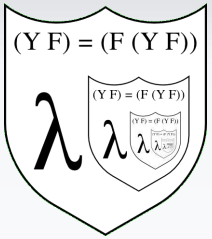
$M = N$ доказуемо — $\lambda \vdash M = N$.



α-преобразование

Основная аксиома α-конверсии

Для любых M, y таких, что $y \notin FV(M)$,
$\lambda x.M =_\alpha \lambda y.M[x := y]$.



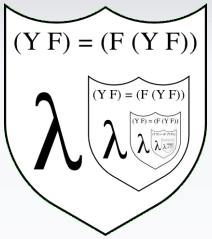
α-преобразование

Основная аксиома α-конверсии

Для любых M, y таких, что $y \notin FV(M)$,
$\lambda x.M =_\alpha \lambda y.M[x := y]$.

...но есть нюанс

Рассмотрим $\lambda x.(\lambda y.x\ y)$. Формально y не свободна в $\lambda y.x\ y$. После подстановки $[x := y]$ получаем: $\lambda y.(\lambda y.y\ y)$. В чем ошибка?



α-преобразование

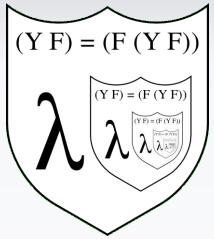
Основная аксиома α-конверсии

Для любых M, y таких, что $y \notin FV(M)$,
$\lambda x.M =_\alpha \lambda y.M[x := y]$.

Вопрос

Подойдет ли следующее правило, если $y \in FV(N)$?

$$(\lambda y.P)[x := N] = \lambda z.((P[y := z])[x := N]),\ z \notin FV(N) \cup FV(P)$$

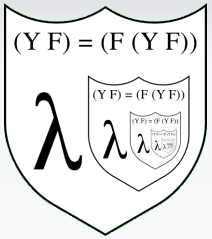


α-преобразование

Основная аксиома α-конверсии

Для любых M, y таких, что $y \notin FV(M)$,
$\lambda x.M =_\alpha \lambda y.M[x := y]$.

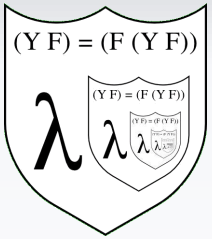
Подстановка не определена полностью, пока не будет пройден весь терм. Имея $(\lambda y.(\lambda z.(y\ z\ x)))[x := y]$, формально строим последовательность:
$\lambda z.((\lambda z.(y\ z\ x))[y := z])[x := y]$
$\lambda z.((\lambda w.((y\ z\ x)[z := w])[y := z]))[x := y]$
$\lambda z.((\lambda w.(y\ w\ x)[y := z]))[x := y]$
$\lambda z.((\lambda w.(z\ w\ x))[x := y])$
$\lambda z.(\lambda w.(z\ w\ y))$



Применение α-конверсии

Пусть $\omega = \lambda x.x\ x, \mathbf{1} =_\alpha \lambda y\, z.y\ z.$

$$
\begin{array}{rcl}
\omega\ \mathbf{1} & = & (\lambda x.x\ x)\ (\lambda y\, z.y\ z) \\
& =_\beta & (\lambda y\, z.y\ z)\ (\lambda y\, z.y\ z) \\
& =_\beta & \lambda z.(\lambda y\, z.y\ z)\ z \\
& =_\alpha & \lambda z.(\lambda y\, z'.y\ z')\ z \\
& =_\beta & \lambda z.(\lambda z'.z\ z') \\
& = & \lambda z\, z'.z\ z'
\end{array}
$$

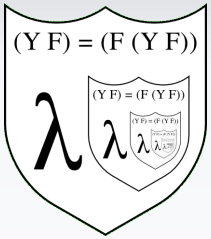


η-конверсия

Схема аксиом η-конверсии

Пусть $x \notin FV(M)$. Тогда $\lambda x.M\ x =_\eta M$.

Поскольку $\forall N((\lambda x.M\ x)\ N) =_\beta (M\ N)$, термы $\lambda x.M\ x$ и M неразличимы по свойствам (экстенсиональность равенства).



η-конверсия

Схема аксиом η-конверсии

Пусть $x \notin FV(M)$. Тогда $\lambda x.M\ x =_\eta M$.

Поскольку $\forall N((\lambda x.M\ x)\ N) =_\beta (M\ N)$, термы $\lambda x.M\ x$ и M неразличимы по свойствам (экстенсиональность равенства).

Примеры

$\lambda x\, y.x\ y =_\eta\ ?$
$\lambda x\, y.y\ x =_\eta\ ?$

η-конверсия

Схема аксиом η-конверсии

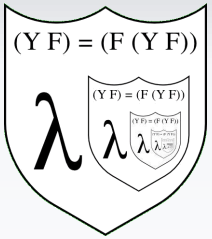
Пусть $x \notin FV(M)$. Тогда $\lambda x.M\ x =_\eta M$.

Поскольку $\forall N((\lambda x.M\ x)\ N) =_\beta (M\ N)$, термы $\lambda x.M\ x$ и M неразличимы по свойствам (экстенсиональность равенства).

Примеры

$$\lambda x\, y.x\ y = \lambda x.\overbrace{(\lambda y.x\ y)}^{\text{конверсия}} =_\eta \lambda x.x$$

$$\lambda x\, y.y\ x =_\eta\ ?$$



η-конверсия

Схема аксиом η-конверсии

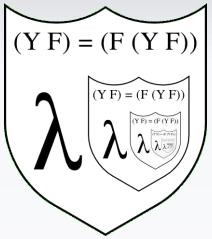
Пусть $x \notin FV(M)$. Тогда $\lambda x.M\ x =_\eta M$.

Поскольку $\forall N((\lambda x.M\ x)\ N) =_\beta (M\ N)$, термы $\lambda x.M\ x$ и M неразличимы по свойствам (экстенсиональность равенства).

Примеры

$$\lambda x\,y.x\ y = \lambda x.\overbrace{(\lambda y.x\ y)}^{\text{конверсия}} =_\eta \lambda x.x$$

$$\lambda x\,y.y\ x = \lambda x.\overbrace{(\lambda y.(y\ x))}^{\text{x во внутренней абстракции}} \text{ редукция невозможна.}$$



Пример конверсии

Пусть x не свободна в M. Тогда $\lambda x.M\ x =_\eta M$.

Пример редукции:

$$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda y\, z.y\ z)$$

Пример конверсии

$$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda y\, z.y\ z)$$

$$\Big\downarrow x \mapsto \lambda y\, z.y\ z$$

$$(\lambda y\, z.y\ z)\ (\lambda y\, z.y\ z)$$

Пример конверсии

$$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda y\, z.y\ z)$$

$$\downarrow\ x \mapsto \lambda y\, z.y\ z$$

$$(\lambda y.\ (\lambda z.y\ z))\ (\lambda y\, z.y\ z)$$

$$\downarrow\ y \mapsto \lambda y\, z.y\ z$$

$$\lambda z.(\lambda y\, z.y\ z)\ z$$

Пример конверсии

$$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda y\, z.y\ z)$$

$$\downarrow\ x \mapsto \lambda y\, z.y\ z$$

$$(\lambda y.\ (\lambda z.y\ z))\ (\lambda y\, z.y\ z)$$

$$\downarrow\ y \mapsto \lambda y\, z.y\ z$$

$$\lambda z.(\lambda y\, z.y\ z)\ z$$

$$\downarrow\ \alpha\text{—преобразование}$$

$$\lambda z.(\lambda y\, z'.y\ z')\ z$$

Пример конверсии

$$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda y\, z.y\ z)$$

$$\downarrow\ x \mapsto \lambda y\, z.y\ z$$

$$(\lambda y.\ (\lambda z.y\ z))\ (\lambda y\, z.y\ z)$$

$$\downarrow\ y \mapsto \lambda y\, z.y\ z$$

$$\lambda z.(\lambda y\, z.y\ z)\ z$$

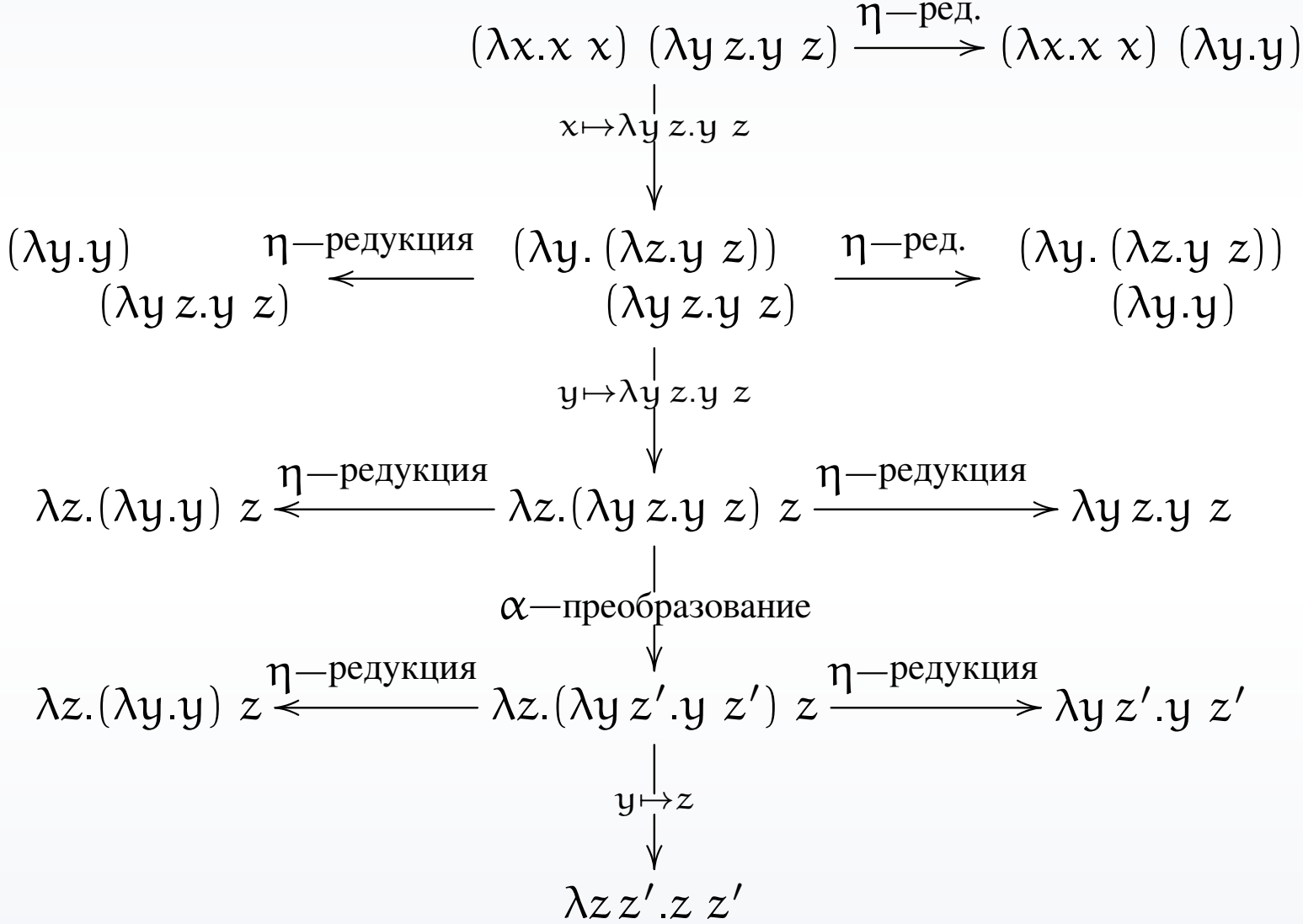
$$\downarrow\ \alpha\text{—преобразование}$$

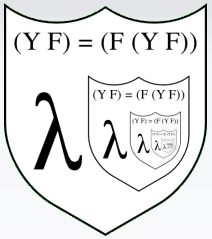
$$\lambda z.(\lambda y.\ (\lambda z'.y\ z'))\ z$$

$$\downarrow\ y \mapsto z$$

$$\lambda z\, z'.z\ z'$$

Пример конверсии

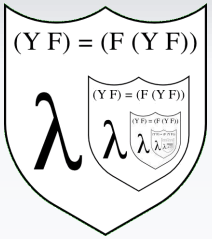




Применение η-конверсии

- $\mathbf{I}\ x = x$
- $\mathbf{K}\ x\ y = x$
- $\mathbf{S}\ x\ y\ z = x\ z\ (y\ z)$

Базис $\{\mathbf{K}, \mathbf{S}, \mathbf{I}\}$ + применение + η-конверсия — система, эквивалентная λ-исчислению.



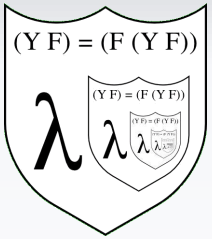
Применение η-конверсии

- $\mathbf{I}\ x = x$
- $\mathbf{K}\ x\ y = x$
- $\mathbf{S}\ x\ y\ z = x\ z\ (y\ z)$

Базис $\{\mathbf{K}, \mathbf{S}\}$ + применение + η-конверсия — система, эквивалентная λ-исчислению.

Задачи

1. Выразить $\mathbf{I}$ в базисе $\{\mathbf{K}, \mathbf{S}\}$.
2. Верно ли, что если $\forall x(\mathbf{X}\ x = \mathbf{Y}\ x)$, то $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ можно свести к одному терму без η-конверсии, используя только правила применения $\mathbf{I}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{S}$, данные выше?
3. Упростить $\mathbf{S}\ (\mathbf{S}(\mathbf{K}\ \mathbf{S})(\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ \mathbf{K})\ \mathbf{K}))(\mathbf{K}\ (\mathbf{S}\ \mathbf{K}\ \mathbf{K}))$.

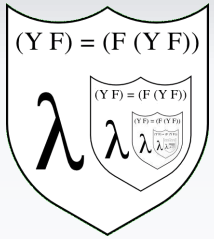


Скобочная абстракция

Интерпретатор $\boldsymbol{S} + \mathbf{K}$ = минимальный интерпретатор Тьюринг-полного ЯП. Чтобы перевести λ-терм в комбинаторный «байт-код», используется функция скобочной абстракции $\mu(\bullet)$.

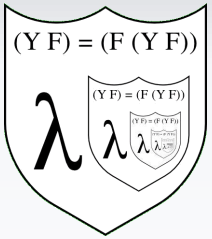
1. $\mu(\lambda x.x) \longrightarrow \mathbf{SKK}$ (для краткости обозначается $\mathbf{I}$);
2. $\mu(\lambda x.M) \longrightarrow \mathbf{K}\mu(M)$, если x не свободна в M;
3. $\mu(\lambda x.(M\ N)) \longrightarrow \boldsymbol{S}\ (\mu(\lambda x.M))\ (\mu(\lambda x.N))$.

Таким образом удаётся перейти к бесточечному представлению λ-функции. В частности, это то, чего мы добиваемся, когда переносим зависимости!



Скобочная абстракция

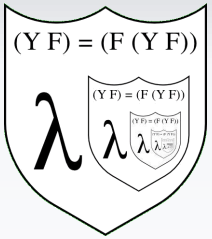
Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\, y.y\ x$.



Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\,y.y\ x$.

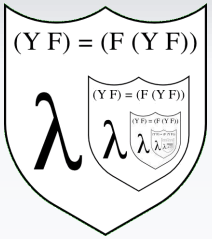
- По алгоритму: $\lambda x.\mathbf{S}\ (\lambda y.y)\ (\lambda y.x) \to \lambda x.\mathbf{S}\ \mathbf{I}\ (\mathbf{K}x) \to \mathbf{S}\ (\lambda x.\mathbf{SI})\ (\lambda x.\mathbf{K}x) \to \mathbf{S}\ (\mathbf{K}(\mathbf{SI}))(\mathbf{S}\ (\lambda x.\mathbf{K})\ (\lambda x.x)) \to \mathbf{S}\ (\mathbf{K}(\mathbf{SI}))(\mathbf{S}\ (\mathbf{KK})\ \mathbf{I})$.



Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\,y.y\ x$.

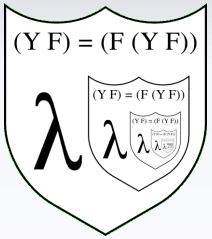
- По алгоритму: $\lambda x.\mathbf{S}\ (\lambda y.y)\ (\lambda y.x) \to \lambda x.\mathbf{S}\ \mathbf{I}\ (\mathbf{K}x) \to \mathbf{S}\ (\lambda x.\mathbf{SI})\ (\lambda x.\mathbf{K}x) \to \mathbf{S}\ (\mathbf{K}(\mathbf{SI}))(\mathbf{S}\ (\lambda x.\mathbf{K})\ (\lambda x.x)) \to \mathbf{S}\ (\mathbf{K}(\mathbf{SI}))(\mathbf{S}\ (\mathbf{KK})\ \mathbf{I})$.
- А если подумать?



Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\, y.y\ x$.

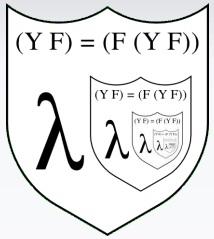
- $\lambda x\, y.y\ x$ меняет местами переменные, а $\mathbf{K}$ линейна $\Rightarrow$ внешняя функция точно $\mathbf{S}$. А ей нужен ещё хотя бы один аргумент-комбинатор, кроме x и y. Пишем заглушку: $\mathbf{S}\ M_1$.



Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\, y.y\ x$.

- $\lambda x\, y.y\ x$ меняет местами переменные, а $\mathbf{K}$ линейна $\Rightarrow$ внешняя функция точно $\mathbf{S}$. А ей нужен ещё хотя бы один аргумент-комбинатор, кроме x и y. Пишем заглушку: $\mathbf{S}\ M_1$.
- Тестируем: $\mathbf{S}\ M_1\ x\ y = M_1\ y\ (x\ y)$. Это плохо: из $(x\ y)$ нельзя извлечь x. Нужен ещё один аргумент-комбинатор для $\mathbf{S}$.



Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\, y.y\ x$.

- $\lambda x\, y.y\ x$ меняет местами переменные, а $\mathbf{K}$ линейна $\Rightarrow$ внешняя функция точно $\mathbf{S}$. А ей нужен ещё хотя бы один аргумент-комбинатор, кроме x и y. Пишем заглушку: $\mathbf{S}\ M_1$.
- Тестируем: $\mathbf{S}\ M_1\ x\ y = M_1\ y\ (x\ y)$. Это плохо: из $(x\ y)$ нельзя извлечь x. Нужен ещё один аргумент-комбинатор для $\mathbf{S}$.
- $\mathbf{S}\ M_1\ M_2\ x = M_1\ x\ (M_2\ x)$. Переменная x раздвоилась, причём её первое вхождение явно лишнее. Избавимся от него, положив $M_1 = \mathbf{K}\ M_3$.

Скобочная абстракция

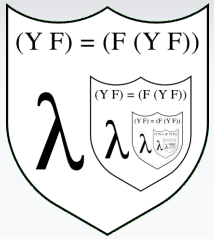
Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\, y.y\ x$.

- $\lambda x\, y.y\ x$ меняет местами переменные, а $\mathbf{K}$ линейна $\Rightarrow$ внешняя функция точно $\mathbf{S}$. А ей нужен ещё хотя бы один аргумент-комбинатор, кроме x и y. Пишем заглушку: $\mathbf{S}\ M_1$.
- Тестируем: $\mathbf{S}\ M_1\ x\ y = M_1\ y\ (x\ y)$. Это плохо: из $(x\ y)$ нельзя извлечь x. Нужен ещё один аргумент-комбинатор для $\mathbf{S}$.
- $\mathbf{S}\ M_1\ M_2\ x = M_1\ x\ (M_2\ x)$. Переменная x раздвоилась, причём её первое вхождение явно лишнее. Избавимся от него, положив $M_1 = \mathbf{K}\ M_3$.
- Получаем $M_3\ (M_2\ x)$. Из переменных остался только y, значит, M_3 должен иметь вид $M_4\ M_5$, причём $M_4 = \mathbf{S}$, иначе до y добраться не удастся.

Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\, y.y\ x$.

- $\lambda x\, y.y\ x$ меняет местами переменные, а $\mathbf{K}$ линейна $\Rightarrow$ внешняя функция точно $\mathbf{S}$. А ей нужен ещё хотя бы один аргумент-комбинатор, кроме x и y. Пишем заглушку: $\mathbf{S}\ M_1$.
- Тестируем: $\mathbf{S}\ M_1\ x\ y = M_1\ y\ (x\ y)$. Это плохо: из $(x\ y)$ нельзя извлечь x. Нужен ещё один аргумент-комбинатор для $\mathbf{S}$.
- $\mathbf{S}\ M_1\ M_2\ x = M_1\ x\ (M_2\ x)$. Переменная x раздвоилась, причём её первое вхождение явно лишнее. Избавимся от него, положив $M_1 = \mathbf{K}\ M_3$.
- Получаем $M_3\ (M_2\ x)$. Из переменных остался только y, значит, M_3 должен иметь вид $M_4\ M_5$, причём $M_4 = \mathbf{S}$, иначе до y добраться не удастся.
- $\mathbf{S}\ M_5\ (M_2\ x)\ y = M_5\ y(M_2\ x\ y)$. Теперь очевидно, что $M_5 = \lambda x.x = \mathbf{I}$, $M_2 = \mathbf{K}$. Значит, `flip id` $= \mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI}))\mathbf{K}$.



Подытожим

- α-преобразование — переименование связанных переменных;
- β-редукция — применение функции к терму;
- η-преобразование — переход к бесточечным версиям функций и обратно.