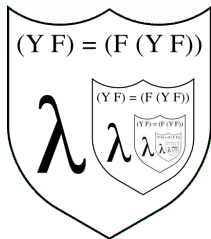


# Соответствие Карри–Ховарда.

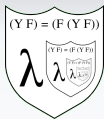
## Лекция вторая

---



А. Н. Непейвода  
ИПС им. А.К. Айламазяна РАН,  
МГТУ им. Н.Э. Баумана

*MathClub,*  
*25 февраля 2022, Иннополис*



## Аксиомы комбинаторной логики

Эквивалентность комбинаторов, имеющих нормальную форму, определяется в следующей системе переписывания термов (+ аксиомы для  $S$ ,  $K$ ,  $I$ ):

$$\begin{aligned} S(KK) &= S(S(KS)(S(KK)(S(KS)K)))(KK) \\ S(KS)(S(KK)) &= S(KK)(S(S(KS)(S(KK)I))(KI)) \\ S(K(S(KS)))(S(KS)(S(KS))) \\ &= S(S(KS)(S(KK)(S(KS)(S(K(S(KS)))S))))(KS) \\ I &= S(S(KS)K)(KI) \end{aligned}$$

Переписывание может применяться с любой стороны, и в процессе применения аксиом упрощаемый терм может удлиняться.



## Упражнение

Известно, что композиция  $\lambda x y z. x (y z)$  — это `fmap` для функтора `Reader`. Выразить её в бесточечном виде по алгоритму и по логике.



## Упражнение

Известно, что композиция  $\lambda x y z. x (y z)$  — это `fmap` для функтора `Reader`. Выразить её в бесточечном виде по алгоритму и по логике.

```
newtype MyRead r a = Rd run :: r -> a
instance Applicative (MyRead r) where
  pure v = Rd (\_ -> v)
  Rd f <*> Rd g = Rd (\x -> f x (g x))
```



## Упражнение

Известно, что композиция  $\lambda x y z. x (y z)$  — это `fmap` для функтора `Reader`. Выразить её в бесточечном виде по алгоритму и по логике.

```
newtype MyRead r a = Rd run :: r -> a
instance Applicative (MyRead r) where
  pure v = Rd (\_ -> v)
  Rd f <*> Rd g = Rd (\x -> f x (g x))
```

```
fmap f (Rd x)
  = (Rd ((pure (<*>)) <*> pure) f x)
```



## Вычисления «от противного»

Проблема термов в типизированном  $\lambda$ -исчислении (и чистого функционального стиля): «что упало, то пропало». Если вычислено  $(M\ N)$ , то  $M$  и  $N$  по отдельности уже потеряны навсегда.



## Вычисления «от противного»

Проблема термов в типизированном  $\lambda$ -исчислении (и чистого функционального стиля): «что упало, то пропало». Если вычислено  $(M\ N)$ , то  $M$  и  $N$  по отдельности уже потеряны навсегда.

Логичный выход — возвраты, если стало ясно, что вычисления зашли в тупик. Аналог в доказательствах — работа с отрицанием.

$$\frac{\Gamma \vdash \tau, \Gamma \vdash \neg \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \quad (\text{из лжи следует всё что угодно})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg \neg \tau}{\Gamma \vdash \tau} \quad (\text{снятие двойного отрицания})$$



## Теорема Гливенко

Пусть  $\Phi$  — пропозициональная формула. Тогда  $\vdash \Phi$  в классической логике  $\Leftrightarrow \vdash \neg\neg\Phi$  в конструктивной интуиционистской логике.

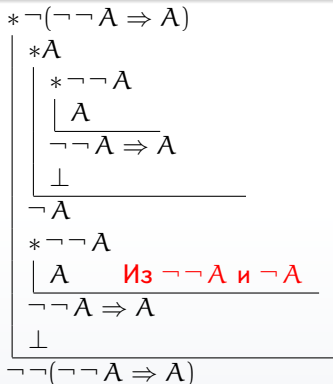
Здесь под конструктивной интуиционистской логикой понимаем минимальную логику + «из лжи следует всё что угодно». Потом мы опять вернёмся к минимальной логике, но сначала посмотрим, как всё сложно с извлечением термов из отрицания.





## Теорема Гливенко

Пусть  $\Phi$  — пропозициональная формула. Тогда  $\vdash \Phi$  в классической логике  $\Leftrightarrow \vdash \neg\neg\Phi$  в конструктивной интуиционистской логике.





## Теорема Гливенко

Пусть  $\Phi$  — пропозициональная формула. Тогда  $\vdash \Phi$  в классической логике  $\Leftrightarrow \vdash \neg\neg\Phi$  в конструктивной интуиционистской логике.

\*  $\neg(\neg\neg A \Rightarrow A)$

<p>*A</p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>*<math>\neg\neg A</math></p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>A</p> </td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\neg\neg A \Rightarrow A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\perp</math></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\neg A</math></td> </tr> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>*<math>\neg\neg A</math></p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>A</p> </td> <td style="color: red; vertical-align: middle;">ИЗ <math>\neg\neg A</math> и <math>\neg A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\neg\neg A \Rightarrow A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\perp</math></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table> <p><math>\neg\neg(\neg\neg A \Rightarrow A)</math></p>	<p>*<math>\neg\neg A</math></p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>A</p> </td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\neg\neg A \Rightarrow A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\perp</math></td> </tr> </table>	<p>A</p>		$\neg\neg A \Rightarrow A$		$\perp$			$\neg A$		<p>*<math>\neg\neg A</math></p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>A</p> </td> <td style="color: red; vertical-align: middle;">ИЗ <math>\neg\neg A</math> и <math>\neg A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\neg\neg A \Rightarrow A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\perp</math></td> </tr> </table>	<p>A</p>	ИЗ $\neg\neg A$ и $\neg A$	$\neg\neg A \Rightarrow A$		$\perp$		
<p>*<math>\neg\neg A</math></p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>A</p> </td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\neg\neg A \Rightarrow A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\perp</math></td> </tr> </table>	<p>A</p>		$\neg\neg A \Rightarrow A$		$\perp$													
<p>A</p>																		
$\neg\neg A \Rightarrow A$																		
$\perp$																		
$\neg A$																		
<p>*<math>\neg\neg A</math></p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>A</p> </td> <td style="color: red; vertical-align: middle;">ИЗ <math>\neg\neg A</math> и <math>\neg A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\neg\neg A \Rightarrow A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\perp</math></td> </tr> </table>	<p>A</p>	ИЗ $\neg\neg A$ и $\neg A$	$\neg\neg A \Rightarrow A$		$\perp$													
<p>A</p>	ИЗ $\neg\neg A$ и $\neg A$																	
$\neg\neg A \Rightarrow A$																		
$\perp$																		

\*  $\neg(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$

<p>*A</p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>*<math>(A \Rightarrow B) \Rightarrow A</math></p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>A</p> </td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\perp</math></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\neg A</math></td> </tr> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>*<math>(A \Rightarrow B) \Rightarrow A</math></p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>*A</p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>B</p> </td> <td style="color: red; vertical-align: middle;">из A и <math>\neg A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>A \Rightarrow B</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2">A</td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\perp</math></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table> <p><math>\neg\neg(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)</math></p>	<p>*<math>(A \Rightarrow B) \Rightarrow A</math></p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>A</p> </td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\perp</math></td> </tr> </table>	<p>A</p>		$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$		$\perp$			$\neg A$		<p>*<math>(A \Rightarrow B) \Rightarrow A</math></p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>*A</p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>B</p> </td> <td style="color: red; vertical-align: middle;">из A и <math>\neg A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>A \Rightarrow B</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2">A</td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\perp</math></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	<p>*A</p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>B</p> </td> <td style="color: red; vertical-align: middle;">из A и <math>\neg A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>A \Rightarrow B</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2">A</td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\perp</math></td> </tr> </table>	<p>B</p>	из A и $\neg A$	$A \Rightarrow B$		A		$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$		$\perp$			
<p>*<math>(A \Rightarrow B) \Rightarrow A</math></p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>A</p> </td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\perp</math></td> </tr> </table>	<p>A</p>		$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$		$\perp$																			
<p>A</p>																								
$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$																								
$\perp$																								
$\neg A$																								
<p>*<math>(A \Rightarrow B) \Rightarrow A</math></p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>*A</p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>B</p> </td> <td style="color: red; vertical-align: middle;">из A и <math>\neg A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>A \Rightarrow B</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2">A</td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\perp</math></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	<p>*A</p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>B</p> </td> <td style="color: red; vertical-align: middle;">из A и <math>\neg A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>A \Rightarrow B</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2">A</td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\perp</math></td> </tr> </table>	<p>B</p>	из A и $\neg A$	$A \Rightarrow B$		A		$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$		$\perp$														
<p>*A</p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p>B</p> </td> <td style="color: red; vertical-align: middle;">из A и <math>\neg A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>A \Rightarrow B</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2">A</td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2"><math>\perp</math></td> </tr> </table>	<p>B</p>	из A и $\neg A$	$A \Rightarrow B$		A		$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$		$\perp$															
<p>B</p>	из A и $\neg A$																							
$A \Rightarrow B$																								
A																								
$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$																								
$\perp$																								



## Переход к относительному отрицанию

«Вычисления зашли в тупик»  $\Rightarrow$  приводят к нежелательному результату. Интерпретация  $\neg_R \Phi = (\Phi \Rightarrow R)$ .

Рассмотрим предыдущие два вывода с точки зрения извлечения термов из их конструкции.



## Переход к относительному отрицанию

$$\begin{array}{l}
 *(\neg_R \neg_R A \Rightarrow A) \Rightarrow R \quad (\text{тип } x) \\
 \begin{array}{l}
 *A \quad (\text{тип } y) \\
 \begin{array}{l}
 * \neg_R \neg_R A \quad (\text{тип } z) \\
 \begin{array}{l}
 A \quad (\text{терм } y) \\
 \hline
 \neg_R \neg_R A \Rightarrow A \quad (\text{терм } \lambda z.y) \\
 R \quad (\text{терм } x (\lambda z.y)) \\
 \hline
 A \Rightarrow R \quad (\text{терм } \lambda y.x (\lambda z.y))
 \end{array} \\
 * (A \Rightarrow R) \Rightarrow R \quad (\text{тип } w) \\
 \begin{array}{l}
 A \quad (???!! \text{ из } A \Rightarrow R \text{ и } (A \Rightarrow R) \Rightarrow R) \\
 \hline
 \neg_R \neg_R A \Rightarrow A \\
 R
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Проблема с правилом «из лжи следует всё что угодно»:  
 относительное отрицание даёт вывести из противоречия лишь одну  
 формулу  $R$ . Вывод требует, чтобы  $R = A$ , но это превращает  
 исходную формулу в тривиальность:  
 $(((((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ .



## Переход к относительному отрицанию

«Вычисления зашли в тупик»  $\Rightarrow$  приводят к нежелательному результату. Интерпретация  $\neg_R \Phi = (\Phi \Rightarrow R)$ .

$$\begin{array}{l}
 *(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow R \quad (\text{тип } x) \\
 \begin{array}{l}
 *A \quad (\text{тип } y) \\
 \begin{array}{l}
 *(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \quad (\text{тип } z) \\
 \begin{array}{l}
 A \quad (\text{терм } y) \\
 \hline
 ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A \quad (\text{терм } \lambda z.y) \\
 R \quad (\text{терм } x (\lambda z.y))
 \end{array} \\
 \hline
 A \Rightarrow R \quad (\text{терм } \lambda y.x (\lambda z.y))
 \end{array} \\
 *(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \quad (\text{тип } u) \\
 \begin{array}{l}
 *A \quad (\text{тип } w) \\
 \begin{array}{l}
 B \quad \text{???} \\
 \hline
 A \Rightarrow B \\
 A \\
 \hline
 ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A \\
 R
 \end{array}
 \end{array} \\
 \hline
 (((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow R \Rightarrow R
 \end{array}$$



## Переход к относительному отрицанию

$$\begin{array}{l}
 *(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow B \quad (\text{тип } x) \\
 \begin{array}{l}
 *A \quad (\text{тип } y) \\
 \begin{array}{l}
 *(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \quad (\text{тип } z) \\
 \begin{array}{l}
 A \quad (\text{терм } y) \\
 \hline
 ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A \quad (\text{терм } \lambda z.y) \\
 B \quad (\text{терм } x (\lambda z.y))
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 A \Rightarrow B \quad (\text{терм } \lambda y.x (\lambda z.y)) \\
 *(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \quad (\text{тип } u) \\
 \begin{array}{l}
 *A \quad (\text{тип } w) \\
 \begin{array}{l}
 B \quad (\text{терм } (\lambda y.x (\lambda z.y)) w) \\
 \hline
 A \Rightarrow B \quad (\text{терм } \lambda y.x (\lambda z.y)) \\
 A \quad (\text{терм } u (\lambda y.x (\lambda z.y)))
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A \quad (\text{терм } \lambda u.u (\lambda y.x (\lambda z.y))) \\
 B \quad (\text{терм } x (\lambda u.u (\lambda y.x (\lambda z.y)))) \\
 \hline
 (((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow B \Rightarrow B \quad (\text{терм } (\lambda x.x (\lambda u.u (\lambda y.x (\lambda z.y))))
 \end{array}$$

Здесь тоже сложно с правилом «из лжи следует всё что угодно», но вопрос решается, если положить  $R = B$ . Тогда мы получаем минимальный вывод нетривиальной формулы Крипке.



## Навешивание двойного отрицания

Видно, что использование «возвратных» термов (переход от типа  $\Phi$  к типу  $\neg_R \neg_R \Phi$ ) расширяет возможности языка. Возникает вопрос, в каких подформулах лучше это делать?

- Преобразование Колмогорова:

$$\sigma_K(A) = \neg_R \neg_R A$$

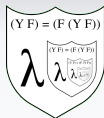
$$\sigma_K(\Phi \Rightarrow \Psi) = \neg_R \neg_R (\sigma_K(\Phi) \Rightarrow \sigma_K(\Psi))$$

- Вариант более слабого преобразования (в стиле Куроды) — это  $\sigma'_W(\Phi) = \neg_R \neg_R \sigma'_W(\Phi)$ , где:

$$\sigma'_W(A) = A$$

$$\sigma'_W(\Phi \Rightarrow \Psi) = \sigma'_W(\Phi) \Rightarrow \neg_R \neg_R \sigma'_W(\Psi)$$

В примерах для краткости  $(\Phi \Rightarrow R) \Rightarrow R$  переобозначим как  $\Phi'$ .



## Переход по Колмогорову

$*(A' \Rightarrow ((A' \Rightarrow B')' \Rightarrow B')') \Rightarrow R$	(тип $k_0$ )
$*(A \Rightarrow R) \Rightarrow R$	(тип $x$ )
$*((A' \Rightarrow B')' \Rightarrow B') \Rightarrow R$	(тип $k_1$ )
$*((A' \Rightarrow B') \Rightarrow R) \Rightarrow R$	(тип $y$ )
$*B \Rightarrow R$	(тип $k_2$ )
$*A' \Rightarrow B'$	(тип $k_3$ )
$*A \Rightarrow R$	(тип $k_4$ )
$R$	(терм $x \ k_4$ )
$(A \Rightarrow R) \Rightarrow R$	(терм $\lambda k_4. x \ k_4$ )
$(B \Rightarrow R) \Rightarrow R$	(терм $k_3 (\lambda k_4. x \ k_4)$ )
$R$	(терм $(k_3 (\lambda k_4. x \ k_4)) \ k_2$ )
$(A' \Rightarrow B') \Rightarrow R$	(терм $\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2$ )
$R$	(терм $y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2)$ )
$(B \Rightarrow R) \Rightarrow R$	(терм $\lambda k_2. y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2)$ )
$(A' \Rightarrow B')' \Rightarrow B'$	(терм $\lambda y k_2. y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2)$ )
$R$	(терм $k_1 (\lambda y k_2. y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2))$ )
$((A' \Rightarrow B')' \Rightarrow B') \Rightarrow R$	(терм $\lambda k_1. k_1 (\lambda y k_2. y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2))$ )
$A' \Rightarrow ((A' \Rightarrow B')' \Rightarrow B')'$	(терм $\lambda x k_1. k_1 (\lambda y k_2. y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2))$ )
$R$	(терм $k_0 (\lambda x k_1. k_1 (\lambda y k_2. y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2)))$ )
$((A' \Rightarrow ((A' \Rightarrow B')' \Rightarrow B')') \Rightarrow R) \Rightarrow R$	
Извлечённый терм: $\lambda k_0. k_0 (\lambda x k_1. k_1 (\lambda y k_2. y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2)))$	





## Слабый переход по Куроде

$$\begin{array}{l}
 * (A \Rightarrow ((A \Rightarrow B') \Rightarrow B')') \Rightarrow R \quad (\text{тип } k_0) \\
 \begin{array}{l}
 * A \quad (\text{тип } x) \\
 \begin{array}{l}
 * ((A \Rightarrow B') \Rightarrow B') \Rightarrow R \quad (\text{тип } k_1) \\
 \begin{array}{l}
 * A \Rightarrow B' \quad (\text{тип } y) \\
 \begin{array}{l}
 * B \Rightarrow R \quad (\text{тип } k_2) \\
 \begin{array}{l}
 (B \Rightarrow R) \Rightarrow R \quad (\text{тип } y \ x) \\
 R \quad (\text{тип } y \ x \ k_2) \\
 \hline
 (B \Rightarrow R) \Rightarrow R \quad (\text{тип } \lambda k_2. y \ x \ k_2) \\
 \hline
 (A \Rightarrow B') \Rightarrow B' \quad (\text{тип } \lambda y k_2. y \ x \ k_2) \\
 \hline
 R \quad (\text{тип } k_1 (\lambda y k_2. y \ x \ k_2)) \\
 \hline
 (((A \Rightarrow B') \Rightarrow B') \Rightarrow R) \Rightarrow R \quad (\text{тип } \lambda k_1. k_1 (\lambda k_2. y \ x \ k_2)) \\
 \hline
 A \Rightarrow ((A \Rightarrow B') \Rightarrow B')' \quad (\text{тип } \lambda x k_1. k_1 (\lambda k_2. y \ x \ k_2)) \\
 \hline
 R \quad (\text{тип } k_0 (\lambda x k_1. k_1 (\lambda k_2. y \ x \ k_2))) \\
 \hline
 ((A \Rightarrow ((A \Rightarrow B') \Rightarrow B')') \Rightarrow R) \Rightarrow R
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Извлечённый терм:  $\lambda k_0. k_0 (\lambda x k_1. k_1 (\lambda y k_2. y \ x \ k_2))$ .



## Детали преобразования

- Переменные  $x$  и  $y$  получают имена так: смотрим на исходный терм  $\lambda x y. y \ x$ . В нём тип  $x$  — это просто  $A$ , тип  $y$  — это  $A \Rightarrow B$ . Теперь преобразуем их типы по Колмогорову или Куроде как подформулы. Образы этих типов и породят термы  $x$  и  $y$ .
- В выводе терма по Куроде есть странный подвывод, в котором выводится  $(B \Rightarrow R) \Rightarrow R$ , и так выводимая без него:

$$\begin{array}{l} *A \Rightarrow B' \quad \text{(тип } y) \\ \left| \begin{array}{l} *B \Rightarrow R \quad \text{(тип } k_2) \\ \left| \begin{array}{l} (B \Rightarrow R) \Rightarrow R \quad \text{(тип } y \ x) \\ R \quad \text{(тип } y \ x \ k_2) \end{array} \right. \\ \hline (B \Rightarrow R) \Rightarrow R \quad \text{(тип } \lambda k_2. y \ x \ k_2) \end{array} \right. \\ \hline (A \Rightarrow B') \Rightarrow B' \quad \text{(тип } \lambda y k_2. y \ x \ k_2) \end{array}$$

Однако если выводиться формулу без подвывода с допущением  $B \Rightarrow R$  напрямую, то вместо  $A \Rightarrow B'$  можно просто подставить формулу  $A \Rightarrow B$ , и мы получим вывод не требуемой формулы, а более общей:  $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B'))'$ , а мы хотим доказать именно ту формулу, которую получили преобразованием.



## Система передачи продолжений

Система передачи продолжений в CBN-стиле:

- $\tau_N(\text{const}) = \lambda k.k \text{ const}$
- $\tau_N(x) = \lambda k.x \ k$
- $\tau_N(\lambda x.M) = \lambda k.k (\lambda x.\tau_N(M))$
- $\tau_N(M \ N) = \lambda k.\tau_N(M) (\lambda f.f \ \tau_N(N) \ k)$



## Система передачи продолжений

Система передачи продолжений в CBN-стиле:

- $\tau_N(\text{const}) = \lambda k.k \text{ const}$
- $\tau_N(x) = \lambda k.x k$
- $\tau_N(\lambda x.M) = \lambda k.k (\lambda x.\tau_N(M))$
- $\tau_N(M N) = \lambda k.\tau_N(M) (\lambda f.f \tau_N(N) k)$

Система передачи продолжений в CBV-стиле:

- $\tau_V(\text{const}) = \lambda k.k \text{ const}$
- $\tau_V(x) = \lambda k.k x$
- $\tau_V(\lambda x.M) = \lambda k.k (\lambda x.\tau_V(M))$
- $\tau_V(M N) = \lambda k.\tau_V(M) (\lambda f.\tau_V(N) (\lambda a.f a k))$



## Применение CPS-преобразования

### Утверждение

Если тип исходного терма  $M$  — это  $\Phi$ , то тип терма  $\tau_N(M)$  — это  $\sigma_K(\Phi)$ , тип терма  $\tau_V(M)$  — это  $\sigma_W(\Phi)$ .

Пример формулы Пирса  $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$  показывает, что некоторые термы типизируются только после CPS-преобразования. Это и есть практический смысл теоремы Гливенко.

- $M \rightarrow^* \text{const}$  при CBV-стратегии  $\Leftrightarrow \tau_V(M) \text{ id} \rightarrow^* \text{const}$  при какой угодно стратегии.
- $M \rightarrow^* \text{const}$  при CBN-стратегии  $\Leftrightarrow \tau_N(M) \text{ id} \rightarrow^* \text{const}$  при какой угодно стратегии.



## Монада Cont

```
newtype MyCont r a = Mc { runCont :: (a -> r) -> r
}
instance Functor (MyCont r) where
  fmap f (Mc cps_a) = ...
instance Applicative (MyCont r) where
  pure v = ...
  Mc cps_f <*> Mc cps_a = ...
```



## Монада Cont

```
newtype MyCont r a = Mc { runCont :: (a -> r) -> r
}
instance Functor (MyCont r) where
  fmap f (Mc cps_a) = Mc (\cps -> cps_a (cps . f))
instance Applicative (MyCont r) where
  pure v = ...
  Mc cps_f <*> Mc cps_a = ...
```



## Монада Cont

```
newtype MyCont r a = Mc { runCont :: (a -> r) -> r
}
instance Functor (MyCont r) where
  fmap f (Mc cps_a) = Mc (\cps -> cps_a (cps . f))
instance Applicative (MyCont r) where
  pure v = Mc (\r -> r v)
  Mc cps_f <*> Mc cps_a = ...
```





## Монада Cont

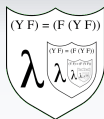
```
newtype MyCont r a = Mc { runCont :: (a -> r) -> r
}
instance Functor (MyCont r) where
  fmap f (Mc cps_a) = Mc (\cps -> cps_a (cps . f))
instance Applicative (MyCont r) where
  pure v = Mc (\r -> r v)
  Mc cps_f <*> Mc cps_a =
    Mc (\cps_b -> cps_f (\f -> cps_a (cps_b . f)))
```



## Упражнение

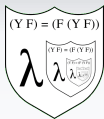
Пользуясь соответствием Карри–Ховарда, построить явным образом терм, реализующий bind-оператор  $>>=$  для монады `Cont`.

Тип  $>>= :: \text{MyCont } a \rightarrow (a \rightarrow \text{MyCont } b) \rightarrow \text{MyCont } b$ , и это всё, что нужно знать для решения задачи.



## Прерывания вычислений

- Жёсткое прерывание — полный выход из контекста  $(\neg_R \neg_R A \Rightarrow A)$ ;
- Мягкое прерывание — возвращает текущий контекст вычислений  $((\neg_R A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$  — закон Пирса, а также тип оператора call-with-current-continuation.



## Вывод = конструкция

\*(((A  $\Rightarrow$  B)  $\Rightarrow$  B)  $\Rightarrow$  A)  $\Rightarrow$  B)

\*B  $\Rightarrow$  A

\* (A  $\Rightarrow$  B)  $\Rightarrow$  B

\*A  $\Rightarrow$  B

B

A

(A  $\Rightarrow$  B)  $\Rightarrow$  A

A **Закон Пирса!**

((A  $\Rightarrow$  B)  $\Rightarrow$  B)  $\Rightarrow$  A

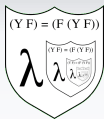
B

(B  $\Rightarrow$  A)  $\Rightarrow$  B

B

**Закон Пирса!**

((((A  $\Rightarrow$  B)  $\Rightarrow$  B)  $\Rightarrow$  A)  $\Rightarrow$  B)  $\Rightarrow$  B



## Вывод = конструкция

$$\begin{array}{l}
 *(((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B \quad (\text{тип терма } x) \\
 \begin{array}{l}
 *B \Rightarrow A \quad (\text{тип терма } y) \\
 \begin{array}{l}
 *(A \Rightarrow B) \Rightarrow B \quad (\text{тип терма } z) \\
 \begin{array}{l}
 *A \Rightarrow B \quad (\text{тип терма } w) \\
 \begin{array}{l}
 B \quad (\text{терм } z \ w) \\
 A \quad (\text{терм } y \ (z \ w))
 \end{array} \\
 \hline
 (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \quad (\text{терм } \lambda w.y \ (z \ w)) \\
 A \quad (T_1 = \text{callcc } \lambda w.y \ (z \ w)) \\
 \hline
 ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow A \quad (\text{терм } \lambda z.T_1) \\
 B \quad (\text{терм } x \ (\lambda z.T_1)) \\
 \hline
 (B \Rightarrow A) \Rightarrow B \quad (\text{терм } \lambda y.x \ (\lambda z.T_1)) \\
 B \quad (T_2 = \text{callcc } \lambda y.x \ (\lambda z.T_1)) \\
 \hline
 (((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B \Rightarrow B \quad \text{терм } \lambda x.T_2
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$



## Определение монады

```
class Applicative M => Monad M where  
  return :: a -> M a  
  (>>=) :: M a -> (a -> M b) -> M b
```

Дополнительные монадические операторы:

```
join :: M M a -> M a  
fmap :: (a -> b) -> M a -> M b
```



## Соответствие Карри–Ховарда

Propositional Lax Logic — монадическая логика с единственным модальным оператором  $\bigcirc$ .

Правила вывода (+ стандартные правила естественного вывода в минимальной логике):

- $\frac{A}{\bigcirc A}$  (Return)
- $\frac{A \Rightarrow \bigcirc B}{\bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B}$  (Bind)

Сохраняет возможность извлечь монадический оператор из вывода типов! Обратим внимание на инвертированный порядок аргументов.



## Пример разбора задачи на монадическое соответствие

Построим оператор `join` из операторов `>>=` и `return`.

\*  $\bigcirc \bigcirc A$  (тип термина  $x$ )

*(Здесь нужно придумать, как объединить контейнеры, обрабатывающие  $x$ )*

$\bigcirc A$

$\bigcirc \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc A$  (тип термина  $\lambda x. \dots$ )

Единственный оператор, умеющий заглядывать внутрь контейнера — это `bind`. Он требует два аргумента: контейнерный типа  $M\ a$  и монадическую функцию типа  $a \rightarrow M\ b$ . Поскольку нужно заглянуть внутрь только одной из двух контейнерных оболочек, в роли типа  $a$  выступает также монада  $M\ a'$ . Значит, нам нужна стрелка типа  $M\ a' \rightarrow M\ a'$ . Это функция `id`, вывод которой мы уже умеем строить.





## Пример разбора задачи на монадическое соответствие

\*  $\circ \circ A$  (тип терма  $x$ )

\*  $\circ A$  (тип терма  $y$ )

|  $\circ A$  (просто возвращаем сам  $y$ )

$\circ A \Rightarrow \circ A$  (тип терма  $\lambda y. y$ )

*(Аргументы bind-оператора построены,  
осталось применить их в правильном порядке)*

$\circ A$

$\circ \circ A \Rightarrow \circ A$  (тип терма  $\lambda x. \dots$ )



## Пример разбора задачи на монадическое соответствие

\*  $\circ \circ A$  (тип терма  $x$ )

\*  $\circ A$  (тип терма  $y$ )

|  $\circ A$  (просто возвращаем сам  $y$ )

$\circ A \Rightarrow \circ A$  (тип терма  $\lambda y. y$ )

*(Аргументы bind-оператора построены, осталось применить их в правильном порядке)*

$\circ A$  (тип терма  $x \gg = (\lambda y. y)$ )

$\circ \circ A \Rightarrow \circ A$  (тип терма  $\lambda x. (x \gg = (\lambda y. y))$ )

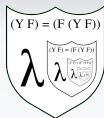


## Пример разбора задачи на монадическое соответствие

\*  $\bigcirc \bigcirc A$  (тип терма  $x$ )  
| \*  $\bigcirc A$  (тип терма  $y$ )  
| |  $\bigcirc A$  (просто возвращаем сам  $y$ )  
|  $\bigcirc A \Rightarrow \bigcirc A$  (тип терма  $\lambda y. y$ )  
| (*Аргументы bind-оператора построены, осталось применить их в правильном порядке*)  
|  $\bigcirc A$  (тип терма  $x \gg= (\lambda y. y)$ )  
|  $\bigcirc \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc A$  (тип терма  $\lambda x. (x \gg= (\lambda y. y))$ )

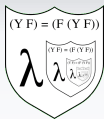
С помощью построения вывода в модальной логике мы просто решили уравнение в ФВП, получив ответ:

`join x = x >>= id.`



## Задачи

- Построить вывод  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B$ .
- Построить вывод  $\bigcirc(A \Rightarrow B) \Rightarrow \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B$ .



## Задачи

- Построить вывод  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B$ .
- Построить вывод  $\bigcirc(A \Rightarrow B) \Rightarrow \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B$ .

`liftM` — аналог `fmap` для монад, стандартно определяется через `bind` и `return`. Как?

А как определить через них `<*>`?



## Задачи

- Построить вывод  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B$ .
- Построить вывод  $\bigcirc(A \Rightarrow B) \Rightarrow \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B$ .

`liftM` — аналог `fmap` для монад, стандартно определяется через `bind` и `return`. Как?

```
liftM f m = m >>= \i -> return (f i)
```

А как определить через них `<*>`?

```
f <*> a  
  = f >>= (\xf -> a >>= (\xa -> return (xf xa)))
```

**Всё!**

**Спасибо за внимание!**