

## Структуры над словами: уравнения

---

Летняя практика, Переславль-Залесский  
*3–7 июля, 2023 г.*



## Уравнения в словах. Определения

Даны алфавит констант  $\Sigma$  (здесь рассматриваем константные скобочные структуры типа  $( 'A' ( 'B' ) )$  в роли констант), алфавит строковых и буквенных переменных  $V$ .

**Уравнение в словах** — равенство вида  $\Psi = \Phi$ , где  $\Psi, \Phi \in \{\Sigma \cup V\}^*$ .

**Решить уравнение в словах** — найти все такие подстановки  $\sigma$  переменных, входящих в  $\Psi \Phi$ , что  $\Psi\sigma = \Phi\sigma$ .

Проблема существования корней уравнений в словах разрешима (Маканин). Множество решений уравнения в общем виде представляется графом сложной структуры.

**Уравнение  $\Psi = \Phi$  квадратичное**, если ни одна переменная из  $V$  типа строка не входит в  $\Psi = \Phi$  более, чем дважды.



## Преобразование Нильсена

### Лемма Леви

Если уравнение в словах имеет вид  $x \Phi_1 = y \Phi_2$ , тогда выполнено хотя бы одно из условий  $x = y x' \vee y = x y'$  (возможно, для разных решений выполнены разные условия).

Рассмотрим произвольное решение уравнения, описываемое подстановкой  $\sigma$ . Если  $|x\sigma| \geq |y\sigma|$ , то  $x = y x'$ , в противном случае  $|y\sigma| \geq |x\sigma|$  (даже строго больше), поэтому  $y = x y'$ .

Ветвление по подстановкам вида  $x \mapsto y x'$  и  $y \mapsto x y'$  называется преобразованием Нильсена. Оно может применяться как слева (по умолчанию), так и справа.



## Системы уравнений

Пусть в  $\Sigma$  есть хотя бы две буквы. По каждой системе

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Psi_1 \\ \Phi_2 &= \Psi_2\end{aligned}\tag{1}$$

можно построить уравнение, имеющее те же самые корни:

$$\Phi_1 \mathbf{A} \Phi_2 \Phi_1 \mathbf{B} \Phi_2 = \Psi_1 \mathbf{A} \Psi_2 \Psi_1 \mathbf{B} \Psi_2\tag{2}$$

Заметим, что  $|\Phi_1 \mathbf{A} \Phi_2| = |\Phi_1 \mathbf{B} \Phi_2|$ , и  $|\Psi_1 \mathbf{A} \Psi_2| = |\Psi_1 \mathbf{B} \Psi_2|$ .

Поэтому уравнение (2) эквивалентно системе:

$$\Phi_1 \mathbf{A} \Phi_2 = \Psi_1 \mathbf{A} \Psi_2 \text{ и } \Phi_1 \mathbf{B} \Phi_2 = \Psi_1 \mathbf{B} \Psi_2.$$

Предположим, что есть решение этой системы, определяемое подстановкой  $\sigma$ . Поскольку  $\sigma$  сохраняет константы, получаем

$$(\Phi_1 \sigma) \mathbf{A} (\Phi_2 \sigma) = (\Psi_1 \sigma) \mathbf{A} (\Psi_2 \sigma),$$

$$(\Phi_1 \sigma) \mathbf{B} (\Phi_2 \sigma) = (\Psi_1 \sigma) \mathbf{B} (\Psi_2 \sigma).$$



## Системы уравнений

Пусть в  $\Sigma$  есть хотя бы две буквы. По каждой системе

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Psi_1 \\ \Phi_2 &= \Psi_2\end{aligned}\tag{1}$$

можно построить уравнение, имеющее те же самые корни:

$$\Phi_1 \mathbf{A} \Phi_2 \Phi_1 \mathbf{B} \Phi_2 = \Psi_1 \mathbf{A} \Psi_2 \Psi_1 \mathbf{B} \Psi_2\tag{2}$$

Уравнение (2) эквивалентно системе:

$$\Phi_1 \mathbf{A} \Phi_2 = \Psi_1 \mathbf{A} \Psi_2 \text{ и } \Phi_1 \mathbf{B} \Phi_2 = \Psi_1 \mathbf{B} \Psi_2.$$

Предположим, что есть решение этой системы, определяемое подстановкой  $\sigma$ . Поскольку  $\sigma$  сохраняет константы, получаем

$$(\Phi_1\sigma) \mathbf{A} (\Phi_2\sigma) = (\Psi_1\sigma) \mathbf{A} (\Psi_2\sigma),$$

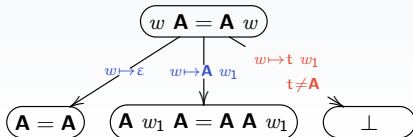
$$(\Phi_1\sigma) \mathbf{B} (\Phi_2\sigma) = (\Psi_1\sigma) \mathbf{B} (\Psi_2\sigma). \text{ Пусть } \Phi_1\sigma = (\Psi_1\sigma) \mathbf{A} \Theta, \text{ тогда}$$

$$\mathbf{A} \Theta \mathbf{B} (\Phi_2\sigma) = \mathbf{B} (\Psi_2\sigma), \text{ что невозможно. Аналогично, если}$$

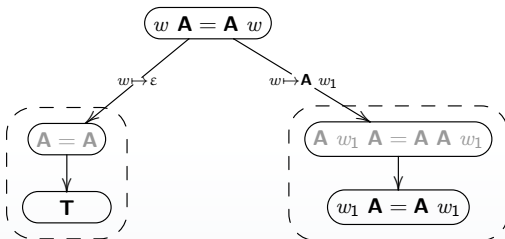
$\Psi_1\sigma = (\Phi_1\sigma) \mathbf{A} \Theta$ . Поэтому  $\Phi_1\sigma = \Psi_1\sigma$  и  $\Phi_2\sigma = \Psi_2\sigma$ , значит,  $\sigma$  — решение исходной системы (1).



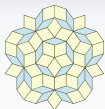
## Дерево решения уравнения



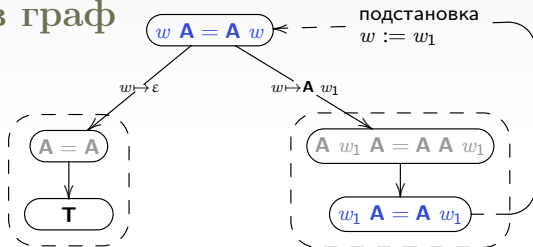
Если значение переменной  $w$  не пусто, то начинается с  $\mathbf{A}$ , либо уравнение не выполняется.



После подстановок  $w \mapsto \varepsilon$ ,  $w \mapsto \mathbf{A} w_1$  равные термы слева и справа сокращаются. Ветви дерева, приводящие к противоречию, отбрасываются.



# Свёртка дерева решения уравнения в граф



Уравнение  $w_1 \mathbf{A} = \mathbf{A} w_1$  повторяет исходное с точностью до переименования  $w_1$  в  $w$ . Его развёртка происходит точно так же, поэтому можно просто сослаться на узел с исходным уравнением.

Построен граф описания корней уравнения  $w \mathbf{A} = \mathbf{A} w$ . Наличие в нем листьев, содержащих  $\mathbf{T}$ , свидетельствует о существовании корней уравнения. Множество корней:  $w \in \mathbf{A}^*$ .



## Метод Матиясевича

Дано уравнение в словах  $\Phi_1^0 = \Phi_2^0$ ,  $\Phi_i \in \{\Sigma \cup V\}^*$ . Помещаем это уравнение в корень дерева.

Правила развертки узла с уравнением  $t_1 \Phi_1 = t_2 \Phi_2$ :

- Пусть  $t_1 = t_2$ . Заменяем уравнение в узле на  $\Phi_1 = \Phi_2$ .
- Уравнение  $\Psi_1 = \Psi_2$ , где  $\Psi_i \in \{V_e\}^*$ ,  $\Psi_j = \varepsilon$ ,  $i \neq j$ , объявляем листом и помечаем **T**.
- Пусть  $t_i = t$  (буквенная переменная),  $t_j = \mathbf{A}$ . Строим потомок  $\Phi_1 \sigma = \Phi_2 \sigma$ , где  $t \sigma = \mathbf{A}$ , а для остальных  $v \in V$   $v \sigma = v$ . Аналогично для  $t_j = t'$ .
- Пусть  $t_i = x$ ,  $t_j = (\mathbf{A} | t)$  (буква или буквенная переменная). Строим два потомка, соответствующих подстановкам  $x \sigma_1 = \varepsilon$ ,  $x \sigma_2 = (\mathbf{A} | t) x$ .
- Пусть  $t_i = x$ ,  $t_j = y$ . Строим потомки по подстановкам  $x \sigma_1 = y x$ ,  $x \sigma_2 = x y$ ,  $x \sigma_3 = y$ .
- Если уравнение в текущем узле повторяет уравнение в узле-предке, строим обратное ребро в графе.





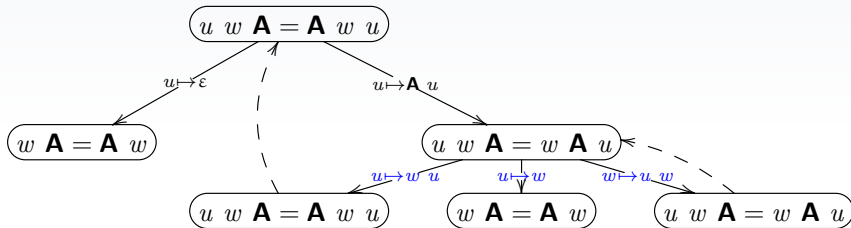
## Соглашение об именах

При построении подстановок согласно преобразованию Нильсена (вида  $x \mapsto ux'$ ) обычно за суффиксом  $x'$  закрепляется имя  $x$ . Например, в методе Матиясевича (см. ниже) таким образом удаётся избавиться от необходимости искать переименовки, чтобы факторизовать пути развёртки уравнений.

- Плюсы: дешёвое сравнение меток узлов, сохранение информации о том, суффикс какой исходной переменной рассматривается.
- Минус: иногда свёртка по переименовке (а не по точному совпадению) позволяет получить намного более короткое описание решений.

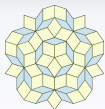


## Поиск конкретных решений

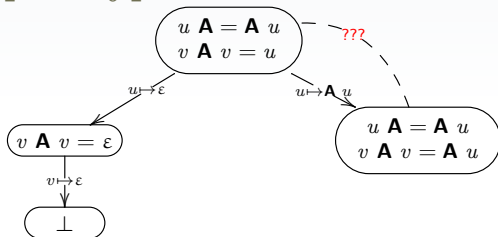


$u = \mathbf{A}$ ,  $w = \mathbf{B}$  — решение уравнения  $u w \mathbf{A} = \mathbf{A} w u$ .

Этому решению не соответствует никакого пути в графе развёртки, оканчивающегося узлом **T**. Причина — в нулевом индуктивном переходе  $w \mapsto \varepsilon w$  (после отцепления от  $u$  буквы  $\mathbf{A}$ ), соответствующем переходу в цикл по ветви  $w \mapsto u w$ . Для того, чтобы получить корректное описание решений, в метод Матиясевича нужно добавить выходы по  $u \mapsto \varepsilon$ ,  $w \mapsto \varepsilon$ .



## Нетривиальность совместной развёртки уравнений



Как только в системе появляется переменная, встречающаяся больше двух раз по совокупности, алгоритм построения графа развёртки перестаёт работать, потому что появляется возможность бесконечного разрастания уравнений.

Для квадратичных уравнений алгоритм Матиясевича является разрешающим (всегда завершается и даёт точный ответ о существовании корней).



## Сложность задачи

Длина минимального решения уравнения:

$$x_n \mathbf{A} x_n \mathbf{B} x_{n-1} \mathbf{B} x_{n-2} \dots \mathbf{B} x_1 = \mathbf{A} x_n x_{n-1}^2 \mathbf{B} x_{n-2}^2 \mathbf{B} \dots \mathbf{B} x_1^2 \mathbf{B} \mathbf{A}^2$$

экспоненциальна по  $n$ .



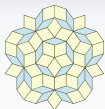
## Специальные уравнения

- Уравнения сопряжённости слов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ :  
 $\Phi_1 \Phi_2 x = x \Phi_2 \Phi_1$ , где  $\Phi_i \in \Sigma^*$ . Они имеют решения вида  $q^n \Phi_1$ , где  $q$  — это корень слова  $\Phi_1 \Phi_2$  (в том числе если  $\Phi_1 \Phi_2$  простое, то  $q = \Phi_1 \Phi_2$ ).  
Например, рассмотрим **АВАВ**  $x = x$  **ВАВА**. Здесь  $\Phi_1 = \mathbf{A}$ ,  $\Phi_2 = \mathbf{BAV}$ .  $(\Phi_1 \Phi_2)^n \Phi_1$  — это **(АВАВ)<sup>n</sup> А**, однако очевидно, что при таком описании теряется, например, корень **АВА**. Правильный ответ здесь: **(АВ)<sup>n</sup> А**.
- Уравнения сопряжённости общего вида:  $xw = wy$ . Их решения описываются в параметрах:  $x = z_1 z_2$ ,  $y = z_2 z_1$ ,  $w = (z_1 z_2)^n z_1$ . Видно, что это просто обобщение предыдущего класса уравнений.



## Хорошие классы уравнений

- Уравнения от одной переменной. Разрешимы за линейное время.
- Квадратичные уравнения (каждая переменная имеет не больше чем 2 вхождения в обе части). Сложность решения: NP-трудна.
- Straight-line (прямолинейные) уравнения. Кратность (относительно всего уравнения) всех переменных хотя бы в одной части уравнения равна 1.
- Уравнения, сводящиеся к системе, где одно уравнение принадлежит классу выше, а остальные — уравнения вида  $x_i \Phi_i = \Psi_i x_i$ , где  $\Phi_i, \Psi_i$  — константы (см. ниже).



## Преобразование Нильсена и прямолинейные уравнения

Граф развёртки прямолинейного уравнения посредством преобразования Нильсена конечен.

Напомним, что (строгий) порядок  $\triangleleft$  на  $n$ -ках называют лексикографическим, если  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \triangleleft \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle \Leftrightarrow \exists j (\forall i (i < j \Rightarrow \alpha_i = \beta_i) \ \& \ \alpha_j < \beta_j)$ .

Пусть  $\Phi = \Psi$  — прямолинейное уравнение с правой частью, линейной относительно уравнения. Введём на уравнениях следующий лексикографический порядок:

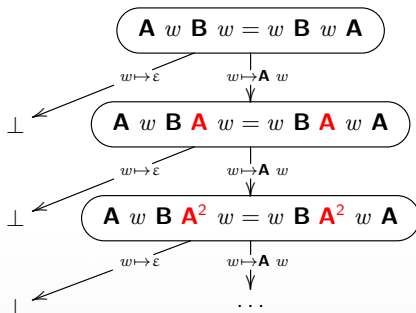
$$\langle \Phi_1 = \Psi_1 \rangle \prec \langle \Phi_2 = \Psi_2 \rangle \Leftrightarrow \langle |\Psi_1|, |\Phi_1| \rangle <_{\text{LEX}} \langle |\Psi_2|, |\Phi_2| \rangle$$

Тогда любая подстановка (с последующим сокращением равных префиксов) будет строго уменьшать уравнение относительно порядка  $\prec$ .



## Эвристики: разрезание

При непосредственном применении преобразования Нильсена уравнение  $\mathbf{A} w \mathbf{B} w = w \mathbf{B} w \mathbf{A}$  уходит в бесконечную развёртку, из-за наличия более чем двух вхождений  $w$ .



Однако можно заметить, что это левая и правая части уравнения разбиваются на префиксы и суффиксы одинаковой длины:  $\mathbf{A} w \mathbf{B} w = w \mathbf{B} w \mathbf{A}$



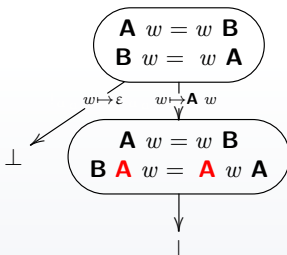


## Эвристики: разрезание

При непосредственном применении преобразования Нильсена уравнение  $\mathbf{A} w \mathbf{B} w = w \mathbf{B} w \mathbf{A}$  уходит в бесконечную развёртку, из-за наличия более чем двух вхождений  $w$ .

Однако можно заметить, что это левая и правая части уравнения разбиваются на префиксы и суффиксы одинаковой длины:  $\mathbf{A} w \mathbf{B} w = w \mathbf{B} w \mathbf{A}$

После разбиения на систему более простых уравнений, противоречивость доказывается за один шаг развёртки.





## Эвристики: разрезание

Скажем, что уравнение  $\Phi = \Psi$  содержит равносоставленные префиксы, если у него существует представление  $\Phi_1\Phi_2 = \Psi_1\Psi_2$  такое, что:

- совокупное число всех констант в  $\Phi_1$  и  $\Psi_1$  одинаково.

Формально: 
$$\sum_{\gamma_i \in \Sigma} |\Phi_1|_{\gamma_i} = \sum_{\gamma_i \in \Sigma} |\Psi_1|_{\gamma_i}$$

- кратности всех переменных в  $\Phi_1$  и  $\Psi_1$  совпадают.

Формально:  $\forall w \in V(|\Phi_1|_w = |\Psi_1|_w)$ .

Аналогичное понятие имеет смысл и для суффиксов.



## Безопасность эвристики разрезания

Можно показать, что переход от уравнения  $\Phi_1\Phi_2 = \Psi_1\Psi_2$  к системе равносоставленных:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Psi_1 \\ \Phi_2 = \Psi_2 \end{cases} \quad (3)$$

безопасен в смысле завершаемости развёртки.

Если развёртка посредством преобразования Нильсена уравнения  $\Phi_1\Phi_2 = \Psi_1\Psi_2$ , где  $\Phi_1$  и  $\Psi_1$  равносоставлены, завершается, то завершается и развёртка системы (3).

Действительно, совокупная длина системы (3) после любой последовательности подстановок будет не больше, чем длина уравнения. Она может оказаться меньше, поскольку сокращения равных префиксов возможны не только в префиксах  $\Phi_1$  и  $\Psi_1$ , но и «из середины»: в  $\Phi_2$  и  $\Psi_2$ .



## Эвристики: применение подсчёта

- Уравнение вида  $w u u = u \mathbf{A} u w v$  не поддаётся эвристике разрезания из-за вхождения  $v$  в конец правой части, блокирующего появление равносоставленных суффиксов. Однако видно, что это уравнение несовместно, поскольку совокупная длина подстановок в его правую часть всегда больше, чем в левую. Формально, если отображать все значения переменных в длины, а буквы — в 1, получим несовместное уравнение:

$$|w| + 2 \cdot |u| < |w| + 2 \cdot |u| + |v| + 1$$

- Образ уравнения  $u u \mathbf{A} u = w \mathbf{A} \mathbf{A} w w$  при вычислении длин совместен в  $\mathbb{R}$  (и в  $\mathbb{Q}$ ):

$$3 \cdot |u| + 1 \stackrel{?}{=} 3 \cdot |w| + 2$$

Однако решений в  $\mathbb{N}$  (подразумевается, что  $0 \in \mathbb{N}$ ) не существует, что опровергает существование решения у исходного уравнения в словах.



## Эвристики: применение подсчёта

- Образы частей уравнения  $u$  и  $\mathbf{A}w = w$  и  $\mathbf{B}u$  по длинам совпадают. Но при подсчёте только вхождений букв  $\mathbf{A}$  в части уравнений опять возникает противоречие:

$$|w|_{\mathbf{A}} + 2 \cdot |u|_{\mathbf{A}} + 1 > |w|_{\mathbf{A}} + 2 \cdot |u|_{\mathbf{A}}$$

- Похожую эвристику можно применить и к уравнению  $\mathbf{ABC}w\mathbf{C}u\mathbf{C}u = w\mathbf{C}u\mathbf{C}u\mathbf{CBA}$ , если считать не отдельные буквы (их количество будет совпадать, а *подслова*  $\mathbf{AB}$ ):

$$|w|_{\mathbf{AB}} + 2 \cdot |u|_{\mathbf{AB}} + 1 > |w|_{\mathbf{AB}} + 2 \cdot |u|_{\mathbf{AB}}$$

Действительно, все возможные вхождения  $\mathbf{AB}$  в части уравнения либо целиком лежат внутри значений  $w$  и  $u$ , либо явны, поскольку все вхождения переменных в уравнение отделены от соседних термов буквами  $\mathbf{C}$ . Очевидно, возможны иные случаи.



## Эвристики: применение подсчёта

Например, рассмотрим то же уравнение без разделителей **C**: **AB***wuu* = *wuu***BA**. Формальное отображение  $x \mapsto |x|_{\mathbf{AB}}$ , **AB**  $\mapsto 1$ , **BA**  $\mapsto 0$ , аналогичное сделанному ранее, приведёт к противоречию. Однако уравнение совместно, если положить  $w \mapsto \mathbf{A}$ ,  $u \mapsto \varepsilon$ .

Посмотрим теперь на результат подстановки внимательно:

$$\mathbf{AB} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{BA}$$

Красным фоном выделены вхождения букв в значение  $w$ , синим — явные вхождения в уравнение; красным цветом шрифта выделены искомые вхождения подстроки **AB**. Видно, что прямой подсчёт был ошибочным из-за перекрёстного вхождения **AB**: первая его буква принадлежала значению  $w$ , вторая — множеству констант уравнения.



## Эвристики: применение подсчёта

Скажем, что  $\gamma_1\gamma_2$  ( $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ) может иметь перекрёстное вхождение в решение уравнения  $\Phi_1 = \Phi_2$ , если:

- в  $\Phi_1$  или в  $\Phi_2$  есть вхождения двух переменных (возможно, различных) подряд;
- или в  $\Phi_i$  какая-то из переменных соседствует с  $\gamma_2$  слева;
- или в  $\Phi_i$  какая-то из переменных соседствует с  $\gamma_1$  справа.

Если все три условия насчёт  $\Phi_1 = \Phi_2$  ложны, то к нему можно применять эвристику оценки числа пар  $\gamma_1\gamma_2$  посредством простого подсчёта.

Случай  $\gamma_1 = \gamma_2$  создаёт дополнительную сложность: при нём могут перекрываться и явные вхождения  $\gamma_1\gamma_1$  в уравнение.



## Идея алгоритма Ежа

- Если пара букв  $\gamma_1\gamma_2$  ( $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ) не имеет перекрёстных вхождений, тогда её можно рассматривать как новую «составную букву», при этом длина минимального решения может только уменьшиться.

В уравнении  $w\mathbf{CAB} = \mathbf{B}w\mathbf{C}w$  пара **AB** не имеет перекрёстных вхождений, поэтому можно заменить её на новую константу (например,  $\mathbf{A}_1$ ). Получится уравнение  $w\mathbf{CA}_1 = \mathbf{B}w\mathbf{C}w$ .

- *Максимальные* неперекрёстные блоки из букв  $\gamma$  также можно рассматривать как новые составные буквы.

В уравнении  $\mathbf{A}^2\mathbf{B}w = w\mathbf{BAB}w\mathbf{BA}^3$  буква **A** образует группы  $\mathbf{A}^1$ ,  $\mathbf{A}^2$ ,  $\mathbf{A}^3$ , и их длина максимальна: если слово начинается с какого-нибудь из них, то другие уже не могут его начинать из-за блока вхождениями **B**. Выполнив сжатие  $\mathbf{A}^i$  в новые (различные!) буквы  $\mathbf{A}_i$ , уравнение можно заменить на  $\mathbf{A}_2\mathbf{B}w = w\mathbf{BA}_1\mathbf{B}w\mathbf{BA}_3$ .



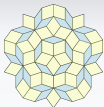


## Перекрёстные пары

Действие: сжатие пары  $\gamma_1\gamma_2$  в уравнении  $\Phi_1 = \Phi_2$ . Как проще всего могут возникнуть перекрёстные пары?

- В  $\Phi_1 = \Phi_2$  есть подслова  $w_i\gamma_2$  и  $w_i = w'_i\gamma_1$ ;
- В  $\Phi_1 = \Phi_2$  есть подслова  $\gamma_1w_i$  и  $w_i = \gamma_1w'_i$ ;
- В  $\Phi_1 = \Phi_2$  есть подслова  $w_iw_j$ , причём  $w_i = w'_i\gamma_1$  и  $w_j = \gamma_2w'_j$ .

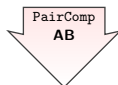
Каждое подслово указанных выше видов индуцирует подстановку, порождающую перекрёстное вхождение, а также случай, когда такая подстановка невозможна (условие на значения  $w_k$  не выполняются). Рассмотрение всех комбинаций указанных возможностей порождает полное описание вхождений перекрёстных пар.



## Перекры́стные пары

Допустим, рассматривается уравнение  $\mathbf{AB}wuu = wuu\mathbf{BA}$ . Очевидные варианты извлечения перекры́стных блоков представлены ниже.

<b>AB</b> $wuu = wuu$ <b>BA</b>
Без рестрикций



<b>AB</b> $w$ <b>A</b> $B$ $u$ <b>A</b> $B$ $u$ <b>A</b>
$= w$ <b>A</b> $B$ $u$ <b>A</b> $B$ $u$ <b>A</b> $BA$
$w \mapsto w$ <b>A</b>
$u \mapsto B$ $u$ <b>A</b>

<b>AB</b> $w$ $B$ $u$ <b>A</b> $B$ $u$ <b>A</b>
$= w$ $B$ $u$ <b>A</b> $B$ $u$ <b>A</b> $BA$
$u \mapsto B$ $u$ <b>A</b>
$w \neq w' \mathbf{A}$

<b>AB</b> $w$ <b>A</b> $B$ $u$ $B$ $u$
$= w$ <b>A</b> $B$ $u$ $B$ $u$ $BA$
$w \mapsto w$ <b>A</b>
$u \mapsto B$ $u$
$u \neq u' \mathbf{A}$

<b>AB</b> $wu$ <b>A</b> $u$ <b>A</b>
$= wu$ <b>A</b> $u$ $BA$
$u \mapsto u$ <b>A</b>
$u \neq B u'$

<b>AB</b> $wuu = wuu$ <b>BA</b>
$u \neq u' \mathbf{A}$
$u \neq B u' \vee w \neq w' \mathbf{A}$

Рестрикции были упрощены согласно необходимым условиям на перекры́стные пары.

<b>A</b> <b>B</b>	подстановка $u \mapsto u$ <b>A</b>
-------------------	------------------------------------

<b>A</b> <b>B</b>	композиция $u \mapsto B$ $u$ и $w \mapsto w$ <b>A</b>
-------------------	---

<b>A</b> <b>B</b>	композиция $u \mapsto B$ $u$ и $u \mapsto u$ <b>A</b>
-------------------	---

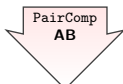


## Перекрёстные пары

Теперь можно осуществить сжатие пары  $\mathbf{AB} \mapsto \mathbf{A}_1$  без риска потерять перекрёстные вхождения. И выяснится, что почти все уравнения, кроме первого, не могут иметь решений.

$$\mathbf{AB}wuu = wuu\mathbf{BA}$$

Без рестрикций



$$\mathbf{A}_1w\mathbf{A}_1u\mathbf{A}_1u\mathbf{A} = w\mathbf{A}_1u\mathbf{A}_1u\mathbf{A}_1\mathbf{A}$$

Без рестрикций

$$\mathbf{A}_1w\mathbf{B}u\mathbf{A}_1u\mathbf{A} = w\mathbf{B}u\mathbf{A}_1u\mathbf{A}_1\mathbf{A}$$

Противоречие по вхождениям  $\mathbf{A}_1$  в равносоставленные части

$$\mathbf{A}_1w\mathbf{A}_1u\mathbf{B}u = w\mathbf{A}_1u\mathbf{B}u\mathbf{BA}$$

Противоречие по вхождениям  $\mathbf{A}_1$  в целое уравнение

$$\mathbf{A}_1wu\mathbf{A}u\mathbf{A} = wu\mathbf{A}u\mathbf{A}_1\mathbf{A}$$

Противоречие по вхождениям  $\mathbf{A}_1$  в равносоставленные части

$$\mathbf{A}_1wuu = wuu\mathbf{BA}$$

Противоречие по вхождениям  $\mathbf{A}_1$  в целое уравнение

Поскольку сжатие констант переводит разрешимые уравнения в разрешимые, то неразрешимые образы сжатия сразу же можно выбросить из рассмотрения.



## Существенные пустые подстановки

Действительно ли в уравнении  $\mathbf{AB}wii = wii\mathbf{BA}$  были рассмотрены все возможности сжатия пары  $\mathbf{AB}$ ? Если да, то почему ими не описывается решение  $w \mapsto \mathbf{A}$ ,  $i \mapsto \varepsilon$ , о котором мы уже знаем?

До сих пор разбирались только появление перекрёстных пар у смежных термов, но если между несмежными термами стоит блок из переменных, он может коллапсировать в  $\varepsilon$ , и тогда появятся перекрёстные пары другого типа. В уравнении  $\mathbf{AB}wii = w\mathbf{i}i\mathbf{BA}$  вырождение  $ii$  в  $\varepsilon$  приводит к возможности рассмотрения перекрёстной пары на границе  $w\mathbf{B}$ .



## Существенные пустые подстановки

Подстановка  $\eta : u_i \mapsto \varepsilon$  существенная, если в результате её применения возможно построить новую явную или перекрёстную пару.

Композиция  $\eta_n \circ \dots \circ \eta_1$ ,  $\eta_i : u_i \mapsto \varepsilon$ , существенная, если в результате её применения становится возможно построить новую явную или перекрёстную пару (не возможную после применения подмножества  $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ ).

Следующая лемма позволяет разбирать случаи существенных пустых подстановок по одной, рекурсивно.

Если композиция  $\eta_n \circ \dots \circ \eta_1$  пустых подстановок является существенной, то каждая из  $\eta_i$  существенна.



## Существенные пустые подстановки

Следующая лемма позволяет разбирать случаи существенных пустых подстановок по одной, рекурсивно.

Если композиция  $\eta_n \circ \dots \circ \eta_1$  пустых подстановок является существенной, то каждая из  $\eta_i$  существенна.

Отметим, что подобная лемма не выполнена для непустых подстановок. Например, в уравнении  $wu\mathbf{A} = \mathbf{B}wu$  при сжатии пары  $\mathbf{AB}$  существенна композиция  $\sigma_1 : w \mapsto w\mathbf{A}$  и  $\sigma_2 : u \mapsto \mathbf{B}u$ , но применение  $\sigma_1$  или  $\sigma_2$  по отдельности не приводит к появлению слова  $\mathbf{AB}$ .



## Задача на однозначность

Какие слова сопоставляются с образцом  $x_1 x_2 x_2 x_1$  неоднозначно?

Решим уравнение неоднозначности:  $x_1 x_2 x_2 x_1 = z_1 z_2 z_2 z_1$ .  
Заметим, что это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x_1 x_2 = z_1 z_2 \\ x_2 x_1 = z_2 z_1 \end{cases} \quad (4)$$

Допустив, что  $|x_1| > |z_1|$ , применим двухстороннюю лемму Леви:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 x_{1,s} \\ x_1 = x_{1,p} z_1 \end{cases} \quad (5)$$

Значит,

$x_{1,s} = uv$ ,  $x_{1,p} = vu$ ,  $z_1 = (vu)^n v$ . Тогда  $x_1 = (vu)^{n+1} v$ . При этом полагаем  $(vu)$  простым словом.



## Задача на однозначность

Какие слова сопоставляются с образцом  $x_1 x_2 x_2 x_1$  неоднозначно?

Решим уравнение неоднозначности:  $x_1 x_2 x_2 x_1 = z_1 z_2 z_2 z_1$ .  
Заметим, что это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x_1 x_2 = z_1 z_2 \\ x_2 x_1 = z_2 z_1 \end{cases} \quad (4)$$

$x_{1,s} = uv$ ,  $x_{1,p} = vu$ ,  $z_1 = (vu)^n v$ . Тогда  $x_1 = (vu)^{n+1} v$ . При этом полагаем  $(vu)$  простым словом. Подставляя полученные значения в систему (4), имеем  $x_2 vu = uvx_2$ . Это опять уравнение сопряжения. Если сопряжение такое же, как для  $z_1$  (т.е.  $x_2$  имеет вид  $(vu)^m u$ ), тогда мы получаем, что  $x_1 x_2 x_2 x_1 = (vu)^{n+2} (uv)^{n+2}$ . Частный случай этого решения — если  $v = \varepsilon \vee u = \varepsilon$ .





## Задача на однозначность

Какие слова сопоставляются с образцом  $x_1 x_2 x_2 x_1$  неоднозначно?

Решим уравнение неоднозначности:  $x_1 x_2 x_2 x_1 = z_1 z_2 z_2 z_1$ .  
Заметим, что это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x_1 x_2 = z_1 z_2 \\ x_2 x_1 = z_2 z_1 \end{cases} \quad (4)$$

Пусть  $x_1 = (vu)^{n+1}v$ ,  $x_2 vu = uvx_2$ , причём  $vu$  — простое и  $v \neq \varepsilon$ ,  $u \neq \varepsilon$ . Предположим теперь, что существуют такие  $v_1$ ,  $u_1$ , что  $vu = v_1 u_1$ ,  $uv = u_1 v_1$ , но  $|v| \neq |v_1|$ . Если окажется, что  $u_1$  или  $v_1$  — пустое слово, тогда  $vu = uv$ , поэтому  $vu$  — не простое. Иначе можно заметить, что система уравнений на  $u$ ,  $v$ ,  $u_1$ ,  $v_1$  в точности повторяет (4), но  $|v| < |x_1|$ . По индукции, этот процесс рано или поздно приведёт к  $|v_i| = \varepsilon$  или  $|u_i| = \varepsilon$  (и будет получено противоречие с начальными условиями).



## Задача на однозначность

Какие слова сопоставляются с образцом  $x_1 x_2 x_2 x_1$  неоднозначно?

Решим уравнение неоднозначности:  $x_1 x_2 x_2 x_1 = z_1 z_2 z_2 z_1$ .

Заметим, что это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x_1 x_2 = z_1 z_2 \\ x_2 x_1 = z_2 z_1 \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, удалось показать, что решениями системы (4) будут лишь слова вида  $(vu)^{n+2}(uv)^{n+2}$ , а значит, при сопоставлении только с такими словами образца  $x_1 x_2 x_2 x_1$  может возникнуть неоднозначность (причём перебор при сопоставлении в этом случае достаточно делать лишь по степеням  $vu$ ).