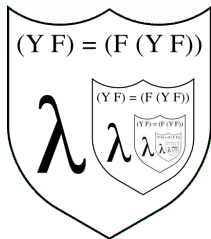
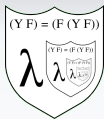


Соответствие Карри–Ховарда. Лекция вторая



А. Н. Непейвода
ИПС им. А.К. Айламазяна РАН,
МГТУ им. Н.Э. Баумана

MathClub,
25 февраля 2022, Иннополис



Аксиомы комбинаторной логики

Эквивалентность комбинаторов, имеющих нормальную форму, определяется в следующей системе переписывания термов (+ аксиомы для S , K , I):

$$\begin{aligned} S(KK) &= S(S(KS)(S(KK)(S(KS)K)))(KK) \\ S(KS)(S(KK)) &= S(KK)(S(S(KS)(S(KK)I))(KI)) \\ S(K(S(KS)))(S(KS)(S(KS))) \\ &= S(S(KS)(S(KK)(S(KS)(S(K(S(KS)))S))))(KS) \\ I &= S(S(KS)K)(KI) \end{aligned}$$

Переписывание может применяться с любой стороны, и в процессе применения аксиом упрощаемый терм может удлиняться.



Упражнение

Известно, что композиция $\lambda x y z. x (y z)$ — это `fmap` для функтора `Reader`. Выразить её в бесточечном виде по алгоритму и по логике.

```
newtype MyRead r a = Rd {run :: r -> a}
instance Applicative (MyRead r) where
-- Это синоним комбинатора K.
  pure v = Rd (\_ -> v)
-- А это инфиксный синоним комбинатора S.
  Rd f <*> Rd g = Rd (\x -> f x (g x))
```



Упражнение

Известно, что композиция $\lambda x y z. x (y z)$ — это `fmap` для функтора `Reader`. Выразить её в бесточечном виде по алгоритму и по логике.

Посмотрим на структуру терма $\lambda x y z. x (y z)$. Он задействует все переменные, поэтому внешним комбинатором должен быть `S`, а чтобы не появилось нежелательной композиции $(x y)$, `y` этого комбинатора должно быть два аргумента. Пробуем:
 $S M_1 M_2 x = M_1 x (M_2 x)$.

Здесь одно из вхождений `x` лишнее. Предположим, что первое, тогда $M_1 = K M_3$, и результат: $M_3 (M_2 x)$.

Рассмотрим $M_3 = S$, получаем $M_2 x z (y z)$. Очевидно, $M_2 = K$, и итоговый терм в комбинаторах `S(KS)K`. Ниже — его представление в языке аппликативных операторов.



Упражнение

Известно, что композиция $\lambda x y z. x (y z)$ — это `fmap` для функтора `Reader`. Выразить её в бесточечном виде по алгоритму и по логике.

```
newtype MyRead r a = Rd {run :: r -> a}
instance Applicative (MyRead r) where
-- Это синоним комбинатора K.
  pure v = Rd (\_ -> v)
-- А это инфиксный синоним комбинатора S.
  Rd f <*> Rd g = Rd (\x -> f x (g x))
```

```
fmap f (Rd x)
  = (Rd ((pure (<*>)) <*> pure) f x)
```



Вычисления «от противного»

Проблема термов в типизированном λ -исчислении (и чистого функционального стиля): «что упало, то пропало». Если вычислено $(M\ N)$, то M и N по отдельности уже потеряны навсегда.



Вычисления «от противного»

Проблема термов в типизированном λ -исчислении (и чистого функционального стиля): «что упало, то пропало». Если вычислено $(M\ N)$, то M и N по отдельности уже потеряны навсегда.

Логичный выход — возвраты, если стало ясно, что вычисления зашли в тупик. Аналог в доказательствах — работа с отрицанием.

$$\frac{\Gamma \vdash \tau, \Gamma \vdash \neg \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \quad (\text{из лжи следует всё что угодно})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg \neg \tau}{\Gamma \vdash \tau} \quad (\text{снятие двойного отрицания})$$



Теорема Гливленко

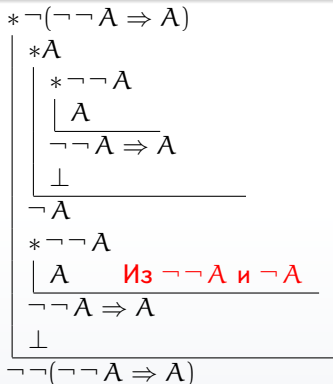
Пусть Φ — пропозициональная формула. Тогда $\vdash \Phi$ в классической логике $\Leftrightarrow \vdash \neg\neg\Phi$ в конструктивной интуиционистской логике.

Здесь под конструктивной интуиционистской логикой понимаем минимальную логику + «из лжи следует всё что угодно». Потом мы опять вернёмся к минимальной логике, но сначала посмотрим, как всё сложно с извлечением термов из отрицания.



Теорема Гливенко

Пусть Φ — пропозициональная формула. Тогда $\vdash \Phi$ в классической логике $\Leftrightarrow \vdash \neg\neg\Phi$ в конструктивной интуиционистской логике.





Теорема Гливенко

Пусть Φ — пропозициональная формула. Тогда $\vdash \Phi$ в классической логике $\Leftrightarrow \vdash \neg\neg\Phi$ в конструктивной интуиционистской логике.

* $\neg(\neg\neg A \Rightarrow A)$

* A

* $\neg\neg A$

A

$\neg\neg A \Rightarrow A$

\perp

$\neg A$

* $\neg\neg A$

A **Из $\neg\neg A$ и $\neg A$**

$\neg\neg A \Rightarrow A$

\perp

$\neg\neg(\neg\neg A \Rightarrow A)$

* $\neg(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$

* A

* $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$

A

$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

\perp

$\neg A$

* $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$

* A

B **из A и $\neg A$**

$A \Rightarrow B$

A

$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

\perp

$\neg\neg(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$



Переход к относительному отрицанию

«Вычисления зашли в тупик» \Rightarrow приводят к нежелательному результату. Интерпретация $\neg_R \Phi = (\Phi \Rightarrow R)$.

Рассмотрим предыдущие два вывода с точки зрения извлечения термов из их конструкции.



Переход к относительному отрицанию

$$\begin{array}{l}
 *(\neg_R \neg_R A \Rightarrow A) \Rightarrow R \quad (\text{тип } x) \\
 \begin{array}{l}
 *A \quad (\text{тип } y) \\
 \begin{array}{l}
 * \neg_R \neg_R A \quad (\text{тип } z) \\
 \begin{array}{l}
 A \quad (\text{терм } y) \\
 \hline
 \neg_R \neg_R A \Rightarrow A \quad (\text{терм } \lambda z.y) \\
 R \quad (\text{терм } x (\lambda z.y)) \\
 \hline
 A \Rightarrow R \quad (\text{терм } \lambda y.x (\lambda z.y))
 \end{array} \\
 * (A \Rightarrow R) \Rightarrow R \quad (\text{тип } w) \\
 \begin{array}{l}
 A \quad (???!! \text{ из } A \Rightarrow R \text{ и } (A \Rightarrow R) \Rightarrow R) \\
 \hline
 \neg_R \neg_R A \Rightarrow A \\
 R
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Проблема с правилом «из лжи следует всё что угодно»:
 относительное отрицание даёт вывести из противоречия лишь одну
 формулу R . Вывод требует, чтобы $R = A$, но это превращает
 исходную формулу в тривиальность:
 $(((((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow A$.



Переход к относительному отрицанию

«Вычисления зашли в тупик» \Rightarrow приводят к нежелательному результату. Интерпретация $\neg_R \Phi = (\Phi \Rightarrow R)$.

$$\begin{array}{l}
 *(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow R \quad (\text{тип } x) \\
 \begin{array}{l}
 *A \quad (\text{тип } y) \\
 \begin{array}{l}
 *(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \quad (\text{тип } z) \\
 \begin{array}{l}
 A \quad (\text{терм } y) \\
 \hline
 ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A \quad (\text{терм } \lambda z.y) \\
 R \quad (\text{терм } x (\lambda z.y))
 \end{array} \\
 \hline
 A \Rightarrow R \quad (\text{терм } \lambda y.x (\lambda z.y))
 \end{array} \\
 *(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \quad (\text{тип } u) \\
 \begin{array}{l}
 *A \quad (\text{тип } w) \\
 \begin{array}{l}
 B \quad \text{???} \\
 \hline
 A \Rightarrow B \\
 A \\
 \hline
 ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A \\
 R
 \end{array}
 \end{array} \\
 \hline
 (((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow R \Rightarrow R
 \end{array}$$



Переход к относительному отрицанию

$$\begin{array}{l}
 *(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow B \quad (\text{тип } x) \\
 \begin{array}{l}
 *A \quad (\text{тип } y) \\
 \begin{array}{l}
 *(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \quad (\text{тип } z) \\
 \begin{array}{l}
 A \quad (\text{терм } y) \\
 \hline
 ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A \quad (\text{терм } \lambda z.y) \\
 B \quad (\text{терм } x (\lambda z.y))
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 A \Rightarrow B \quad (\text{терм } \lambda y.x (\lambda z.y)) \\
 *(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \quad (\text{тип } u) \\
 \begin{array}{l}
 *A \quad (\text{тип } w) \\
 \begin{array}{l}
 B \quad (\text{терм } (\lambda y.x (\lambda z.y)) w) \\
 \hline
 A \Rightarrow B \quad (\text{терм } \lambda y.x (\lambda z.y)) \\
 A \quad (\text{терм } u (\lambda y.x (\lambda z.y)))
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A \quad (\text{терм } \lambda u.u (\lambda y.x (\lambda z.y))) \\
 B \quad (\text{терм } x (\lambda u.u (\lambda y.x (\lambda z.y)))) \\
 \hline
 (((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow B \Rightarrow B \quad (\text{терм } (\lambda x.x (\lambda u.u (\lambda y.x (\lambda z.y))))
 \end{array}$$

Здесь тоже сложно с правилом «из лжи следует всё что угодно», но вопрос решается, если положить $R = B$. Тогда мы получаем минимальный вывод нетривиальной формулы Крипке.



Навешивание двойного отрицания

Видно, что использование «возвратных» термов (переход от типа Φ к типу $\neg_R \neg_R \Phi$) расширяет возможности языка. Возникает вопрос, в каких подформулах лучше это делать?

- Преобразование Колмогорова:

$$\sigma_K(A) = \neg_R \neg_R A$$

$$\sigma_K(\Phi \Rightarrow \Psi) = \neg_R \neg_R (\sigma_K(\Phi) \Rightarrow \sigma_K(\Psi))$$

- Вариант более слабого преобразования (в стиле Куроды) — это $\sigma'_W(\Phi) = \neg_R \neg_R \sigma'_W(\Phi)$, где:

$$\sigma'_W(A) = A$$

$$\sigma'_W(\Phi \Rightarrow \Psi) = \sigma'_W(\Phi) \Rightarrow \neg_R \neg_R \sigma'_W(\Psi)$$

В примерах для краткости $(\Phi \Rightarrow R) \Rightarrow R$ переобозначим как Φ' .



Переход по Колмогорову

$*(A' \Rightarrow ((A' \Rightarrow B')' \Rightarrow B')') \Rightarrow R$	(тип k_0)
$*(A \Rightarrow R) \Rightarrow R$	(тип x)
$*((A' \Rightarrow B')' \Rightarrow B') \Rightarrow R$	(тип k_1)
$*((A' \Rightarrow B') \Rightarrow R) \Rightarrow R$	(тип y)
$*B \Rightarrow R$	(тип k_2)
$*A' \Rightarrow B'$	(тип k_3)
$*A \Rightarrow R$	(тип k_4)
R	(терм $x \ k_4$)
$(A \Rightarrow R) \Rightarrow R$	(терм $\lambda k_4. x \ k_4$)
$(B \Rightarrow R) \Rightarrow R$	(терм $k_3 (\lambda k_4. x \ k_4)$)
R	(терм $(k_3 (\lambda k_4. x \ k_4)) \ k_2$)
$(A' \Rightarrow B') \Rightarrow R$	(терм $\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2$)
R	(терм $y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2)$)
$(B \Rightarrow R) \Rightarrow R$	(терм $\lambda k_2. y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2)$)
$(A' \Rightarrow B')' \Rightarrow B'$	(терм $\lambda y k_2. y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2)$)
R	(терм $k_1 (\lambda y k_2. y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2))$)
$((A' \Rightarrow B')' \Rightarrow B') \Rightarrow R$	(терм $\lambda k_1. k_1 (\lambda y k_2. y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2))$)
$A' \Rightarrow ((A' \Rightarrow B')' \Rightarrow B')'$	(терм $\lambda x k_1. k_1 (\lambda y k_2. y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2))$)
R	(терм $k_0 (\lambda x k_1. k_1 (\lambda y k_2. y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2)))$)
$((A' \Rightarrow ((A' \Rightarrow B')' \Rightarrow B')') \Rightarrow R) \Rightarrow R$	
Извлечённый терм: $\lambda k_0. k_0 (\lambda x k_1. k_1 (\lambda y k_2. y (\lambda k_3. k_3 (\lambda k_4. x \ k_4) \ k_2)))$	



Слабый переход по Куроде

$$\begin{array}{l}
 * (A \Rightarrow ((A \Rightarrow B') \Rightarrow B')') \Rightarrow R \quad (\text{тип } k_0) \\
 \begin{array}{l}
 * A \quad (\text{тип } x) \\
 \begin{array}{l}
 * ((A \Rightarrow B') \Rightarrow B') \Rightarrow R \quad (\text{тип } k_1) \\
 \begin{array}{l}
 * A \Rightarrow B' \quad (\text{тип } y) \\
 \begin{array}{l}
 * B \Rightarrow R \quad (\text{тип } k_2) \\
 \begin{array}{l}
 (B \Rightarrow R) \Rightarrow R \quad (\text{тип } y \ x) \\
 R \quad (\text{тип } y \ x \ k_2) \\
 \hline
 (B \Rightarrow R) \Rightarrow R \quad (\text{тип } \lambda k_2. y \ x \ k_2) \\
 \hline
 (A \Rightarrow B') \Rightarrow B' \quad (\text{тип } \lambda y k_2. y \ x \ k_2) \\
 \hline
 R \quad (\text{тип } k_1 (\lambda y k_2. y \ x \ k_2)) \\
 \hline
 (((A \Rightarrow B') \Rightarrow B') \Rightarrow R) \Rightarrow R \quad (\text{тип } \lambda k_1. k_1 (\lambda k_2. y \ x \ k_2)) \\
 \hline
 A \Rightarrow ((A \Rightarrow B') \Rightarrow B')' \quad (\text{тип } \lambda x k_1. k_1 (\lambda k_2. y \ x \ k_2)) \\
 \hline
 R \quad (\text{тип } k_0 (\lambda x k_1. k_1 (\lambda k_2. y \ x \ k_2))) \\
 \hline
 ((A \Rightarrow ((A \Rightarrow B') \Rightarrow B')') \Rightarrow R) \Rightarrow R
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Извлечённый терм: $\lambda k_0. k_0 (\lambda x k_1. k_1 (\lambda y k_2. y \ x \ k_2))$.



Детали преобразования

- Переменные x и y получают имена так: смотрим на исходный терм $\lambda x y. y \ x$. В нём тип x — это просто A , тип y — это $A \Rightarrow B$. Теперь преобразуем их типы по Колмогорову или Куроде как подформулы. Образы этих типов и породят термы x и y .
- В выводе терма по Куроде есть странный подвывод, в котором выводится $(B \Rightarrow R) \Rightarrow R$, и так выводимая без него:

$$\begin{array}{l} *A \Rightarrow B' \quad \text{(тип } y) \\ \left| \begin{array}{l} *B \Rightarrow R \quad \text{(тип } k_2) \\ \left| \begin{array}{l} (B \Rightarrow R) \Rightarrow R \quad \text{(тип } y \ x) \\ R \quad \text{(тип } y \ x \ k_2) \end{array} \right. \\ \hline (B \Rightarrow R) \Rightarrow R \quad \text{(тип } \lambda k_2. y \ x \ k_2) \end{array} \right. \\ \hline (A \Rightarrow B') \Rightarrow B' \quad \text{(тип } \lambda y k_2. y \ x \ k_2) \end{array}$$

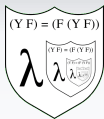
Однако если выводиться формулу без подвывода с допущением $B \Rightarrow R$ напрямую, то вместо $A \Rightarrow B'$ можно просто подставить формулу $A \Rightarrow B$, и мы получим вывод не требуемой формулы, а более общей: $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B'))'$, а мы хотим доказать именно ту формулу, которую получили преобразованием.



Система передачи продолжений

Система передачи продолжений в CBN-стиле:

- $\tau_N(\text{const}) = \lambda k.k \text{ const}$
- $\tau_N(x) = \lambda k.x \ k$
- $\tau_N(\lambda x.M) = \lambda k.k (\lambda x.\tau_N(M))$
- $\tau_N(M \ N) = \lambda k.\tau_N(M) (\lambda f.f \ \tau_N(N) \ k)$



Система передачи продолжений

Система передачи продолжений в CBN-стиле:

- $\tau_N(\text{const}) = \lambda k.k \text{ const}$
- $\tau_N(x) = \lambda k.x k$
- $\tau_N(\lambda x.M) = \lambda k.k (\lambda x.\tau_N(M))$
- $\tau_N(M N) = \lambda k.\tau_N(M) (\lambda f.f \tau_N(N) k)$

Система передачи продолжений в CBV-стиле:

- $\tau_V(\text{const}) = \lambda k.k \text{ const}$
- $\tau_V(x) = \lambda k.k x$
- $\tau_V(\lambda x.M) = \lambda k.k (\lambda x.\tau_V(M))$
- $\tau_V(M N) = \lambda k.\tau_V(M) (\lambda f.\tau_V(N) (\lambda a.f a k))$



Применение CPS-преобразования

Утверждение

Если тип исходного терма M — это Φ , то тип терма $\tau_N(M)$ — это $\sigma_K(\Phi)$, тип терма $\tau_V(M)$ — это $\sigma_W(\Phi)$.

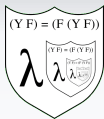
Пример формулы Пирса $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ показывает, что некоторые термы типизируются только после CPS-преобразования. Это и есть практический смысл теоремы Гливенко.

- $M \rightarrow^* \text{const}$ при CBV-стратегии $\Leftrightarrow \tau_V(M) \text{ id} \rightarrow^* \text{const}$ при какой угодно стратегии.
- $M \rightarrow^* \text{const}$ при CBN-стратегии $\Leftrightarrow \tau_N(M) \text{ id} \rightarrow^* \text{const}$ при какой угодно стратегии.



Монада Cont

```
newtype MyCont r a = Mc { runCont :: (a -> r) -> r
}
instance Functor (MyCont r) where
  fmap f (Mc cps_a) = ...
instance Applicative (MyCont r) where
  pure v = ...
  Mc cps_f <*> Mc cps_a = ...
```



Монада Cont

```
newtype MyCont r a = Mc { runCont :: (a -> r) -> r
}
instance Functor (MyCont r) where
  fmap f (Mc cps_a) = Mc (\cps -> cps_a (cps . f))
instance Applicative (MyCont r) where
  pure v = ...
  Mc cps_f <*> Mc cps_a = ...
```



Монада Cont

```
newtype MyCont r a = Mc { runCont :: (a -> r) -> r
}
instance Functor (MyCont r) where
  fmap f (Mc cps_a) = Mc (\cps -> cps_a (cps . f))
instance Applicative (MyCont r) where
  pure v = Mc (\r -> r v)
  Mc cps_f <*> Mc cps_a = ...
```




Монада Cont

```
newtype MyCont r a = Mc { runCont :: (a -> r) -> r
}
instance Functor (MyCont r) where
  fmap f (Mc cps_a) = Mc (\cps -> cps_a (cps . f))
instance Applicative (MyCont r) where
  pure v = Mc (\r -> r v)
  Mc cps_f <*> Mc cps_a =
    Mc (\cps_b -> cps_f (\f -> cps_a (cps_b . f)))
```



Упражнение

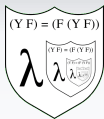
Пользуясь соответствием Карри–Ховарда, построить явным образом терм, реализующий bind-оператор $>>=$ для монады `Cont`.

Тип $>>= :: \text{MyCont } a \rightarrow (a \rightarrow \text{MyCont } b) \rightarrow \text{MyCont } b$, и это всё, что нужно знать для решения задачи.



Прерывания вычислений

- Жёсткое прерывание — полный выход из контекста $(\neg_R \neg_R A \Rightarrow A)$;
- Мягкое прерывание — возвращает текущий контекст вычислений $((\neg_R A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$ — закон Пирса, а также тип оператора call-with-current-continuation.



Вывод = конструкция

*(((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)

*B \Rightarrow A

* (A \Rightarrow B) \Rightarrow B

*A \Rightarrow B

B

A

(A \Rightarrow B) \Rightarrow A

A **Закон Пирса!**

((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow A

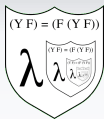
B

(B \Rightarrow A) \Rightarrow B

B

Закон Пирса!

((((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Rightarrow B



Вывод = конструкция

$$\begin{array}{l}
 *(((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B \quad (\text{тип терма } x) \\
 | *B \Rightarrow A \quad (\text{тип терма } y) \\
 | | *(A \Rightarrow B) \Rightarrow B \quad (\text{тип терма } z) \\
 | | | *A \Rightarrow B \quad (\text{тип терма } w) \\
 | | | | B \quad (\text{терм } z \ w) \\
 | | | | A \quad (\text{терм } y \ (z \ w)) \\
 | | | \hline
 | | | (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \quad (\text{терм } \lambda w.y \ (z \ w)) \\
 | | | A \quad (T_1 = \text{callcc } \lambda w.\text{throw } (y \ (z \ w))) \\
 | | \hline
 | | ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow A \quad (\text{терм } \lambda z.T_1) \\
 | | B \quad (\text{терм } x \ (\lambda z.T_1)) \\
 | \hline
 | (B \Rightarrow A) \Rightarrow B \quad (\text{терм } \lambda y.x \ (\lambda z.T_1)) \\
 | B \quad (T_2 = \text{callcc } \lambda y.\text{throw } (x \ (\lambda z.T_1))) \\
 \hline
 (((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B \Rightarrow B \quad \text{терм } \lambda x.T_2
 \end{array}$$



Определение монады

```
class Applicative M => Monad M where  
  return :: a -> M a  
  (>>=) :: M a -> (a -> M b) -> M b
```

Дополнительные монадические операторы:

```
join :: M M a -> M a  
fmap :: (a -> b) -> M a -> M b
```



Соответствие Карри–Ховарда

Propositional Lax Logic — монадическая логика с единственным модальным оператором \bigcirc .

Правила вывода (+ стандартные правила естественного вывода в минимальной логике):

- $\frac{A}{\bigcirc A}$ (Return)
- $\frac{A \Rightarrow \bigcirc B}{\bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B}$ (Bind)

Сохраняет возможность извлечь монадический оператор из вывода типов! Обратим внимание на инвертированный порядок аргументов.



Пример разбора задачи на монадическое соответствие

Построим оператор `join` из операторов `>>=` и `return`.

* $\bigcirc \bigcirc A$ (тип термина x)

(Здесь нужно придумать, как объединить контейнеры, оборачивающие x)

$\bigcirc A$

$\bigcirc \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc A$ (тип термина $\lambda x. \dots$)

Единственный оператор, умеющий заглядывать внутрь контейнера — это `bind`. Он требует два аргумента: контейнерный типа $M\ a$ и монадическую функцию типа $a \rightarrow M\ b$. Поскольку нужно заглянуть внутрь только одной из двух контейнерных оболочек, в роли типа a выступает также монада $M\ a'$. Значит, нам нужна стрелка типа $M\ a' \rightarrow M\ a'$. Это функция `id`, вывод которой мы уже умеем строить.



Пример разбора задачи на монадическое соответствие

* $\circ \circ A$ (тип терма x)

* $\circ A$ (тип терма y)

| $\circ A$ (просто возвращаем сам y)

$\circ A \Rightarrow \circ A$ (тип терма $\lambda y. y$)

(Аргументы bind-оператора построены, осталось применить их в правильном порядке)

$\circ A$

$\circ \circ A \Rightarrow \circ A$ (тип терма $\lambda x. \dots$)



Пример разбора задачи на монадическое соответствие

* $\circ \circ A$ (тип терма x)

* $\circ A$ (тип терма y)

| $\circ A$ (просто возвращаем сам y)

$\circ A \Rightarrow \circ A$ (тип терма $\lambda y. y$)

(Аргументы bind-оператора построены, осталось применить их в правильном порядке)

$\circ A$ (тип терма $x \gg = (\lambda y. y)$)

$\circ \circ A \Rightarrow \circ A$ (тип терма $\lambda x. (x \gg = (\lambda y. y))$)

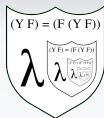


Пример разбора задачи на монадическое соответствие

* $\bigcirc \bigcirc A$ (тип терма x)
| * $\bigcirc A$ (тип терма y)
| | $\bigcirc A$ (просто возвращаем сам y)
| $\bigcirc A \Rightarrow \bigcirc A$ (тип терма $\lambda y. y$)
| (*Аргументы bind-оператора построены, осталось применить их в правильном порядке*)
| $\bigcirc A$ (тип терма $x \gg= (\lambda y. y)$)
| $\bigcirc \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc A$ (тип терма $\lambda x. (x \gg= (\lambda y. y))$)

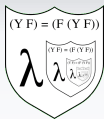
С помощью построения вывода в модальной логике мы просто решили уравнение в ФВП, получив ответ:

`join x = x >>= id.`



Задачи

- Построить вывод $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B$.
- Построить вывод $\bigcirc(A \Rightarrow B) \Rightarrow \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B$.



Задачи

- Построить вывод $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B$.
- Построить вывод $\bigcirc(A \Rightarrow B) \Rightarrow \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B$.

`liftM` — аналог `fmap` для монад, стандартно определяется через `bind` и `return`. Как?

А как определить через них `<*>`?



Задачи

- Построить вывод $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B$.
- Построить вывод $\bigcirc(A \Rightarrow B) \Rightarrow \bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B$.

`liftM` — аналог `fmap` для монад, стандартно определяется через `bind` и `return`. Как?

```
liftM f m = m >>= \i -> return (f i)
```

А как определить через них `<*>`?

```
f <*> a  
  = f >>= (\xf -> a >>= (\xa -> return (xf xa)))
```

Всё!

Спасибо за внимание!