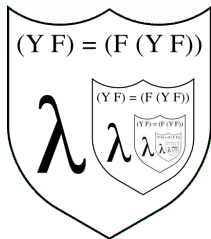


Соответствие Карри–Ховарда. Лекция первая



А. Н. Непейвода
ИПС им. А.К. Айламазяна РАН,
МГТУ им. Н.Э. Баумана

MathClub,
18 февраля 2022, Иннополис



Тизер

- Все знают, что $\text{fmap} = \backslash f\ x \rightarrow \text{pure } f \text{ <*> } x$.
Как его выразить в бесточечной форме в монаде `Reader`?
- Как построить <*> для монады продолжений?



Тизер

- Все знают, что `fmap = \f x -> pure f <*> x`.
Как его выразить в бесточечной форме в монаде `Reader`?

```
fmap f (Rd x)
  = (Rd ((pure (<*>)) <*> pure) f x)
```

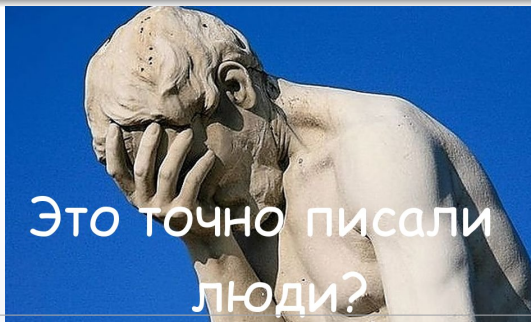
- Как построить `<*>` для монады продолжений?

```
Cont c_f <*> Cont c_a
  = Cont (\c_b -> c_f (\f -> c_a (c_b . f)))
```



Тизер

- $\text{fmap } f \text{ (Rd } x)$
= $(\text{Rd } ((\text{pure } (<*>)) <*> \text{pure}) f x)$
- $\text{Cont } c_f <*> \text{Cont } c_a$
= $\text{Cont } (\backslash c_b \rightarrow c_f (\backslash f \rightarrow c_a (c_b . f)))$



*"I'm not
logician! I'm
human!"
(c) R. Glück*



Тизер

- Все знают, что $\text{fmap} = \backslash f \ x \rightarrow \text{pure } f \ <*> \ x$. Как его *логично* выразить в бесточечной форме в монаде `Reader`?
- Как *логично* построить $<*>$ для монады продолжений?
- Бонус: мы также узнаем, чем похожи `Dependency injection` и `Brainfuck`.



Перегруженность равенства

$$f(a) = g(a + 1)$$

Это:

- равенство заранее заданных f , g в точке a ?

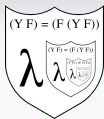


Перегруженность равенства

$$f(a) = g(a + 1)$$

Это:

- равенство заранее заданных f , g в точке a ?
- равенство заранее заданных f , g для всех a ?



Перегруженность равенства

$$f(a) = g(a + 1)$$

Это:

- равенство заранее заданных f , g в точке a ?
- равенство заранее заданных f , g для всех a ?
- способ описания **НОВОЙ** функции f с помощью заранее заданной функции g ?



λ-исчисление: новая надежда

$$f(a) = g(a + 1)$$

Происхождение знака λ (согласно Россеру)

$$g(\hat{a} + 1) \rightarrow \hat{a}.g(a + 1) \rightarrow /\backslash a.g(a + 1)$$



λ -исчисление: новая надежда

$$f(a) = g(a + 1)$$

То, что мы знаем теперь

$$f = \lambda a. g(a + 1)$$

Алонзо Чёрч: порождение функций (абстракция) +
применение + логические связки = надежда на
формализацию математики.



λ-исчисление: новая надежда

$$f(a) = g(a + 1)$$

То, что мы знаем теперь

$$f = \lambda a. g(a + 1)$$

Алонзо Чёрч: порождение функций (абстракция) + применение + логические связки = надежда на формализацию математики.

Парадокс Карри

Пусть $D = \lambda x. (x x) \Rightarrow A$, тогда $(D D) \Leftrightarrow ((D D) \Rightarrow A)$, что влечёт A .



λ-исчисление: новая надежда

$$f(a) = g(a + 1)$$

То, что мы знаем теперь

$$f = \lambda a. g(a + 1)$$

Алонзо Чёрч: порождение функций (абстракция) + применение + логические связки = надежда на формализацию математики.

Высказывание Карри

Высказывание C, являющееся собственной посылкой:

$$C = C \Rightarrow A.$$



Подробнее о λ-исчислении

Пусть F , X — термы. $F X$ — операция применения терма F (функции) к терму X (данному).

Пусть M — терм, возможно содержащий x . Тогда абстракция $\lambda x.M$ обозначает анонимную (неименованную) функцию от x : $x \rightarrow M[x]$.

- α -преобразование — переименование связанных переменных;
- β -редукция — применение функции к терму;
- η -преобразование — переход к бесточечным версиям функций и обратно.



Подробнее о λ-исчислении

Схема аксиом η-конверсии

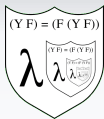
Пусть x не свободна в M . Тогда $\lambda x.M \ x =_{\eta} M$.

Поскольку $\forall N((\lambda x.M \ x) \ N) =_{\beta} (M \ N)$, термы $\lambda x.M \ x$ и M неразличимы по свойствам (экстенциональность равенства).

Примеры

$\lambda x y.x \ y =_{\eta} ?$

$\lambda x y.y \ x =_{\eta} ?$



Подробнее о λ-исчислении

Схема аксиом η-конверсии

Пусть x не свободна в M . Тогда $\lambda x.M \ x =_{\eta} M$.

Поскольку $\forall N((\lambda x.M \ x) \ N) =_{\beta} (M \ N)$, термы $\lambda x.M \ x$ и M неразличимы по свойствам (экстенциональность равенства).

Примеры

$$\lambda x y.x \ y = \lambda x. \overbrace{(\lambda y.x \ y)}^{\text{конверсия}} =_{\eta} \lambda x.x$$

$$\lambda x y.y \ x =_{\eta} ?$$



Подробнее о λ-исчислении

Схема аксиом η-конверсии

Пусть x не свободна в M . Тогда $\lambda x.M \ x =_{\eta} M$.

Поскольку $\forall N((\lambda x.M \ x) \ N) =_{\beta} (M \ N)$, термы $\lambda x.M \ x$ и M неразличимы по свойствам (экстенциональность равенства).

Примеры

$$\lambda x \ y. x \ y = \lambda x. \overbrace{(\lambda y. x \ y)}^{\text{конверсия}} =_{\eta} \lambda x. x$$

$$\lambda x \ y. y \ x = \lambda x. \overbrace{(\lambda y. (y \ x))}^{x \text{ во внутренней абстракции}} \text{ редукция невозможна.}$$



Подробнее о λ-исчислении

- α-преобразование — переименование связанных переменных;
- β-редукция — применение функции к терму;
- η-преобразование — переход к бесточечным версиям функций и обратно.

Пример редукции:

$$(\lambda x. x \ x) (\lambda y \ z. y \ z)$$



Подробнее о λ-исчислении

- α-преобразование — переименование связанных переменных;
- β-редукция — применение функции к терму;
- η-преобразование — переход к бесточечным версиям функций и обратно.

$$\begin{array}{c} (\lambda x. x \ x) \ (\lambda y \ z. y \ z) \\ \downarrow x \mapsto y \\ (\lambda y \ z. y \ z) \ (\lambda y \ z. y \ z) \end{array}$$



Подробнее о λ-исчислении

- α-преобразование — переименование связанных переменных;
- β-редукция — применение функции к терму;
- η-преобразование — переход к бесточечным версиям функций и обратно.

$$\begin{array}{c} (\lambda x. x \ x) (\lambda y \ z. y \ z) \\ \downarrow x \mapsto \lambda y \ z. y \ z \\ (\lambda y. (\lambda z. y \ z)) (\lambda y \ z. y \ z) \\ \downarrow y \mapsto \lambda y \ z. y \ z \\ \lambda z. (\lambda y \ z. y \ z) \ z \end{array}$$



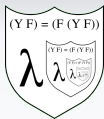
Подробнее о λ-исчислении

$$\begin{aligned} & (\lambda x. x \ x) (\lambda y \ z. y \ z) \\ & \quad \downarrow x \mapsto \lambda y \ z. y \ z \\ & (\lambda y. (\lambda z. y \ z)) (\lambda y \ z. y \ z) \\ & \quad \downarrow y \mapsto \lambda y \ z. y \ z \\ & \lambda z. (\lambda y \ z. y \ z) \ z \\ & \quad \downarrow \alpha\text{—преобразование} \\ & \lambda z. (\lambda y \ z'. y \ z') \ z \end{aligned}$$



Подробнее о λ-исчислении

$$\begin{aligned} & (\lambda x. x \ x) (\lambda y \ z. y \ z) \\ & \quad \downarrow x \mapsto \lambda y \ z. y \ z \\ & (\lambda y. (\lambda z. y \ z)) (\lambda y \ z. y \ z) \\ & \quad \downarrow y \mapsto \lambda y \ z. y \ z \\ & \lambda z. (\lambda y \ z. y \ z) \ z \\ & \quad \downarrow \alpha\text{-преобразование} \\ & \lambda z. (\lambda y. (\lambda z'. y \ z')) \ z \\ & \quad \downarrow y \mapsto z \\ & \lambda z \ z'. z \ z' \end{aligned}$$

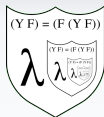


$$\begin{array}{c}
 (\lambda x. x \ x) (\lambda y \ z. y \ z) \xrightarrow{\eta\text{—ред.}} (\lambda x. x \ x) (\lambda y. y) \\
 \downarrow x \mapsto \lambda y \ z. y \ z \\
 (\lambda y. y) \quad (\lambda y \ z. y \ z) \xleftarrow{\eta\text{—редукция}} (\lambda y. (\lambda z. y \ z)) \quad (\lambda y \ z. y \ z) \xrightarrow{\eta\text{—ред.}} (\lambda y. (\lambda z. y \ z)) \quad (\lambda y. y) \\
 \downarrow y \mapsto \lambda y \ z. y \ z \\
 \lambda z. (\lambda y. y) \ z \xleftarrow{\eta\text{—редукция}} \lambda z. (\lambda y \ z. y \ z) \ z \xrightarrow{\eta\text{—редукция}} \lambda y \ z. y \ z \\
 \downarrow \alpha\text{—преобразование} \\
 \lambda z. (\lambda y. y) \ z \xleftarrow{\eta\text{—редукция}} \lambda z. (\lambda y \ z'. y \ z') \ z \xrightarrow{\eta\text{—редукция}} \lambda y \ z'. y \ z' \\
 \downarrow y \mapsto z \\
 \lambda z \ z'. z \ z'
 \end{array}$$



Полуформально о типизации λ -функций

- 1 Если $M[x]$ имеет тип σ в контексте $x : \tau$, тогда естественно, что $\lambda x.M$ имеет тип $\tau \rightarrow \sigma$;
- 2 Если $(M N)$ имеет тип σ , а N имеет тип τ , тогда естественно, что M имеет тип $\sigma \rightarrow \tau$.



Полуформально о типизации λ -функций

- ❶ Если $M[x]$ имеет тип σ в контексте $x : \tau$, тогда естественно, что $\lambda x.M$ имеет тип $\tau \rightarrow \sigma$;
- ❷ Если $(M N)$ имеет тип σ , а N имеет тип τ , тогда естественно, что M имеет тип $\sigma \rightarrow \tau$.

Логическая спецификация

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \tau \rightarrow \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma, \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash (M N) : \sigma}$$



Проблема типизации λ -функций

Рассмотрим терм $\lambda x.(x\ x)$. Какой у него тип?



Проблема типизации λ -функций

Рассмотрим терм $\lambda x.(x\ x)$. Какой у него тип?

- Пусть тип аргумента применения (то есть x) — это τ , а тип результата применения (то есть $(x\ x)$) — это σ . Тогда $\tau = \tau \rightarrow \sigma$. Ничего не напоминает?



Проблема типизации λ -функций

Рассмотрим терм $\lambda x.(x x)$. Какой у него тип?

- Пусть тип аргумента применения (то есть x) — это τ , а тип результата применения (то есть $(x x)$) — это σ .

Тогда $\tau = \tau \rightarrow \sigma$. Ничего не напоминает?

Уравнение $\tau = \tau \rightarrow \sigma$ — это предложение Карри! Оно не имеет неподвижной точки, отличной от \perp .



Проблема типизации λ-функций

Рассмотрим терм $\lambda x.(x x)$. Какой у него тип?

- Пусть тип аргумента применения (то есть x) — это τ , а тип результата применения (то есть $(x x)$) — это σ .

Тогда $\tau = \tau \rightarrow \sigma$. Ничего не напоминает?

Уравнение $\tau = \tau \rightarrow \sigma$ — это предложение Карри! Оно не имеет неподвижной точки, отличной от \perp .

Зацикливается не только унификация: см.

$(\lambda x.(x x)) (\lambda x.(x x))$. Иногда успешно вычисляется: напр. $(\lambda x.(x x)) (\lambda x.(\lambda y.(y x)))$.



Проблема типизации λ-функций

Рассмотрим терм $\lambda x.(x x)$. Какой у него тип?

- Пусть тип аргумента применения (то есть x) — это τ , а тип результата применения (то есть $(x x)$) — это σ . Тогда $\tau = \tau \rightarrow \sigma$. Ничего не напоминает?

Уравнение $\tau = \tau \rightarrow \sigma$ — это предложение Карри! Оно не имеет неподвижной точки, отличной от \perp .

Зацикливается не только унификация: см.

$(\lambda x.(x x)) (\lambda x.(x x))$. Иногда успешно вычисляется: напр. $(\lambda x.(x x)) (\lambda x.(\lambda y.(y x)))$.

$\lambda x.(x x)$ — частичная функция и не может быть конечным образом определена на всех полиморфных типах.



Просто типизированное λ -исчисление

Ограничим множество λ -термов только такими, типы которых всегда выводимы по описанным выше правилам.

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \tau \rightarrow \sigma} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma, \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash (M N) : \sigma}$$



Просто типизированное λ-исчисление

Ограничим множество λ-термов только такими, типы которых всегда выводимы по описанным выше правилам.

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \tau \rightarrow \sigma} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma, \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash (M N) : \sigma}$$

...а теперь забудем про термы и посмотрим только на типы. Что получилось?

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \rightarrow \sigma} \quad \text{(правило введения импликации)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \rightarrow \sigma, \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \quad \begin{array}{l} \text{(правило удаления импликации} \\ \text{aka } \textit{modus ponens}) \end{array}$$



Связь логики и ФВП: соответствие Карри–Ховарда

- Существует взаимно-однозначное соответствие между типами замкнутых термов в просто типизированном λ -исчислении и тавтологиями в минимальной импликативной логике.
- (теорема о нормализации) Все термы просто типизированного λ -исчисления имеют нормальную форму.
- Доказательствам в минимальной логике соответствуют всюду определенные полиморфные функции высшего порядка.



Древесная форма естественного вывода

Правила вывода для \Rightarrow

Применению и абстракции соответствуют следующие правила вывода (modus ponens и правило дедукции):

$$() : \frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$$

$$\lambda. : \frac{*A \quad \begin{array}{|l} B \end{array}}{A \Rightarrow B}$$

Каждое применение правила вывода в доказательстве соответствует использованию в терме из λ_{\rightarrow} конструкции с именем этого правила вывода.

В контексте соответствия Карри-Ховарда стрелочный тип далее обозначаем и как $\alpha \rightarrow \beta$, и как $\alpha \Rightarrow \beta$.



Вывод = конструкция

Покажем, что тип $((A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C) \Rightarrow C$ населён? то есть существует терм, имеющий такой тип. Поскольку это — функциональный тип, то внешним конструктором его терма будет абстракция (соответствует правилу дедукции).

$*(A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C$ (тип терма x)

(Тут нужно придумать, как построить терм типа C , имея только x)

C

$((A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C) \Rightarrow C$ (тип терма $\lambda x. \dots$)

Поскольку x — это функциональный терм, принимающий аргументом функцию типа $\tau = A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$, нужно попробовать построить терм, имеющий тип τ . Для этого опять понадобится абстракция (даже две).



Вывод = конструкция

* $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C$ (тип терма x)

* A (тип терма y)

Тут опять не хватает шагов: нужно построить терм типа $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$, имея y .

Так как это функция, добавляем ещё абстракцию.

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$

$A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ (тип терма $\lambda y. \dots$)

C (тип терма $x (\lambda y. \dots)$)

$((A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C) \Rightarrow C$ (тип терма $\lambda x. x (\lambda y. \dots)$)



Вывод = конструкция

$*(A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C$ (тип терма x)

$*A$ (тип терма y)

$*A \Rightarrow B$ (тип терма z)

Как получить терм типа B из y и z ?

B

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ (тип терма $\lambda z. \dots$)

$A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ (тип терма $\lambda y. (\lambda z. \dots)$)

C (тип терма x ($\lambda y. (\lambda z. \dots)$))

$((A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C) \Rightarrow C$ (тип терма $\lambda x. x$ ($\lambda y. \lambda z. \dots$)))



Вывод = конструкция

$$\begin{array}{l}
 *(A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C \text{ (тип терма } x) \\
 | *A \text{ (тип терма } y) \\
 | | *A \Rightarrow B \text{ (тип терма } z) \\
 | | | B \text{ (тип терма } z y) \\
 | | \hline
 | (A \Rightarrow B) \Rightarrow B \text{ (тип терма } \lambda z.(z y)) \\
 | A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \text{ (тип терма } \lambda y.(\lambda z.(z y))) \\
 | C \text{ (тип терма } x (\lambda y.(\lambda z.(z y)))) \\
 \hline
 ((A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C) \Rightarrow C \text{ (тип терма } \lambda x.x (\lambda y.\lambda z.(z y)))
 \end{array}$$



Вывод = конструкция

Вывести термы следующих типов:

- $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$



Вывод = конструкция

Вывести термы следующих типов:

- $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Старый добрый Reader:

```
newtype Reader r a = Rd {run :: r -> a}
instance Applicative (Reader r) where
    pure v = Rd (\_ -> v)
    Rd f <*> Rd g = Rd (\x -> f x (g x))
```



Вывод = конструкция

Комбинаторная логика Карри

- комбинатор $K :: A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- комбинатор $S ::$
 $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$



Вывод = конструкция

Комбинаторная логика Карри

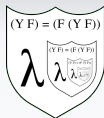
- комбинатор $K :: A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- комбинатор $S ::$
 $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

А теперь перенесёмся на 100 лет назад, во времена Д. Гильберта...

Схемы аксиом для минимальной импликативной логики:

- $\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$, где Φ, Ψ — любые формулы;
- $(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Xi)) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Xi)$, где Φ, Ψ, Ξ — любые формулы.

Правила вывода — подстановка + дедукция: $\mathcal{T} \vdash \Phi \Rightarrow \Psi$ влечёт $\mathcal{T}; \Phi \vdash \Psi$. Перенос в контекст отсутствует.



Гильбертовский вывод

Выведем $A \Rightarrow A$ в стиле логики 100-летней давности...

- 1 Возьмём $(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Xi)) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Xi)$ и положим $\Xi := A$ и $\Phi := A$, $\Psi := A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$. Заметим, что Ψ — теорема (частный случай схемы $\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$).



Гильбертовский вывод

Выведем $A \Rightarrow A$ в стиле логики 100-летней давности...

- 1 Возьмём $(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Xi)) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Xi)$ и положим $\Xi := A$ и $\Phi := A$, $\Psi := A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$. Заметим, что Ψ — теорема (частный случай схемы $\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$).
- 2 Получается теорема $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$.



Гильбертовский вывод

Выведем $A \Rightarrow A$ в стиле логики 100-летней давности...

- 1 Возьмём $(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Xi)) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Xi)$ и положим $\Xi := A$ и $\Phi := A$, $\Psi := A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$. Заметим, что Ψ — теорема (частный случай схемы $\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$).
- 2 Получается теорема $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$.
- 3 Теперь возьмём $\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$ и положим $\Phi := A$, $\Psi := A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$. Получим $A \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow A)$.



Гильбертовский вывод

Выведем $A \Rightarrow A$ в стиле логики 100-летней давности...

- 1 Возьмём $(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Xi)) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Xi)$ и положим $\Xi := A$ и $\Phi := A$, $\Psi := A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$. Заметим, что Ψ — теорема (частный случай схемы $\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$).
- 2 Получается теорема $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$.
- 3 Теперь возьмём $\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$ и положим $\Phi := A$, $\Psi := A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$. Получим $A \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow A)$.
- 4 Применим дедукцию дважды. Теорема $A \Rightarrow A$ доказана.



Выведем $A \Rightarrow A$ в стиле логики 100-летней давности...

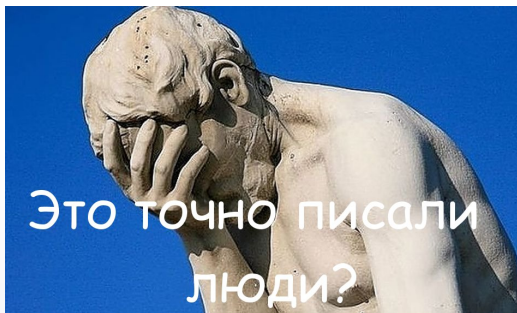
S : $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$

K : $A \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow A)$

дедукция: $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$

K : $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

дедукция: $A \Rightarrow A$



*"I'm not
logician! I'm
human!"
(c) R. Glück*



Вывод = конструкция

Схемы аксиом **S** и **K** + дедукция (применение) полностью описывают минимальную логику \Rightarrow с помощью λ -функций **S** (т.е. $\lambda f g x.f x (g x)$) и **K** (т.е. $\lambda x y.x$) можно построить любую λ -функцию.

Интерпретатор **S** + **K** = минимальный интерпретатор Тьюринг-полного ЯП. Чтобы перевести λ -терм в комбинаторный «байт-код», используется функция скобочной абстракции $\mu(\bullet)$.

- 1 $\mu(\lambda x.x) \rightarrow \mathbf{SKK}$ (для краткости обозначается **I**);
- 2 $\mu(\lambda x.M) \rightarrow \mathbf{K}\mu(M)$, если x не свободна в M ;
- 3 $\mu(\lambda x.(M N)) \rightarrow \mathbf{S} (\mu(\lambda x.M)) (\mu(\lambda x.N))$.

Таким образом удаётся перейти к бесточечному представлению λ -функции. В частности, это то, чего мы добиваемся, когда переносим зависимости!



Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x y. y x$.



Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x y. y \ x$.

- По алгоритму: $\lambda x. S \ (\lambda y. y) \ (\lambda y. x) \rightarrow \lambda x. S \ I \ (Kx) \rightarrow S \ (\lambda x. SI) \ (\lambda x. Kx) \rightarrow S \ (K(SI)) (S \ (\lambda x. K) \ (\lambda x. x)) \rightarrow S \ (K(SI)) (S \ (KK) I)$.



Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x y. y \ x$.

- По алгоритму: $\lambda x. S \ (\lambda y. y) \ (\lambda y. x) \rightarrow \lambda x. S \ I \ (Kx) \rightarrow S \ (\lambda x. SI) \ (\lambda x. Kx) \rightarrow S \ (K(SI)) (S \ (\lambda x. K) \ (\lambda x. x)) \rightarrow S \ (K(SI)) (S \ (KK) \ I)$.
- А если подумать?



Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x y. y x$.

- $\lambda x y. y x$ меняет местами переменные, а K линейна \Rightarrow внешняя функция точно S . А ей нужен ещё хотя бы один аргумент-комбинатор, кроме x и y . Пишем заглушку: $S M_1$.



Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x y. y x$.

- $\lambda x y. y x$ меняет местами переменные, а K линейна \Rightarrow внешняя функция точно S . А ей нужен ещё хотя бы один аргумент-комбинатор, кроме x и y . Пишем заглушку: $S M_1$.
- Тестируем: $S M_1 x y = M_1 y (x y)$. Это плохо: из $(x y)$ нельзя извлечь x . Нужен ещё один аргумент-комбинатор для S .



Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x y. y x$.

- $\lambda x y. y x$ меняет местами переменные, а K линейна \Rightarrow внешняя функция точно S . А ей нужен ещё хотя бы один аргумент-комбинатор, кроме x и y . Пишем заглушку: $S M_1$.
- Тестируем: $S M_1 x y = M_1 y (x y)$. Это плохо: из $(x y)$ нельзя извлечь x . Нужен ещё один аргумент-комбинатор для S .
- $S M_1 M_2 x = M_1 x (M_2 x)$. Переменная x раздвоилась, причём её первое вхождение явно лишнее. Избавимся от него, положив $M_1 = K M_3$.



Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x y. y x$.

- $\lambda x y. y x$ меняет местами переменные, а K линейна \Rightarrow внешняя функция точно S . А ей нужен ещё хотя бы один аргумент-комбинатор, кроме x и y . Пишем заглушку: $S M_1$.
- Тестируем: $S M_1 x y = M_1 y (x y)$. Это плохо: из $(x y)$ нельзя извлечь x . Нужен ещё один аргумент-комбинатор для S .
- $S M_1 M_2 x = M_1 x (M_2 x)$. Переменная x раздвоилась, причём её первое вхождение явно лишнее. Избавимся от него, положив $M_1 = K M_3$.
- Получаем $M_3 (M_2 x)$. Из переменных остался только y , значит, M_3 должен иметь вид $M_4 M_5$, причём $M_4 = S$, иначе до y добраться не удастся.



Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x y. y x$.

- $\lambda x y. y x$ меняет местами переменные, а K линейна \Rightarrow внешняя функция точно S . А ей нужен ещё хотя бы один аргумент-комбинатор, кроме x и y . Пишем заглушку: $S M_1$.
- Тестируем: $S M_1 x y = M_1 y (x y)$. Это плохо: из $(x y)$ нельзя извлечь x . Нужен ещё один аргумент-комбинатор для S .
- $S M_1 M_2 x = M_1 x (M_2 x)$. Переменная x раздвоилась, причём её первое вхождение явно лишнее. Избавимся от него, положив $M_1 = K M_3$.
- Получаем $M_3 (M_2 x)$. Из переменных остался только y , значит, M_3 должен иметь вид $M_4 M_5$, причём $M_4 = S$, иначе до y добраться не удастся.
- $S M_5 (M_2 x) y = M_5 y (M_2 x y)$. Теперь очевидно, что $M_5 = \lambda x. x = I$, $M_2 = K$. Значит, `flip id` = $S(K(SI))K$.



Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x y. y x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в S , K -базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом $I: \Phi \Rightarrow \Phi$).

Механически выпишем построение терма в комбинаторах по шагам и начнём добавлять подстановки.

S :

K :

S :

I :

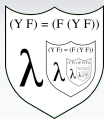
SI :

$K(SI)$:

$S(K(SI))$:

K :

$S(K(SI))K$:



Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x y. y x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в S , K -базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом $I: \Phi \Rightarrow \Phi$).

Механически выпишем построение терма в комбинаторах по шагам и начнём добавлять подстановки.

S :

K :

S :

I : $A \Rightarrow A$

SI :

$K(SI)$:

$S(K(SI))$:

K :

$S(K(SI))K$:



Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x y. y x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в S , K -базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом I : $\Phi \Rightarrow \Phi$).

Механически выпишем построение терма в комбинаторах по шагам и начнём добавлять подстановки.

S :

K :

S : $((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

I : $A \Rightarrow A, A = A_1 \Rightarrow B$

SI :

$K(SI)$:

$S(K(SI))$:

K :

$S(K(SI))K$:



Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x y. y x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в S , K -базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом I : $\Phi \Rightarrow \Phi$).

Механически выпишем построение терма в комбинаторах по шагам и начнём добавлять подстановки.

S :

K :

S : $((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

I : $A \Rightarrow A, A = A_1 \Rightarrow B$

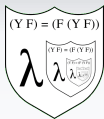
SI: $((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

$K(SI)$:

$S(K(SI))$:

K :

$S(K(SI))K$:



Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x y. y x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в S , K -базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом I : $\Phi \Rightarrow \Phi$).

S :

K : $((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)$
 $\Rightarrow (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)))$

S : $((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

I : $A \Rightarrow A, A = A_1 \Rightarrow B$

SI : $((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

$K(SI)$:

$S(K(SI))$:

K :

$S(K(SI))K$:



Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x y. y x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в S , K -базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом I : $\Phi \Rightarrow \Phi$).

S :

K : $((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B$
 $\Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))$

S : $((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

I : $A \Rightarrow A, A = A_1 \Rightarrow B$

SI : $((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

$K(SI)$: $C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))$

$S(K(SI))$:

K :

$S(K(SI))K$:



Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x y. y x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в S , K -базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом I : $\Phi \Rightarrow \Phi$).

$$\begin{aligned} S: & (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \\ & \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K: & (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)) \\ & \Rightarrow (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \end{aligned}$$

$$S: ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

$$I: A \Rightarrow A, A = A_1 \Rightarrow B$$

$$SI: ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

$$K(SI): C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))$$

$$S(K(SI)):$$

$$K:$$

$$S(K(SI))K:$$



Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x y. y x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в S , K -базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом I : $\Phi \Rightarrow \Phi$).

$$\begin{aligned} S : \quad & (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \\ & \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K : \quad & (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)) \\ & \Rightarrow (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \end{aligned}$$

$$S : ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

$$I : A \Rightarrow A, A = A_1 \Rightarrow B$$

$$SI : ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

$$K(SI) : C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))$$

$$S(K(SI)) : (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))$$

$$K :$$

$$S(K(SI))K :$$



Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x y. y x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в S , K -базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом I : $\Phi \Rightarrow \Phi$).

$$\begin{aligned} S: & (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \\ & \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K: & (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)) \\ & \Rightarrow (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \end{aligned}$$

$$S: ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

$$I: A \Rightarrow A, A = A_1 \Rightarrow B$$

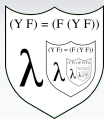
$$SI: ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

$$K(SI): C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))$$

$$S(K(SI)): (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)), C = A_1$$

$$K: A_1 \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)$$

$$S(K(SI))K:$$



Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x y. y x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в S , K -базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом I : $\Phi \Rightarrow \Phi$).

$$\begin{aligned} S: & (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \\ & \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K: & (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)) \\ & \Rightarrow (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \end{aligned}$$

$$S: ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

$$I: A \Rightarrow A, A = A_1 \Rightarrow B$$

$$SI: ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

$$K(SI): C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))$$

$$S(K(SI)): (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)), C = A_1$$

$$K: A_1 \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)$$

$$S(K(SI))K: A_1 \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$



Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x y. y x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в S , K -базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом I : $\Phi \Rightarrow \Phi$).

$$\begin{aligned} S : \quad & (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \\ & \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K : \quad & (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)) \\ & \Rightarrow (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \end{aligned}$$

$$S : \quad ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

$$I : \quad A \Rightarrow A, A = A_1 \Rightarrow B$$

$$SI : \quad ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

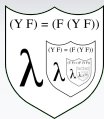
$$K(SI) : \quad C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))$$

$$S(K(SI)) : \quad (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)), C = A_1$$

$$K : \quad A_1 \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)$$

$$S(K(SI))K : \quad A_1 \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

Очевидно!



Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x y. y x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в S , K -базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом I : $\Phi \Rightarrow \Phi$).

$$S: \quad (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \\ \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))$$

$$K: \quad (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)) \\ \Rightarrow (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)))$$

$$S: \quad ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

$$I: \quad A \Rightarrow A, A = A_1 \Rightarrow B$$

$$SI: \quad ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

$$K(SI): \quad C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))$$

$$S(K(SI)): \quad (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)), C = A_1$$

$$K: \quad A_1 \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)$$

$$S(K(SI))K: \quad A_1 \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

Очевидно!

(это и вправду не требует участия мозга, но из разряда «легче написать (и/или запрограммировать), чем потом читать»)



Упражнение

Известно, что композиция $\lambda x y z. x (y z)$ — это `fmap` для функтора `Reader`. Выразить её в бесточечном виде по алгоритму и по логике.

Самые отчаянные могут также попробовать вывести её тип в стиле Гильберта из `S` и `K`.

Решения можно присылать на a_nevod@mail.ru.



Конструктивность

Достаточно ли S и K для вывода всех теорем классической логики, содержащих только импликацию?

Построения конструктивны \Rightarrow для них есть явно вычислимая конструкция. Вспомним закон исключённого третьего:

$A \vee \neg A$. Если передать в виде A предикат «программа P завершается», тогда вычислимая конструкция $A \vee \neg A$ будет решать проблему останова.

Остаётся вопрос, есть ли такие теоремы, содержащие только \Rightarrow , что их можно доказать только с помощью $A \vee \neg A$, не ограничиваясь двумя правилами естественного вывода.

Формула Пирса: $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ не населена.

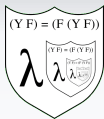


Относительное отрицание

Скажем, что $\neg_R \Phi = \Phi \Rightarrow R$.

Формула Пирса: $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A = (\neg_B A \Rightarrow A) \Rightarrow A$.

$(\neg_B A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg_B \neg_B A$, и как следствие $\neg_B \neg_B A \Rightarrow A$ влечёт формулу Пирса.

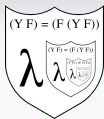


Относительное отрицание

Скажем, что $\neg_R \Phi = \Phi \Rightarrow R$.

Формула Пирса: $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A = (\neg_B A \Rightarrow A) \Rightarrow A$.
 $(\neg_B A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg_B \neg_B A$, и как следствие $\neg_B \neg_B A \Rightarrow A$ влечёт формулу Пирса.

Парадокс Карри: пусть $D = \lambda x. \neg_A (x x)$, тогда
 $(D D) \Leftrightarrow (\neg_A (D D))$ — относительная версия парадокса Рассела.



Относительное отрицание

Скажем, что $\neg_R \Phi = \Phi \Rightarrow R$.

Формула Пирса: $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A = (\neg_B A \Rightarrow A) \Rightarrow A$.
 $(\neg_B A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg_B \neg_B A$, и как следствие $\neg_B \neg_B A \Rightarrow A$ влечёт формулу Пирса.

Парадокс Карри: пусть $D = \lambda x. \neg_A (x x)$, тогда
 $(D D) \Leftrightarrow (\neg_A (D D))$ — относительная версия парадокса Рассела.

А теперь посмотрим на двойное относительное отрицание с точки зрения функционального языка...

$\tau :: M \Rightarrow \lambda k. k \tau :: \neg_R \neg_R M$, где R не входит в число переменных M . Двойное отрицание порождает продолжения вычислений.

Продолжения следуют...

Спасибо за внимание!