Соответствие Карри–Ховарда. Лекция первая

А. Н. Непейвода
ИПС им. А.К. Айламазяна РАН,
МГТУ им. Н.Э. Баумана

MathClub,
18 февраля 2022, Иннополис

Тизер

- Все знают, что `fmap = \f x -> pure f <*> x`. Как его выразить в бесточечной форме в монаде `Reader`?
- Как построить `<*>` для монады продолжений?

Тизер

- Все знают, что `fmap = \f x -> pure f <*> x`. Как его выразить в бесточечной форме в монаде `Reader`?

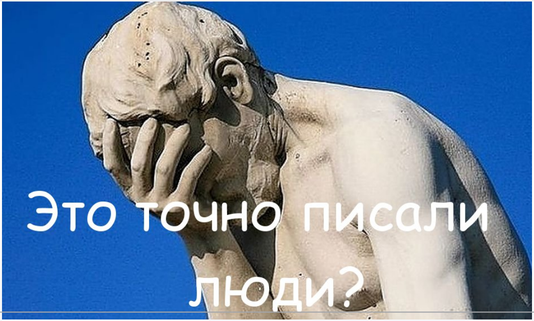
```
fmap f (Rd x)
    = (Rd ((pure (<*>)) <*> pure) f x)
```

- Как построить `<*>` для монады продолжений?

```
Cont c_f <*> Cont c_a
  = Cont (\c_b -> c_f (\f -> c_a (c_b . f)))
```

Тизер

- ```
  fmap f (Rd x)
      = (Rd ((pure (<*>)) <*> pure) f x)
  ```
- ```
  Cont c_f <*> Cont c_a
    = Cont (\c_b -> c_f (\f -> c_a (c_b . f)))
  ```



"I'm not logician! I'm human!"
(c) R. Glück

Тизер

- Все знают, что `fmap = \f x -> pure f <*> x`. Как его *логично* выразить в бесточечной форме в монаде `Reader`?
- Как *логично* построить `<*>` для монады продолжений?
- Бонус: мы также узнаем, чем похожи Dependency injection и Brainfuck.

Перегруженность равенства

$$f(a) = g(a + 1)$$

Это:

- равенство заранее заданных f, g в точке a?

Перегруженность равенства

$$f(a) = g(a + 1)$$

Это:

- равенство заранее заданных f, g в точке a?
- равенство заранее заданных f, g для всех a?

Перегруженность равенства

$$f(a) = g(a + 1)$$

Это:

- равенство заранее заданных f, g в точке a?
- равенство заранее заданных f, g для всех a?
- способ описания **новой** функции f с помощью заранее заданной функции g?

λ-исчисление: новая надежда

$$f(a) = g(a+1)$$

Происхождение знака λ (согласно Россеру)

$$g(\hat{a}+1) \to \hat{a}.g(a+1) \to /\backslash a.g(a+1)$$

λ-исчисление: новая надежда

$$f(a) = g(a+1)$$

То, что мы знаем теперь

$$f = \lambda a.g(a+1)$$

Алонзо Чёрч: порождение функций (абстракция) + применение + логические связки = надежда на формализацию математики.

λ-исчисление: новая надежда

$$f(a) = g(a+1)$$

То, что мы знаем теперь

$$f = \lambda a.g(a+1)$$

Алонзо Чёрч: порождение функций (абстракция) + применение + логические связки = надежда на формализацию математики.

Парадокс Карри

Пусть $D = \lambda x.(x\ x) \Rightarrow A$, тогда $(D\ D) \Leftrightarrow ((D\ D) \Rightarrow A)$, что влечёт A.

λ-исчисление: новая надежда

$$f(a) = g(a+1)$$

То, что мы знаем теперь

$$f = \lambda a.g(a+1)$$

Алонзо Чёрч: порождение функций (абстракция) + применение + логические связки = надежда на формализацию математики.

Высказывание Карри

Высказывание C, являющееся собственной посылкой:
$C = C \Rightarrow A$.

Подробнее о λ-исчислении

Пусть F, X — термы. $F\ X$ — операция применения терма F (функции) к терму X (данным).

Пусть M — терм, возможно содержащий x. Тогда абстракция $\lambda x.M$ обозначает анонимную (неименованную) функцию от x: $x \to M[x]$.

- α-преобразование — переименование связанных переменных;
- β-редукция — применение функции к терму;
- η-преобразование — переход к бесточечным версиям функций и обратно.

Подробнее о λ-исчислении

Схема аксиом η-конверсии

Пусть x не свободна в M. Тогда $\lambda x.M\ x =_\eta M$.

Поскольку $\forall N((\lambda x.M\ x)\ N) =_\beta (M\ N)$, термы $\lambda x.M\ x$ и M неразличимы по свойствам (экстенсиональность равенства).

Примеры

$\lambda x\, y.x\ y =_\eta\ ?$
$\lambda x\, y.y\ x =_\eta\ ?$

Подробнее о λ-исчислении

Схема аксиом η-конверсии

Пусть x не свободна в M. Тогда $\lambda x.M\ x =_\eta M$.

Поскольку $\forall N((\lambda x.M\ x)\ N) =_\beta (M\ N)$, термы $\lambda x.M\ x$ и M неразличимы по свойствам (экстенсиональность равенства).

Примеры

$$\lambda x\, y.x\ y = \lambda x.\overbrace{(\underline{\lambda y}.x\ \underline{y})}^{\text{конверсия}} =_\eta \lambda x.x$$

$$\lambda x\, y.y\ x =_\eta\ ?$$

Подробнее о λ-исчислении

Схема аксиом η-конверсии

Пусть x не свободна в M. Тогда $\lambda x.M\ x =_\eta M$.

Поскольку $\forall N((\lambda x.M\ x)\ N) =_\beta (M\ N)$, термы $\lambda x.M\ x$ и M неразличимы по свойствам (экстенсиональность равенства).

Примеры

$$\lambda x\, y.x\ y = \lambda x.\overbrace{(\lambda \underline{y}.x\ \underline{y})}^{\text{конверсия}} =_\eta \lambda x.x$$

$$\lambda x\, y.y\ x = \lambda x.\overbrace{(\lambda y.(y\ x))}^{\text{x во внутренней абстракции}} \text{ редукция невозможна.}$$

Подробнее о λ-исчислении

- α-преобразование — переименование связанных переменных;
- β-редукция — применение функции к терму;
- η-преобразование — переход к бесточечным версиям функций и обратно.

Пример редукции:

$$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda y\, z.y\ z)$$

Подробнее о λ-исчислении

- α-преобразование — переименование связанных переменных;
- β-редукция — применение функции к терму;
- η-преобразование — переход к бесточечным версиям функций и обратно.

$$
\begin{array}{c}
(\lambda x.x\ x)\ (\lambda y\, z.y\ z) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle x \mapsto \lambda y\, z.y\ z} \\
(\lambda y\, z.y\ z)\ (\lambda y\, z.y\ z)
\end{array}
$$

Подробнее о λ-исчислении

- α-преобразование — переименование связанных переменных;
- β-редукция — применение функции к терму;
- η-преобразование — переход к бесточечным версиям функций и обратно.

$$
\begin{tikzcd}
(\lambda x.x\ x)\ (\lambda y\, z.y\ z) \arrow[d, "x \mapsto \lambda y\, z.y\ z"] \\
(\lambda y.\,(\lambda z.y\ z))\ (\lambda y\, z.y\ z) \arrow[d, "y \mapsto \lambda y\, z.y\ z"] \\
\lambda z.(\lambda y\, z.y\ z)\ z
\end{tikzcd}
$$

Подробнее о λ-исчислении

$$
\begin{array}{c}
(\lambda x.x\ x)\ (\lambda y\, z.y\ z) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle x \mapsto \lambda y\, z.y\ z} \\
(\lambda y.\,(\lambda z.y\ z))\ (\lambda y\, z.y\ z) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle y \mapsto \lambda y\, z.y\ z} \\
\lambda z.(\lambda y\, z.y\ z)\ z \\
\Big\downarrow{\alpha\text{—преобразование}} \\
\lambda z.(\lambda y\, z'.y\ z')\ z
\end{array}
$$

Подробнее о λ-исчислении

$$
\begin{array}{c}
(\lambda x.x\ x)\ (\lambda y\,z.y\ z) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle x \mapsto \lambda y\,z.y\ z} \\
(\lambda y.\,(\lambda z.y\ z))\ (\lambda y\,z.y\ z) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle y \mapsto \lambda y\,z.y\ z} \\
\lambda z.(\lambda y\,z.y\ z)\ z \\
\Big\downarrow{\alpha\text{—преобразование}} \\
\lambda z.(\lambda y.\,(\lambda z'.y\ z'))\ z \\
\Big\downarrow{\scriptstyle y \mapsto z} \\
\lambda z\,z'.z\ z'
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & (\lambda x.x\ x)\ (\lambda y\, z.y\ z) \arrow[r, "\eta\text{—ред.}"] \arrow[d, "x \mapsto \lambda y\, z.y\ z"] & (\lambda x.x\ x)\ (\lambda y.y) \\
\begin{matrix}(\lambda y.y)\\ (\lambda y\, z.y\ z)\end{matrix} & \begin{matrix}(\lambda y.\,(\lambda z.y\ z))\\ (\lambda y\, z.y\ z)\end{matrix} \arrow[l, "\eta\text{—редукция}"'] \arrow[r, "\eta\text{—ред.}"] \arrow[d, "y \mapsto \lambda y\, z.y\ z"] & \begin{matrix}(\lambda y.\,(\lambda z.y\ z))\\ (\lambda y.y)\end{matrix} \\
\lambda z.(\lambda y.y)\ z & \lambda z.(\lambda y\, z.y\ z)\ z \arrow[l, "\eta\text{—редукция}"'] \arrow[r, "\eta\text{—редукция}"] \arrow[d, "\alpha\text{—преобразование}"] & \lambda y\, z.y\ z \\
\lambda z.(\lambda y.y)\ z & \lambda z.(\lambda y\, z'.y\ z')\ z \arrow[l, "\eta\text{—редукция}"'] \arrow[r, "\eta\text{—редукция}"] \arrow[d, "y \mapsto z"] & \lambda y\, z'.y\ z' \\
 & \lambda z\, z'.z\ z' &
\end{tikzcd}
$$

Полуформально о типизации λ-функций

1. Если $M[x]$ имеет тип σ в контексте $x : \tau$, тогда естественно, что $\lambda x.M$ имеет тип $\tau \to \sigma$;
2. Если $(M\ N)$ имеет тип σ, а N имеет тип τ, тогда естественно, что M имеет тип $\sigma \to \tau$.

Полуформально о типизации λ-функций

1. Если $M[x]$ имеет тип σ в контексте $x : \tau$, тогда естественно, что $\lambda x.M$ имеет тип $\tau \to \sigma$;
2. Если $(M\ N)$ имеет тип σ, а N имеет тип τ, тогда естественно, что M имеет тип $\sigma \to \tau$.

Логическая спецификация

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \tau \to \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \to \sigma, \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash (M\ N) : \sigma}$$

Проблема типизации λ-функций

Рассмотрим терм $\lambda x.(x\ x)$. Какой у него тип?

Проблема типизации λ-функций

Рассмотрим терм $\lambda x.(x\ x)$. Какой у него тип?

- Пусть тип аргумента применения (то есть x) — это τ, а тип результата применения (то есть $(x\ x)$) — это σ. Тогда $\tau = \tau \to \sigma$. Ничего не напоминает?

Проблема типизации λ-функций

Рассмотрим терм $\lambda x.(x\ x)$. Какой у него тип?

- Пусть тип аргумента применения (то есть x) — это τ, а тип результата применения (то есть $(x\ x)$) — это σ. Тогда $\tau = \tau \to \sigma$. Ничего не напоминает?

Уравнение $\tau = \tau \to \sigma$ — это предложение Карри! Оно не имеет неподвижной точки, отличной от $\perp$.

Проблема типизации λ-функций

Рассмотрим терм $\lambda x.(x\ x)$. Какой у него тип?

- Пусть тип аргумента применения (то есть x) — это τ, а тип результата применения (то есть $(x\ x)$) — это σ. Тогда $\tau = \tau \to \sigma$. Ничего не напоминает?

Уравнение $\tau = \tau \to \sigma$ — это предложение Карри! Оно не имеет неподвижной точки, отличной от $\perp$.

Зацикливается не только унификация: см. $(\lambda x.(x\ x))\ (\lambda x.(x\ x))$. Иногда успешно вычисляется: напр. $(\lambda x.(x\ x))\ (\lambda x.(\lambda y.(y\ x)))$.

Проблема типизации λ-функций

Рассмотрим терм $\lambda x.(x\ x)$. Какой у него тип?

- Пусть тип аргумента применения (то есть x) — это τ, а тип результата применения (то есть $(x\ x)$) — это σ. Тогда $\tau = \tau \to \sigma$. Ничего не напоминает?

Уравнение $\tau = \tau \to \sigma$ — это предложение Карри! Оно не имеет неподвижной точки, отличной от $\perp$.

Зацикливается не только унификация: см. $(\lambda x.(x\ x))\ (\lambda x.(x\ x))$. Иногда успешно вычисляется: напр. $(\lambda x.(x\ x))\ (\lambda x.(\lambda y.(y\ x)))$.

$\lambda x.(x\ x)$ — частичная функция и не может быть конечным образом определена на всех полиморфных типах.

Просто типизированное λ-исчисление

Ограничим множество λ-термов только такими, типы которых всегда выводимы по описанным выше правилам.

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \tau \to \sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau \to \sigma, \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash (M\ N) : \sigma}$$

Просто типизированное λ-исчисление

Ограничим множество λ-термов только такими, типы которых всегда выводимы по описанным выше правилам.

$$\frac{\Gamma, x:\tau \vdash M:\sigma}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \tau \to \sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash M:\tau \to \sigma, \Gamma \vdash N:\tau}{\Gamma \vdash (M\ N):\sigma}$$

...а теперь забудем про термы и посмотрим только на типы. Что получилось?

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \to \sigma}$$ (правило введения импликации)

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \to \sigma, \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma}$$ (правило удаления импликации aka *modus ponens*)

Связь логики и ФВП: соответствие Карри–Ховарда

- Существует взаимно-однозначное соответствие между типами замкнутых термов в просто типизированном λ-исчислении и тавтологиями в минимальной импликативной логике.
- (теорема о нормализации) Все термы просто типизированного λ-исчисления имеют нормальную форму.
- Доказательствам в минимальной логике соответствуют всюду определенные полиморфные функции высшего порядка.

Древесная форма естественного вывода

Правила вывода для ⇒

Применению и абстракции соответствуют следующие правила вывода (modus ponens и правило дедукции):

$$(\,) : \frac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \qquad\qquad \lambda. : \frac{\begin{array}{l} *\,A \\ \;\,B \end{array}}{A \Rightarrow B}$$

Каждое применение правила вывода в доказательстве соответствует использованию в терме из $\lambda_{\to}$ конструкции с именем этого правила вывода.

В контексте соответствия Карри-Ховарда стрелочный тип далее обозначаем и как $\alpha \to \beta$, и как $\alpha \Rightarrow \beta$.

Вывод = конструкция

Покажем, что тип $((A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C) \Rightarrow C$ населён? то есть существует терм, имеющий такой тип. Поскольку это — функциональный тип, то внешним конструктором его терма будет абстракция (соответствует правилу дедукции).

$*(A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C$ (тип терма x)

(Тут нужно придумать, как построить терм типа C*, имея только* x*)*

C

$((A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C) \Rightarrow C$ (тип терма $\lambda x. \ldots$)

Поскольку x — это функциональный терм, принимающий аргументом функцию типа $\tau = A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$, нужно попробовать построить терм, имеющий тип τ. Для этого опять понадобится абстракция (даже две).

Вывод = конструкция

$*(A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C$ (тип терма x)

$*A$ (тип терма y)

Тут опять не хватает шагов: нужно построить терм типа $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$*, имея* y.

Так как это функция, добавляем ещё абстракцию.

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$

$A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ (тип терма $\lambda y. \ldots$)

C (тип терма $x\ (\lambda y. \ldots)$)

$((A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C) \Rightarrow C$ (тип терма $\lambda x.x\ (\lambda y. \ldots)$)

Вывод = конструкция

$*(A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C$ (тип терма x)

- $*A$ (тип терма y)
  - $*A \Rightarrow B$ (тип терма z)
    - *Как получить терм типа* B *из* y *и* z*?*
    - B
  - $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ (тип терма $\lambda z.\ldots$)
- $A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ (тип терма $\lambda y.(\lambda z.\ldots)$)
- C (тип терма $x\ (\lambda y.(\lambda z.\ldots))$)

$((A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C) \Rightarrow C$ (тип терма $\lambda x.x\ (\lambda y.\lambda z.\ldots)$)

Вывод = конструкция

$*(A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C$ (тип терма x)

$*A$ (тип терма y)

$*A \Rightarrow B$ (тип терма z)

B (тип терма $z\ y$)

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ (тип терма $\lambda z.(z\ y)$)

$A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ (тип терма $\lambda y.(\lambda z.(z\ y))$)

C (тип терма $x\ (\lambda y.(\lambda z.(z\ y)))$)

$((A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow C) \Rightarrow C$ (тип терма $\lambda x.x\ (\lambda y.\lambda z.(z\ y)))$)

Вывод = конструкция

Вывести термы следующих типов:

- $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Вывод = конструкция

Вывести термы следующих типов:

- $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Старый добрый `Reader`:

```
newtype Reader r a = Rd {run :: r -> a}
instance Applicative (Reader r) where
    pure v = Rd (\_ -> v)
    Rd f <*> Rd g = Rd (\x -> f x (g x))
```

Вывод = конструкция

Комбинаторная логика Карри

- комбинатор $\mathbf{K} :: A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- комбинатор $\mathbf{S} ::$
  $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Вывод = конструкция

Комбинаторная логика Карри

- комбинатор $\mathsf{K} :: A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- комбинатор S :: $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

А теперь перенесёмся на 100 лет назад, во времена Д. Гильберта...

Схемы аксиом для минимальной импликативной логики:

- $\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$, где Φ, Ψ — любые формулы;
- $(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Xi)) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Xi)$, где Φ, Ψ, Ξ — любые формулы.

Правила вывода — подстановка + дедукция: $\mathcal{T} \vdash \Phi \Rightarrow \Psi$ влечёт $\mathcal{T}; \Phi \vdash \Psi$. Перенос в контекст отсутствует.

Гильбертовский вывод

Выведем $A \Rightarrow A$ в стиле логики 100-летней давности...

1. Возьмём $(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Xi)) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Xi)$ и положим $\Xi := A$ и $\Phi := A$, $\Psi := A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$. Заметим, что Ψ — теорема (частный случай схемы $\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$).

Гильбертовский вывод

Выведем $A \Rightarrow A$ в стиле логики 100-летней давности...

1. Возьмём $(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Xi)) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Xi)$ и положим $\Xi := A$ и $\Phi := A$, $\Psi := A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$. Заметим, что Ψ — теорема (частный случай схемы $\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$).
2. Получается теорема $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow A)) \Rightarrow$ $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$.

Гильбертовский вывод

Выведем $A \Rightarrow A$ в стиле логики 100-летней давности...

1. Возьмём $(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Xi)) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Xi)$ и положим $\Xi := A$ и $\Phi := A$, $\Psi := A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$. Заметим, что Ψ — теорема (частный случай схемы $\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$).
2. Получается теорема $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow A)) \Rightarrow$ $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$.
3. Теперь возьмём $\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$ и положим $\Phi := A$, $\Psi := A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$. Получим $A \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow A)$.

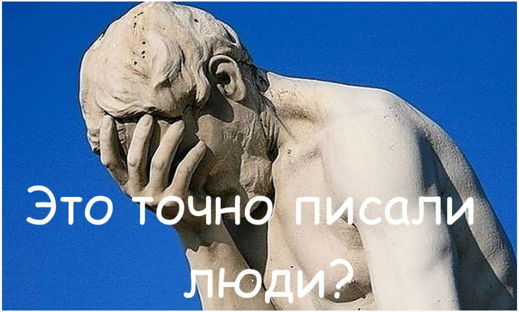
Гильбертовский вывод

Выведем $A \Rightarrow A$ в стиле логики 100-летней давности...

1. Возьмём $(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Xi)) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Xi)$ и положим $\Xi := A$ и $\Phi := A$, $\Psi := A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$. Заметим, что Ψ — теорема (частный случай схемы $\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$).
2. Получается теорема $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow A)) \Rightarrow$ $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$.
3. Теперь возьмём $\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$ и положим $\Phi := A$, $\Psi := A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$. Получим $A \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow A)$.
4. Применим дедукцию дважды. Теорема $A \Rightarrow A$ доказана.

Выведем $A \Rightarrow A$ в стиле логики 100-летней давности...

$$
\begin{array}{rl}
\mathbf{S}: & (A \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A) \\
\mathbf{K}: & A \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow A) \\
\text{дедукция}: & (A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A) \\
\mathbf{K}: & A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \\
\text{дедукция}: & A \Rightarrow A
\end{array}
$$



"I'm not logician! I'm human!"
(c) R. Glück

Вывод = конструкция

Схемы аксиом **S** и **K** + дедукция (применение) полностью описывают минимальную логику ⇒ с помощью λ-функций **S** (т.е. $\lambda f\, g\, x.f\ x\ (g\ x)$) и **K** (т.е. $\lambda x\, y.x$) можно построить любую λ-функцию.

Интерпретатор $\mathbf{S} + \mathbf{K}$ = минимальный интерпретатор Тьюринг-полного ЯП. Чтобы перевести λ-терм в комбинаторный «байт-код», используется функция скобочной абстракции $\mu(\bullet)$.

1. $\mu(\lambda x.x) \longrightarrow \mathbf{SKK}$ (для краткости обозначается $\mathbf{I}$);
2. $\mu(\lambda x.M) \longrightarrow \mathbf{K}\mu(M)$, если x не свободна в M;
3. $\mu(\lambda x.(M\ N)) \longrightarrow \mathbf{S}\ (\mu(\lambda x.M))\ (\mu(\lambda x.N))$.

Таким образом удаётся перейти к бесточечному представлению λ-функции. В частности, это то, чего мы добиваемся, когда переносим зависимости!

Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\, y.y\ x$.

Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\, y. y\ x$.

- По алгоритму: $\lambda x.\mathbf{S}\ (\lambda y.y)\ (\lambda y.x) \to \lambda x.\mathbf{S}\ \mathbf{I}\ (\mathbf{K}x) \to \mathbf{S}\ (\lambda x.\mathbf{SI})\ (\lambda x.\mathbf{K}x) \to \mathbf{S}\ (\mathbf{K}(\mathbf{SI}))(\mathbf{S}\ (\lambda x.\mathbf{K})\ (\lambda x.x)) \to \mathbf{S}\ (\mathbf{K}(\mathbf{SI}))(\mathbf{S}\ (\mathbf{KK})\ \mathbf{I})$.

Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\, y.y\ x$.

- По алгоритму: $\lambda x.\mathbf{S}\ (\lambda y.y)\ (\lambda y.x) \to \lambda x.\mathbf{S}\ \mathbf{I}\ (\mathbf{K}x) \to \mathbf{S}\ (\lambda x.\mathbf{SI})\ (\lambda x.\mathbf{K}x) \to \mathbf{S}\ (\mathbf{K}(\mathbf{SI}))(\mathbf{S}\ (\lambda x.\mathbf{K})\ (\lambda x.x)) \to \mathbf{S}\ (\mathbf{K}(\mathbf{SI}))(\mathbf{S}\ (\mathbf{KK})\ \mathbf{I})$.
- А если подумать?

Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\, y.y\; x$.

- $\lambda x\, y.y\; x$ меняет местами переменные, а $\mathbf{K}$ линейна $\Rightarrow$ внешняя функция точно $\mathbf{S}$. А ей нужен ещё хотя бы один аргумент-комбинатор, кроме x и y. Пишем заглушку: $\mathbf{S}\; M_1$.

Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\, y.y\ x$.

- $\lambda x\, y.y\ x$ меняет местами переменные, а $\mathbf{K}$ линейна $\Rightarrow$ внешняя функция точно $\mathbf{S}$. А ей нужен ещё хотя бы один аргумент-комбинатор, кроме x и y. Пишем заглушку: $\mathbf{S}\ M_1$.
- Тестируем: $\mathbf{S}\ M_1\ x\ y = M_1\ y\ (x\ y)$. Это плохо: из $(x\ y)$ нельзя извлечь x. Нужен ещё один аргумент-комбинатор для $\mathbf{S}$.

Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\, y.y\ x$.

- $\lambda x\, y.y\ x$ меняет местами переменные, а $\mathbf{K}$ линейна $\Rightarrow$ внешняя функция точно $\mathbf{S}$. А ей нужен ещё хотя бы один аргумент-комбинатор, кроме x и y. Пишем заглушку: $\mathbf{S}\ M_1$.
- Тестируем: $\mathbf{S}\ M_1\ x\ y = M_1\ y\ (x\ y)$. Это плохо: из $(x\ y)$ нельзя извлечь x. Нужен ещё один аргумент-комбинатор для $\mathbf{S}$.
- $\mathbf{S}\ M_1\ M_2\ x = M_1\ x\ (M_2\ x)$. Переменная x раздвоилась, причём её первое вхождение явно лишнее. Избавимся от него, положив $M_1 = \mathbf{K}\ M_3$.

Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\, y.y\ x$.

- $\lambda x\, y.y\ x$ меняет местами переменные, а $\mathbf{K}$ линейна $\Rightarrow$ внешняя функция точно $\mathbf{S}$. А ей нужен ещё хотя бы один аргумент-комбинатор, кроме x и y. Пишем заглушку: $\mathbf{S}\ M_1$.
- Тестируем: $\mathbf{S}\ M_1\ x\ y = M_1\ y\ (x\ y)$. Это плохо: из $(x\ y)$ нельзя извлечь x. Нужен ещё один аргумент-комбинатор для $\mathbf{S}$.
- $\mathbf{S}\ M_1\ M_2\ x = M_1\ x\ (M_2\ x)$. Переменная x раздвоилась, причём её первое вхождение явно лишнее. Избавимся от него, положив $M_1 = \mathbf{K}\ M_3$.
- Получаем $M_3\ (M_2\ x)$. Из переменных остался только y, значит, M_3 должен иметь вид $M_4\ M_5$, причём $M_4 = \mathbf{S}$, иначе до y добраться не удастся.

Скобочная абстракция

Перейдём к комбинаторной версии `flip id`: $\lambda x\, y.y\ x$.

- $\lambda x\, y.y\ x$ меняет местами переменные, а $\mathbf{K}$ линейна $\Rightarrow$ внешняя функция точно $\mathbf{S}$. А ей нужен ещё хотя бы один аргумент-комбинатор, кроме x и y. Пишем заглушку: $\mathbf{S}\ M_1$.
- Тестируем: $\mathbf{S}\ M_1\ x\ y = M_1\ y\ (x\ y)$. Это плохо: из $(x\ y)$ нельзя извлечь x. Нужен ещё один аргумент-комбинатор для $\mathbf{S}$.
- $\mathbf{S}\ M_1\ M_2\ x = M_1\ x\ (M_2\ x)$. Переменная x раздвоилась, причём её первое вхождение явно лишнее. Избавимся от него, положив $M_1 = \mathbf{K}\ M_3$.
- Получаем $M_3\ (M_2\ x)$. Из переменных остался только y, значит, M_3 должен иметь вид $M_4\ M_5$, причём $M_4 = \mathbf{S}$, иначе до y добраться не удастся.
- $\mathbf{S}\ M_5\ (M_2\ x)\ y = M_5\ y(M_2\ x\ y)$. Теперь очевидно, что $M_5 = \lambda x.x = \mathbf{I}$, $M_2 = \mathbf{K}$. Значит, `flip id` = $\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{S}\mathbf{I}))\mathbf{K}$.

Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x\,y.y\;x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в $\mathbf{S}$, $\mathbf{K}$-базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом $\mathbf{I}$: $\Phi \Rightarrow \Phi$).

Механически выпишем построение терма в комбинаторах по шагам и начнём добавлять подстановки.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S} &: \\
\mathbf{K} &: \\
\mathbf{S} &: \\
\mathbf{I} &: \\
\mathbf{S\,I} &: \\
\mathbf{K}(\mathbf{S\,I}) &: \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{S\,I})) &: \\
\mathbf{K} &: \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{S\,I}))\mathbf{K} &:
\end{aligned}
$$

Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x\, y.y\ x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в $\mathbf{S}$, $\mathbf{K}$-базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом $\mathbf{I}$: $\Phi \Rightarrow \Phi$).

Механически выпишем построение терма в комбинаторах по шагам и начнём добавлять подстановки.

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &: \\
\mathbf{K} &: \\
\mathbf{S} &: \\
\mathbf{I} &: \quad A \Rightarrow A \\
\mathbf{S}\mathbf{I} &: \\
\mathbf{K}(\mathbf{S}\mathbf{I}) &: \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{S}\mathbf{I})) &: \\
\mathbf{K} &: \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{S}\mathbf{I}))\mathbf{K} &:
\end{aligned}$$

Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x\, y.y\, x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в **S**, **K**-базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом **I**: $\Phi \Rightarrow \Phi$).

Механически выпишем построение терма в комбинаторах по шагам и начнём добавлять подстановки.

$$
\begin{array}{rl}
\mathbf{S}: & \\
\mathbf{K}: & \\
\mathbf{S}: & ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{I}: & A \Rightarrow A,\, A = A_1 \Rightarrow B \\
\mathbf{SI}: & \\
\mathbf{K}(\mathbf{SI}): & \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI})): & \\
\mathbf{K}: & \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI}))\mathbf{K}: &
\end{array}
$$

Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x\, y . y\ x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в $\mathbf{S}$, $\mathbf{K}$-базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом $\mathbf{I}$: $\Phi \Rightarrow \Phi$).

Механически выпишем построение терма в комбинаторах по шагам и начнём добавлять подстановки.

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &: \\
\mathbf{K} &: \\
\mathbf{S} &: \quad ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{I} &: \quad A \Rightarrow A,\ A = A_1 \Rightarrow B \\
\color{red}{\mathbf{SI}} &\color{red}{:} \quad ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{K}(\mathbf{SI}) &: \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI})) &: \\
\mathbf{K} &: \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI}))\mathbf{K} &:
\end{aligned}$$

Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x\, y. y\ x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в **S**, **K**-базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом **I**: $\Phi \Rightarrow \Phi$).

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S} &: \\
\mathbf{K} &: \quad (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{S} &: \quad ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{I} &: \quad A \Rightarrow A,\ A = A_1 \Rightarrow B \\
\mathbf{SI} &: \quad ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{K}(\mathbf{SI}) &: \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI})) &: \\
\mathbf{K} &: \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI}))\mathbf{K} &:
\end{aligned}
$$

Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x\, y.y\ x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в **S**, **K**-базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом **I**: $\Phi \Rightarrow \Phi$).

$$
\begin{array}{rl}
\mathbf{S}: & \\
\mathbf{K}: & (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)) \\
 & \qquad \Rightarrow (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{S}: & ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{I}: & A \Rightarrow A,\ A = A_1 \Rightarrow B \\
\mathbf{SI}: & ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{K}(\mathbf{SI}): & C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI})): & \\
\mathbf{K}: & \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI}))\mathbf{K}: &
\end{array}
$$

Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x\, y. y\ x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в $\mathbf{S}$, $\mathbf{K}$-базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом $\mathbf{I}$: $\Phi \Rightarrow \Phi$).

$$
\begin{array}{rl}
\mathbf{S}: & (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \\
 & \qquad \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{K}: & (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)) \\
 & \qquad \Rightarrow (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{S}: & ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{I}: & A \Rightarrow A,\ A = A_1 \Rightarrow B \\
\mathbf{SI}: & ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{K}(\mathbf{SI}): & C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI})): & \\
\mathbf{K}: & \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI}))\mathbf{K}: &
\end{array}
$$

Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x\, y. y\, x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в **S**, **K**-базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом **I**: $\Phi \Rightarrow \Phi$).

$$
\begin{array}{rl}
\mathbf{S}: & (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \\
 & \quad \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{K}: & (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)) \\
 & \quad \Rightarrow (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{S}: & ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{I}: & A \Rightarrow A,\ A = A_1 \Rightarrow B \\
\mathbf{SI}: & ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{K}(\mathbf{SI}): & C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\color{red}{\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI})):} & (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{K}: & \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI}))\mathbf{K}: &
\end{array}
$$

Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x\, y.y\ x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в $\mathbf{S}$, $\mathbf{K}$-базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом $\mathbf{I}$: $\Phi \Rightarrow \Phi$).

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}:&\quad (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)))\\
&\qquad\qquad \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))\\
\mathbf{K}:&\quad (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B))\\
&\qquad\qquad \Rightarrow (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))\\
\mathbf{S}:&\quad ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)\\
\mathbf{I}:&\quad A \Rightarrow A,\ A = A_1 \Rightarrow B\\
\mathbf{SI}:&\quad ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)\\
\mathbf{K}(\mathbf{SI}):&\quad C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))\\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI})):&\quad (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)),\ C = A_1\\
\color{red}{\mathbf{K}}:&\quad A_1 \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)\\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI}))\mathbf{K}:&
\end{aligned}
$$

Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x\, y.y\ x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в $\mathbf{S}$, $\mathbf{K}$-базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом $\mathbf{I}$: $\Phi \Rightarrow \Phi$).

$$\begin{array}{rl}
\mathbf{S}: & (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \\
& \quad \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{K}: & (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)) \\
& \quad \Rightarrow (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{S}: & ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{I}: & A \Rightarrow A,\ A = A_1 \Rightarrow B \\
\mathbf{SI}: & ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{K}(\mathbf{SI}): & C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI})): & (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)),\ C = A_1 \\
\mathbf{K}: & A_1 \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \\
\color{red}{\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI}))\mathbf{K}:} & A_1 \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)
\end{array}$$

Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x\, y.y\ x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в **S**, **K**-базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом **I**: $\Phi \Rightarrow \Phi$).

$$
\begin{array}{rl}
\mathbf{S}: & (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \\
 & \quad \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{K}: & (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)) \\
 & \quad \Rightarrow (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{S}: & ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{I}: & A \Rightarrow A,\ A = A_1 \Rightarrow B \\
\mathbf{SI}: & ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{K}(\mathbf{SI}): & C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI})): & (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)),\ C = A_1 \\
\mathbf{K}: & A_1 \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI}))\mathbf{K}: & A_1 \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)
\end{array}
$$

Очевидно!

Вывод из комбинатора

Тип терма $\lambda x\, y.y\ x$ — это $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Как вывести такую теорему в $\mathbf{S}$, $\mathbf{K}$-базисе? (для простоты включаем в него также схему аксиом $\mathbf{I}$: $\Phi \Rightarrow \Phi$).

$$
\begin{array}{rl}
\mathbf{S}: & (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \\
 & \quad \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{K}: & (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)) \\
 & \quad \Rightarrow (C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{S}: & ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{I}: & A \Rightarrow A, A = A_1 \Rightarrow B \\
\mathbf{SI}: & ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B) \\
\mathbf{K}(\mathbf{SI}): & C \Rightarrow (((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI})): & (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1)) \Rightarrow (C \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)), C = A_1 \\
\mathbf{K}: & A_1 \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow A_1) \\
\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SI}))\mathbf{K}: & A_1 \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow B) \Rightarrow B)
\end{array}
$$

Очевидно!

(это и вправду не требует участия мозга, но из разряда «легче написать (и/или запрограммировать), чем потом читать»)

Упражнение

Известно, что композиция $\lambda x\, y\, z.x\ (y\ z)$ — это `fmap` для функтора `Reader`. Выразить её в бесточечном виде по алгоритму и по логике.

Самые отчаянные могут также попробовать вывести её тип в стиле Гильберта из $\mathbf{S}$ и $\mathbf{K}$.

Конструктивность

Достаточно ли **S** и **K** для вывода всех теорем классической логики, содержащих только импликацию?

Построения конструктивны $\Rightarrow$ для них есть явно вычислимая конструкция. Вспомним закон исключённого третьего: $A \vee \neg A$. Если передать в виде A предикат «программа P завершается», тогда вычислимая конструкция $A \vee \neg A$ будет решать проблему останова.

Остаётся вопрос, есть ли такие теоремы, содержащие только $\Rightarrow$, что их можно доказать только с помощью $A \vee \neg A$, не ограничиваясь двумя правилами естественного вывода.

Формула Пирса: $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ не населена.

Относительное отрицание

Скажем, что $\neg_R \Phi = \Phi \Rightarrow R$.

Формула Пирса: $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A = (\neg_B A \Rightarrow A) \Rightarrow A$.
$(\neg_B A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg_B \neg_B A$, и как следствие $\neg_B \neg_B A \Rightarrow A$ влечёт формулу Пирса.

Относительное отрицание

Скажем, что $\neg_R \Phi = \Phi \Rightarrow R$.

Формула Пирса: $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A = (\neg_B A \Rightarrow A) \Rightarrow A$.
$(\neg_B A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg_B \neg_B A$, и как следствие $\neg_B \neg_B A \Rightarrow A$ влечёт формулу Пирса.

Парадокс Карри: пусть $D = \lambda x. \neg_A (x\ x)$, тогда
$(D\ D) \Leftrightarrow (\neg_A (D\ D))$ — относительная версия парадокса Рассела.

Относительное отрицание

Скажем, что $\neg_R \Phi = \Phi \Rightarrow R$.

Формула Пирса: $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A = (\neg_B A \Rightarrow A) \Rightarrow A$. $(\neg_B A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg_B \neg_B A$, и как следствие $\neg_B \neg_B A \Rightarrow A$ влечёт формулу Пирса.

Парадокс Карри: пусть $D = \lambda x. \neg_A (x\ x)$, тогда $(D\ D) \Leftrightarrow (\neg_A (D\ D))$ — относительная версия парадокса Рассела.

А теперь посмотрим на двойное относительное отрицание с точки зрения функционального языка...

$\tau :: M \Rightarrow \lambda k.k\ \tau :: \neg_R \neg_R M$, где R не входит в число переменных M. Двойное отрицание порождает продолжения вычислений.

Продолжения следуют...

Спасибо за внимание!