

1 Бестиповое λ -исчисление

Здесь комбинатор неподвижной точки — стандартный ленивый комбинатор $Y = \lambda f.(\lambda x.f(x x))(\lambda x.f(x x))$.

Задачи на редукцию, содержащие комбинатор Y , можно решать двумя способами. Либо тупо раскрывать редукции, либо пользоваться уравнением для неподвижной точки $f(Y f) = Y f$. Чтобы доказать, что нормальной формы не существует, достаточно найти бесконечный цикл при нормальном порядке вычислений, то есть такой внешний редекс, который повторно появляется после нескольких внешних бета-редукций.

Решить уравнение в комбинаторах — это построить λ -термы в головной нормальной форме, которые удовлетворяют данному уравнению.

Задачи на решение уравнений в комбинаторах решаются применением подходящего комбинатора неподвижной точки, если одна из частей уравнения имеет вид $M x_1 x_2 \dots x_n$. Если ни одна из частей уравнения не имеет такого вида, то в случае, если некоторые x_i заменены на комбинаторы, можно построить такой M , который будет удовлетворять указанному уравнению для всех x_i . Если же обе части уравнений имеют более сложную структуру, тогда придётся использовать другие эвристики.

Чтобы доказать, что уравнение в комбинаторах не имеет решения, можно воспользоваться леммой о генеричности.

Теорема 1. Пусть M, N — термы λ -исчисления, причем терм M неразрешим (т.е. не имеет нормальной формы), а N имеет н.ф. Тогда для любого контекста $C[\]$

$$C[M] \rightarrow_\beta N \Rightarrow \forall L(C[L] \rightarrow_\beta N)$$

Пользуясь данными указаниями, разберём несколько задач на бестиповое λ -исчисление.

1. Привести к нормальной форме или доказать, что её не существует.

$$Y(Y(\lambda x y.y))(\lambda x y.x)$$

Разберёмся сначала с внутренней редукцией $Y(\lambda x y.y)$. По уравнению, $Y(\lambda x y.y) = (\lambda x y.y)(Y(\lambda x y.y))$, что нормализуется к $\lambda y.y$. Осталось вычислить $Y(\lambda y.y)(\lambda x y.x)$. Явно подставив $\lambda y.y$ в Y ,

получаем терм $(\lambda x.x x) (\lambda x.x x)$, который, как известно, заиклиивается.

Данное рассуждение не является полным доказательством отсутствия нормальной формы (поскольку мы сначала сокращали внутренний редекс, чего при нормальном порядке вычислений делать были не должны), но позволяет легко его построить. Обозначим $\mathbf{N} = \mathbf{Y}(\lambda xy.y)$ и подставим \mathbf{N} во внешний комбинатор \mathbf{Y} , тем самым произведя редукцию согласно нормальному порядку вычислений.

Получим $(\lambda x.\mathbf{N}(x x)) (\lambda x.\mathbf{N}(x x)) (\lambda xy.x)$. Ещё раз производим β -редукцию внешнего редекса:

$$\mathbf{N}((\lambda x.\mathbf{N}(x x)) (\lambda x.\mathbf{N}(x x))) (\lambda xy.x)$$

Вот теперь \mathbf{N} — во внешнем редексе, и мы можем воспользоваться тайным знанием, что он нормализуется к $\lambda y.y$. Применение этого терма к первому аргументу возвращает уже знакомый терм $(\lambda x.\mathbf{N}(x x)) (\lambda x.\mathbf{N}(x x)) (\lambda xy.x)$ с тем же самым внешним редексом.

2. Привести к нормальной форме или доказать, что её не существует:

$$\mathbf{Y}((\lambda xyzw.x z (y z) w) (\lambda xy.x (\lambda xyz.y z)) (\lambda z_1 z_2.z_1 z_2) (\lambda xy.y))$$

Здесь использование уравнения для неподвижной точки ничего не даст, пока не будет упрощён терм, к которому применяется комбинатор \mathbf{Y} . Три внутренних подтерма можно упростить с помощью η -редукции, а именно $\lambda xyzw.x z (y z) w$, $\lambda xyz.y z$ и $\lambda z_1 z_2.z_1 z_2$. После чего β -редукцией получаем, что аргумент комбинатора \mathbf{Y} — это $\lambda xyz.z$. Далее можно воспользоваться уравнением для неподвижной точки и показать, что нормальная форма достигается.

3. Решить уравнение в комбинаторах или показать, что решения не существует:

$$\forall x(\mathbf{M} x = x \mathbf{M})$$

Левая часть уравнения имеет требуемый вид. Воспользуемся комбинатором \mathbf{Y} для построения \mathbf{M} : $\mathbf{M} = \mathbf{Y}(\lambda m x.x\ m)$. Чтобы привести это выражение к головной нормальной форме, воспользуемся уравнением для \mathbf{Y} : $\mathbf{M} = (\lambda m x.x\ m) (\mathbf{Y}(\lambda m x.x\ m)) = \lambda x.x (\mathbf{Y}(\lambda m x.x\ m))$. Далее просто подставим $\lambda m x.x\ m$ в \mathbf{Y} и получим:

$$\mathbf{M} = \lambda x_0.x_0 ((\lambda x_1 y.y (x_1\ x_1)) (\lambda x_1 y.y (x_1\ x_1)))$$

4. Решить уравнение в комбинаторах или показать, что решения не существует:

$$\forall x, y (\mathbf{M} (x\ y) = x)$$

Здесь пользоваться конструкцией с комбинатором неподвижной точки напрямую нельзя, потому что части уравнения имеют неподходящую структуру. Уравнение выглядит подозрительно, потому что такой комбинатор позволял бы нам отменять применение (вытаскивать любую функцию x из вычисления). Попробуем опровергнуть существование \mathbf{M} с помощью леммы о генеричности. Для этого нужно подобрать хорошее значение x (чтобы x был уже в нормальной форме), но очень неудачный y (зацикливающийся). Проще всего взять $x = \lambda w.w$, $y = (\lambda z.(z\ z)) (\lambda z.(z\ z))$. Тогда $x\ y$ — это не имеющий нормальной формы терм $(\lambda z.(z\ z)) (\lambda z.(z\ z))$, и по лемме о генеричности, $\forall V (\mathbf{M}\ V = \lambda w.w)$. Возьмём $V = (\lambda x y.y) (\lambda x.x)$, и получим, что $\lambda x y.y = \lambda w.w$. Это противоречивое утверждение, значит, такого комбинатора \mathbf{M} не существует.

2 Типизированное λ -исчисление

Для вывода типа можно просто воспользоваться алгоритмом Хиндли. Если есть уверенность в себе, не обязательно строго придерживаться разбора сверху вниз, можно попробовать типизировать отдельно подтермы, и затем собрать типы воедино.

Всегда выводим тип того терма, который буквально написан в задаче. Никаких редукций предварительно делать не надо, это может привести к ошибочному ответу. Если есть подозрение, что терм не типизируется, достаточно показать, что не типизируется некоторый его подтерм.

Для построения обитателя типа доказываем утверждение в минимальной логике и затем извлекаем терм из доказательства. Задачи на доказательство ненаселённости (в моделях Крипке) здесь не рассматриваются.

1. Вывести тип терма или показать, что его нельзя типизировать:

$$\lambda x_1. (\lambda x_2. x_2 (\lambda x_3. x_3)) (\lambda x_4. x_4 (\lambda x_5. x_5) x_1)$$

Выводить тип этого терма по Хиндли довольно трудоёмко. Намного проще заметить, что подтермы $\lambda x_3. x_3$, $\lambda x_5. x_5$ и x_1 являются только аргументами функций, поэтому, скорее всего, их типы в общем терме далее уточняться не будут. Типизируем их как $T_3 \rightarrow T_3$, $T_5 \rightarrow T_5$ и T_1 соответственно.

Теперь заметим, что терм $\lambda x_4. x_4 (\lambda x_5. x_5) x_1$ также является аргументом. Поэтому логично начать типизацию остальных частей общего терма с него. Переменная x_4 применяется к двум аргументам, типы которых уже известны. Положим её тип $(T_5 \rightarrow T_5) \rightarrow T_1 \rightarrow T_4$, тогда аргументом выражения $\lambda x_2. x_2 (\lambda x_3. x_3)$ будет выражение типа $((T_5 \rightarrow T_5) \rightarrow T_1 \rightarrow T_4) \rightarrow T_4$.

Теперь типизируем отдельно выражение-функцию $\lambda x_2. x_2 (\lambda x_3. x_3)$, для чего строим тип x_2 : $(T_3 \rightarrow T_3) \rightarrow T_2$. Итоговый тип функции: $((T_3 \rightarrow T_3) \rightarrow T_2) \rightarrow T_2$, а всего выражения: $T_1 \rightarrow T_2$.

Осталось унифицировать $((T_5 \rightarrow T_5) \rightarrow T_1 \rightarrow T_4) \rightarrow T_4$ и $(T_3 \rightarrow T_3) \rightarrow T_2$. Сразу же имеем $T_4 = T_2$, $T_3 = T_4$, $T_3 = (T_5 \rightarrow T_5) \rightarrow T_1$, значит, итоговый тип общего терма: $T_1 \rightarrow (T_5 \rightarrow T_5) \rightarrow T_1$.

2. Доказать населенность типа и построить его обитателя:

$$(A \vee (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$$

Внешний конструктор здесь — следование, поэтому каркас вывода (в нотации Фитча) выглядит так:

$$\begin{array}{c} *A \vee (A \Rightarrow B) \quad \text{вводим } x \\ \left| \begin{array}{c} \text{Здесь будет остальной вывод} \\ ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A \end{array} \right. \\ \hline (A \vee (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \quad \lambda x.??? \end{array}$$

Результат вывода — функция (импликация), поэтому опять нужно применить дедукцию (или, что то же самое, ввести ещё одну абстракцию):

$$\begin{array}{c} *A \vee (A \Rightarrow B) \quad \text{вводим } x \\ \left| \begin{array}{c} *(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \quad \text{вводим } y \\ \left| \begin{array}{c} \text{Осталось только вывести } A, \text{ имея типы термов } x \text{ и } y \\ A \end{array} \right. \\ \hline ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A \quad \lambda y.??? \end{array} \right. \\ \hline (A \vee (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \quad \lambda xy.??? \end{array}$$

Понятно, что придётся разбирать случаи. Сделаем это.

$$\begin{array}{c} *A \vee (A \Rightarrow B) \quad \text{вводим } x \\ \left| \begin{array}{c} *(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \quad \text{вводим } y \\ \left| \begin{array}{c} \text{Разбор возможных типов терма } x \\ \begin{array}{cc} *A & \text{вводим } z_1 & *A \Rightarrow B & \text{вводим } z_2 \\ \left| \begin{array}{c} \text{Выводим } A \text{ из } A \\ A \end{array} & \left| \begin{array}{c} \text{Выводим } A \text{ из } A \Rightarrow B \text{ и термов в контексте} \\ A \end{array} \end{array} \right. \\ \hline A & \text{either } (\lambda z_1.???, \lambda z_2.???, x) \end{array} \right. \\ \hline ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A & \lambda y.\text{either } (\lambda z_1.???, \lambda z_2.???, x) \\ \hline (A \vee (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) & \lambda xy.\text{either } (\lambda z_1.???, \lambda z_2.???, x) \end{array} \end{array}$$

В левом подвыводе A выводится переносом из контекста, а в правом — применением импликации (т.е. применением функции). Требуемый терм построен.

$$\begin{array}{c}
\textcolor{blue}{*A \vee (A \Rightarrow B)} \\
\left| \begin{array}{c}
\textcolor{blue}{*(A \Rightarrow B) \Rightarrow A} \quad \textcolor{blue}{\text{вводим } y} \\
\left| \begin{array}{c}
\textcolor{red}{\text{Разбор возможных типов терма } x} \\
\begin{array}{cc}
\textcolor{blue}{*A} \quad \textcolor{blue}{\text{вводим } z_1} & \textcolor{blue}{*A \Rightarrow B} \quad \textcolor{blue}{\text{вводим } z_2} \\
\left| \textcolor{blue}{A \text{ это тип } z_1} \right| & \left| \textcolor{blue}{A \text{ это тип } y \ z_2} \right| \\
A & \textcolor{blue}{\text{either } (\lambda z_1.z_1, (\lambda z_2.y \ z_2), x)}
\end{array}
\end{array}
\right. \\
\left. \begin{array}{c}
((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A \quad \textcolor{blue}{\lambda y.\text{either } (\lambda z_1.z_1, (\lambda z_2.y \ z_2), x)} \\
(A \vee (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \quad \textcolor{blue}{\lambda xy.\text{either } (\lambda z_1.z_1, (\lambda z_2.y \ z_2), x)}
\end{array} \right.
\end{array}
\right.
\end{array}$$

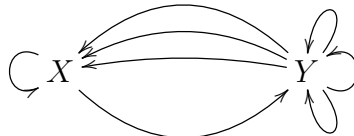
3 Категории

Для того чтобы доказать, что диаграмма описывает категорию, достаточно предъявить алгебраические функции, соответствующие стрелкам диаграммы, и доказать существование всех возможных композиций. Ассоциативность доказывается автоматически по определению композиции для функций. Большинство небольших диаграмм категорий может быть сопоставлено набору конечных множеств и функций между ними. Эвристика «в минимальном множестве, сопоставляемом объекту X , элементов не меньше, чем максимальное число стрелок из одного и того же объекта Y в объект X » (верно и для петель, т.е. стрелок из X в X) работает неплохо, но зачастую можно обойтись и меньшим количеством элементов в множествах модели.

При подозрении, что категория описывается диаграммой некорректно (если отбросить тривиальные случаи, когда в диаграмме очевидно не хватает композиций), доказательство удобно начинать «раскручивать» с тех объектов, у которых нет петель. Если такой объект X существует, и при этом существует путь по стрелкам из X в X , то исходная стрелка точно инъективна (мономорфна), и заключительная — точно сюръективна (эпиморфна). Также имеет смысл обратить внимание на стрелки внутри такого пути, соединяющие два объекта Y и Z такие, что других стрелок из Y в Z нет, но есть хотя бы одна петля из Z в Z . Это будет означать, что петля из Z в Z совпадает с единичным морфизмом на области значений стрелки из Y в Z , а значит, эта стрелка не может определять эпиморфизм.

В теории категорий область значений функции f принято называть «кодомен» и обозначать $\text{codom}(f)$, двойственным образом к $\text{dom}(f)$. В разборе задач в дальнейшем пользуемся этой терминологией.

1. Проверить, соответствует ли категории заданная диаграмма:



Пусть стрелки из Y в X соответствуют функциям f_1, f_2, f_3 , стрелка из X в Y — функции g , петли в Y — функциям h_1, h_2, h_3 , а петля в X — функции k .

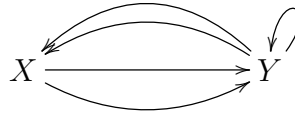
Начнём разбирать диаграмму с композиций $h_i \circ g$. Все они обязаны совпадать с g , поэтому все h_i совпадают с id_Y на $codom(g)$. Значит, все композиции $g \circ f_i$ также совпадают с id_Y на $codom(g)$. Такое малоинтересное поведение функций на данном множестве располагает к тому, чтобы сделать $codom(g)$ как можно меньше. Предположим, что $card(codom(g)) = 1$, то есть $\forall x \in X (g(x) = b_1)$.

Следовательно, $\forall x \in Y (g \circ f_i(x) = b_1)$, и одна из функций h_i обязана быть константой. Без ограничения общности можно взять $h_1(x) = b_1$. Поскольку $f_i \circ h_1$ — это некоторая функция f_j , то она также обязана быть константой. Положим $f_1(x) = a_1$. После этого, очевидно, единственная возможность определить функцию k — это $\forall x \in X (k(x) = a_1)$.

Осталось разобраться с h_2, h_3, f_2, f_3 . По построению, $h_i(b_1) = b_1$. Значит, чтобы различить h_2 и h_3 , понадобится минимум трёхэлементное множество Y . Положим $h_2(b_2) = b_1, h_2(b_3) = b_2, h_3(b_2) = b_2, h_3(b_3) = b_2$. Тогда $h_2 \circ h_2 = h_1, h_2 \circ h_3 = h_1, h_3 \circ h_2 = h_2, h_3 \circ h_3 = h_2$. Все композиции h_i с h_1 тривиально совпадают с h_1 (это нулевой элемент в полугруппе морфизмов из Y в Y).

Чтобы различить f_i , достаточно положить X двухэлементным (это всё равно необходимо, чтобы k не совпал с единичным морфизмом). Все $f_i(b_1) = a_1$, иначе композиция $f_i \circ g$ не совпадала бы с k . Положим $f_2(b_2) = a_1, f_2(b_3) = a_2, f_3(b_2) = a_2, f_3(b_3) = a_2$, тогда $f_2 \circ h_2 = f_1, f_2 \circ h_3 = f_1, f_3 \circ h_2 = f_2, f_3 \circ h_3 = f_3$. Композиционность соблюдена, категория построена.

2. Проверить, соответствует ли категории заданная диаграмма:



Опять предположим, что стрелки из X в Y задают морфизмы g_i , из Y в X — f_i , из Y в Y — морфизм h . Очевидно, что $\forall i, j (f_i \circ g_j = id_X)$, других возможностей нет. Пусть f_1 и g_1 таковы, что $g_1 \circ f_1 = id_Y$, тогда $g_1 = g_1 \circ (f_1 \circ g_2) = (g_1 \circ f_1) \circ g_2 = g_2$, чего не может быть, поэтому $\forall i, j (g_i \circ f_j = h)$. Тогда $(g_1 \circ f_1) \circ g_2 = h \circ g_2 = g_1$, и $(g_2 \circ f_1) \circ g_2 = h \circ g_2 = g_2$. Это противоречит диаграмме, поэтому категорией она не является.

4 Функторы и естественные преобразования