José Antonio Mérida Castejón - 201105

Guillermo Santos - 191517

Ernesto Ascencio - 23009

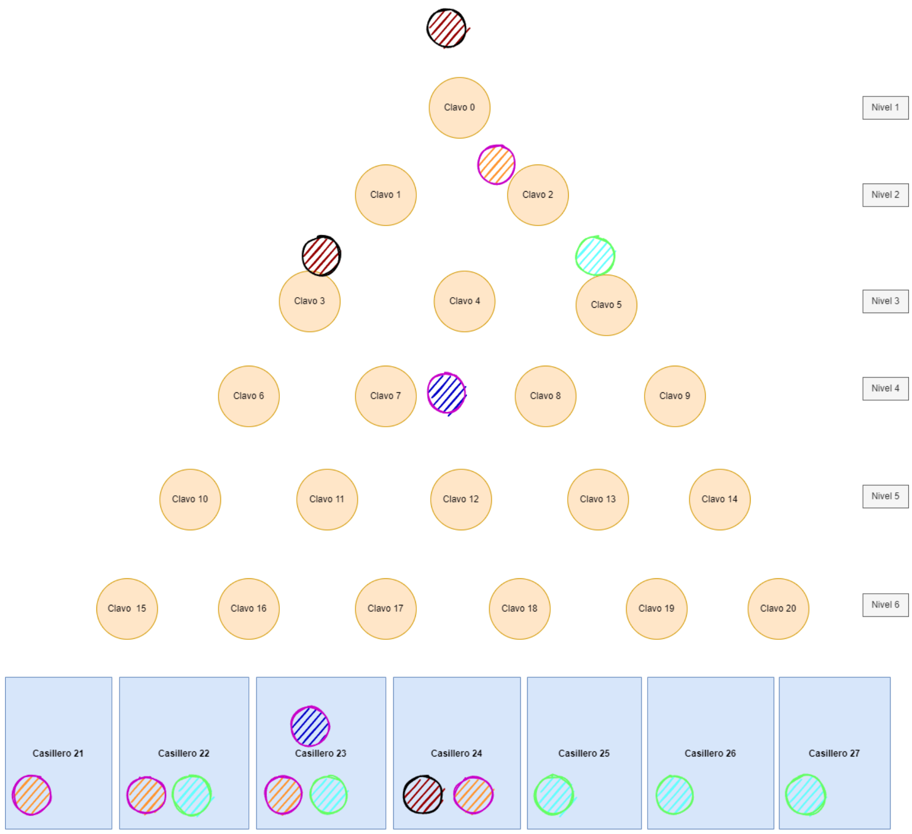
20-05-2024

Examen Parcial #4

I. Planteamiento del Problema (3):

Menganita quiere impresionar a Chispudito con sus conocimientos de probabilidad. Ella decide utilizar la máquina de Galton con 6 niveles de clavos y 7 casilleros donde caen las pelotitas para mostrárselo a Chispudito.

Para ayudar a Menganita. debe encontrar la probabilidad de que la pelota caiga en cada uno de los casilleros.



Los clavos y los casilleros siguen una sola enumeración de izquierda a derecha empezando por 0, mientras que los niveles inician en 1 y representan cada uno una fila de clavos.

II. Elementos de la Cadena de Markov:

Nota: Se utilizan sumatorias algunas veces para representar el último o primer número de Clavo perteneciente a algún nivel.

a. Espacio Parametral

Las variables aleatorias que definen la probabilidad de transición de estado se definen como:

$$P_{ij} = \begin{cases} 0.5 & \text{para todo } i \in S \text{ tal que } j = i + n \text{ o } j = i + n + 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$0 \leq i \leq \sum_{k=1}^{n}$$

Para las transiciones entre clavos, el intervalo de *i* define todos los niveles exceptuando casilleros. La sumatoria define el número del último clavo en una matriz de n niveles.

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Para los casilleros, los cuales se encuentran en la última fila se definen como estados absorbentes.

Dónde n es el nivel actual dónde se encuentra, este igualmente depende del número de clavo en el que nos encontremos. El nivel se puede encontrar al rellenar la matriz de transición de manera recursiva o definir de la siguiente manera:

b. Espacio de Estados

Para una máquina de Galton de *n* niveles el espacio de estados corresponde a:

$$S = i\epsilon\mathbb{R}|0 \leq i \leq \sum_{k=1}^{n+1}$$

Siendo la sumatoria de k = 1 hasta *n + 1* el número de estados totales incluyendo casilleros.

En el caso de la máquina de galton el intervalo de i es de [0,28].

c. Proceso Estocástico (Tiempo Discreto)

La máquina de Galton es un modelo estocástico, dónde la probabilidad de caer sobre un clavo (o caer dentro de un casillero) depende únicamente del clavo dónde se encuentre actualmente.

d. Estado Inicial

Siempre se inicia en el casillero 0, teniendo una probabilidad de 1 de ser el estado inicial.

e. Matriz de Transición

Los números correspondientes a los estados a los que se pueden transicionar son iguales a C (El número de Clavo actual) + N (El Nivel dónde se encuentra el Clavo) y su siguiente entero consecutivo. Además, cada nivel contiene su mismo N número de elementos. La probabilidad de que la pelota caiga hacia la izquierda y la derecha es la misma (0.5 para cada lado).

Con esta información podemos rellenar la matriz de transición de manera recursiva empezando en el Nivel N = 1 y el Clavo C = 0.

Primer Estado (C = 0)

- Buscamos las casillas correspondientes a las transiciones hacia "C + N" (1) y "C + N + 1" (2)
- Colocamos las probabilidades de 0.5 para cada uno
- Al estar en el primer nivel, sabemos que solo se posee un elemento. Tomamos nota que el último elemento revisado fue el 0 y aumentamos el nivel por 1.

Segundo Estado (C = 1)

- Buscamos las casillas correspondientes a las transiciones hacia "C + N" (3) y "C + N + 1" (4)
- Colocamos las probabilidades de 0.5 para cada uno
- Al estar en el segundo nivel, sabemos que posee dos elementos. Debemos de continuar al siguiente.

Tercer Estado (C = 2)

- Buscamos las casillas correspondientes a las transiciones hacia "C + N" (4) y "C + N + 1" (5)
- Colocamos las probabilidades de 0.5 para cada uno
- Al estar en el segundo nivel, sabemos que posee dos elementos. Ya que logramos revisar ambos elementos aumentamos por 1 el nivel y continuamos el proceso.

Al llegar a un casillero la pelotita se detiene, siendo cada casillero un estado absorbente. Dónde la probabilidad de quedarse en la misma posición es de 1. Esta matriz de transición cumple con los parámetros establecidos en los incisos *a* y *b*.

f. Clasificación de Estados

Los clavos son estados transitorios, ya que luego de pasar por alguno no se vuelve a regresar. Los casilleros son estados absorbentes, ya que al llegar a un casillero no se vuelve a salir.

g. Estados Finales (Casilleros)

Sabemos que una matriz de transición *P* elevada a la *n* potencia nos da las probabilidades de transición luego de *n* pasos. Una máquina de galton de *X* niveles igualmente sigue *X* pasos antes de llegar al casillero. Esto nos lleva a la solución en este caso, la probabilidad de caer en cada casillero es igual a la posición *P^6[0, Casillero].*

III. Elementos de la Ley de Grandes Números:

a. Experimento Aleatorio

Cada vez que una pelotita cae a través de los niveles de la máquina de Galton, se realiza un experimento aleatorio. En cada nivel, la pelotita puede desviarse a la izquierda o a la derecha con igual probabilidad.

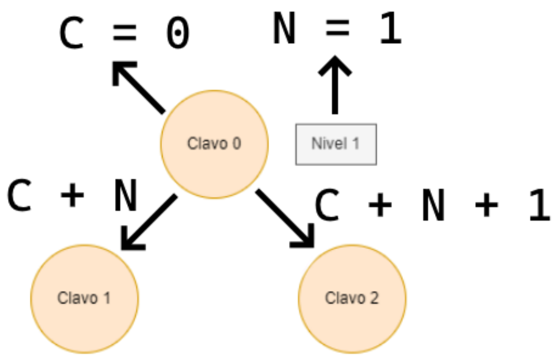
b. Variable Aleatoria

El número al que transiciona la pelotita se puede considerar como una variable aleatoria discreta, dónde:

$$P(X_i = i) = 0.5 \qquad P(X_i = i + 1) = 0.5$$

$$1 \leq i < n$$

Esta variable aleatoria se suma al número actual del clavo para obtener la posición luego de dar el paso *i*.



El paso *i* es correspondiente a el nivel *n* dónde se encuentra, y *c* representa el número de clavo actual.

El casillero dónde cae la pelotita también es una variable aleatoria discreta, que puede tomar cualquier número de casillero. Tomando en cuenta los valores esperados de las variables aleatorias para calcular cada paso del proceso el valor esperado de este experimento es 24.

c. Independencia

Las variables aleatorias son independientes, ya que su valor no depende del resultado de las variables aleatorias anteriores. Cada experimento se realiza de manera separada y no importa en qué casillero hayan caído las pelotitas anteriores.

$$E(X_i) = i + 0.5$$

d. Número de Observaciones

Realizamos un gran número de simulaciones (en este caso, 1,000,000) de la caída de pelotitas a través de la máquina. La Ley de los grandes números establece que a medida que el número de observaciones aumenta, las frecuencias relativas de los resultados observados se acercarán a las probabilidades teóricas.

e. Frecuencias Relativas y Probabilidades Teóricas

Las frecuencias relativas de las pelotitas cayendo en cada casillero (observadas a través de la simulación) deben converger hacia las probabilidades teóricas de caer en esos casilleros, que en este caso siguen una distribución binomial.

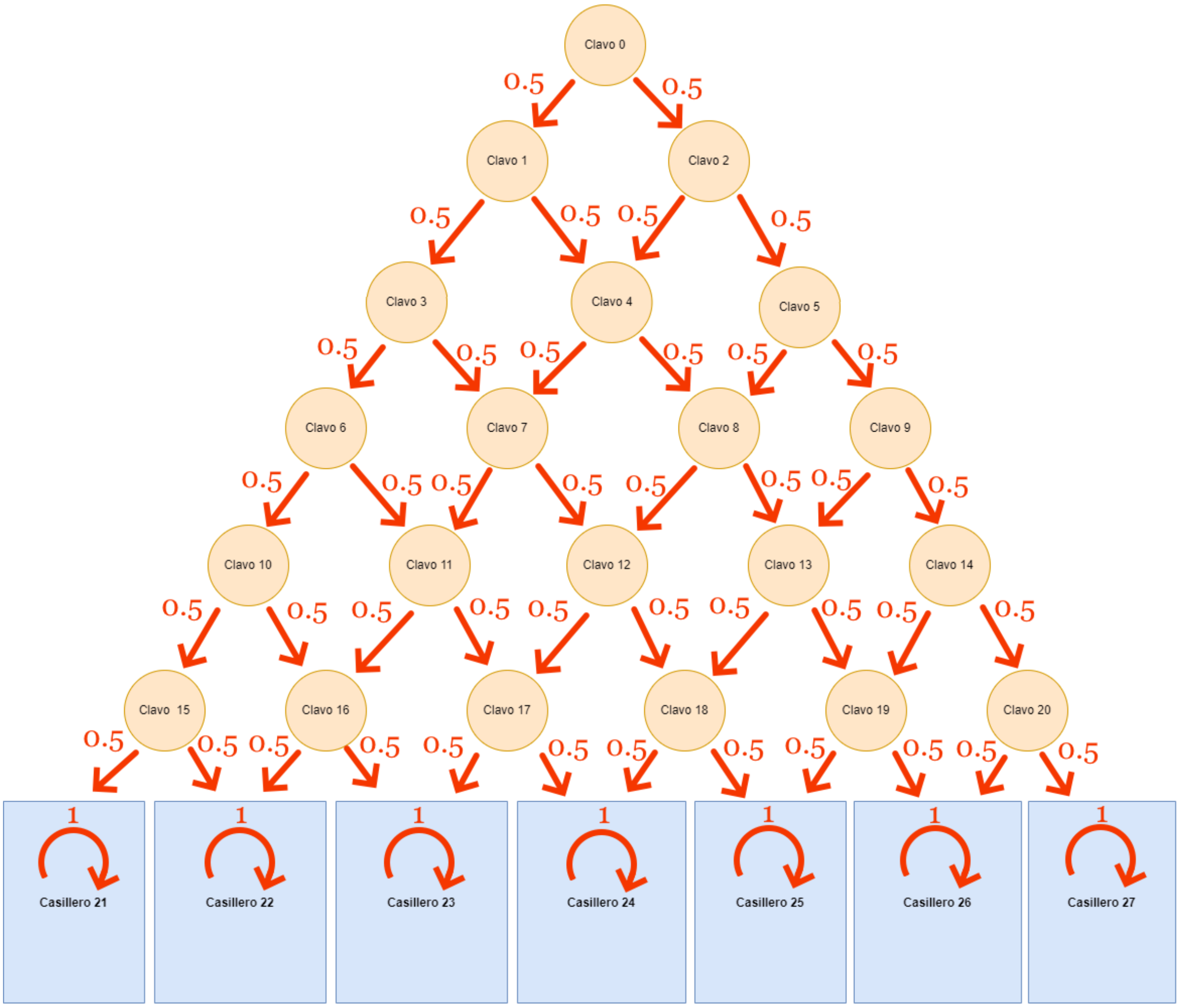
f. Resultados

En este caso analizamos una máquina de Galton de 6 niveles, esto quiere decir que las variables aleatorias se encuentran en el intervalo [1, 6]. Se realizó una simulación de 1 millón de intentos dónde se fueron sumando las variables aleatorias a un valor inicial de 0. Dónde el valor final del casillero dónde se encuentra la pelotita luego de cada simulación se representa por:

$$\sum_{i=1}^{i=6} Xi$$

El casillero resultante luego de cada experimento se puede expresar como una variable aleatoria con una media finita. Según la Ley de los Grandes Números, al tener una sucesión de variables aleatorias idénticamente distribuidas la probabilidad que se acerque al valor esperado es 1.

IV. Diagrama de Transiciones de Probabilidades (Cadena de Markov)



V. Programa en Python / Repositorio en Github

https://github.com/TonitoMC/Parcial4_Probabilidades

VI. Pantallas de Ejecución

```
C:\Users\Jose\PycharmProjects\HDT9\.venv\Scripts\python.exe C:\Users\Jose\Downloads\Parcial4Prob.py
Ley de Grandes Numeros
Intentos: 1000000
Casillero 21: 15872
Casillero 22: 94194
Casillero 23: 233613
Casillero 24: 312778
Casillero 25: 234254
Casillero 26: 93719
Casillero 27: 15570
% Casillero 21: 0.015872
% Casillero 22: 0.094194
% Casillero 23: 0.233613
% Casillero 24: 0.312778
% Casillero 25: 0.234254
% Casillero 26: 0.093719
% Casillero 27: 0.01557
Cadenas de Markov
Casillero 21: 0.015625
Casillero 22: 0.09375
Casillero 23: 0.234375
Casillero 24: 0.3125
Casillero 25: 0.234375
Casillero 26: 0.09375
Casillero 27: 0.015625
Valor Esperado: 24.0
```