Algoritmos y Estructuras de Datos I

Guía Práctica 4
Precondición más débil en SmallLang

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Recordar utilizar la función $\beta : P \to \mathbb{Z}$, la cual evalúa a 1 si y sólo si el predicado P es verdadero y en caso contrario evalúa a 0.

Ejercicio 1. ★ Calcular las siguientes expresiones, donde a, b son variables reales, i una variable entera y A es una secuencia de reales.

a) def$(a + 1)$.

b) def(a/b).

c) def$(\sqrt{a/b})$.

d) def$(A[i] + 1)$.

e) def$(A[i + 2])$.

f) def$(0 \leq i \leq |A|)$.

g) def$(0 \leq i \leq |A| \ \wedge_L \ A[i] \geq 0)$.

Ejercicio 2. Calcular las siguientes precondiciones más débiles, donde a, b son variables reales, i una variable entera y A es una secuencia de reales.

a) $wp(\textbf{a := a+1}, a \geq 0)$.

b) $wp(\textbf{a := a/b}, a \geq 0)$.

c) $wp(\textbf{a := A[i]}, a \geq 0)$.

d) $wp(\textbf{a := b*b}, a \geq 0)$.

e) $wp(\textbf{b := b+1}, a \geq 0)$.

Ejercicio 3. ★ Calcular las siguientes precondiciones más débiles, donde a, b son variables reales, i una variable entera y A es una secuencia de reales.

a) $wp(\textbf{a := a+1; b := a/2}, b \geq 0)$.

b) $wp(\textbf{a := A[i] + 1; b := a*a}, b \neq 2)$.

c) $wp(\textbf{a := A[i] + 1; a := b*b}, a \geq 0)$.

d) $wp(\textbf{a := a-b; b := a+b}, a \geq 0 \wedge b \geq 0)$.

Ejercicio 4. ★ Sea $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |A| \to_L A[j] \geq 0)$. Calcular las siguientes precondiciones más débiles, donde i es una variable entera y A es una secuencia de reales.

a) $wp(\textbf{A[i] := 0}, Q)$.

b) $wp(\textbf{A[i+2] := 0}, Q)$.

c) $wp(\textbf{A[i+2] := -1}, Q)$.

d) $wp(\textbf{A[i] := 2 * A[i]}, Q)$.

e) $wp(\textbf{A[i] := A[i-1]}, Q)$.

Ejercicio 5. Calcular $wp(S, Q)$, para los siguientes pares de programas S y postcondiciones Q.

a) $S \equiv$ `i := i + 1`
$Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |A| \rightarrow_L A[j] \neq 0)$

b) $S \equiv$ `A[0] := 4`
$Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |A| \rightarrow_L A[j] \neq 0)$

c) $S \equiv$ `A[2] := 4`
$Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |A| \rightarrow_L A[j] \neq 0)$

d) $S \equiv$ `A[i] := A[i+1] - 1`
$Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 < j < |A| \rightarrow_L A[j] \geq A[j-1])$

e) $S \equiv$ `A[i] := A[i+1] - 1`
$Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 < j < |A| \rightarrow_L A[j] \leq A[j-1])$

Ejercicio 6. Escribir programas para los siguientes problemas y demostrar formalmente su corrección usando la precondición más débil.

a) `proc problema1` (inout a: $\mathbb{Z}$) {
    `Pre` $\{a = a_0 \ \wedge \ a \geq 0\}$
    `Post` $\{a = a_0 + 2\}$
}

b) `proc problema2` (in a: $\mathbb{Z}$, out b: $\mathbb{Z}$) {
    `Pre` $\{a \neq 0\}$
    `Post` $\{b = a + 3\}$
}

c) `proc problema3` (in a: $\mathbb{Z}$, in b: $\mathbb{Z}$, out c: $\mathbb{Z}$) {
    `Pre` $\{\text{true}\}$
    `Post` $\{c = a + b\}$
}

d) `proc problema4` (in a: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in i: $\mathbb{Z}$, out result: $\mathbb{Z}$) {
    `Pre` $\{0 \leq i < |a|\}$
    `Post` $\{result = 2 * a[i]\}$
}

e) `proc problema5` (in a: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in i: $\mathbb{Z}$, out result: $\mathbb{Z}$) {
    `Pre` $\{0 \leq i \ \wedge \ i + 1 < |a|\}$
    `Post` $\{result = a[i] + a[i+1]\}$
}

Ejercicio 7. ★ Calcular $wp(S, Q)$, para los siguientes pares de programas S y postcondiciones Q.

a) $S \equiv$

```
if( a < 0 )
  b := a
else
  b := -a
endif
```

$Q \equiv (b = -|a|)$

b) $S \equiv$

```
if( a < 0 )
  b := a
else
  b := -a
endif
```

$Q \equiv (b = |a|)$

c) $S \equiv$

```
if( i > 0 )
  s[i] := 0
else
  s[0] := 0
endif
```

$Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] \geq 0)$

d) $S \equiv$

```
if( i > 1 )
  s[i] := s[i-1]
else
  s[i] := 0
endif
```

$Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(1 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] = s[j-1])$

e) $S \equiv$

```
if( s[i] < 0 )
  s[i] := -s[i]
else
  skip
endif
```

$Q \equiv 0 \leq i < |s| \ \wedge_L \ s[i] \geq 0$

f) $S \equiv$

```
if( s[i] > 0 )
  s[i] := -s[i]
else
  skip
endif
```

$Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \ \rightarrow_L \ s[j] \geq 0)$

Ejercicio 8. ★ Escribir programas para los siguientes problemas y demostrar formalmente su corrección usando la precondición más débil.

a) `proc problema1` (in s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in i: $\mathbb{Z}$, inout a: $\mathbb{Z}$) {

  `Pre` $\{0 \leq i < |s| \ \wedge_L \ a = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]\}$

  `Post` $\{a = \sum_{j=0}^{i} s[j]\}$

}

b) `proc problema2` (in s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in i: $\mathbb{Z}$, inout a: $\mathbb{Z}$) {

  `Pre` $\{0 \leq i < |s| \ \wedge_L \ a = \sum_{j=0}^{i} s[j]\}$

  `Post` $\{a = \sum_{j=1}^{i} s[j]\}$

}

c) `proc problema3` (in s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in i: $\mathbb{Z}$, out res: Bool) {

  `Pre` $\{0 \leq i < |s| \ \wedge_L \ (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < i \rightarrow_L s[j] \geq 0)\}$

  `Post` $\{res = true \leftrightarrow (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j \leq i \rightarrow_L s[j] \geq 0)\}$

}

d) `proc problema4` (in s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in i: $\mathbb{Z}$, inout a: $\mathbb{Z}$) {

  `Pre` $\{0 \leq i < |s| \ \wedge_L \ a = \sum_{j=0}^{i-1} \beta(s[j] \neq 0)\}$

  `Post` $\{a = \sum_{j=0}^{i} \beta(s[j] \neq 0)\}$

}

e) `proc problema5` (in s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in i: $\mathbb{Z}$, inout a: $\mathbb{Z}$) {

  `Pre` $\{0 < i \leq |s| \ \wedge_L \ a = \sum_{j=1}^{i-1} \beta(s[j] \neq 0)\}$

  `Post` $\{a = \sum_{j=0}^{i-1} \beta(s[j] \neq 0)\}$

}