Algoritmos y Estructuras de Datos III - 1$^{\text{er}}$ Parcial

Fecha de examen: 29-SEP-2023

	Nº Orden	Turno	Apellido y nombre		L.U.	# hojas [1]
Notas:	Ej1		Ej2	Ej3	Corrector	

Aclaraciones: Cada ejercicio se aprueba **por separado**. Cada hoja debe estar numerada y tener el número de orden y L.U. El parcial dura 4 horas.

1) La cantidad de combustible consumida por un avión en un viaje dado depende en gran parte de la resistencia que ofrece el aire a la aeronave durante el trayecto. Por ello, es de interés calcular la ruta que incurra en la menor resistencia posible. En este ejemplo simplificado, un avión debe realizar un viaje de N minutos entre dos ciudades. Si bien el curso está prefijado, el avión puede variar la altitud a la que viaja dentro de H bandas posibles numeradas de 0 a $H-1$. Se tiene un estimativo de la resistencia que provocará viajar durante el minuto n en la banda de altitud h, que por simplicidad podemos suponer que tenemos en forma de una tabla R donde $R[i,j]$ es un valor natural que representa la resistencia al aire esperada en el minuto i de vuelo si se está en la banda de altitud j. Para moverse entre dos bandas de altitud, el avión debe pasar por todas las bandas intermedias. Pasar de una banda de altitud a una adyacente (da igual si es subiendo o bajando) requiere realizar una maniobra que dura 3 minutos, cuya resistencia se estima como la del minuto de salida en la banda de salida más el máximo entre las resistencias en ambas bandas durante los dos minutos siguientes, es decir, si se realiza la maniobra entre la banda X y la banda $X+1$ desde el minuto 1 al minuto 4, la resistencia al aire será la del minuto 1 en la banda X más el máximo entre la resistencia en la banda X y en la banda $X+1$ en el minuto 2 más el máximo de la resistencia entre la banda X y la banda $X+1$ en el minuto 3. Por ejemplo, para un viaje de 10 minutos con la siguiente tabla de resistencias R,

		minuto									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	7	7	7	6	6	7	6	6	7	6
banda	1	6	5	4	3	4	3	4	4	4	4
	0	3	5	5	5	5	5	5	3	2	2

podemos considerar la resistencia del camino que se encuentra saliendo de la banda 0 y subiendo en el minuto 0, luego pasando los minutos 3 y 4 en la banda 1, volviendo a bajar a la banda 0 en el minuto 5 y permaneciendo allí. En ese caso, la resistencia total es

$$13 + 3 + 4 + 12 + 2 + 2 = 36$$

Donde el término de valor 13 se calcula como $R[0,0] + \max\{R[1,0], R[1,1]\} + \max\{R[2,0], R[2,1]\}$ y el 12 como $R[5,1] + \max\{R[6,0], R[6,1]\} + \max\{R[7,0], R[7,1]\}$.

Se desea conocer cuál es la mínima resistencia total posible para el vuelo programado, conociendo que al inicio del viaje y al final se debe estar en la banda de altura 0. En el ejemplo mostrado, el camino presentado es óptimo.

a) Definir en forma recursiva la función $f_R \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f_R(n,h)$ representa la mínima resistencia de aire total estimada que puede afrontar un avión desde el minuto 0 hasta el minuto n del vuelo proyectado, si al minuto 0 estaba en la banda de altitud 0 y en el momento n se encuentra en la banda h. Indicar qué llamado(s) hay que hacer a esta función para resolver el problema. **Importante:** acompañen a la definición recursiva con una explicación en castellano.

b) Argumentar en qué casos f_R posee la propiedad de superposición de subproblemas.

c) Definir un algoritmo *top-down* para calcular $f_R(n,h)$ indicando claramente las estructuras de datos utilizadas y la complejidad resultante. Escribir el (pseudo-)código del algoritmo. ¿Es la complejidad obtenida polinomial?

d) Sin modificar el algoritmo anterior, pero suponiendo que ya fue ejecutado, explicar cómo determinar las bandas de alturas en las que debe viajar el avión para alcanzar la resistencia mínima calculada.

[1]Incluyendo esta hoja.

Criterio de aprobación: La función descripta en el inciso a) debe ser correcta y estar adecuadamente justificada, y la complejidad temporal del algoritmo resultante para computar $f_R(n, h)$ en el inciso c) debe ser $O(NH)$ (y también estar justificada).

2) Tras meses de lento y premeditado desarrollo, los anfibios que croan entre los pabellones 0 y 1 están listos para atacar. Inteligentemente, se predisponen a dañar el principal y más importante bien de la humanidad: La Internet.

   Francisco es un investigador del pabellón 0, y conoce con precisión la disposición de los cables de Ethernet que proveen de conexión a todo el edificio. La misma se describe con un conjunto de computadoras S y un conjunto de cables C, cada uno conectando bidireccionalmente un par de computadoras. Entre las computadoras hay dos importantes: la **central** s_c (que provee de internet a todas las demás) y la de Francisco s_f. Naturalmente, la red está armada de tal forma que todas las computadoras tienen internet (es decir, pueden conectarse con la computadora central mediante una secuencia de cables).

   Debemos ayudar a Francisco a prepararse para la batalla. Él nos informa que los anfibios se están organizando para despedazar uno de los cables esta misma noche (mas no sabe cuál).

   a) Dar un algoritmo de complejidad temporal $O(|C|)$ que indique si es posible que Francisco no tenga Internet cuando llegue mañana por la mañana a su oficina. Justificar su correctitud y complejidad.

   Un subconjunto $A \subseteq S$ de las computadoras pertenecen a lxs amigxs de Francisco. En principio, podría pasar que tras el ataque de los anfibios **unx** de ellxs quede incomunicado de todo el resto[2]. Francisco quiere identificar a todxs lxs amigxs que se encuentran en esta delicada situación.

   b) Dar un algoritmo de complejidad temporal $O(|C|)$ que indique qué amigxs pueden ser *aisladxs* por el ataque de los anfibios, y justificar su correctitud y complejidad. Un amigx queda *aisladx* si no puede comunicarse con ningún otrx luego del ataque.

   Por último, Francisco quiere entender cómo le va a afectar el ataque a su *distancia de conexión*. Podemos considerar que la distancia de conexión de Francisco es simplemente la cantidad de computadoras que tiene que atravesar para llegar al nodo central s_c.

   c) Dar un algoritmo de complejidad temporal $O(|C|)$ que indique si es posible que tras el ataque de los anfibios la *distancia de conexión* de Francisco se vea incrementada. Justificar su correctitud y complejidad.

   Criterio de aprobación: Por lo menos 2 de los incisos tienen que estar bien resueltos.

3) Siguiendo las crónicas de la Batalla de los Anfibios, Francisco se dispone a analizar el impacto en el ancho de banda del ataque de los batracios. Se cuenta con los mismos datos que en el ejercicio 2: el conjunto de computadoras S, el de cables bidireccionales C, la computadora central s_c y el conjunto de amigxs $A \subseteq S$. Igual que antes, la red está dispuesta de tal forma que toda computadora puede alcanzar a la central mediante una secuencia de cables.

   Francisco averiguó el ancho de banda $w(c)$ de cada cable $c \in C$. Dada una secuencia de computadoras conectadas $s_1 s_2 \dots s_k$, se define el ancho de banda de la conexión como el mínimo de los anchos de banda $w(s_i s_{i+1})$ para $1 \leq i < k$. El ancho de banda entre dos computadoras s_i y s_j se denota como $bw(s_i, s_j)$, y se define como el máximo valor que puede tomar el ancho de banda considerando todas las secuencias de cables que conectan s_i y s_j.

   a) Dar un algoritmo con complejidad temporal $O(|C| \log |S|)$ que indique cuál es el menor ancho de banda entre las computadoras de lxs amigxs de Francisco y la computadora central. Es decir, el valor $\min_{s \in A}\{bw(s, s_c)\}$. Justificar su correctitud y complejidad.

   Como ya sabemos por el ejercicio anterior, los anfibios se disponen a romper uno de los cables esta misma noche, y Francisco busca entender cómo va a afectar este ataque en el ancho de banda de sus amigxs.

   b) Sea G un grafo conexo, T un AGM de G y e un eje de T. Sean T_1 y T_2 los dos subárboles disconexos que se obtienen al remover e del árbol T, y sea f alguna arista de menor peso que une a T_1 y a T_2 en G que es distinta a e. Probar que $T_1 \cup T_2 \cup \{f\}$ es un AGM de $G \setminus \{e\}$.

   c) Dar un algoritmo de complejidad temporal $O(|S||C|)$ que calcule el menor valor que puede alcanzar el ancho de banda de las computadoras de lxs amigxs de Francisco con la computadora central tras el ataque. Justificar su correctitud y complejidad.

   Criterio de aprobación: Por lo menos dos de los incisos tienen que estar bien resueltos.

[2]Para que lxs amigxs se comuniquen entre sí no hace falta que se conecten a la computadora central, sino que alcanza con que usen una secuencia de cables de Ethernet cualquiera.