

Resumen Flujo en Redes

Tomás F Melli

November 2024

Índice

1	Introducción	2
2	Problema de Flujo Máximo	3
2.1	Corte Mínimo	3
2.1.1	Capacidad de un Corte	4
2.1.2	Problema de Corte Mínimo	5
2.2	Problema DUAL (relación entre Flujo Máximo y Corte Mínimo)	6
2.3	Red Residual	7
3	Camino de Aumento	8
3.1	Delta del Camino de Aumento	9
4	Algortimo de Ford Fulkerson	11
4.1	Proposiciones	20
4.2	Análisis de Complejidad	20
4.3	Código C++	21
5	Algoritmo de Edmonds y Karp	22
5.1	Análisis de Complejidad	22
5.2	Código C++	23
6	Matching Máximo en Grafos Bipartitos	24
7	Caminos Disjuntos	27
7.1	Modelo	27
7.1.1	Representación	27
7.1.2	Demostración	28
7.2	Estrategias	29
7.2.1	Nodo Fantasma (Múltiples Sumideros)	29
7.2.2	Limitar Flujo en cierto Vértice	30

1 Introducción

Muchos sistemas tienen limitaciones de capacidad y estructuras de conexión. De ahí nace la necesidad de modelar una solución en la que cierto recurso se mueva eficientemente de un punto a otro. A partir de esto surge el concepto de **red**. Una red es **un grafo orientado conexo que tiene dos vértices distinguidos, una fuente s con grado de salida positivo y un sumidero t con grado de entrada positivo**:

Sea $N = (V, E)$ y $s \in V$ tal que $\deg^+(s) > 0$ y $t \in V$ tal que $\deg^-(t) > 0$.

Dicho esto, la idea es modelar que desde cierto vértice (fuente) se mueve el recurso y atraviesa toda una estructura de conexiones hasta llegar a destino (el sumidero). Existe una limitación que es la **capacidad** que tiene cierta arista para transportar el recurso, y se define la **función de capacidad** :

Sea $c : E \rightarrow \mathbb{Z}^+$ una función de capacidad que asigna a cada arista una capacidad positiva.

El valor de **flujo** es esa cantidad de recurso que circula por cierta red y se define la función de **flujo factible** :

Sea $x : E \rightarrow \mathbb{Z}^+$ un flujo factible en la red, donde $x(e)$ representa el flujo en la arista $e \in E$.

$$0 \leq x(e) \leq c(e) \quad \text{para toda arista } e \in E$$

Es decir, que para poder considerar ese valor de flujo de la red factible, se tienen que cumplir dos condiciones, que el flujo que circula por cierta arista no sea mayor a la capacidad para transportar ese recurso y que cumpla con que:

En el medio **no se pierde recurso**, es lo que llamamos **ley de conservación de flujo** :

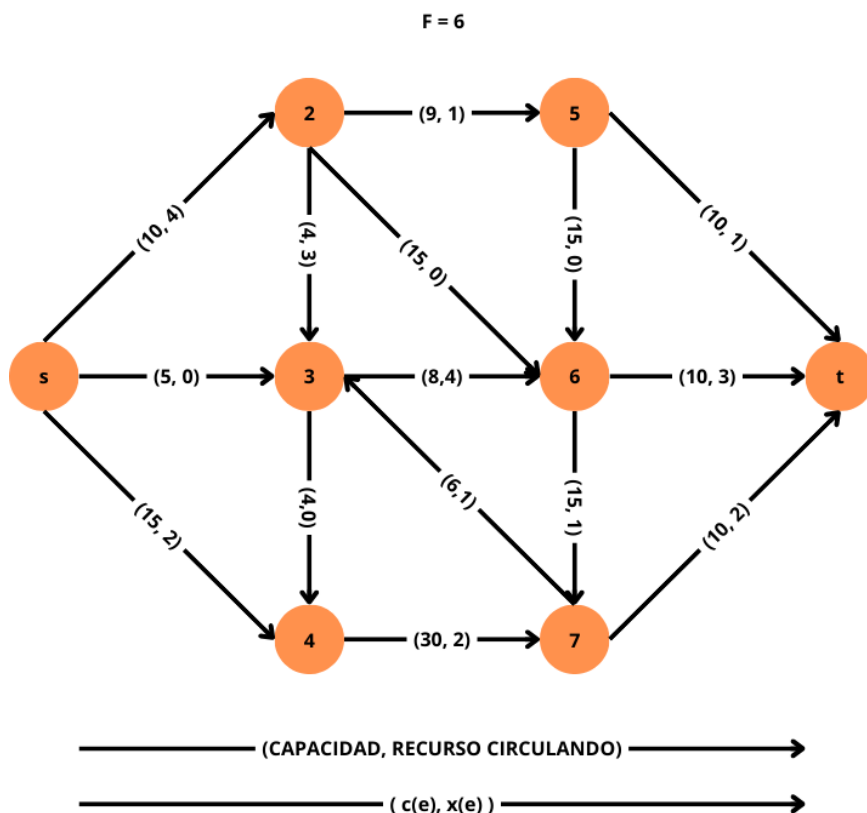
$$\forall v_i \in V - \{s, t\}, \quad \sum_{u \in N^-(v)} x(v \rightarrow u) = \sum_{u \in N^+(v)} x(u \rightarrow v)$$

Es decir, que para todo vértice que no es ni fuente ni sumidero, se va a cumplir que si sumamos todo el recurso que ingresa (que se representa como la sumatoria de los valores de flujo de las aristas que llegan a cierto vértice) esa suma, nos va a dar lo mismo que todo el recurso que egresa de cierto vértice (que la representamos con la suma de todos los valores de flujo de las aristas que salen de cierto vértice). ****Aclaración** : vale que del sumidero salgan arcos, en el ejemplo no se observará, pero existe la posibilidad que suceda. Lo que debe valer siempre es que el grado de entrada sea positivo para el sumidero.

A nosotros nos va a interesar **cuánto de este recurso está siendo transportado por la red desde la fuente hacia el sumidero**. Esta magnitud la representamos con la **función de flujo** que representa el **flujo neto desde la fuente hacia el sumidero** :

$$F = \sum_{e \in N^+(t)} x(e) - \sum_{e \in N^-(t)} x(e)$$

****Es lo mismo hacerlo sobre t que sobre s .**



2 Problema de Flujo Máximo

El problema de flujo máximo consiste en, dada una red $N = (V, E)$ con capacidades en los arcos y dos vértices específicos, una fuente s , y un sumidero t , **determinar el flujo factible de valor máximo F que se puede enviar de s a t** . En el ejemplo vimos que $F = 6$, pero es realmente 6 la máxima cantidad de recurso que puede ser enviada desde s a t respetando las capacidades de los arcos (es decir, cumpliendo con la propiedad de flujo factible)?

2.1 Corte Mínimo

Un **corte** en una red N es un subconjunto $S \subseteq V \setminus \{t\}$, tal que $s \in S$. Este subconjunto tiene a la fuente pero no al sumidero. Es un subconjunto de vértices que desconectan a s y a t . Se da la particularidad que los vértices que pertenecen al corte tienen como vecinos a vértices que pertenecen a T , el subconjunto que contiene al sumidero.

Dados $S, T \subseteq V$ llamaremos $ST = \{(u \rightarrow v) \in E : u \in S \text{ y } v \in T\}$

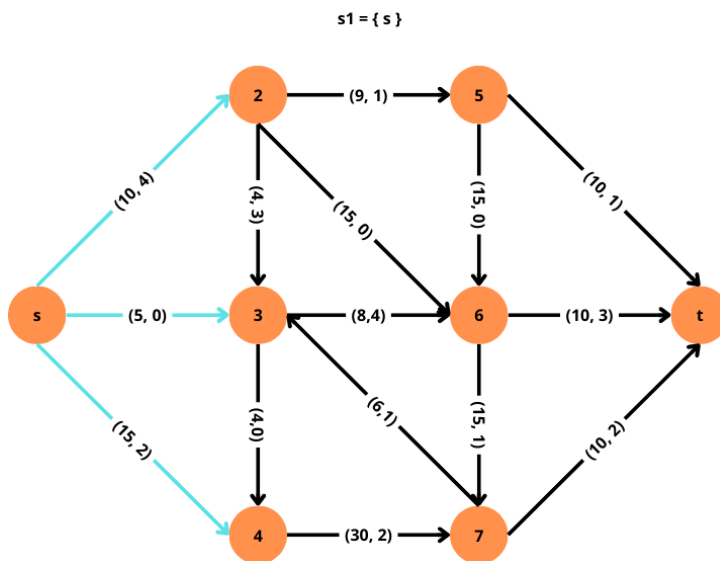
Es decir, la notación ST quiere decir que : dados dos conjuntos de vértices, **ST es el conjunto de arcos que salen de algún vértice de S y entran en algún vértice de T** .

Existe una relación entre Flujo Máximo y Corte Mínimo, esta es que, dado un flujo factible y S un corte, entonces el valor de flujo factible es igual al flujo que esta pasando sobre los arcos que salen de S y van a \bar{S} (cruzan la frontera de S) menos el flujo de los arcos que van de \bar{S} a S , dado cualquier flujo factible y cualquier corte.

Proposición : Sea x un flujo factible definido en una red N con valor F y sea S un corte, entonces

$$F = \sum_{e \in S\bar{S}} x(e) - \sum_{e \in \bar{S}S} x(e) \quad \text{donde} \quad \bar{S} = V \setminus S.$$

Ejemplos :

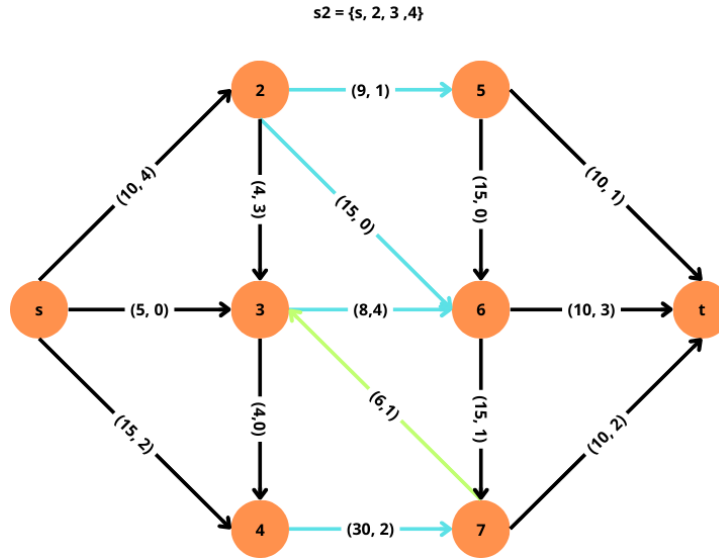


En este caso, la suma de recurso que sale del corte - la suma de recurso que entra al corte es :

$$F = \sum_{e \in S\bar{S}} x(e) - \sum_{e \in \bar{S}S} x(e)$$

$$F = 6 - 0$$

$$F = 6$$

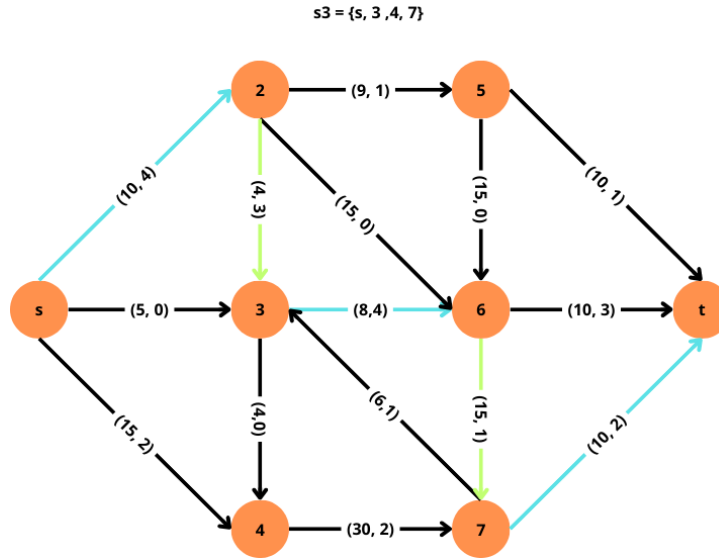


En este caso, la suma de recurso que sale del corte (celestes) - la suma de recurso que entra al corte (verde) es :

$$F = \sum_{e \in S\bar{S}} x(e) - \sum_{e \in \bar{S}S} x(e)$$

$$F = 7 - 1$$

$$F = 6$$



En este caso, la suma de recurso que sale del corte (celestes) - la suma de recurso que entra al corte (verde) es :

$$F = \sum_{e \in S\bar{S}} x(e) - \sum_{e \in \bar{S}S} x(e)$$

$$F = 10 - 4$$

$$F = 6$$

2.1.1 Capacidad de un Corte

Dada una red $N = (V, X)$ con función de capacidad c , la capacidad de un corte S se define como:

$$c(S) = \sum_{e \in S \setminus \bar{S}} c(e).$$

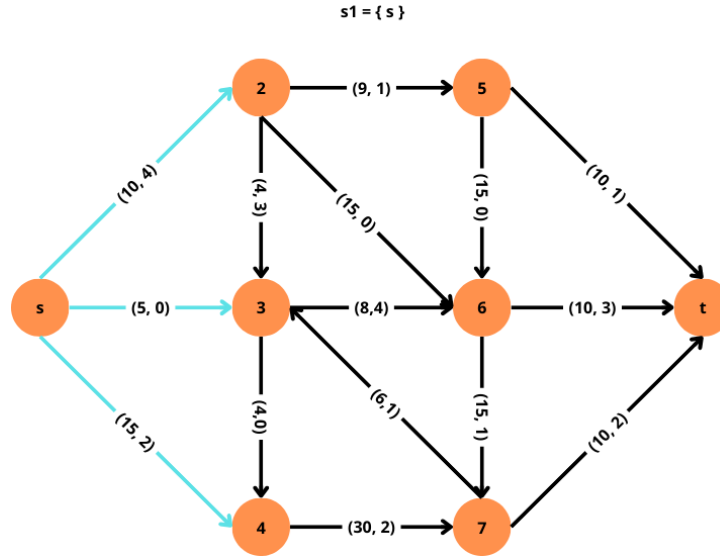
Es decir, la capacidad de un Corte es la suma de las capacidades de los arcos **que salen del corte**.

2.1.2 Problema de Corte Mínimo

El problema de corte mínimo consiste en, dada una red $N = (V, X)$ con función de capacidades en los arcos c , determinar un corte de capacidad mínima. Es decir, encontrar S , corte de N , tal que:

$$c(S) = \min\{c(\bar{S}) \mid \bar{S} \text{ es un corte de } N\}.$$

Miremos los ejemplos de las redes anteriores :

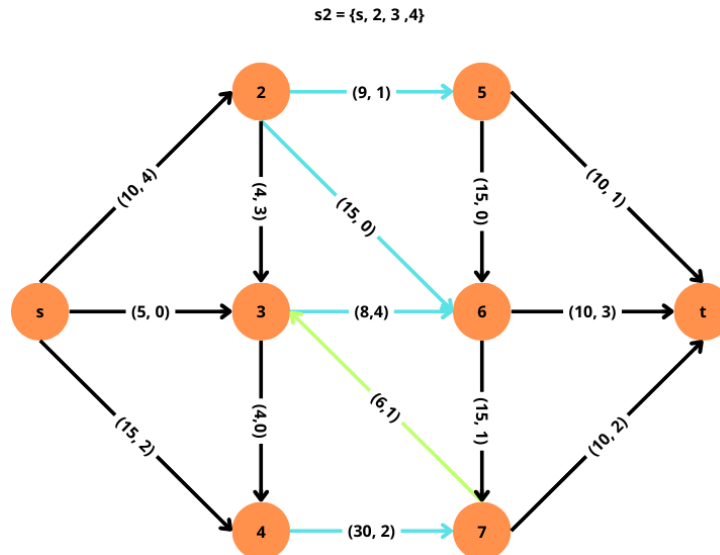


En este caso, la capacidad del corte es :

$$c(s1) = \sum_{e \in S \setminus \bar{S}} c(e).$$

$$c(s1) = 10 + 5 + 15$$

$$c(s1) = 30$$

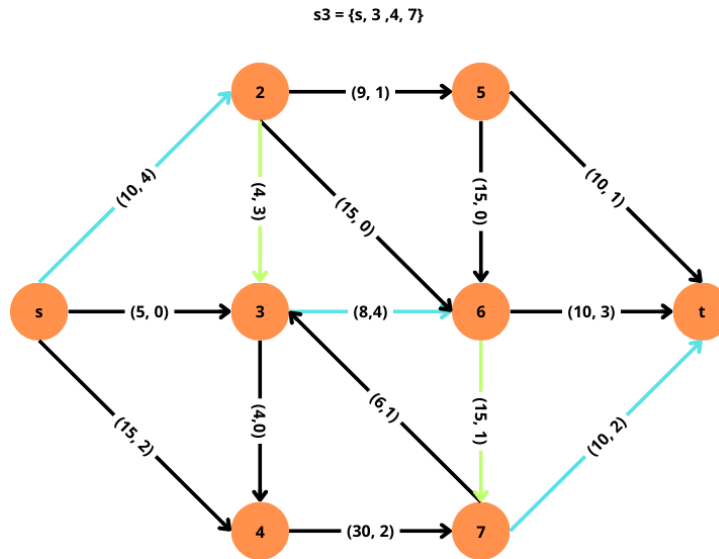


En este caso, la capacidad del corte es :

$$c(s2) = \sum_{e \in S \setminus \bar{S}} c(e).$$

$$c(s2) = 9 + 15 + 8 + 30$$

$$c(s2) = 62$$



En este caso, la capacidad del corte es :

$$c(s3) = \sum_{e \in S \setminus \bar{S}} c(e).$$

$$c(s3) = 10 + 8 + 10$$

$$c(s3) = 28$$

Habiendo visto esto, el **problema de corte mínimo** es un problema de optimización combinatoria.

2.2 Problema DUAL (relación entre Flujo Máximo y Corte Mínimo)

Dada una red $N = (V, X)$ con función de capacidad c , una función de flujo con valor F y un corte S , se cumple que:

$$F \leq c(S).$$

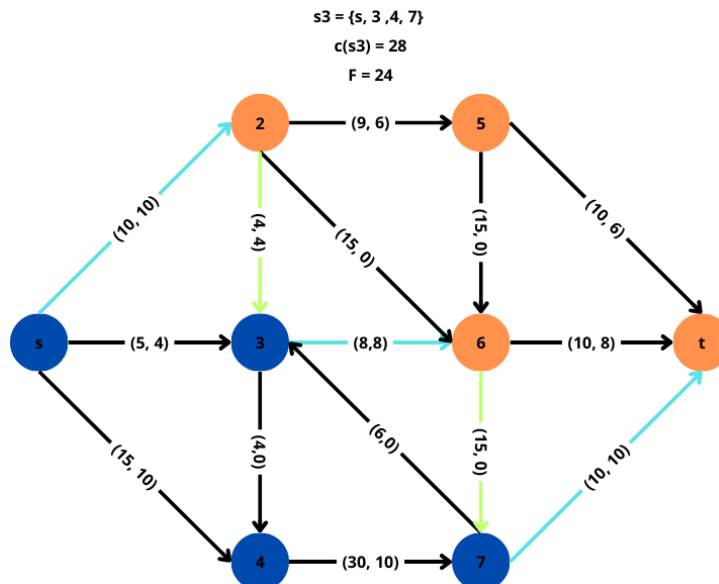
Si F es un flujo factible cualquiera y S es un corte cualquiera, siempre vale que el valor del flujo es menor o igual que la capacidad del corte.

A partir de esto, si se cumple la igualdad, es decir $F = c(S)$ donde F es el valor de un flujo f y S un corte en una red N :

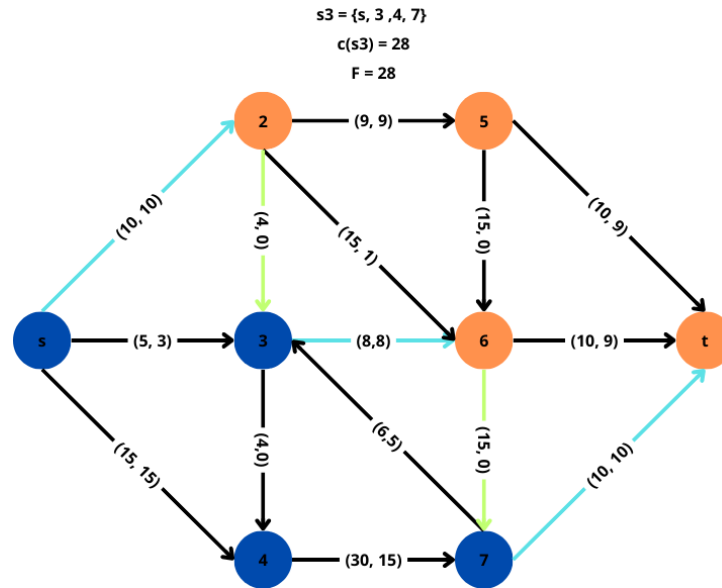
- f define un **flujo máximo**.
- S es un **corte de capacidad mínima**.

Esto se conoce como **Certificado de Optimalidad**, es un corolario del Lema anterior. Siempre voy a poder encontrar un flujo y un corte en donde valga la igualdad. Dijimos que se trata de un problema DUAL porque son dos problemas : uno de maximización (el del flujo) y uno de minimización (el de la capacidad del corte) y el óptimo de ambos es el mismo valor.

Veamos un ejemplo :



Para este ejemplo, vemos que el Corte tiene capacidad 28 y el valor de flujo $(6 + 8 + 10)$ es 24. Es un valor de flujo factible, ya que cumple las propiedades vistas en Introducción 1



En este caso, el valor de flujo es factible y cumple que $F = c(S)$ lo cual, por el **certificado de optimalidad** podemos afirmar que el corte S es un corte de capacidad mínima y que el valor de flujo es de valor máximo.

2.3 Red Residual

Dada una red $N = (V, X)$ con función de capacidad c y un flujo factible x :

- Definimos la red residual, $R(N, x) = (V, X_R)$, donde para todo $(v \rightarrow w) \in X$:
 - $(v \rightarrow w) \in X_R$ si $x((v \rightarrow w)) < c((v \rightarrow w))$,
 - $(w \rightarrow v) \in X_R$ si $x((v \rightarrow w)) > 0$.

Definimos una red que tiene **los mismos vértices que la original, pero tiene diferentes arcos**. Estos últimos son de **dos tipos**.

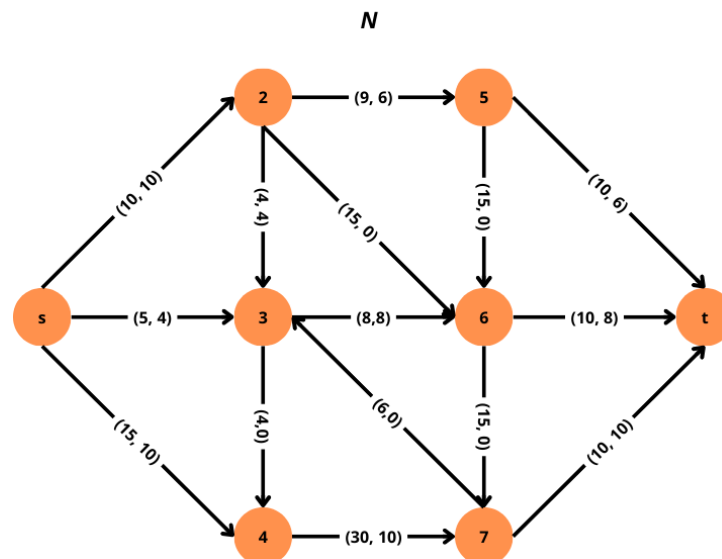
Si el arco **no está saturado** (la cantidad de flujo que viaja por ese arco es menor estricta que su capacidad), estará en la red residual.

Si hay flujo viajando por un arco, es decir **la cantidad de flujo que atraviesa cierto arco es positiva**, entonces, en la red residual ponemos el arco **en la dirección opuesta**.

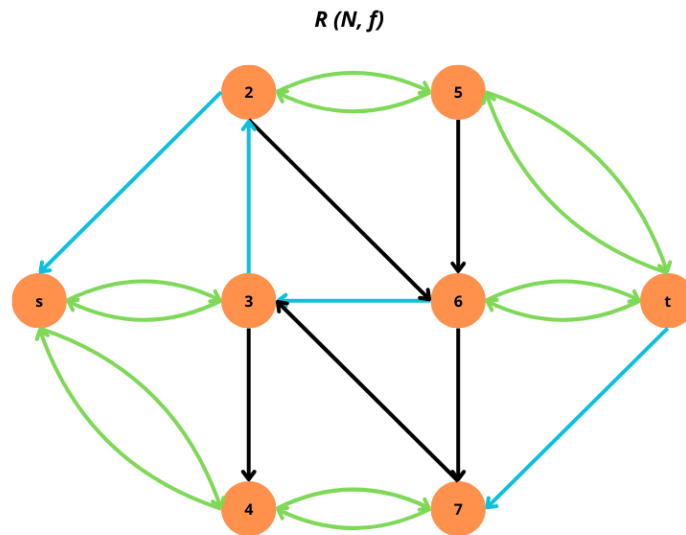
Definimos entonces la **red residual de una red con respecto a un flujo**.

La idea de poner los arcos en el sentido inverso es que disminuye el flujo que pasa por ahí.

Veamos : Sea la Red N :



Su red residual será :

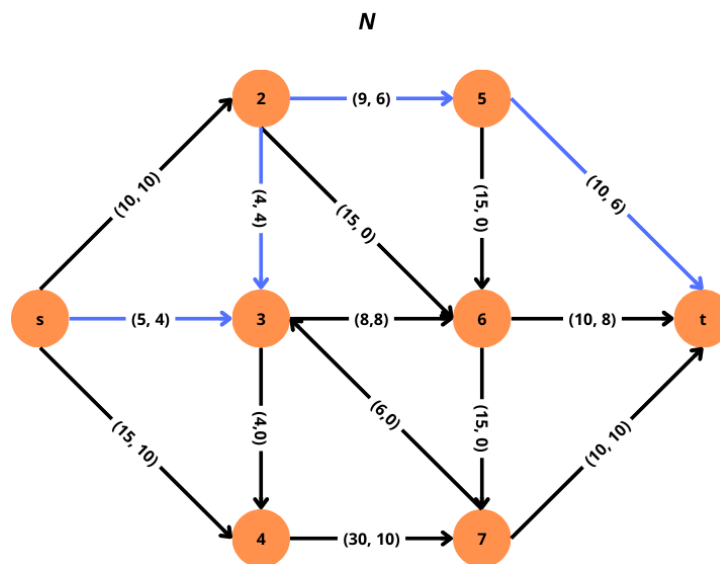


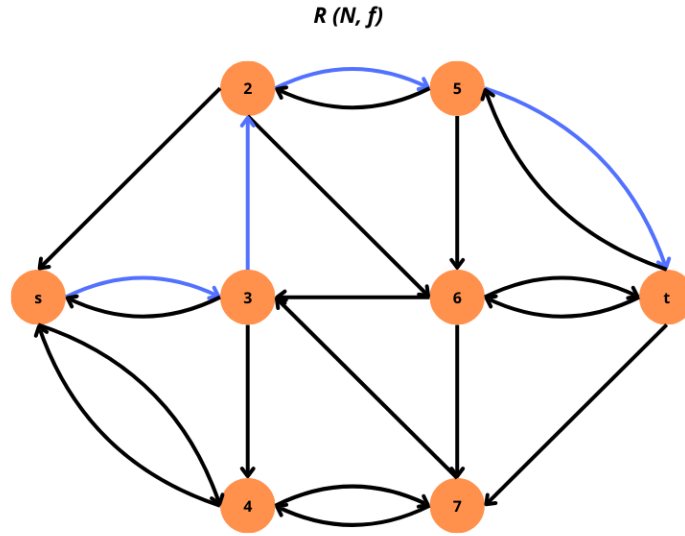
Veamos los distintos colores :

- **Negro** : Si el arco en la red residual es de color negro, es porque cumple la primer condición de 2.3 . Por ello, se mantiene tal cuál está en N . Observar que son los arcos que no transportan recurso alguno.
- **Verde** : Si el arco **no está saturado y transporta recurso en la red N** entonces en la red residual agregamos el arco en el sentido contrario y lo notamos con el color verde. Observar que cumple los dos enunciados
- **Celeste** : Si el arco **está saturado en la red N** entonces no cumple con la primer propiedad, pero sí cumple que transporta recurso. Por ello, le invertimos el sentido y lo marcamos en celeste.

3 Camino de Aumento

Cualquier camino orientado en la red residual de s a t en $R(N, x)$. Un camino sobre el cual **puedo aumentar el flujo que está circulando**. Tenemos la red, un flujo factible, construimos la red residual y buscamos un Camino de aumento en ella :





Algorithm 1 CAMINO AUMENTO(N, f, R)

Entrada: $N = (V, X)$, flujo f , red residual $R(N, x) = (V, X_R)$

Salida: P camino de aumento o S corte (que será mínimo)

```

1:  $S \leftarrow \{s\}$ 
2: while  $t \notin S$  y  $\exists (v \rightarrow w) \in X_R$  tal que  $v \in S$  y  $w \notin S$  do
3:    $\text{ant}[w] \leftarrow v$ 
4:    $S \leftarrow S \cup \{w\}$ 
5: end while
6: if  $t \notin S$  then
7:   return  $S$  corte de  $N$ 
8: else
9:   Reconstruir  $P$  entre  $s$  y  $t$  usando  $\text{ant}$  a partir de  $t$ 
10:  return  $P$  camino de aumento
11: end if

```

Este algoritmo va a iterar sobre los arcos que tienen como cola a vértices que pertenecen a S y como cabeza a vértices de \bar{S} . La idea es ir guardando **padres** y **construyendo S**. Puede suceder que en la búsqueda se encuentre a t (sumidero), en dicho caso, queremos **reconstruir un camino de s (fuente) a t** y lo logramos con padres. Caso contrario, no logramos dar con el sumidero, pero nos queda definido S **un corte de N** .

3.1 Delta del Camino de Aumento

Dada una red $N = (V, X)$ con función de capacidad c , un flujo factible x y un camino de aumento P en $R(N, x)$:

- Para cada arco $(v \rightarrow w)$ de P , definimos:

$$\Delta((v \rightarrow w)) = \begin{cases} c((v \rightarrow w)) - x((v \rightarrow w)) & \text{si } (v \rightarrow w) \in X, \\ x((w \rightarrow v)) & \text{si } (w \rightarrow v) \in X. \end{cases}$$

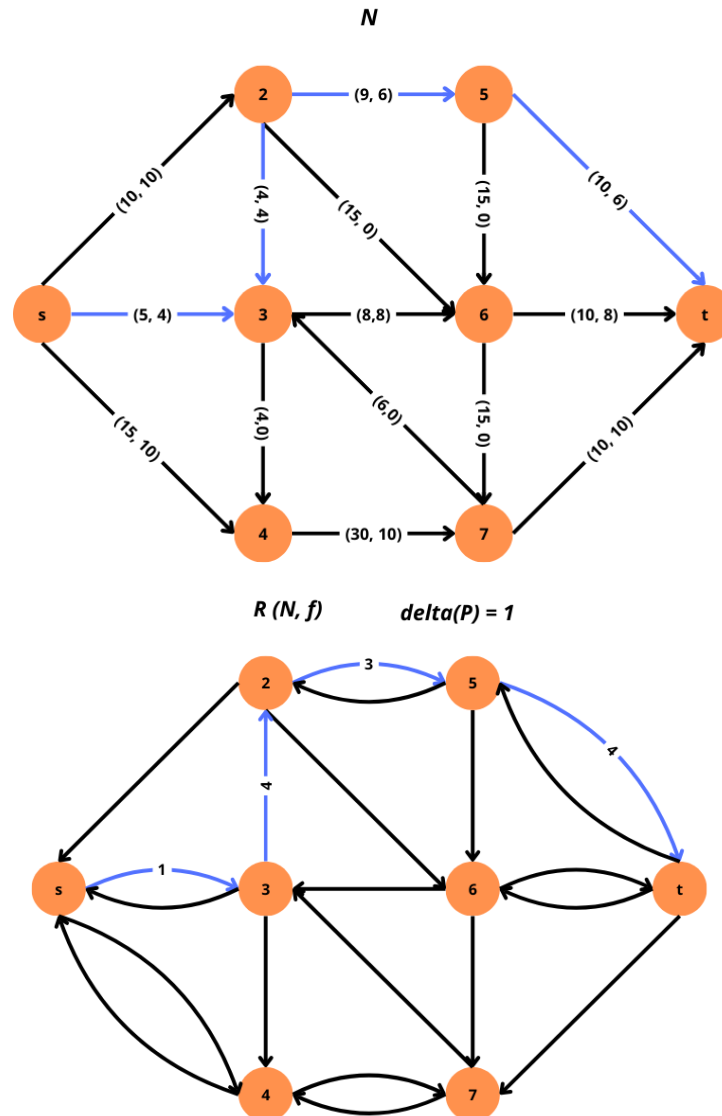
-

$$\Delta(P) = \min_{e \in P} \{\Delta(e)\}.$$

La idea es definir un **delta** que nos diga **en cuánto puedo aumentar el flujo sobre ese camino de aumento**. Para lograrlo, **para cada arco del camino de aumento** :

- Si el arco es $(v \rightarrow w)$ y en la red original es $(v \rightarrow w)$, en cuánto lo voy a poder aumentar al flujo que circula por ese arco ? A lo sumo en la diferencia entre la capacidad y el flujo. (Más no pues dejaría de ser factible)
- Si el arco fue invertido, es decir, en la red original estaba $(w \rightarrow v)$, en cuánto voy a poder disminuirlo (esto es porque lo estamos usando al revés en el camino de aumento) y entonces, lo máximo que lo podemos disminuir es el flujo que está circulando a través de este arco.

Por qué necesito un Delta del camino ? Porque tenemos que asegurar que se cumpla la ley de conservación de flujo.
Ejemplo con lo visto anteriormente:



Hacemos los calculos de los deltas sobre cada arco:

- $(s \rightarrow 3)$ es 1, porque es la diferencia entre la capacidad y el flujo que circula en este momento.
- $(3 \rightarrow 2)$ originalmente estaba al revés (segunda guarda), por ello, va a ser igual al flujo que está pasando, 4.
- $(2 \rightarrow 5)$ 3, capacidad menos flujo
- $(5 \rightarrow t)$ 4, capacidad menos flujo

Habiendo calculado los deltas de las arista concluimos que :

$$\Delta(P) = \min_{e \in P} \{\Delta(e)\}$$

$$\Delta(P) = 1$$

De qué nos sirve esto ? En la red N vamos a :

- $(s \rightarrow 3)$ sumar 1 unidad de
- $(2 \rightarrow 3)$ restar 1 unidad
- $(2 \rightarrow 5)$ sumar 1 unidad
- $(5 \rightarrow t)$ sumar 1 unidad

Proposición: Sea x un flujo definido sobre una red N con valor F y sea P un camino de aumento en $R(N, x)$. Entonces el flujo \bar{x} , definido por:

$$\bar{x}((v \rightarrow w)) = \begin{cases} x((v \rightarrow w)) & \text{si } (v \rightarrow w) \notin P, \\ x((v \rightarrow w)) + \Delta(P) & \text{si } (v \rightarrow w) \in P, \\ x((v \rightarrow w)) - \Delta(P) & \text{si } (w \rightarrow v) \in P, \end{cases}$$

es un flujo factible sobre N con valor $\bar{F} = F + \Delta(P)$.

Es decir, si yo tenía un flujo factible definido sobre una red y un camino de aumento en la red residual de esa red respecto de cierto flujo :

- si para todo arco que no está en el camino de aumento lo dejo igual.
- Si es un arco que en el camino de aumento estaba utilizado en el mismo sentido que el original, le **sumamos** $\Delta(P)$
- Si es un arco que en el camino de aumento estaba utilizado al revés, le **restamos** $\Delta(P)$

Como conclusión, esta proposición nos asegura que el flujo \bar{x} que encuentro con esta cuenta, si f era factible, \bar{x} también es factible y además tiene **mayor valor**. **Cuánto mayor?** El valor que tenía F más el $\Delta(P)$.

Teorema: Sea f un flujo definido sobre una red N . Entonces f es un flujo máximo si y solo si no existe un camino de aumento en $R(N, x)$.

$$f \text{ es un flujo máximo} \iff \text{no existe camino de aumento en } R(N, x).$$

Teorema: Dada una red N , el valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.

$$\text{Valor del flujo máximo} = \text{Capacidad del corte mínimo.}$$

4 Algoritmo de Ford Fulkerson

Algorithm 2 FORDFULKERSON(N)

Entrada: $N = (V, X)$ con función de capacidad c .

Salida: x , flujo máximo.

```

1: Definir un flujo inicial en  $N$  (por ejemplo,  $x(e) \leftarrow 0$  para todo  $e \in X$ ).
2: while exista  $P$ , un camino de aumento en  $R(N, x)$  do
3:   for cada arco  $(v \rightarrow w)$  de  $P$  do
4:     if  $(v \rightarrow w) \in X$  then
5:        $x((v \rightarrow w)) \leftarrow x((v \rightarrow w)) + \Delta(P)$ 
6:     else if  $(w \rightarrow v) \in X$  then
7:        $x((w \rightarrow v)) \leftarrow x((w \rightarrow v)) - \Delta(P)$ 
8:     end if
9:   end for
10: end while
11: return  $f$  flujo máximo.

```

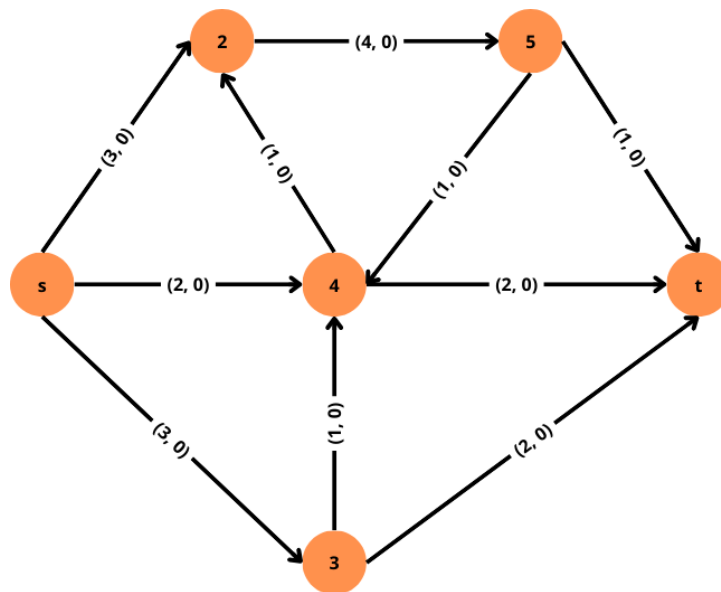
Comenzamos con un flujo factible, si no tengo capacidades minimas podría ser todo cero (a todos los arcos les pongo flujo 0, es factible pues cumple que sea mayor igual que 0 y menor o igual que la capacidad y también la ley de conservación). Mientras exista camino de aumento en la red residual, para cada arco del camino de aumento:

- Si el arco en N está en el mismo sentido que en el camino de aumento, le sumo $\Delta(P)$.
- Si el arco en N está en sentido contrario, le resto $\Delta(P)$

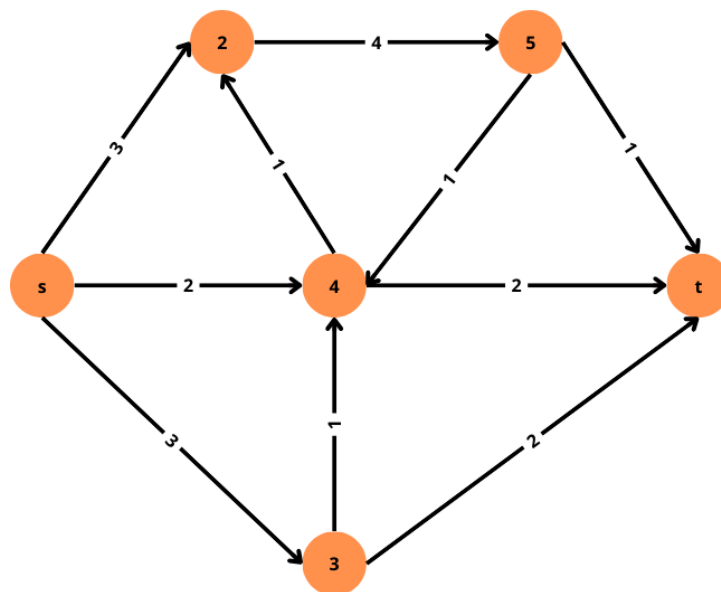
Cuando sale del ciclo, es porque **no hay camino de aumento**, entonces F define un flujo máximo (por lo visto en el teorema anterior). En resumen, busco camino de aumento, modifico el flujo para aumentar el valor y así sucesivamente hasta que no exista camino de aumento.

Veamos esquemáticamente cómo funciona :

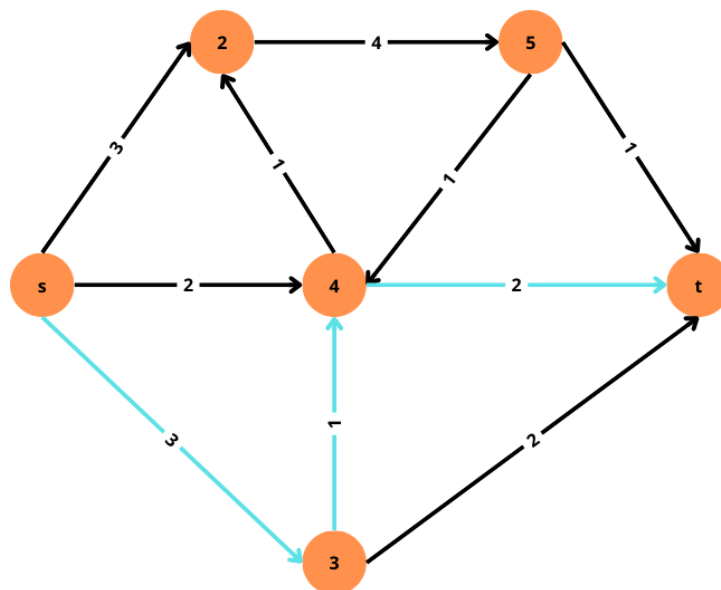
- a) Arrancamos con una red, asignamos el flujo de cada arista con valor cero (flujo factible)



b) Armamos la red residual, que como todos los arcos tienen flujo 0, no va a haber arcos de sentido opuesto



c) Buscamos algún camino de aumento en la red residual



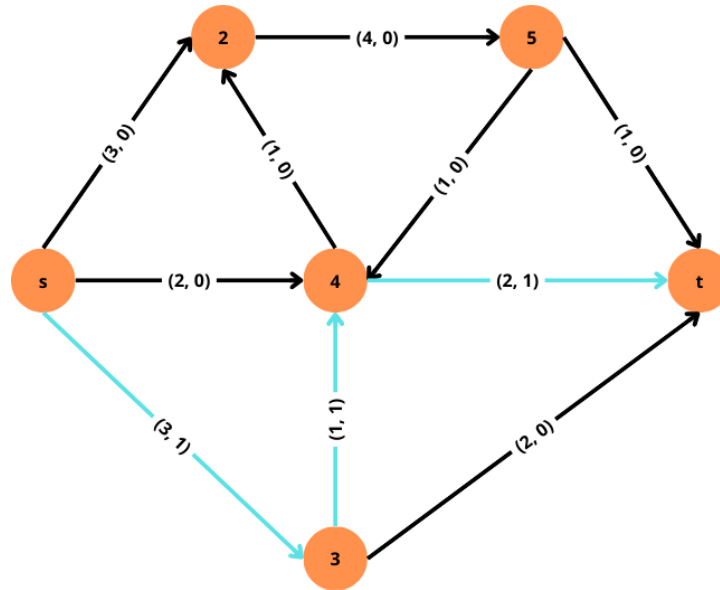
d) Para ese camino de aumento le calculamos el $\Delta(P)$

$$\Delta(P) = \min_{e \in P} \{\Delta(e)\}$$

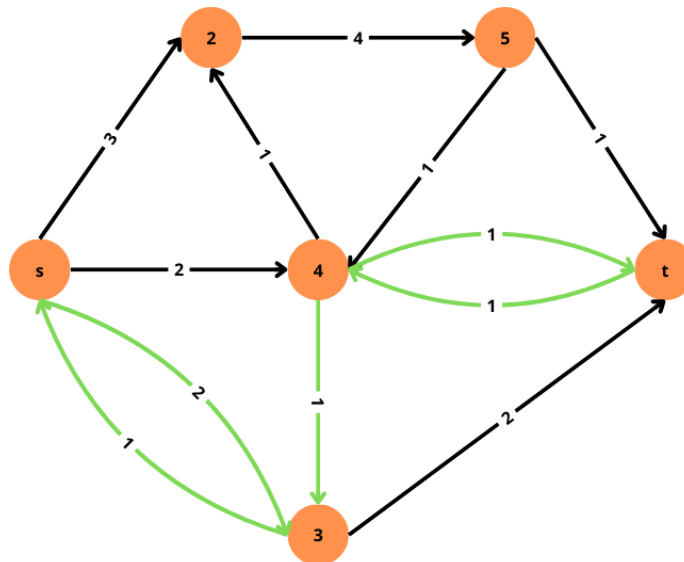
$$\Delta(P) = \min\{3, 1, 2\}$$

$$\Delta(P) = 1$$

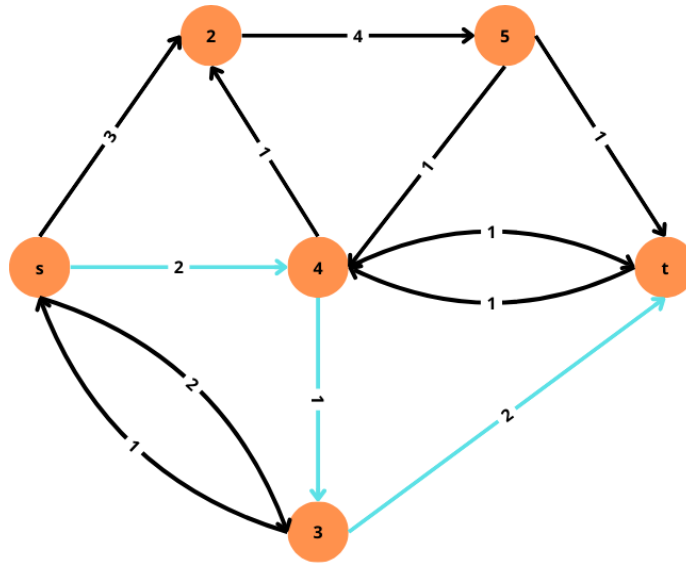
e) Con este $\Delta(P)$ calculado, procedemos a aumentar/restar según corresponda en la red original (en este caso sumamos a todos 1) a los arcos que forman el camino de aumento.



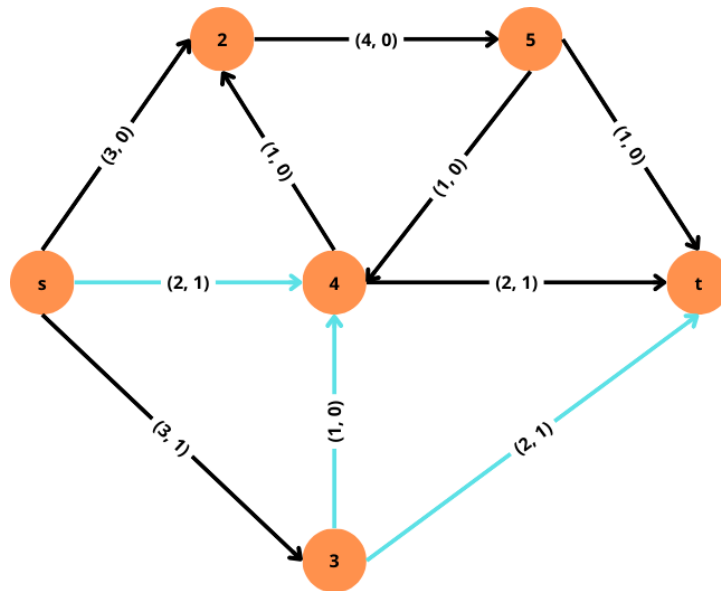
f) Ahora tenemos una **nueva red residual** considerando el nuevo flujo factible (recordar que la red residual es respecto a una red y su flujo factible). Miremos que $(s \rightarrow 3)$ como tiene un valor positivo y no está saturado, en la red residual agregamos $(3 \rightarrow s)$. Para el caso de $(3 \rightarrow 4)$ como está saturado el arco, lo invertimos. Y $(4 \rightarrow t)$ lo mismo que el primero, le agregamos el arco que vuelve $(t \rightarrow 4)$



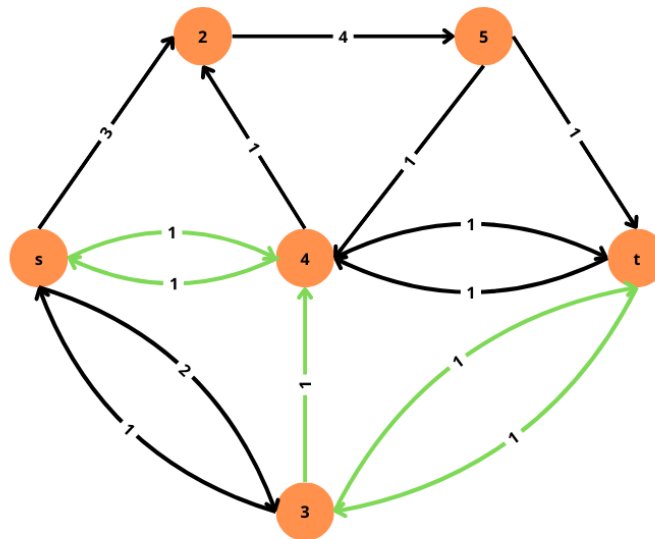
g) Buscamos otro camino de aumento en esta nueva red residual y le tomamos $\Delta(P)$ que es igual a 1.



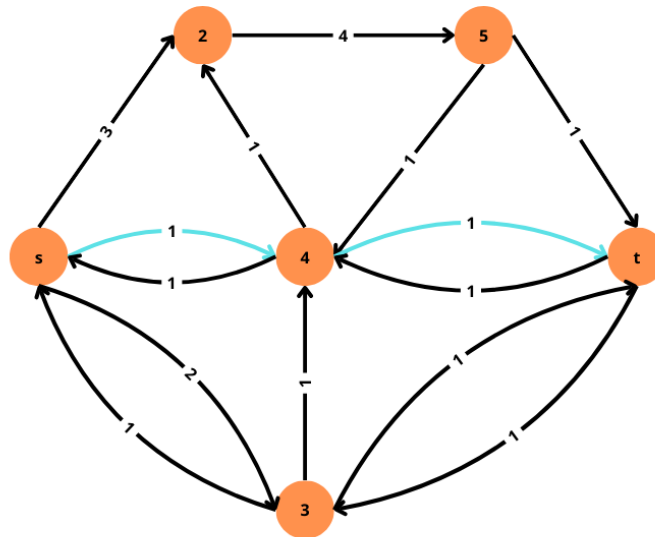
h) Modificamos la red para que en $(s \rightarrow 4)$ aumente en 1 unidad el flujo, le restamos $(3 \rightarrow 4)$ una unidad y finalmente, le sumamos una unidad a $(3 \rightarrow t)$



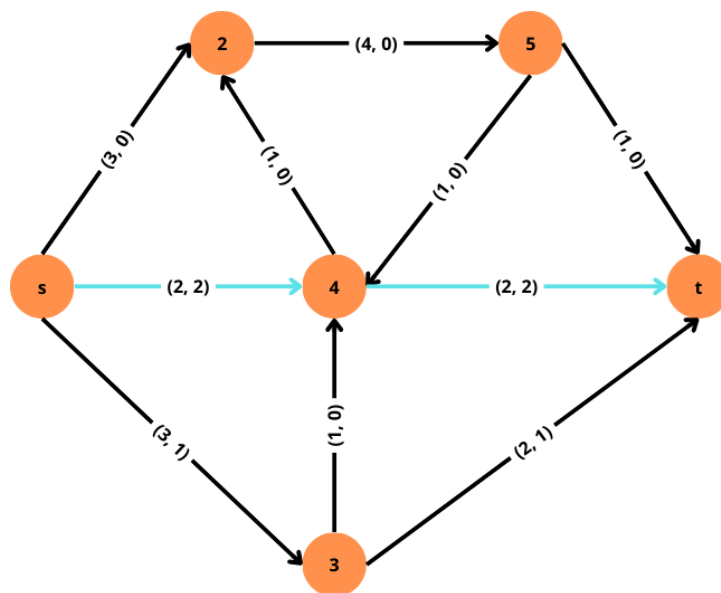
i) La red residual resultante es



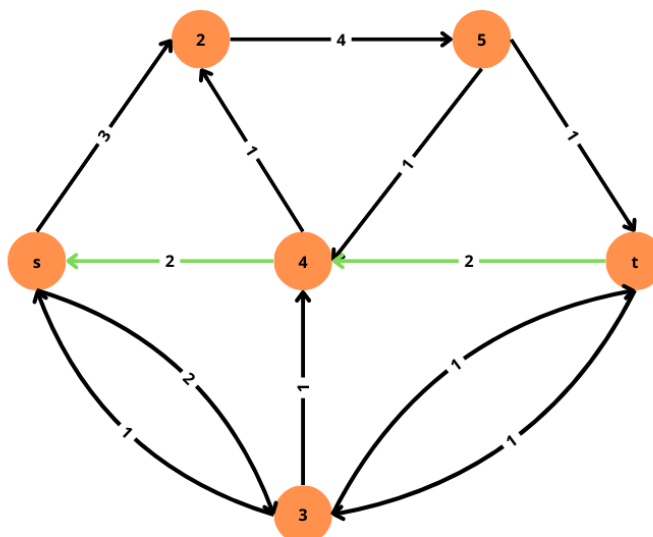
j) Elegimos un nuevo camino de aumento en la red residual



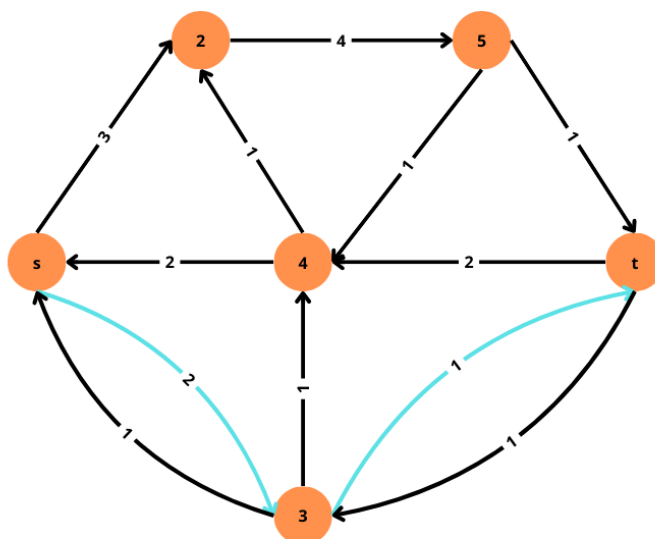
k) Hacemos las modificaciones en la red original con el $\Delta(P)$ igual a 1



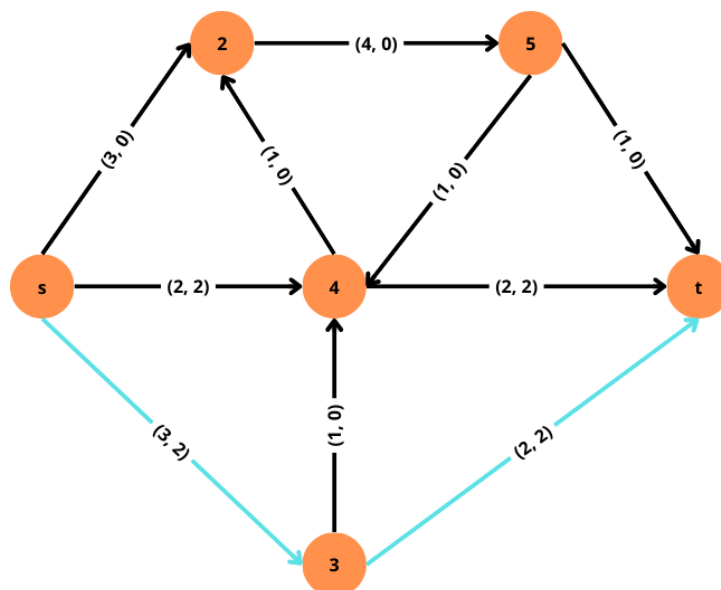
l) Como se saturó $(s \rightarrow 4)$ y $(4 \rightarrow t)$ en la red, nuestra red residual será



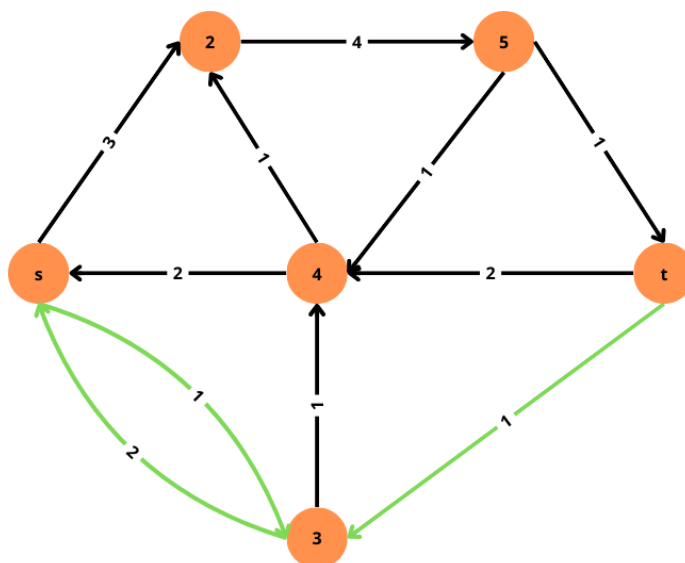
m) Elegimos un nuevo camino de aumento en la red residual



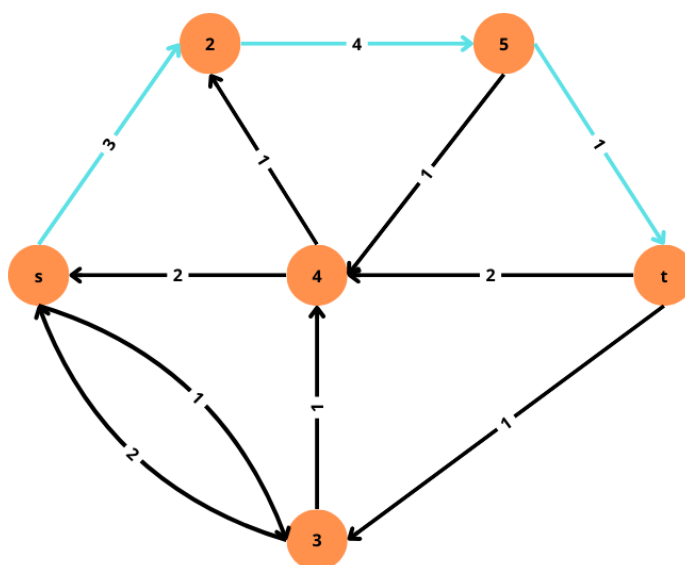
n) Hacemos las modificaciones en la red original con el $\Delta(P)$ igual a 1



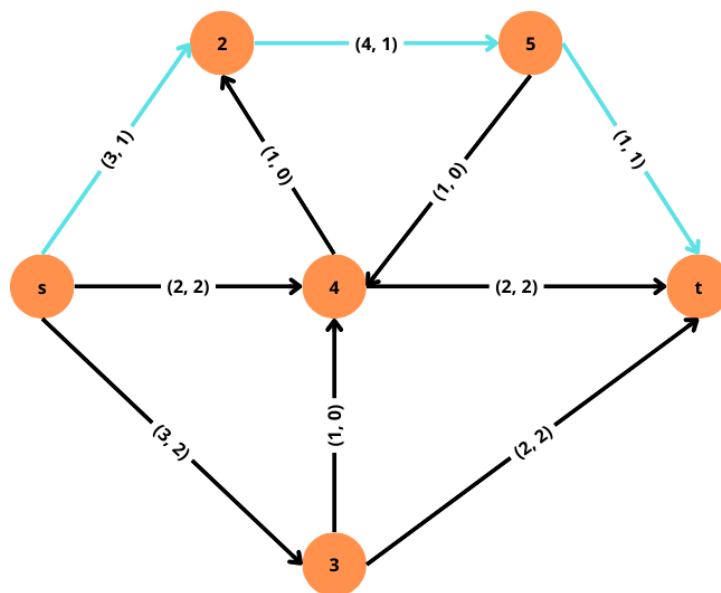
o) La red residual resultante es



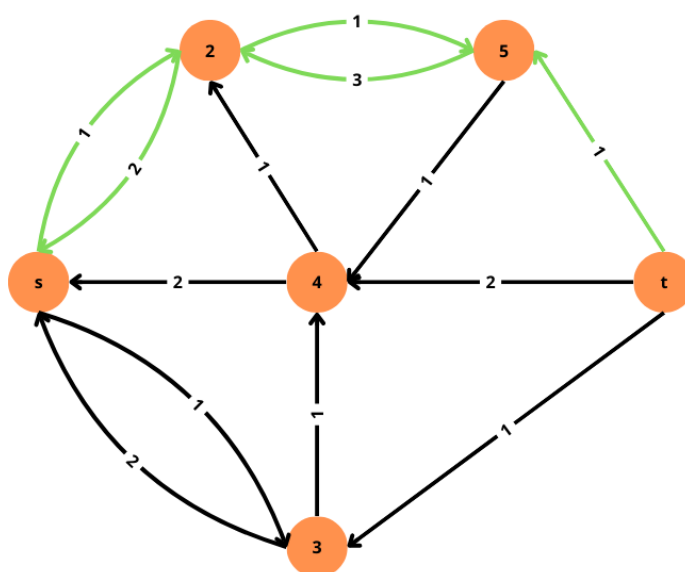
p) Elegimos un nuevo camino de aumento en la red residual



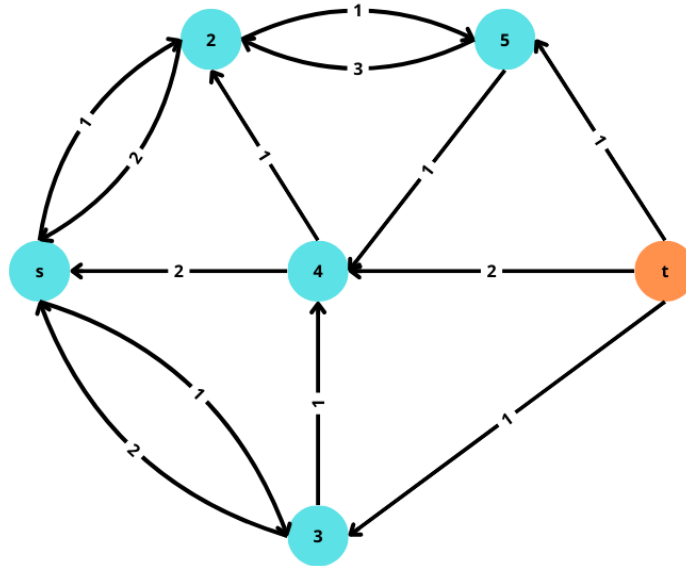
q) Hacemos las modificaciones en la red original con el $\Delta(P)$ igual a 1



r) La red residual resultante es



- s) Y ya vemos que **NO HAY MANERA DE LLEGAR A T**(no tiene arcos de entrada). Ya no tenemos caminos de aumento en la red residual y por tanto, el flujo es **máximo**. El algoritmo devuelve el conjunto S de camino de aumento, que es un CORTE y es de capacidad MÍNIMA. Si miramos los arcos que salen del corte y sumamos sus capacidades = 5 que es el valor del flujo que está pasando y es máximo.



4.1 Proposiciones

Proposición: Si las capacidades de los arcos de la red son enteras, el problema de flujo máximo tiene un flujo máximo entero.

Proposición: Si los valores del flujo inicial y las capacidades de los arcos de la red son enteros, F&F realiza a lo sumo F iteraciones, siendo F el valor del flujo máximo.

En esta red el flujo máximo es $F = 2M$. Si los caminos de aumento P de todas las iteraciones incluyen el arco $(v_2 \rightarrow v_3)$, $\Delta(P) = 1$ en toda iteración, debiendo hacer $F = 2M$ iteraciones.

Proposición: Si los valores del flujo inicial y las capacidades de los arcos de la red son enteros, F&F es $O(nmU)$, donde U es una cota superior para el valor de las capacidades.

Si no se especifica el orden en el que se eligen los arcos y vértices a marcar en el algoritmo de camino de aumento, el número de iteraciones de F&F, aún con capacidades enteras, puede ser no polinomial respecto del tamaño del problema.

Si las capacidades o el flujo inicial son números irracionales, F&F puede no parar (realizar un número infinito de pasos).

4.2 Análisis de Complejidad

Para analizar la complejidad del esquema de Ford-Fulkerson, es necesario acotar la cantidad de iteraciones que realiza el ciclo exterior. Para ello, nos valemus del siguiente teorema:

Teorema: Si las capacidades de una red $N = (V, E, u)$ cumplen $u(e) \in \mathbb{Z}$, el flujo máximo de N tiene también valores enteros, y el esquema de Ford-Fulkerson puede encontrar siempre un camino de aumento P con $\Delta(P) \in \mathbb{Z}$.

A partir de este teorema, se puede ver que, cuando las capacidades son enteras, el esquema de Ford-Fulkerson realiza como máximo F iteraciones: en cada paso, se encuentra un camino de aumento P que cumple $\Delta(P) \geq 0$ y $\Delta(P) \in \mathbb{Z}$, lo que implica que $\Delta(P) \geq 1$. Así, en a lo sumo F pasos, se llega a un flujo de valor F . Esto implica que la complejidad total del algoritmo es $O(|E| \cdot F)$, porque en cada iteración se realiza una búsqueda de un camino de aumento con DFS que toma $O(|E|)$.

Si los valores del flujo inicial y las capacidades de los arcos de la red son enteros, el método de Ford y Fulkerson es $O(nmU)$, donde U es una cota superior finita para el valor de las capacidades.

Demo : Si las capacidades están acotadas por un número finito U , la capacidad del corte $S = \{s\}$ es a lo sumo nU , y entonces el valor del flujo máximo es a lo sumo nU . Entonces, el algoritmo a lo sumo realiza nU iteraciones. Como el algoritmo de camino de aumento es $O(m)$, porque examina cada arco a lo sumo una vez, el orden total del algoritmo es $O(nmU)$.

4.3 Código C++

```
1 #include <iostream>
2 #include <limits.h>
3 #include <queue>
4 #include <string.h>
5 using namespace std;
6 #define V 6
7
8 bool bfs(int rGraph[V][V], int s, int t, int parent[]){
9     bool visited[V];
10    memset(visited, 0, sizeof(visited));
11    queue<int> q;
12    q.push(s);
13    visited[s] = true;
14    parent[s] = -1;
15
16    while (!q.empty()) {
17        int u = q.front();
18        q.pop();
19
20        for (int v = 0; v < V; v++) {
21            if (visited[v] == false && rGraph[u][v] > 0) {
22                if (v == t) {
23                    parent[v] = u;
24                    return true;
25                }
26                q.push(v);
27                parent[v] = u;
28                visited[v] = true;
29            }
30        }
31    }
32    return false;
33 }
34 int fordFulkerson(int graph[V][V], int s, int t){
35     int u, v;
36
37     int rGraph[V][V];
38     for (u = 0; u < V; u++)
39         for (v = 0; v < V; v++)
40             rGraph[u][v] = graph[u][v];
41
42     int parent[V];
43     int max_flow = 0;
44
45     while (bfs(rGraph, s, t, parent)) {
46         int path_flow = INT_MAX;
47         for (v = t; v != s; v = parent[v]) {
48             u = parent[v];
49             path_flow = min(path_flow, rGraph[u][v]);
50         }
51
52         for (v = t; v != s; v = parent[v]) {
53             u = parent[v];
54             rGraph[u][v] -= path_flow;
55             rGraph[v][u] += path_flow;
56         }
57
58         max_flow += path_flow;
59     }
60
61     return max_flow;
62 }
63
64 int main(){
65     int graph[V][V] = { { 0, 16, 13, 0, 0, 0 },
66     { 0, 0, 10, 12, 0, 0 }, { 0, 4, 0, 0, 14, 0 },
67     { 0, 0, 9, 0, 0, 20 }, { 0, 0, 0, 7, 0, 4 },
68     { 0, 0, 0, 0, 0, 0 } };
69
70     cout << "The maximum possible flow is "
71     << fordFulkerson(graph, 0, 5);
72     return 0;
73 }
```

5 Algoritmo de Edmonds y Karp

La diferencia principal entre Edmonds-Karp y Ford-Fulkerson es que Edmonds-Karp utiliza la búsqueda en anchura (*BFS*) para encontrar caminos de aumento, mientras que Ford-Fulkerson emplea la búsqueda en profundidad (*DFS*).

Esto significa que el tiempo de ejecución de Edmonds-Karp es más predecible que el de Ford-Fulkerson, ya que Edmonds-Karp no está afectado por el valor del flujo máximo.

5.1 Análisis de Complejidad

Dado un grafo con V vértices y E aristas, la complejidad temporal de Edmonds-Karp es:

$$O(V \cdot E^2).$$

Esto implica que Edmonds-Karp depende del número de vértices y aristas del grafo, pero no del valor del flujo máximo, como ocurre con Ford-Fulkerson.

a) Edmonds-Karp ejecuta *BFS*, cuya complejidad es:

$$O(E + V).$$

b) En el peor caso, asumimos un grafo denso, donde $|E| \in \Omega(|V|^2)$, y la complejidad de *BFS* se aproxima a:

$$O(E^2).$$

c) Durante la ejecución del algoritmo, se pueden encontrar hasta $V \cdot E$ caminos de aumento en el peor caso. El motivo es que cada arista en la red residual puede ser saturada, a lo largo del algoritmo, a lo sumo $\frac{|V|}{2}$ veces. Asimismo, cada vez que aumentamos el flujo, saturamos al menos una arista. Luego, el número de veces que podemos aumentar el flujo es a lo sumo $\frac{2|E||V|}{2}$. El $2|E|$ es porque la red residual tiene a lo sumo $2|E|$ aristas. Cada vez usamos $O(|E| + |V|)$ operaciones para buscar un camino de aumento, y como cada vértice tiene al menos una arista que entra y otra que sale, tenemos $|E| \geq 2|V|$, y esto es $O(|E|)$.

d) Dado que *BFS* se ejecuta una vez por cada camino de aumento, la complejidad total de Edmonds-Karp es:

$$O(V \cdot E \cdot E) = O(V \cdot E^2).$$

5.2 Código C++

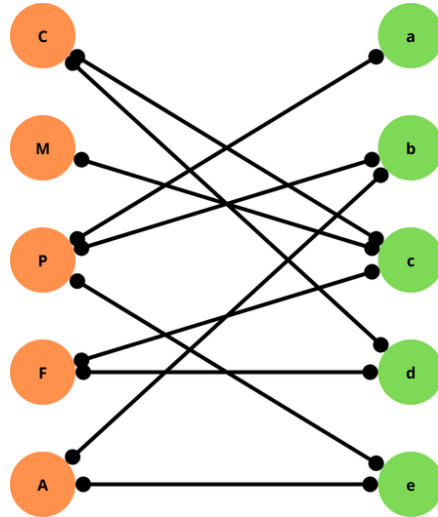
```
1 #include <iostream>
2 #include <climits>
3 #include <cstring>
4 #include <queue>
5 #include <vector>
6 using namespace std;
7 const int INF = INT_MAX;
8 const int MAX_V = 100;
9 int capacity[MAX_V][MAX_V];
10 int parent[MAX_V];
11
12 int bfs(int source, int sink, vector<vector<int>> &graph) {
13     fill(parent, parent + MAX_V, -1);
14     parent[source] = source;
15     queue<pair<int, int>> q;
16     q.push({source, INF});
17     while (!q.empty()) {
18         int current = q.front().first;
19         int flow = q.front().second;
20         q.pop();
21         for (int next : graph[current]) {
22             if (parent[next] == -1 && capacity[current][next] > 0) {
23                 parent[next] = current;
24                 int new_flow = min(flow, capacity[current][next]);
25                 if (next == sink)
26                     return new_flow;
27                 q.push({next, new_flow});
28             }
29         }
30     }
31     return 0;
32 }
33
34 int edmondsKarp(int source, int sink, vector<vector<int>> &graph) {
35     int max_flow = 0;
36     int new_flow;
37     while ((new_flow = bfs(source, sink, graph)) > 0) {
38         max_flow += new_flow;
39         int current = sink;
40         while (current != source) {
41             int prev = parent[current];
42             capacity[prev][current] -= new_flow;
43             capacity[current][prev] += new_flow;
44             current = prev;
45         }
46     }
47     return max_flow;
48 }
49
50 int main() {
51     int source = 0;
52     int sink = 5;
53     vector<vector<int>> graph(MAX_V);
54     capacity[0][1] = 10;
55     capacity[0][2] = 5;
56     capacity[1][2] = 15;
57     capacity[1][3] = 5;
58     capacity[2][3] = 10;
59     capacity[2][4] = 10;
60     capacity[3][4] = 5;
61     capacity[3][5] = 10;
62     capacity[4][5] = 10;
63     for (int i = 0; i < MAX_V; ++i) {
64         for (int j = 0; j < MAX_V; ++j) {
65             if (capacity[i][j] > 0) {
66                 graph[i].push_back(j);
67             }
68         }
69     }
70     int max_flow = edmondsKarp(source, sink, graph);
71     cout << "Maximum Flow: " << max_flow << endl;
72     return 0;
73 }
```

6 Matching Máximo en Grafos Bipartitos

El **Matching Máximo en Grafos Bipartitos** es una variantes del problema de flujo máximo. Miremos el ejemplo de la teórica del 1er cuatri 2021 de Paula Zabala :

Hay un conjunto de **cinco personas** y un conjunto de **cinco trabajos** para realizar. Sean las personas Carlos, Marcela, Pedro, Fernando y Andrea, y los trabajos a, b, c, d y e . Carlos está capacitado para realizar los trabajos c y d , Marcela para c , Pedro para a, b y e , Fernando para c y d , y Andrea para b y e . ¿Es posible realizar una distribución del trabajo de modo que se puedan realizar todos los trabajos simultáneamente?

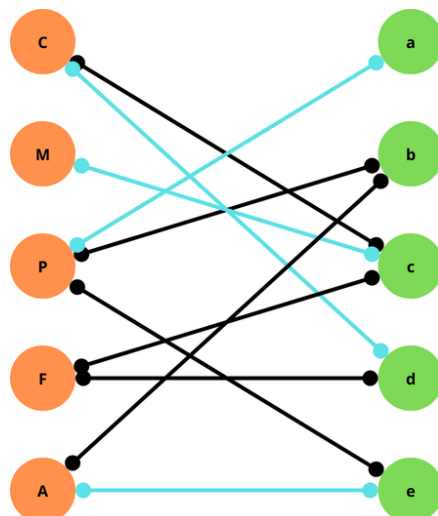
Podemos modelar el problema mediante un grafo $G = (V, X)$ donde el conjunto de vértices representa a las personas y los trabajos, y hacemos un vértice representando a una persona adyacente a los vértices correspondientes a los trabajos para los que está capacitado. Obtenemos el siguiente grafo:



Entonces, la idea es **realizar todos los trabajos simultáneamente** si se puede. Para lograrlo, vamos a querer **asignar exactamente 1 trabajo a cada persona** :

- Sólo Pedro puede hacer el trabajo a , entonces se lo asignamos.
- Marcela sólo puede hacer el c , no nos queda otra que asignárselo a ella.
- Carlos puede hacer c y d , pero el c ya no está dispo, así que le asignamos el d a Carlos.
- Fernando puede hacer c y d pero ambos ya fueron asignados. Por ello, se queda sin trabajo. Concluimos que no será posible realizar todos simultáneamente.
- Andrea puede realizar b o e y por tanto, le asignamos alguno de los 2. Concluimos que si bien todos simultáneamente no se pueden hacer, sí podremos hacer 4 simultáneamente.

Y lo representamos como sigue :



Definición :

Un **matching** o correspondencia entre los vértices de G , es un conjunto $M \subseteq E$ de aristas de G tal que para todo $v \in V$, v es incidente a lo sumo a una arista $e \in M$.

El problema de matching máximo consiste en encontrar un matching de cardinal máximo entre todos los matchings de G . Es decir, queremos encontrar un conjunto $M \subseteq E$ de aristas de G tal que la cantidad de elementos de M sea lo más grande posible.

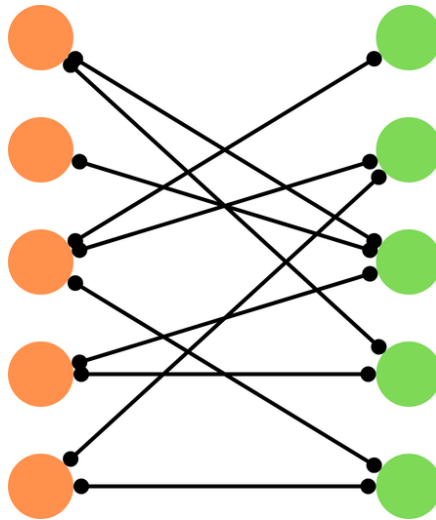
La joda es que en grafos bipartitos este problema se vuelve una variante de un problema de flujo máximo. Podemos llevarlo a un contexto con el que estamos más familiarizados que es :

Dado el grafo bipartito $G = (V_1 \cup V_2, E)$, definimos la siguiente red $N = (V', E')$:

- a) $V' = V_1 \cup V_2 \cup \{s, t\}$, con s y t dos vértices ficticios representando la fuente y el sumidero de la red.
- b) $E' = \{(i, j) : i \in V_1, j \in V_2, ij \in E\} \cup \{(s, i) : i \in V_1\} \cup \{(j, t) : j \in V_2\}$.
- c) $u_{ij} = 1$ para todo $ij \in E$.

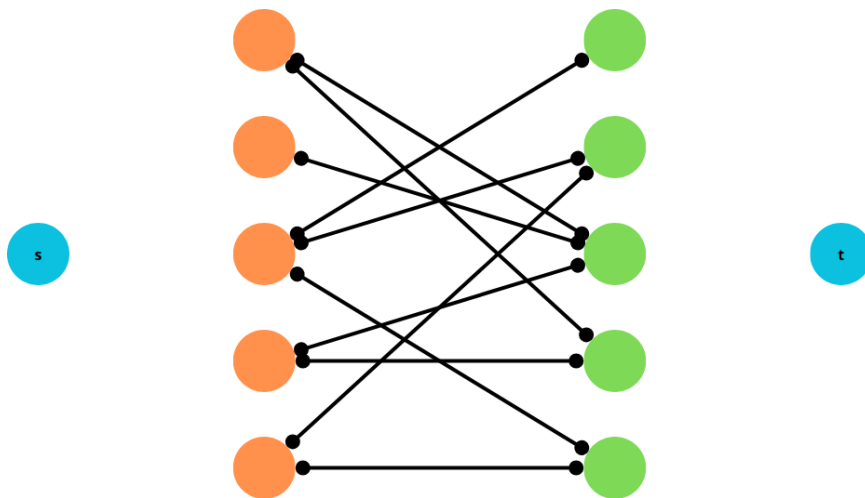
Esta es la definición formal, veamos punto por punto lo que significa esto.

$G = (V_1 \cup V_2, E)$ lo podemos pensar como este grafo, donde los vértices en **naranja** $\in V_1$ y aquellos vértices en **verde** $\in V_2$ y el conjunto de aristas E_G que conectan los vértices en $naranja \in V_1 \rightarrow verde \in V_2$:



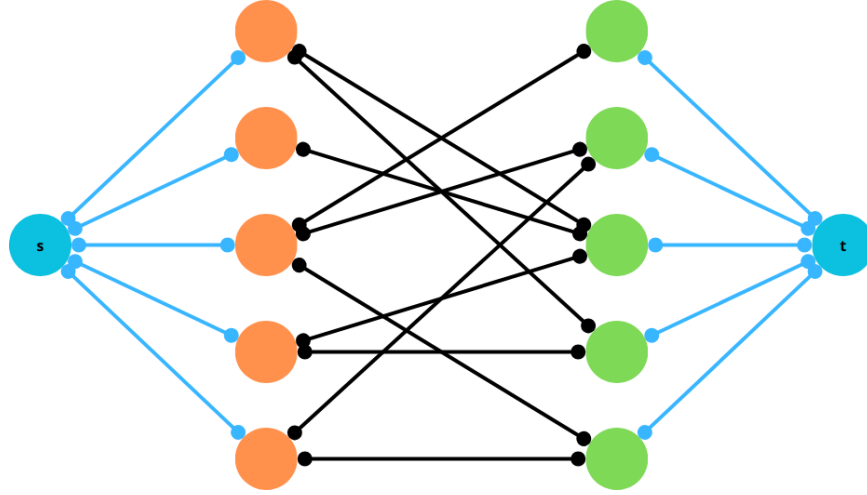
Definimos entonces la **red**:

- a) $V' = V_1 \cup V_2 \cup \{s, t\}$ donde s y t son la **fuentes** y **sumidero** de la red respectivamente:

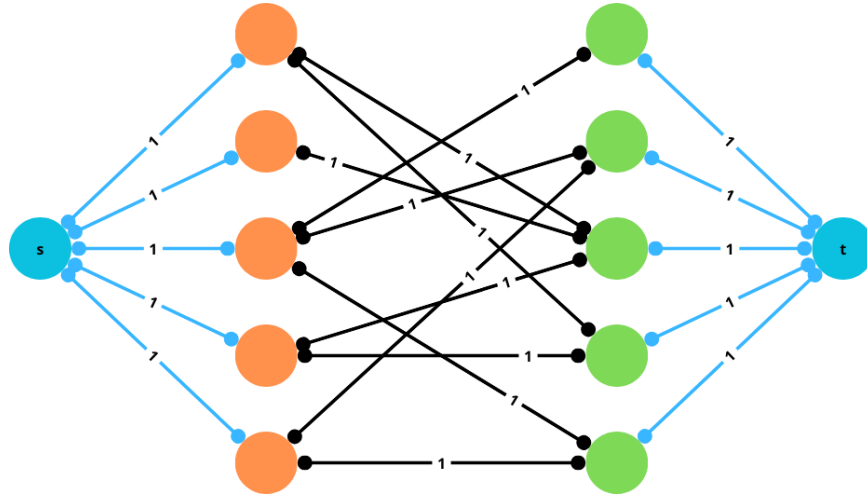


b) $E' = \{(i, j) : i \in V_1, j \in V_2, ij \in E\} \cup \{(s, i) : i \in V_1\} \cup \{(j, t) : j \in V_2\}$.

En otras palabras, el conjunto de aristas de la red estará formado por aquellas **aristas que conectan *naranja* $\in V_1 \rightarrow verde \in V_2$** , aquellas **aristas que conectan a la fuente con los vértices de la partición naranja**, es decir $s \rightarrow naranja \in V_1$ y las **aristas que conectan a la partición verde con el sumidero** $verde \in V_2 \rightarrow t$. Esquemáticamente:



c) Finalmente, $u_{ij} = 1$ para todo $ij \in E$ nos dice que tenemos limitada la **capacidad de flujo a una unidad** en todas las aristas de nuestra red.



El cardinal del matching máximo de G será igual al valor del flujo máximo en la red N .

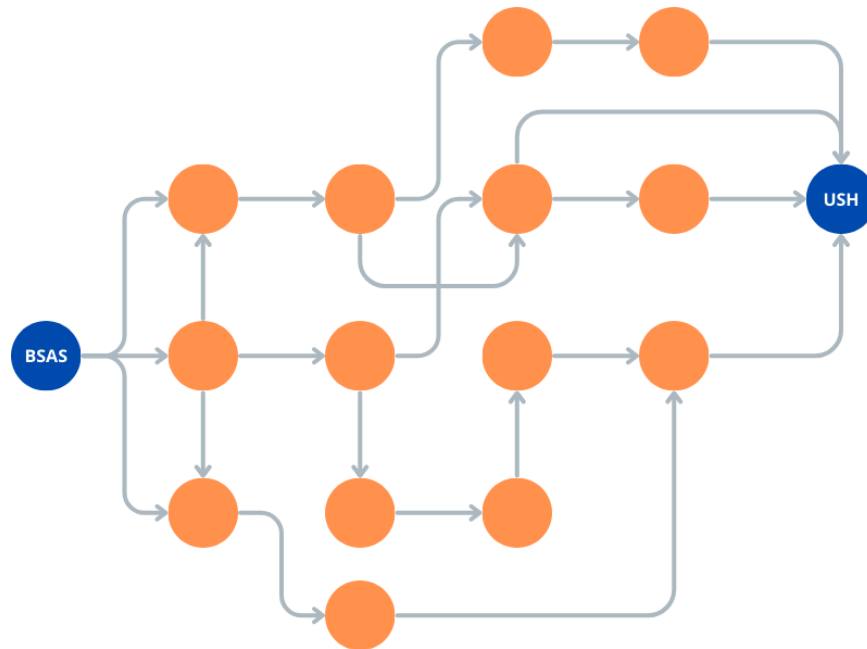
7 Caminos Disjuntos

El problema de Caminos Disjuntos es un problema que puede modelarse de cierta manera para llevarlo al contexto de un Problema de Flujo Máximo en una Red. Miremos el ejemplo de la Práctica :

La banda de “rock” de Pablo y Ramón ya está planeando sus años de éxito con múltiples giras nacionales. Su objetivo es planear muchas giras que terminen todas en Ushuaia, tocando en el medio por bares en todas las ciudades que les queden de camino. Tienen un mapa de los lugares donde podrían tocar, unidos por rutas unidireccionales.

Pero Pablo tiene miedo de que después de viajar por una ruta, los paparazzis se enteren de que pasan por ahí y los molesten la próxima vez que viajen, así que le interesa planear sus giras de forma de no usar nunca una ruta dos veces. ¿Cuántas giras distintas puede planear?

Supongamos el siguiente grafo :



7.1 Modelo

El modelo es el objeto que vamos a utilizar para dar solución al problema planteado. Es decir, es la estructura que, bajo ciertas condiciones que deberán ser demostradas, justifica la correctitud de nuestra solución. Como ya dijimos, tenemos que resolver el problema como si fuese un problema de flujo máximo ya que contamos con las herramientas para resolver este último.

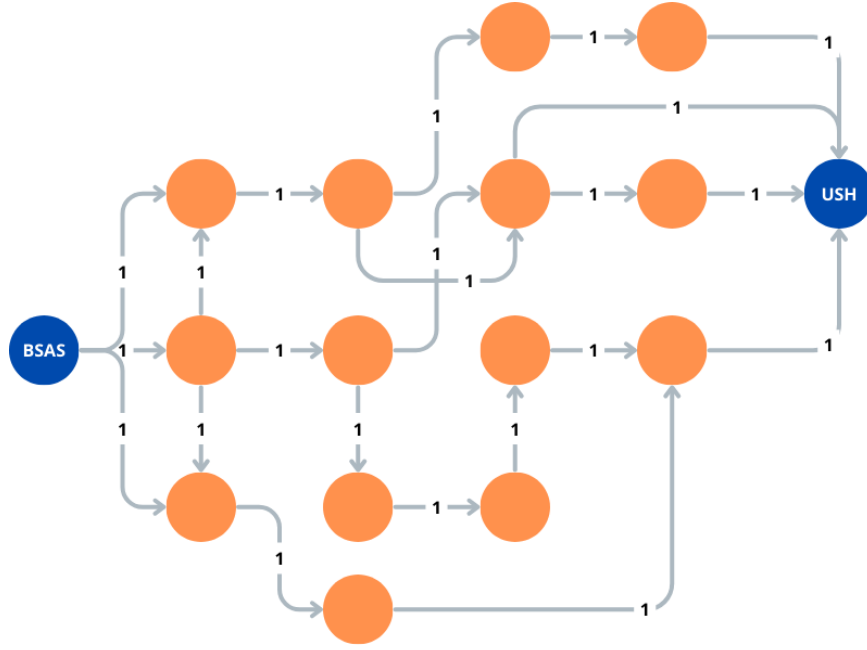
El modelo constará de 2 partes fundamentales, la **representación** y la **demonstración** de su validez.

7.1.1 Representación

La Representación es cómo construimos la **red** que representa el problema que tenemos que solucionar. Es decir, en el contexto de nuestro problema actual : **cómo representamos el camino de una ciudad a otra ? Cómo representamos que sólo podemos representar terminar en Ushuaia? Cómo podemos representar no usar la misma ruta dos veces?** entre otras cosas que nos podemos preguntar. Estas respuestas, formalmente se responden como sigue:

Sea $N = V, E, C$ donde

- $V = \{Ciudades\} \cup \{BSAS = fuente\} \cup \{USH = sumidero\}$
- $E = \{Rutas\}$
- $C = 1$ La capacidades de las Rutas será para todas 1 unidad de flujo.



7.1.2 Demostración

Ahora toca la parte peluda del asunto. Proponemos el Modelo como un modelo que resuelve el problema. Entonces presentamos la proposición:

F el valor de flujo máximo en $N \iff$ hay F caminos disjuntos que puede tomar la banda en G

** Aclaración : Tenemos dos mundos en la proposición, el de la red modelada y el del problema. La idea es poder demostrar que ambos mundos están conectados. Esa demo nos llevará a concluir que nuestro modelo es correcto.

\rightarrow) Cómo podemos afirmar que F cantidad de flujo implica que sean F caminos disjuntos ? Cómo la capacidad influye en esa "ecuación" ? Qué significa una unidad de flujo en nuestra red ? Todas estas preguntas nos van a poder formalizar la demostración. Que en general, en esta dirección de la demo ocurrirá por **construcción**. Esto es porque conocemos el modelo, estamos partiendo de él para inducir que vale este modelo para el problema que queremos resolver.

- La unidad de flujo en el modelo representa un camino desde $Bsas \rightarrow Ushuaia$.
- Como las capacidades de nuestros arcos en N son de capacidad 1, es decir, $\forall i, j$ con $i \neq j$ vale que $f(C_i \rightarrow C_j) = 1$, es decir, que ningún camino puede compartir aristas con otro. Siendo entonces cada camino disjunto de cualquier otro.
- Dicho esto, sea F un flujo válido en la red, F será la cantidad de caminos disjuntos de $Bsas \rightarrow Ushuaia$.

\leftarrow) Qué pasa en el mundo del problema de la banda ? Cómo están representados los caminos disjuntos, qué propiedades cumplen ? Cómo eso implica un flujo válido en nuestra red ?

- Los caminos que toma la banda son disjuntos, es decir, no comparten rutas entre ellos. Es decir que $\exists Q$ un conjunto de caminos disjuntos en donde cada $camino \in Q$ se representa como una secuencia de $ruta = (C_i \rightarrow C_j)$, sabemos que son disjuntos, por tanto, vale que $\forall i, j / i \neq j, \forall ruta, ruta \in camino_i \iff ruta \notin camino_j$. Que en la red esto es definir $f(C_i \rightarrow C_j) = 1$, y es factible ya que se cumple $0 \leq f(ruta) \leq c(ruta)$. Además, sabemos que el valor de flujo que circula por la ruta cumple :

$$f(C_i \rightarrow C_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i \rightarrow j) \in Q \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

- Como los caminos salen desde $Bsas$ y llegan a $Ushuaia$, tenemos control sobre la **conservación del flujo**, ya que vale que $\forall camino \in Q, camino = Bsas, \dots, Ushuaia$, entonces vale que para cualquier ciudad intermedia, si la banda paso por ella, salió de ella.
- Finalmente, la cantidad de caminos disjuntos que toma la banda es un flujo válido en la red N y la cantidad de flujo estará definida por la siguiente fórmula :

$$|f| = \sum_{c \in N_{out}(Bsas)} f(Bsas \rightarrow c)$$

7.2 Estrategias

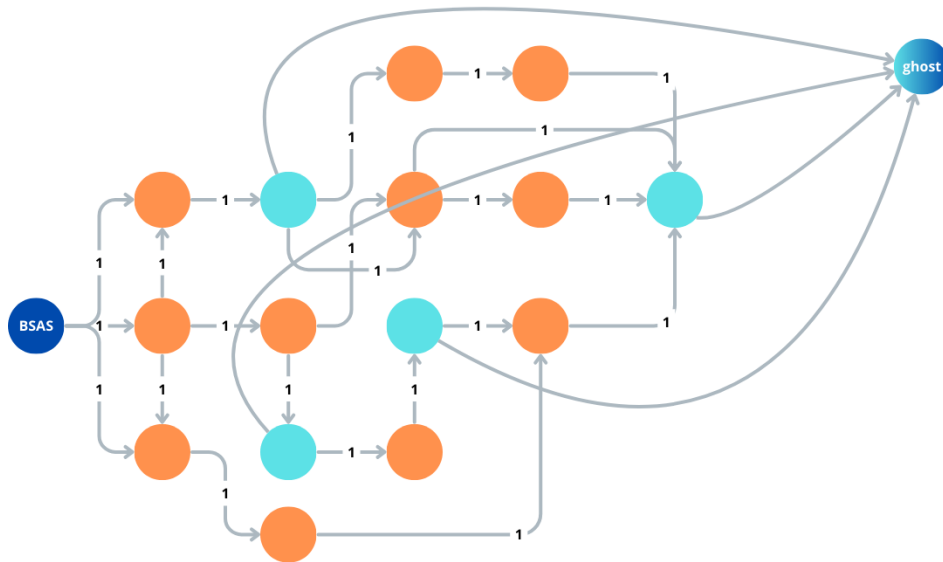
Existen una serie de trucos/**chichecitos** que nos ayudan a remodelar la red para que se pueda adaptar a una solución de estilo Flujo Máximo. Recordar que la idea siempre es **adaptar el grafo/red a alguna que corriendo los algoritmos conocidos nos de un resultado óptimo**. Esta noción es importante no sólo para flujo, sino para AGM y Recorrido Mínimo. Los algoritmos existentes que resuelven cierto problema **no hay que modificarlos**, la idea es llevar el mundo de nuestro problema al mundo del problema ya resuelto por ese algoritmo. Por qué ? Porque si nosotros modificamos el algoritmo hay que demostrar su correctitud (que es mucho más difícil que modelar el problema como un problema de esos que resuelve el algoritmo).

7.2.1 Nodo Fantasma (Múltiples Sumideros)

Para la parte b, el problema nos pide :

Ramón se queja de que la restricción de terminar en Ushuaia no tiene sentido y que solo lo estaban haciendo porque a Pablo le gusta la que manejaba el bar. Propone una nueva restricción: pueden terminar en cualquier capital provincial, así se pueden tomar un avión de vuelta más fácil. ¿Cuántas giras distintas pueden hacer ahora?

Vemos que ahora tenemos múltiples sumideros, la idea es simple, le conectamos a un nodo fantasma (nuevo sumidero) todas las ciudades en la cuales pueden terminar su gira.



Dicho esto :

- a) Cómo queda nuestro conjunto de vértices ?

$V = \{\text{Ciudades}\} \cup \{\text{Ciudades Capitales}\} \cup \{BSAS\} \cup \{ghost\}$ recordar que las redes de flujo sólo admiten una fuente y un sumidero.

- b) Cómo quedan nuestras aristas ?

$E = \{Rutas\} \cup \{\tilde{C} \rightarrow ghost / \tilde{C} \in \{\text{Ciudades Capitales}\}\} \cup \{BSAS \rightarrow C_i\}$

- c) Y las capacidades ?

Como ya vimos, las capacidades de las rutas quedan tal cual, limitadas a 1. Con respecto al nodo fantasma nos interesará definirle una capacidad ilimitada. Esto se debe a que pueden existir más de un camino que termine en una ciudad capital y que sigan siendo disjuntos, si limitamos a 1 camino disjunto por ciudad capital no estaríamos devolviendo un valor correcto para la resolución del problema.

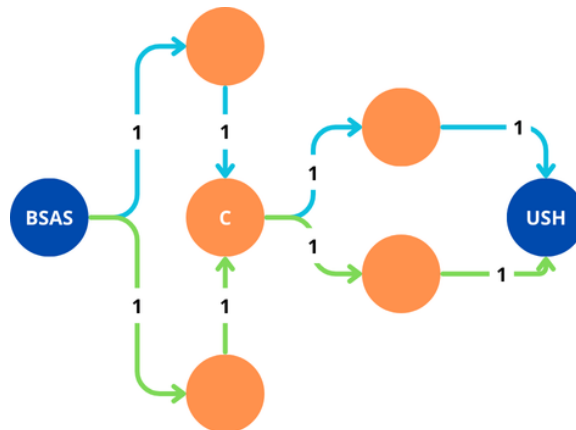
$$c(\tilde{C} \rightarrow ghost) = \infty$$

7.2.2 Limitar Flujo en cierto Vértice

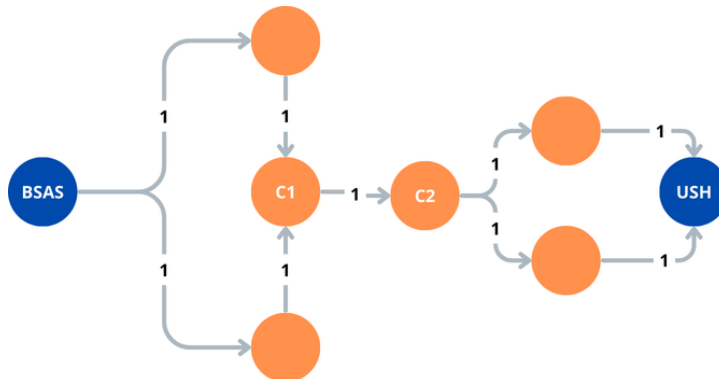
Para el siguiente inciso, nos piden :

Ceci, la manager de la banda, les informa que algunas de las ciudades intermedias donde piensan pasar son lugares de buen gusto, y, por la calidad de su música, una vez que tocan ahí no van volver a ser bienvenidos. Ahora la banda puede pasar a lo sumo una vez por cada ciudad de buen gusto.

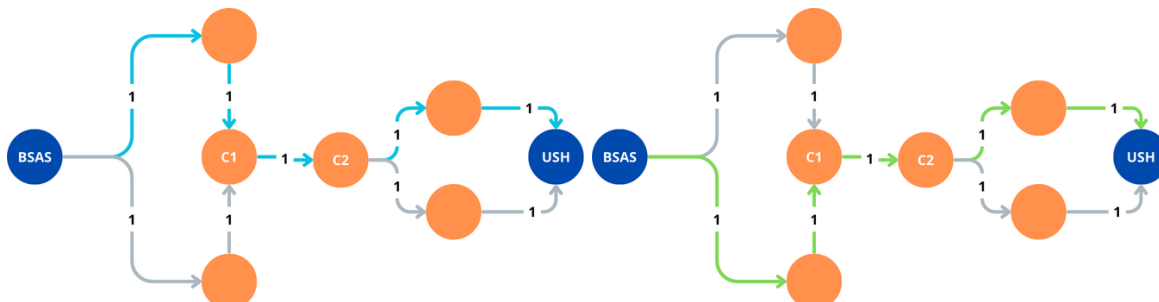
En este escenario, la restricción no sólo está sobre transitar una ruta una determinada cantidad de veces, **ahora se restringe la ciudad por la que pasamos**. Está bueno ponerse a pensar sobre qué cosas nos imponen una restricción para saber qué herramienta usar en cada caso. Como paréntesis de este ejercicio, si tenemos una restricción sobre el uso de la ruta dijimos que le limitamos la capacidad, si tenemos muchos sumideros, le mandamos todo ese flujo a uno sólo a lo nodo fantasma, y si tenemos restricciones sobre los vértices, tenemos que hacer uso de la estrategia que estamos por describir. Como vimos, ahora la limitación es la ciudad, veamos por qué antes no teníamos este problema :



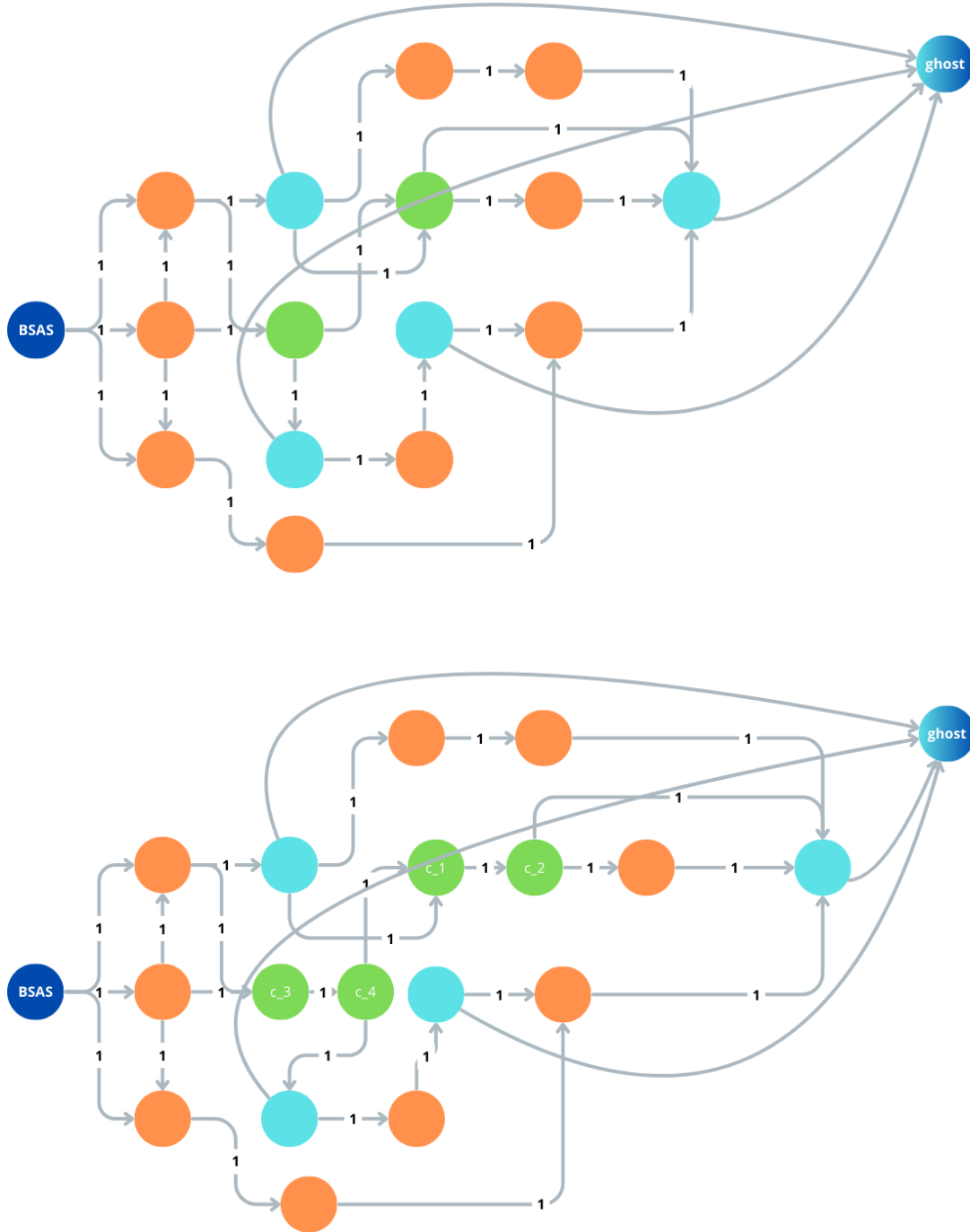
Esto en casos anteriores era totalmente válido. Tenemos dos caminos disjuntos que nos llevan de $BSAS \rightarrow USH$ y podíamos repetir la ciudad c sin problemas. Ahora, nos dicen que ya no. En la ciudad c son todos unos culeados que no quieren volverlos a ver a los muchachos. Entonces, frente a situaciones de este estilo, la manera es modelar algo de este estilo :



Cada nodo que deba cumplir cierta condición, en nuestro caso, las ciudades de los malaondas, hacemos el duplicado, mantenemos las capacidades de entrada y salida tal cuál estaban, porque ahora $c(C_1 \rightarrow C_2) =$ valor que nos pidan, en este caso, 1. Miremos entonces cómo se construiría el camino disjunto :



A todo esto le falta formalidad. Cómo le damos formalidad al asunto ? Recordemos que estamos en el inciso 3, por lo tanto, a lo visto hasta el 2 se le suma lo de este inciso. Nos quedaría un grafo de este estilo :



a) Qué pasa con los vértices del grafo ?

$$V = \{C_{-i} \in Malaondas\} \cup \{C_i \in Copados\} \cup \{\tilde{C} \in \text{Ciudades Capiales}\} \cup \{BSAS\} \cup \{ghost\}$$

b) Qué pasas con las aristas ?

$$E = \{(C_i \rightarrow C_j) / C_i \wedge C_j \in Copados\} \cup \{(\tilde{C} \rightarrow ghost) / \tilde{C} \in \{\text{Ciudades Capiales}\}\} \cup \{(BSAS \rightarrow C_i)\} \cup \{(C_{-i} \rightarrow C_{-j}) / C_{-i} \wedge C_{-j} \in Malaondas\} \cup \{(C_i \rightarrow C_{-j}) / C_i \in Copados \wedge C_{-j} \in Malaondas\} \cup \{(C_{-j} \rightarrow C_i) / C_{-j} \in Malaondas \wedge C_i \in Copados\}$$

c) Y las capacidades ?

$$\text{Le definimos a } c(C_{-i} \rightarrow C_{-j}) = 1 / C_{-i} \wedge C_{-j} \in Malaondas$$