Práctica Flujo en Redes

Tomás Felipe Melli

Noviembre 2024

Índice

1 Propiedades de los Flujos en Redes **2**
1.1 Ejercicio 1 2
1.1.1 Si la capacidad de cada arista de N es par $\implies$ el valor del flujo máximo es par 2
1.1.2 Si la capacidad de cada arista de N es par $\implies$ un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arista de N es par 2
1.1.3 Si la capacidad de cada arista de N es impar $\implies$ el valor del flujo máximo es impar. 3
1.1.4 Si la capacidad de cada arista de N es impar $\implies$ existe un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arista de N es impar. 3
1.1.5 Si todas las aristas de N tienen capacidades racionales $\implies$ el flujo máximo es racional 3
1.2 Ejercicio 2 3
1.3 Ejercicio 3 5
1.4 Ejercicio 4 5

2 Problemas de Modelado I : caminos disjuntos en un grafo **6**
2.1 Ejercicio 5 6

3 Problemas de Modelado II : asignación **6**
3.1 Ejercicio 6 6
3.2 Ejercicio 7 7

4 Problemas de Modelado III : transporte de objetos **9**
4.1 Ejercicio 10 9
4.2 Ejercicio 11 10

5 Flujo Máximo de Costo Mínimo **10**
5.1 Ejercicio 12 10

1 Propiedades de los Flujos en Redes

1.1 Ejercicio 1

1.1.1 Si la capacidad de cada arista de N es par $\implies$ el valor del flujo máximo es par

Esta proposición es VERDADERA.
Cómo podemos relacionar la capacidad de cada arco de una red con el valor de flujo máximo ? Esta dualidad se resume en :
Un corte $C = (S, T)$ es una partición de los vértices de G en dos conjuntos disjuntos tal que $S \cup T = V$, $s \in S$ y $t \in T$.

$$\min_{(S,T)} \sum_{u \in S, v \in T} c(u, v) = \max |f|$$

Como sabemos que las capacidades son pares :

$$\min_{(S,T)} \sum_{u \in S, v \in T} c(u, v) \equiv 0 \pmod 2$$

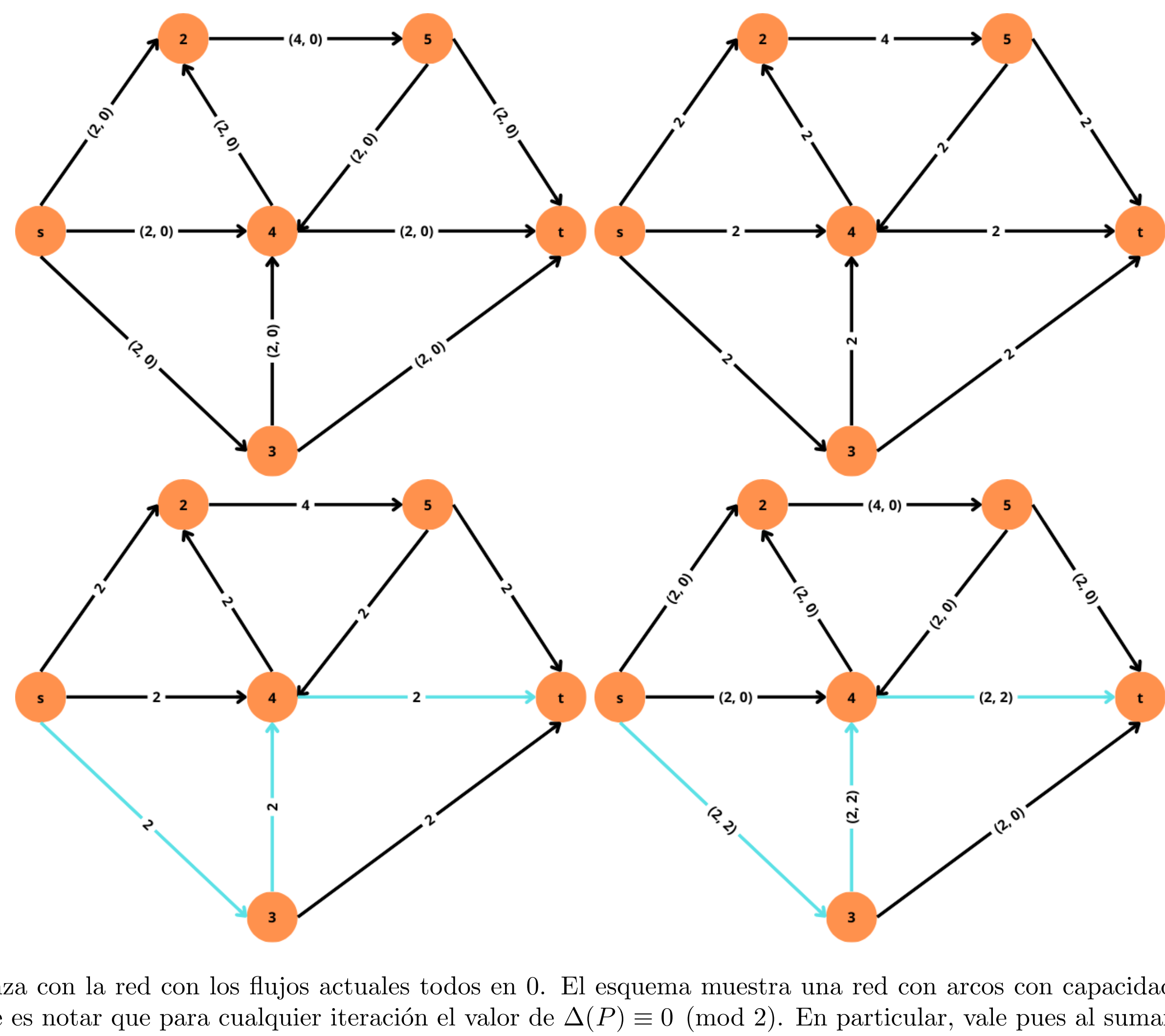
Vale que :

$$\max |f| \equiv 0 \pmod 2$$

Como se quería probar.

1.1.2 Si la capacidad de cada arista de N es par $\implies$ un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arista de N es par

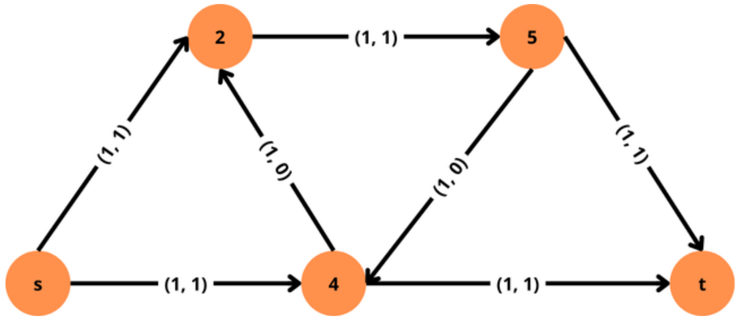
Esta proposición es VERDADERA.
Para demostrar que esto vale, miremos cómo el algortimo de Ford Fulkerson construye su solución :
**Ejemplo tomado del Resúmen de Flujo:



Comienza con la red con los flujos actuales todos en 0. El esquema muestra una red con arcos con capacidades pares, lo importante es notar que para cualquier iteración el valor de $\Delta(P) \equiv 0 \pmod 2$. En particular, vale pues al sumar/restar este valor de $\Delta(P)$ la paridad se mantiene.

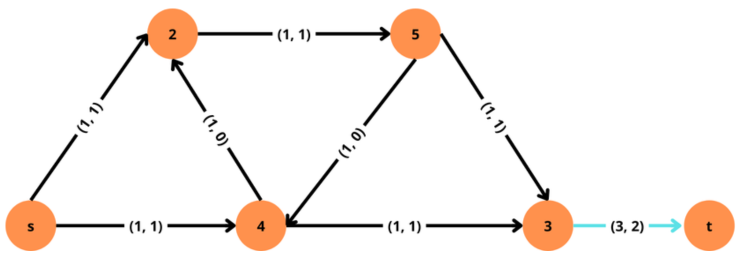
1.1.3 Si la capacidad de cada arista de N es impar $\implies$ el valor del flujo máximo es impar.

Esta proposición es FALSA.
Contraejemplo :



1.1.4 Si la capacidad de cada arista de N es impar $\implies$ existe un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arista de N es impar.

Esta proposición es FALSA.
Contraejemplo :



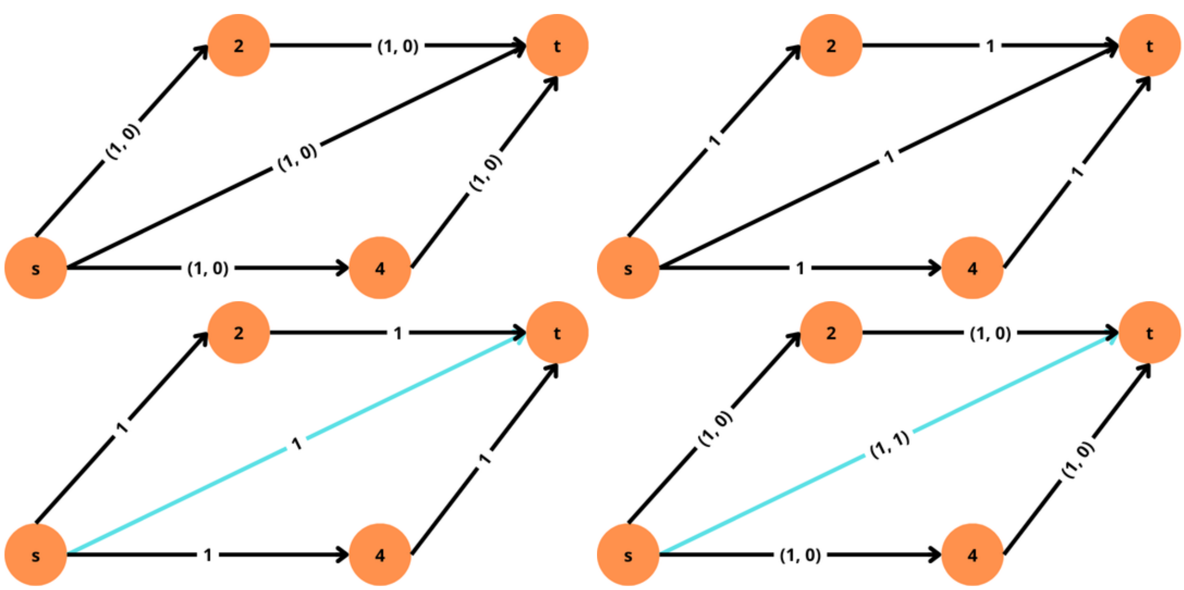
1.1.5 Si todas las aristas de N tienen capacidades racionales $\implies$ el flujo máximo es racional

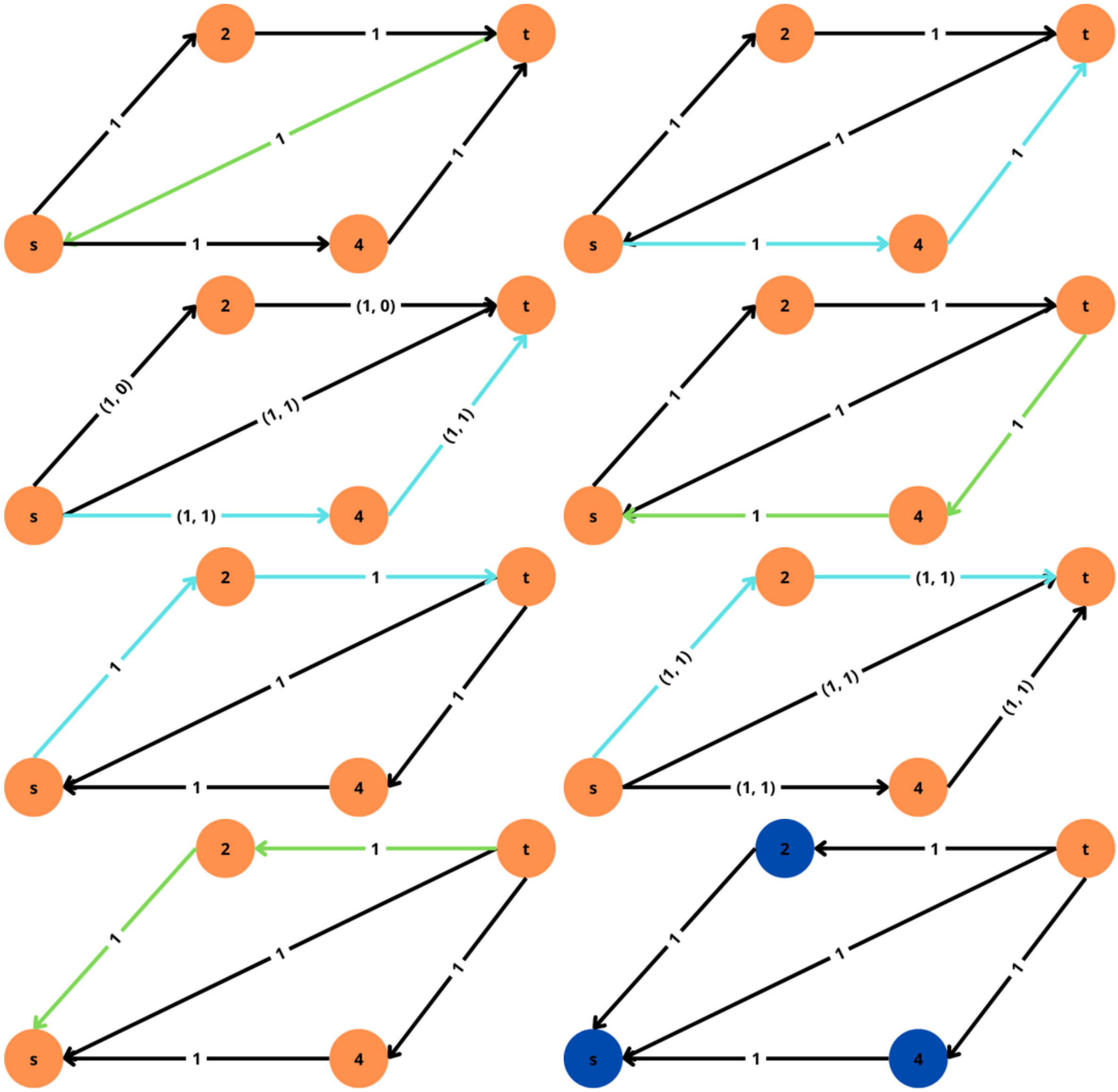
Esta proposición es VERDADERA.
Esto vale por lo que hablamos durante las iteraciones en Ford-Fulkerson. Cuando $\Delta(P) \in Q$. El flujo máximo f es la suma de estos incrementos racionales a lo largo de todas las iteraciones, y como la suma de números racionales es racional, concluimos que el flujo máximo f es un número racional.

1.2 Ejercicio 2

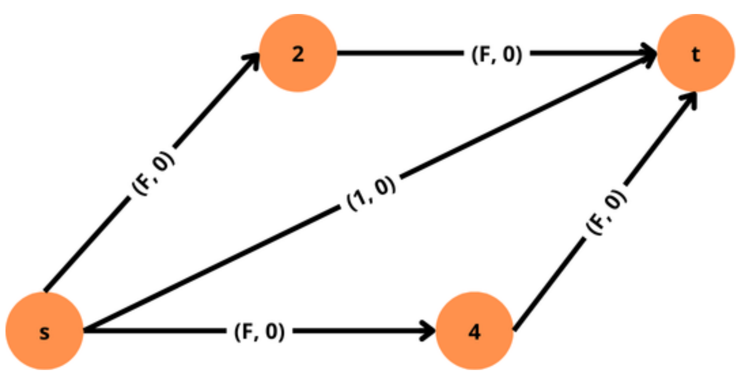
Para todo $F \in N$, construir una red con 4 vértices y 5 aristas en la que el método de Ford y Fulkerson necesite F iteraciones en el peor caso para obtener el flujo de valor máximo, partiendo de un flujo inicial con valor 0.

Miremos un caso :





Para el caso general :



1.3 Ejercicio 3

Determinar la complejidad del algoritmo de Edmonds y Karp para encontrar el flujo máximo de una red N cuando:

a) no hay información acerca de las capacidades de las aristas de N.

b) todas las aristas de N tienen capacidad a lo sumo $q \ll n$.

c) el flujo máximo de N tiene un valor $F \ll mn$.

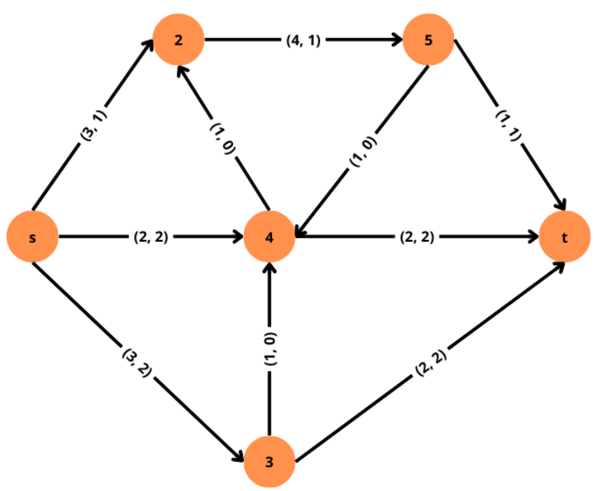
a) Recordemos que EK utiliza BFS para recorrer cada camino de aumento. El tema es que si no tenemos info sobre las capacidades, en particular no sabemos si el valor de flujo máximo en la red será alto o bajo. Esto nos interesa porque si se trata de un valor chico, corremos BFS menos veces que si el valor es muy grande y necesitamos recorrer **todos los caminos de aumento** de la red residual. Dicho esto, corremos BFS de complejidad lineal el mínimo entre F y la cantidad de caminos de aumento - veces. $O(E \cdot \min(F, V \cdot E))$

b) Si la capacidad de todas las aristas es un número bajo, no conocemos a prior si la cantidad de aristas es alto o si el valor de Flujo lo es. Por tanto, sabemos que el peor caso para Edmonds-Karp es $O(E \cdot E \cdot V)$
**La razón está en el resúmen de Flujo (hablamos del porqué la cantidad de caminos de aumento en una red residual está acotada por este número)

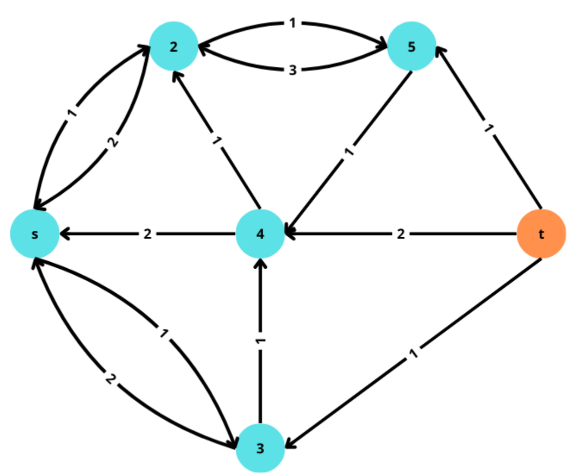
c) Si sabemos que el flujo es mucho más chico que la cantidad de caminos de aumento en la red, podemos intuir que se alcanzará en F-BFSs. Por tanto, $O(E \cdot F)$

1.4 Ejercicio 4

Proponer un algoritmo lineal que, dada una red N y un flujo de valor máximo, encuentre un corte de capacidad mínima de N.
Qué tenemos ? La red con el valor de flujo máximo :



Hacemos la red residual que le corresponde : $O(E)$



Corremos BFS desde s y todos los vértices alcanzables $\in S$ al corte de capacidad mínima. $O(E + V)$

2 Problemas de Modelado I : caminos disjuntos en un grafo

2.1 Ejercicio 5

Sea G un dígrafo con dos vértices s y t.

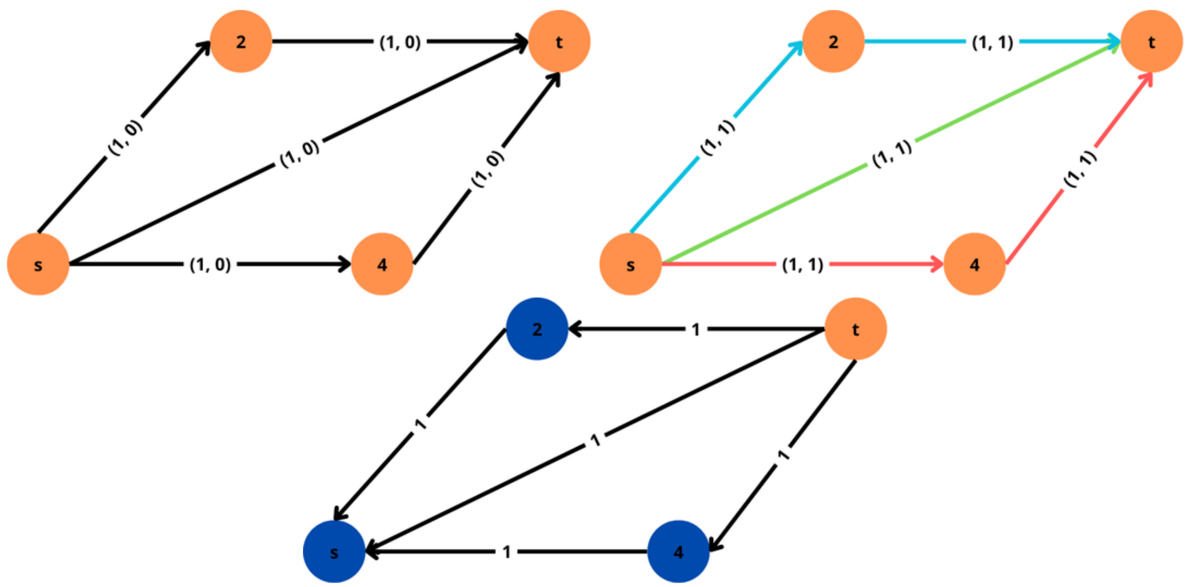
a) Proponer un modelo de flujo para determinar la máxima cantidad de caminos disjuntos en aristas que van de s a t.

b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

c) Demostrar que el modelo es correcto.

d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

a) y b) El modelo es : cada unidad de recurso transportado a través de la red representa un camino disjunto. La idea es limitar la capacidad de cada nodo a 1 unidad (sólo pueden pertenecer a un camino) esto nos garantiza que en la red residual apunten (los arcos) para el otro lado y en la búsqueda de caminos de aumento quede inhabilitado (o en caso de no ser una buena decisión en el momento en el que se satura, se resta e invierte nuevamente para ser considerado en otro momento). Reutilizamos la red del ejercicio 2 1.2 :



c) Te la debo.

d) La complejidad d EK para resolver este ejercicio es $O\left(E^2 \cdot V\right)$

3 Problemas de Modelado II : asignación

3.1 Ejercicio 6

En el pueblo de Asignasonia las fiestas de casamiento son muy peculiares y extrañamente frecuentes. Las invitaciones a la fiesta nunca son personales sino familiares: cada persona invitada asiste siempre con todes sus familiares solteros, a quienes se les reservan mesas especiales de solteros. Además, hay una regla no escrita que establece un límite c_{ij} a la cantidad de solteros de la familia i que pueden sentarse en la mesa j. Esta forma de festejar es la que, aparentemente, aumenta la cantidad de casamientos futuros. Desafortunadamente, el esfuerzo que implica mantener viva esta tradición está llevando a que varias parejas eviten el compromiso marital. Es por esto que la intendencia de Asignasonia requiere un algoritmo que resuelva el problema de asignación de les solteros a sus mesas.

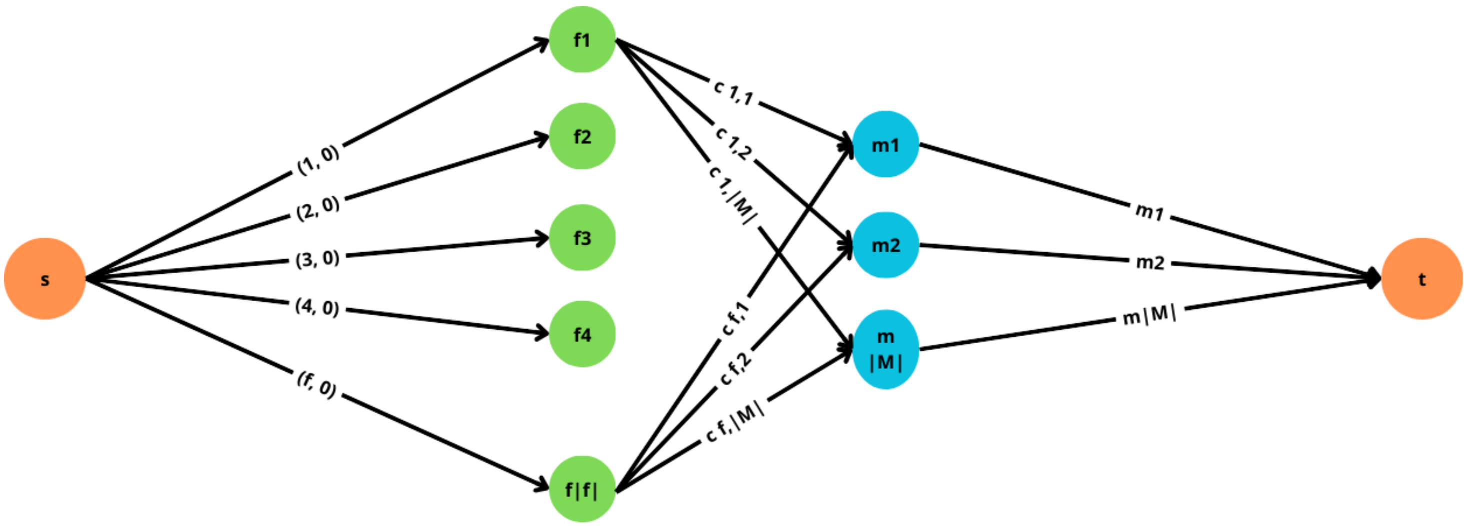
a) Proponer un modelo de flujo que, dados los conjuntos $F = \{f_1, \ldots, f_{|F|}\}$, $M = \{m_1, \ldots, m_{|M|}\}$ y $C = \{c_{ij} \mid 1 \leq i \leq |F|, 1 \leq j \leq |M|\}$, determine una asignación que respete las tradiciones sabiendo que:

- La familia i está formada por f_i personas solteras,
- La mesa j tiene m_j lugares disponibles para solteros, y
- En la mesa j solo pueden sentarse c_{ij} solteros de la familia i.

b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

c) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

a) y b) Se nos ocurre pensar lo siguiente : cada familia f_i tiene $capacidad - i$ es decir, se restringe la cantidad de solteros que pueden asistir al casamiento. Como la mesa j tiene m_j lugares disponibles y sólo pueden sentarse c_{ij} solteros de la familia i, le definimos a los arcos $f_i \to m_i$ la capacidad c_{ij} y luego, a los arcos $m_i \to t$ capacidad m_j que representa los lugares disponibles en la mesa j.



c) Si corremos EK en esta red :

$$O\left(V \cdot E^2\right)$$

La cantidad de arcos que tenemos es :

- $|F|$ que salen de la fuente : $s \to f_i$.
- $|F| \times |M|$ son las potenciales asignaciones que tienen los solteros de cada familia. $f_i \to m_i$.
- $|M|$ los arcos que definen la capacidad de cada mesa m_i que confluyen al sumidero. $m_i \to s$.

La cantidad de vértices que tenemos es : **fuente + sumidero + Familias + Mesas**

$$O\left((|F| + M) \cdot (|F| \cdot |M|)^2\right)$$

3.2 Ejercicio 7

Sean $r_1, \ldots, r_m$ y $c_1, \ldots, c_n$ números naturales. Se quiere asignar los valores de las celdas de una matriz de $m \times n$ con números naturales de forma tal que la i-ésima fila sume r_i y la j-ésima columna sume c_j.

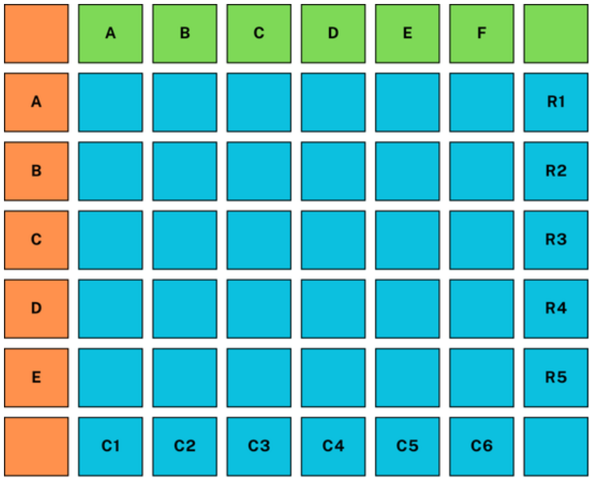
a) Modelar el problema de asignación como un problema de flujo.

b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

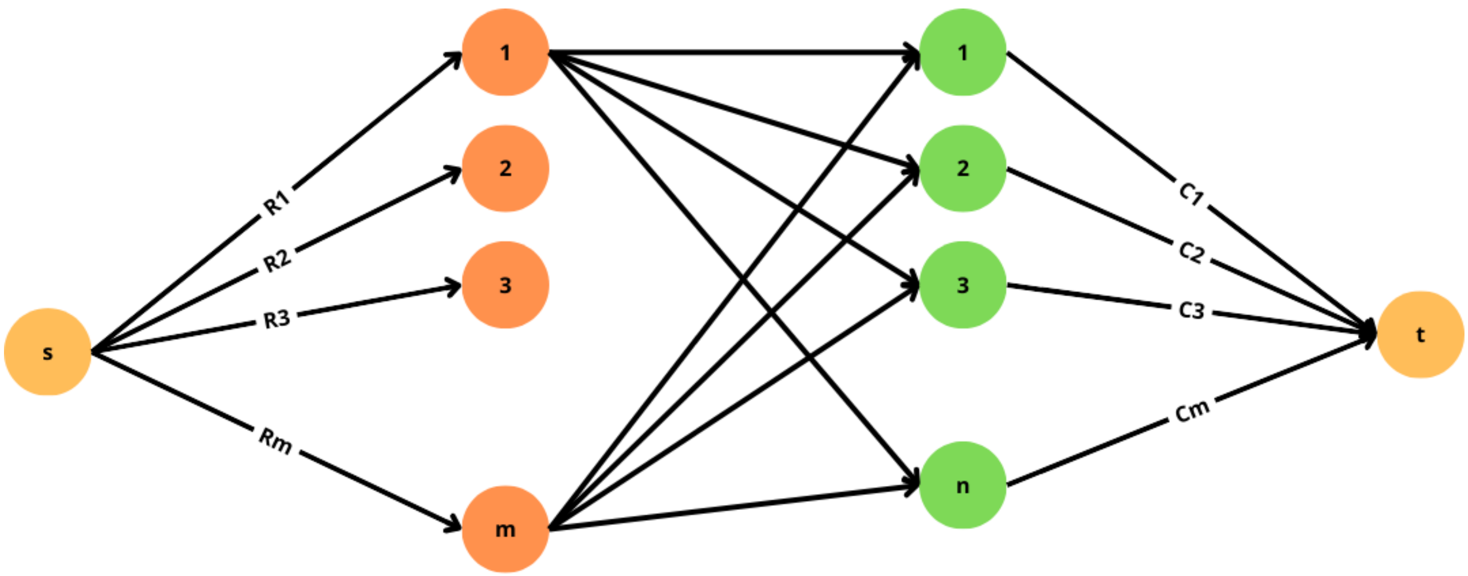
c) Demostrar que el modelo es correcto.

d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

a) Supongamos la siguiente Matriz :



Nosotros queremos asignar a los casilleros disponibles cierto número natural. Como se trata de un problema de asignación, vamos a querer definir una **capacidad** para las columnas y otra para las filas. Como se ve en este esquema :



Vemos entonces que $s \to r_i$ tiene capacidad r_i ya que no debe superarse esa cota en la suma de la fila. Análogamente, vemos la restricción en las columnas donde las capacidades de $c_i \to t$ están acotadas por c_i. Pero qué pasa con las capacidades de los arcos $r_i \to c_i$? No hay drama, puede ser un número gigante, en realidad, conviene que sea gigante ya que las restricciones están sobre las filas y las columnas, no sobre los valores de los casilleros.

b) Ya hablamos de restricciones. Qué unidad de recurso transportan estos arcos ? 1 unidad que representa un número natural que se suma al valor del casillero.

c) Hay que demostrar.

d) Si corremos EK en esta red :

$$O\left(V \cdot E^2\right)$$

La cantidad de vértices en la red es : **fuente** + **sumidero** + **filas** + **columnas**.
La cantidad de arcos en la red es : $s \to r_i$ + $r_i \to c_i$ + $c_i \to t$, es decir $m \times n$ arcos.

$$O\left((m+n) \cdot (m \times n)^2\right)$$

4 Problemas de Modelado III : transporte de objetos

4.1 Ejercicio 10

En la próxima cumbre internacional de cuestiones importantes se recibirán periodistas de todo el mundo en un hotel que antaño era moderno pero hoy es simplemente lujoso y antiguo. Como antes no se usaban muchos artefactos eléctricos, solo algunos tomacorrientes de cada tipo fueron instalados en la sala de la cumbre. El tiempo pasó y los artefactos eléctricos se empezaron a utilizar mucho más, además de que surgieron nuevos tipos de tomacorrientes. Antes de que comience la cumbre, se recolectó la información de los dispositivos que van a traer les periodistas a fin de adquirir los adaptadores necesarios, los cuales se comprarán en un fabricante particular. Cada adaptador de este fabricante tiene una forma de entrada y una forma de salida. Estos adaptadores se pueden encadenar tanto como se quiera, lo cual es bueno porque la fábrica no vende todos los tipos de adaptadores existentes. Por suerte, sí tienen la posibilidad de fabricar una cantidad ilimitada de los adaptadores que venden.

a) Proponer un modelo de flujo para minimizar la cantidad de dispositivos que se quedan sin corriente eléctrica sabiendo:
   - que les periodistas traerán d_i dispositivos que usan un tomacorrientes de cada tipo i,
   - que la sala principal tiene t_i tomacorrientes de cada tipo i,
   - cuáles son los pares ij de entradas y salida de los adaptadores vendidos por la fábrica.

b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

c) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

4.2 Ejercicio 11

Una de las aficiones de Carle en su juventud fue la colección de figuritas en el colegio. Junto a sus compañeros compraban paquetes de figuritas de "Italia 90" para conocer a las estrellas del momento. Cada paquete traía cuatro figuritas a priori desconocidas, razón por la cual Carle y sus compañeros tenían figuritas repetidas después de algunas compras. Para completar el álbum más rápidamente, Carle y sus compañeros intercambiaban figuritas a través del protocolo "late-nola". Este protocolo consiste en que cada una de dos personas intercambian una figurita que tienen repetida por una que no poseen aún. Siendo tan inteligente, Carle pronto se dio cuenta de que le podía convenir intercambiar algunas de sus figuritas por otras que ya tenía, a fin de intercambiar estas últimas. De esta forma, si Carle ya tenía copias de una figurita, igualmente podía conseguir copias adicionales para intercambiar con otros compañeros que no tuvieran la figurita.

a) Proponer un modelo de flujo máximo para maximizar la cantidad de figuritas no repetidas que Carle puede obtener a través del intercambio con compañeros, teniendo en cuenta las siguientes observaciones:

   - Carle conoce todas las figuritas repetidas (y la cantidad de repeticiones) de cada compañero.
   - Todos los compañeros intercambian primero con Carle, antes de intercambiar entre ellos.
   - Todos los compañeros utilizan el protocolo "late-nola" para intercambiar con Carle, mientras que Carle ya sabe que le podría convenir obtener figuritas que ya tiene.

b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

c) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

5 Flujo Máximo de Costo Mínimo

5.1 Ejercicio 12

Una red con costos es una red en la que cada arista e tiene una capacidad $c(e)$ y un costo $q(e) \geq 0$. Dada una red con costos N, el problema de flujo máximo con costo mínimo consiste en encontrar el flujo máximo f que minimice

$$\sum_{e \in E(N)} f(e) \cdot q(e).$$

a) Demostrar que el algoritmo de Ford y Fulkerson, en el que el camino de aumento elegido tiene costo mínimo, encuentra un flujo máximo de costo mínimo.

b) Determinar qué algoritmo se utiliza para elegir el camino de aumento.

c) Calcular la complejidad del algoritmo resultante, teniendo en cuenta que el algoritmo requiere a lo sumo $O(nU)$ iteraciones, donde $U = \max_{e \in E(N)} c(e)$.